

## МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРИБОРА ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ТОЛЩИНЫ ПОКРЫТИЯ ВАЛКОВ НА ПРОКАТНЫХ СТАНАХ

*Донецкий национальный технический университет*

*В данном докладе рассматриваются основные принципы построения и математического исследования толщиномера покрытий. Приведён математический анализ составного рабочего вала, являющегося объектом измерений.*

*Ключевые слова: составной рабочий валок, схема нагружения, волновое уравнение, преобразование акустического сигнала, математическая модель.*

*This report reviews the basic principles and mathematical study of the thickness of coatings. The mathematical analysis of a composite work roll, which is the object of measurement.*

*Key words: composite work roll, load distribution, wave equation, the transformation of the acoustic signal, a mathematical model.*

**Актуальность.** Проблема быстрого износа рабочих валков вызвала необходимость увеличения прочности их поверхностного слоя в связи с тем, что они испытывают термический удар и большие знакопеременные нагрузки в процессе проката. На рабочую поверхность валков влияют множество факторов – давление металла на валки, скорость прокатки, коэффициент трения скольжения, температурный режим валков, условия смазки полосы и охлаждения валков, условия натяжения полосы при прокатке и т.д. Они являются решающими факторами определяющими качество продукции, производительность и экономическую эффективность работы станов.

**Постановка задачи исследования.** Целью данной статьи является математический анализ условий работы составного рабочего вала, определение параметров его нагруженности, математическое исследование возможности применения явления пьезоэффекта для определения толщины покрытия рабочего вала, а также математическая интерпретация предварительной обработки акустического сигнала для распознавания акустических образов.

**Основные положения.** Для начала определим, в каких условиях работает бандажированный рабочий валок. Для этого необходимо определить контактные напряжения на посадочной поверхности бандажа и оси.

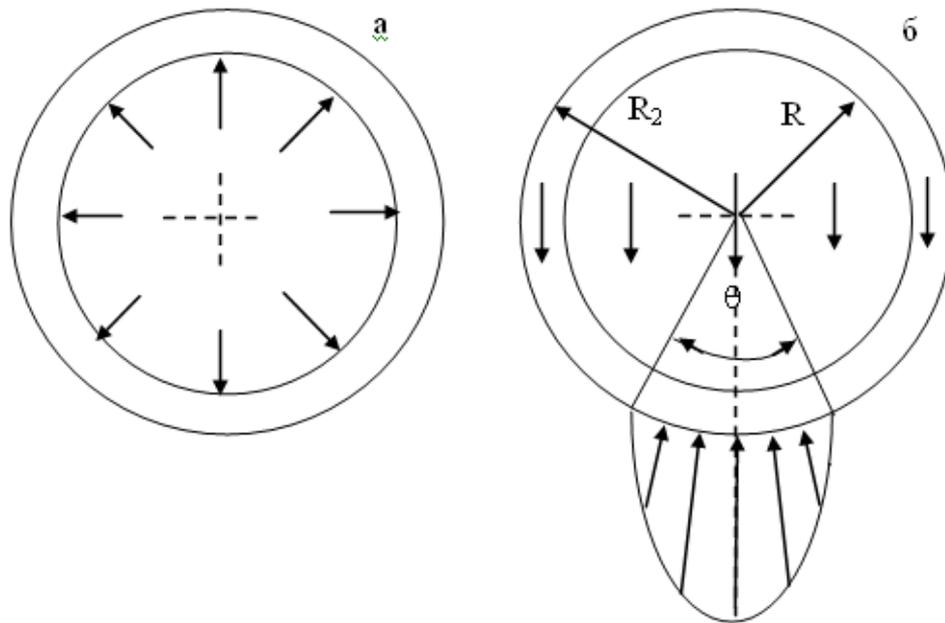


Рис.1. Расчётные схемы нагружения бандажа:  
а – от натяга, б – от усилия прокатки

Область бандажа обозначим через  $S_2$ , а область вала через  $S$ . Радиус поверхности сопряжения после сборки обозначим  $R$ , а внешний радиус бандажа  $R_2$  (рис.1). На внешнем контуре бандажа  $C_2$  приложена сила  $P$ , равная по величине давлению металла на валки  $P_0$ . Принимая  $P=P_0$ , имеем систему сил, находящихся в равновесии. Посадочная поверхность образует контур  $C$  [1].

При решении задачи напряжения удобно определять в полярных координатах. Необходимо определить:

$s_r$  – радиальные напряжения;

$s_q$  - тангенциальные (окружные) напряжения;

$t_{r,q}$  - касательные напряжения.

Вычисления компонентов напряжений обычно весьма громоздки в общем виде и в расчетах. Используя метод Н.И. Мусхелишвили применительно к поставленной задаче и выполняя решение аналогично приведенного в работе [2] определяются напряжения на посадочной поверхности бандажа в виде формул, удобных для численной реализации [3]. Окончательные выражения имеют вид:

$$s_r = \frac{P}{2pR} \sin a \left[ (3-n^2)h + n(n^2-1)(h^2-g^2) - \cos(a-q) - \frac{1}{n} \right] + \frac{P_0 [2-n^2(c+3)]}{2pR \cdot n^2(1+c)} \sin q + \frac{2P}{1+c} \cdot \frac{R^2}{R_2^2} (1-n^2), \quad (1)$$

$$s_q = \frac{P}{2pR} \sin a \left[ (1-n^2)h - n(n^2-1)(h^2-g^2) - \cos(a-q) - \frac{1}{n} \right] - \frac{P_0 [6+n^2(c-1)]}{2pR \cdot K^2(1+c)} \sin q + \frac{2}{1+c} \cdot \frac{R^2}{R_2^2} (1+n^2) \quad (2)$$

$$t_{rq} = \frac{P}{2pR} \sin a [(1-n^2)g - 2n(1-n^2)hg - \sin(a-q)] + \frac{P_0 [2+n^2(c-1)]}{2pR \cdot n^2(1+c)} \sin q, \quad (3)$$

где  $P=P_0$  – удельная нагрузка на единицу длины бандажа от внешней силы;  
 $R$  – радиус контактной поверхности;

$h$  и  $g$  – просуммированные в замкнутом виде ряды, отражающие особенность решения в зонах точек приложения сосредоточенных сил  $P$  и позволяющие улучшить сходимость рядов:

$$h = \frac{n - \cos(a-q)}{1 - 2n \cos(a-q) + n^2} = \frac{n + \sin q}{1 + 2n \sin q + n^2}, \quad (4)$$

$$g = \frac{\sin(a-q)}{1 - 2n \cos(a-q) + n^2} = \frac{\cos q}{1 + 2n \sin q + n^2}, \quad (5)$$

$q$  - угловая координата точек контура С;

$\chi$  - постоянная Мусхелишвили:

$$c = \frac{3-m}{1+m}, \quad (6)$$

$m=0,3$  - коэффициент Пуассона;

$a$  - угол, отсчитываемый от оси  $x$ , до точки приложения силы  $P$ ;

$n=R_2/R$  – коэффициент, характеризующий толщину бандажа.

Последние слагаемые в формулах (1) и (2) представляют собой составляющие напряжений, зависящие от натяга. Тогда радиальные и тангенциальные напряжения в составном валке определяются из двух компонентов, из напряжений, вызванных натягом и нормальной нагрузкой:

$$S_r = S_{rp} + S_{r\Delta}, \quad (7)$$

$$S_q = S_{qp} + S_{q\Delta}, \quad (8)$$

Нормальные напряжения от натяга определяются по формуле (5):

$$S_{r\Delta} = \frac{R^2 K}{R_2^2 - R^2} (1-n^2), \quad (9)$$

где  $K$  – контактное давление от натяга, МПа;

$n=R_2/R$  – относительная толщина бандажа.

Расчет напряжений  $\sigma_{\theta\Delta}$  производится по следующей формуле:

$$S_{q\Delta} = \frac{Ed}{2R} \cdot \frac{1+n^2}{n^2}, \quad (10)$$

где  $d$  - половина величины натяга;

$E$  – модуль упругости первого рода.

Касательные напряжения на поверхностях от натяга, как известно, отсутствуют. Тогда напряжения  $\sigma_{rp}$ ,  $\sigma_{\theta p}$  и  $\tau_{\theta}$  можно представить в виде:

$$s_{rp} = -\frac{P}{R_2} \cdot \frac{n}{2p} \left\{ (3-n^2) \frac{n+\sin q}{1+2n \cdot \sin q + n^2} + n(n^2-1) \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{(n+\sin q)^2 - \cos^2 q}{(1+2n \sin q + n^2)^2} \right] + \left( \frac{0.64}{n^2} - 1.64 \right) \sin q + \sin q - \frac{1}{n} \right\}, \quad (11)$$

$$s_{qp} = -\frac{P}{R_2} \cdot \frac{n}{2p} \left\{ (1+n^2) \frac{n+\sin q}{1+2n \cdot \sin q + n^2} - n(n^2-1) \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{(n+\sin q)^2 - \cos^2 q}{(1+2n \sin q + n^2)^2} \right] + \left( \frac{1.02}{n^2} + 0.36 \right) \sin q - \sin q - \frac{1}{n} \right\}, \quad (12)$$

$$t_{rp} = -\frac{P}{R_2} \cdot \frac{n}{2p} \left[ 2n(n^2 n^2) \frac{(n+\sin q) \cos q}{(1+2n \cdot \sin q + n^2)^2} - \right. \\ \left. - (1-n^2) \frac{\cos q}{1+2n \sin q + n^2} - \left( \frac{0.64}{n^2} + 0.36 \right) \cos q + \cos q \right]. \quad (13)$$

Для определения компонентов напряжений необходимо знать только относительную толщину бандажа ( $n$ ) и полярную угловую координату точки, в которой определяются напряжения ( $q$ ).

Проведенный анализ напряжений на контакте ось-бандаж составного вала показывает, что при любой схеме нагрузки суммарная эпюра контактного давления значительно отличается от эпюры давления, вызываемого натягом. Контактные давления распределены равномерно по окружности и имеют высокий градиент в зонах возмущения от сил давления металла на валок. При этом контактные давления от натяга составляют только часть общего контактного давления на значительной части контакта. На части контактной поверхности общее давление несколько меньше давления от натяга.

Полное контактное давление в составном валке определяется по формуле:

$$P = S_r = S_{rp} + S_{r\Delta}. \quad (14)$$

Измерение толщины покрытия рабочего вала предполагается осуществлять ультразвуковым толщиномером, в котором в качестве датчика используется раздельно-совмещенный преобразователь типа П112-5-10/2-А-003-М. На поверхность рабочего вала, где будут проводиться измерения, наносится тонкий слой контактной жидкости. Затем в этом месте прижимается ультразвуковой преобразователь и выполняются измерения. Прибор перемещается вдоль рабочего вала и в определенных контрольных точках выполняются измерения толщины покрытия рабочего вала. Таким образом осуществляется контроль толщины покрытия по всей окружности составного

валка. На рисунке 2 изображен прокатный стан и место установки в нем ультразвукового толщиномера (на поверхности рабочих валков).

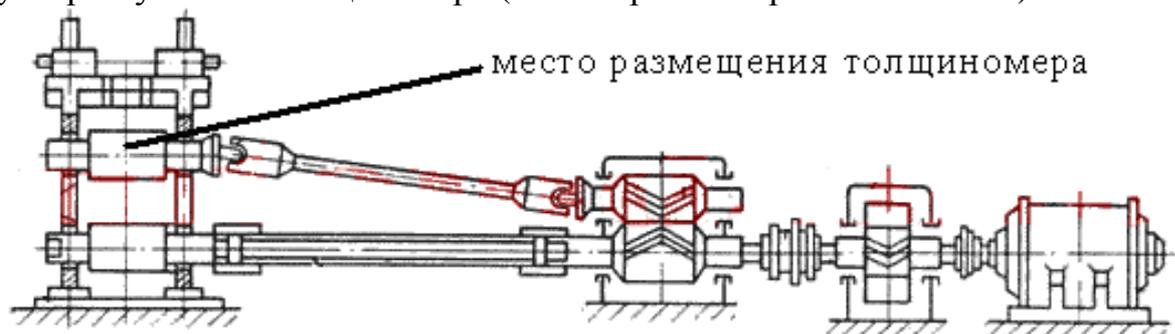


Рис.2. Схема прокатного стана и место установки в нем ультразвукового толщиномера

Измерение толщины покрытия пьезопреобразователем в режиме излучения сводится к нахождению распределения механических напряжений (деформаций) на его поверхности, обращённой к изделию, либо на поверхности изделия, примыкающей к преобразователю, при известном электрическом напряжении (силе тока), приложенном к преобразователю. В режиме приёма решается обратная задача – нахождение электрического отклика преобразователя, присоединённого к электрическому регистрирующему устройству, при создании на его поверхности известного распределения механических напряжений (деформаций).

Система уравнений, описывающая работу пьезопреобразователя, должна содержать уравнение движения упругой среды, уравнения, связывающие механические напряжения и деформации, а также уравнения, учитывающие прямое и обратное взаимодействия электрических и акустических полей при излучении и приёме УЗ сигналов [4].

Уравнение движения упругой среды можно получить из 2-го закона Ньютона, если приравнять силу внутренних напряжений произведению ускорения на массу единицы объёма тела [5]:

$$\mathbf{r} \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathbf{s}_{ik}}{\partial x_k}, \quad (15)$$

где  $r$  - плотность упругой среды;  $\mathbf{x}_i$  - механическое смещение в упругой волне.

Если в качестве независимых переменных использовать деформацию тела и напряжённость электрического поля, то при подстановке в уравнение (15) уравнения прямого пьезоэффекта, пренебрегая тепловыми эффектами, получаем

$$\mathbf{r} \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i}{\partial t^2} - c_{ijkl}^E \frac{\partial^2 \mathbf{x}_i}{\partial x_j \partial x_k} = - \frac{\partial}{\partial x_j} (e_{ijk} E_k), \quad (16)$$

где  $c_{ijkl}^E$  - коэффициенты упругости;  $e_{ijk}$  - пьезоконстанты.

Если продифференцировать левую и правую части уравнения (15) по координате и в получившееся выражение вместо  $u_{ik}$  подставить уравнение обратного пьезоэффекта, то получим

$$r s_{ijkl}^E \frac{\partial^2 s_{kl}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 s_{ik}}{\partial x_k \partial x_j} = r d_{ijk} \frac{\partial^2 E_k}{\partial t^2}, \quad (17)$$

где  $s_{ijkl}^E$  - податливости;  $d_{ijk}$  - пьезомодули.

Уравнения (16) и (17) позволяют выразить изменяющиеся во времени и пространстве механические величины (смещение, механические напряжения) через электрические (напряжённость и индукция электрического поля), и наоборот. Однако эти уравнения должны быть дополнены уравнениями, связывающими напряжённость и индукцию электрического поля внутри пьезоэлектрика с такими величинами, как напряжение, приложенное к пьезопреобразователю, или сила тока, вырабатываемого генератором электрических сигналов.

Электрическое поле  $E_i$  в пьезоэлектрике является потенциальным и может быть охарактеризовано с помощью скалярного потенциала  $\varphi_3$ . Используя вместо  $E_i$  одно из уравнений прямого пьезоэффекта и выполняя интегрирование, получаем

$$\int_0^d E_i dx_i = j_n = \int_0^d b_{ij}^u D_j dx_i - \int_0^d h_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial x_k} dx_1, \quad (18)$$

где  $d$  – толщина пьезоэлемента;  $\varphi_n$  - разность потенциалов между металлическими электродами, расположенными на противоположных гранях пьезоэлемента;  $D_j$  - электрическая индукция;  $h_{ijk}$  - пьезоконстанты.

Что касается силы тока, протекающего через пьезоэлемент, то её нетрудно связать с электрической индукцией, так как последняя непосредственно определяется поверхностной плотностью свободных зарядов на проводящих электродах:

$$i = A \frac{\partial s_{свб}}{\partial t} = A \frac{\partial D_n}{\partial t}, \quad (19)$$

где  $A$  - площадь электрода;  $D_n$  - составляющая вектора электрической индукции, нормальная к поверхности электродов. Подчеркнём, что вне электродов, внутри пьезоэлектрика, являющегося диэлектриком, выполняется уравнение [6]:

$$\frac{\partial D_i}{\partial x_i} = 0. \quad (20)$$

В результате получаем систему уравнений – одно из уравнений (16) или (17), уравнения (18), (19) и (20). Если упростить данную систему, то мы получим одномерное неоднородное волновое уравнение:

$$c_{33}^E \frac{\partial^2 x_1}{\partial x_3^2} - r \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_3} (e_{33} E_3), \quad (21)$$

из которого следует, что при приложении внешнего поля вдоль оси  $x_3$  в пьезоэлементе возбуждается чисто продольная волна, распространяющаяся в том же направлении  $x_3$ .

Для распознавания акустических образов необходима предварительная обработка акустических сигналов, получаемых после излучения и регистрации раздельно-совмещенным пьезопреобразователем ультразвуковых импульсов. Схема преобразования акустического сигнала представлена на рис.3.

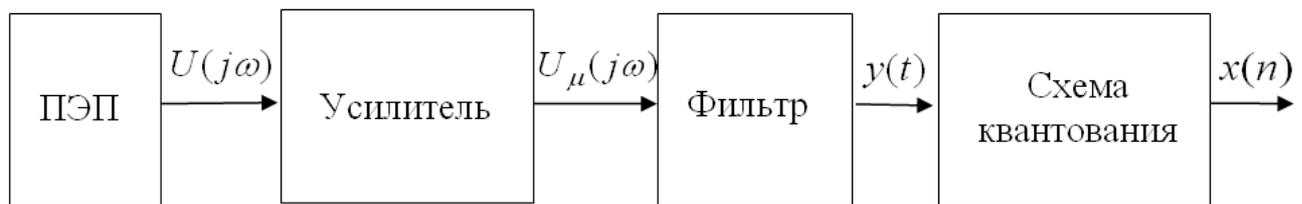


Рис.3. Схема преобразования акустического сигнала

Согласно схеме, в качестве входного напряжения используется напряжение, полученное на выходе пьезопреобразователя при регистрации ультразвуковых импульсов. Это напряжение усиливается и фильтруется, после чего подвергается квантованию.

Как правило, выходное напряжение пьезопреобразователя не превышает нескольких мВ. Для усиления сигнала используется усилитель переменного тока. Усиление напряжения осуществляется в соответствии с формулой:

$$U_m(j\omega) = M(j\omega)U(j\omega), \quad (22)$$

где  $M(j\omega)$  – передаточная функция усилителя звуковой карты.

$U(j\omega)$  – выходное напряжение пьезопреобразователя;

$\omega$  – циклическая частота.

Если усилитель близок к идеальному, то его передаточную функцию можно представить в виде:

$$M(j\omega) = \begin{cases} m, & \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}, \quad (23)$$

где  $m$  – коэффициент усиления напряжения (параметр),

$\omega_1, \omega_2$  - границы частотного диапазона.

Поступающий сигнал в процессе усиления несет с собой составляющую шума. Для снижения эффекта действия этого шума осуществляется фильтрация сигнала, поступающего после усиления:

$$y(t) = \frac{1}{2p} \int_{w_1}^{w_2} U_m(jw)K(jw)e^{jw t} dw, \quad (24)$$

где  $K(jw)$  – передаточная функция аналогового полосового фильтра.

Если фильтр близок к идеальному ПФ, то его передаточную функцию можно представить в виде:

$$K(jw) = \begin{cases} 1, & w_1 \leq w \leq w_2 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \quad (25)$$

Согласно современным тенденциям, техническая обработка сигналов возможна только для квантованных по времени и уровню сигналов. Это обуславливает необходимость квантования аналогового сигнала  $y(t)$ . Согласно схеме (рис.4), аналоговый сигнал вначале квантуется по времени посредством импульсного модулятора, после чего поступает в аналогово-цифровой преобразователь, в котором квантуется по уровню

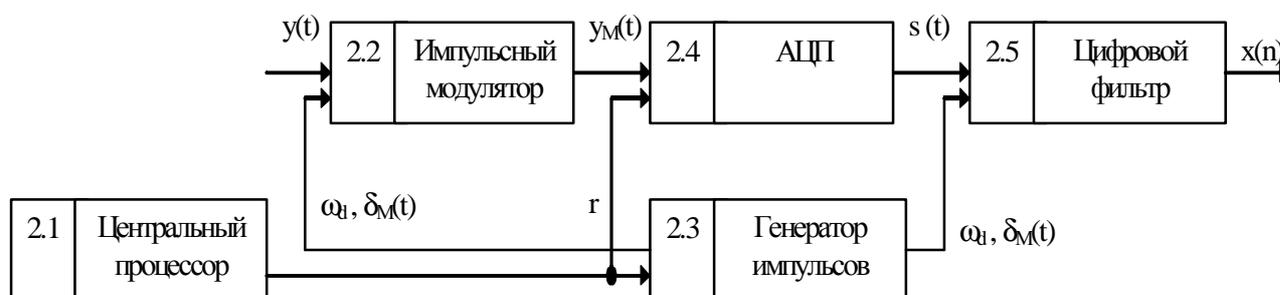


Рис.4. Схема квантования акустического сигнала

Сигнал  $y(t)$  подвергается дискретизации по времени с помощью импульсного модулятора и импульсного генератора. На вход импульсного модулятора подается сигнал  $y(t)$  и последовательность импульсов  $d_M(t)$  от импульсного генератора, который работает с частотой  $W_d$ . В момент подачи каждого импульса происходит измерение значения сигнала  $y(t)$ , и на выходе устройства возникает импульс с амплитудой, пропорциональный этому значению. Полученный сигнал графически представлен на рис.1.5 и определяется по формуле:

$$y_M(t) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n\Delta t)d(t - n\Delta t), \quad (26)$$

где  $\Delta t = \frac{1}{W_d}$  – шаг квантования,  
 $N$  – длина сигнала.

Тактовая функция генератора импульсов:

$$d_M(t) = \sum_{n=0}^{N-1} d(t - n\Delta t) \quad (27)$$

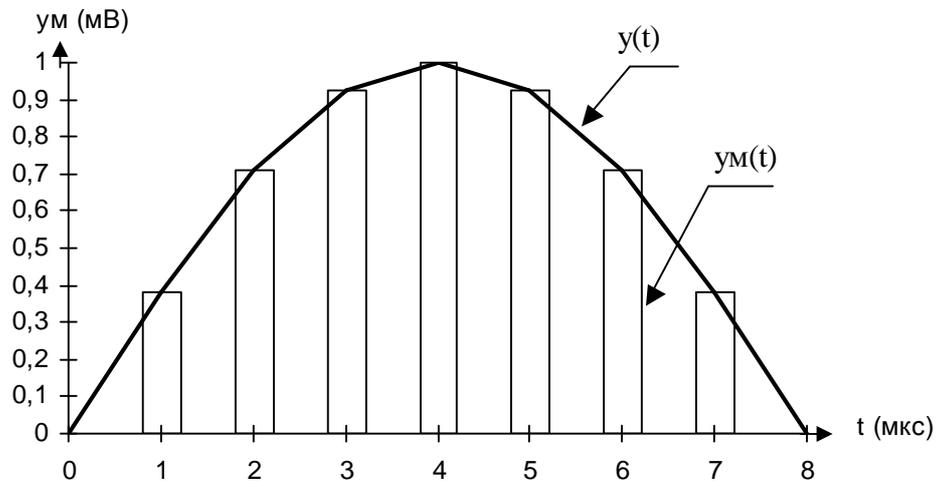


Рис.5. Амплитудно-импульсная модуляция сигнала

Квантованный по времени сигнал  $y_M(t)$  подвергается квантованию по уровню с помощью АЦП и импульсного генератора. На вход АЦП подается сигнал  $y_M(t)$  и количество разрядов  $r$ , используемых при квантовании по уровню. На выходе АЦП возникает сигнал  $s(t)$  (28). Если точное значение  $y_M(t)$  представить в виде (29), то его квантованное значение  $s(t)$  (30) соответствует двоичному числу с фиксированным количеством разрядов  $r$  (обычно  $r=8$  или  $r=16$ ).

$$s(t) = y_M(t) + q(t), \quad (28)$$

$$y_M(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n 2^{-n}, \quad (29)$$

$$s(t) = \sum_{n=0}^{r-1} g_n 2^{-n} + 2^{-r}, \quad (30)$$

где  $q(t)$  – шум квантования (погрешность, возникающая при квантовании в АЦП),  $g_n=0$  или  $g_n=1$ .

Для повышения точности квантования в АЦП сигнал  $s(t)$  поступает на вход цифрового фильтра и преобразуется к виду:

$$x(n\Delta t) = g_M(t)s_M(t) = \sum_{k=0}^n g(k\Delta t)s((n-k)\Delta t), \quad n \in \overline{0, N-1}, \quad (31)$$

$$s_M(t) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n\Delta t)d(t - n\Delta t), \quad (32)$$

$$g_M(t) = \sum_{n=0}^{N-1} g(n\Delta t)d(t - n\Delta t), \quad (33)$$

где  $g_M(t)$  – импульсная характеристика фильтра,  
 $N$  – длина сигнала.

Для упрощения записи  $x(n\Delta t)$  заменяют на  $x(n)$ . В общем виде, преобразование акустического сигнала можно представить параметрической структурой (рис.6), в которой в качестве параметра выступает коэффициент усиления напряжения  $m$ . В качестве входных переменных блока преобразования акустического сигнала выступают аналоговый сигнал  $U(j\omega)$  (выходное напряжение пьезопреобразователя) и циклическая частота  $\omega$ , частота дискретизации  $\omega_d$ , количество разрядов  $r$ , а в качестве выходных – дискретный сигнал  $x(n)$ .

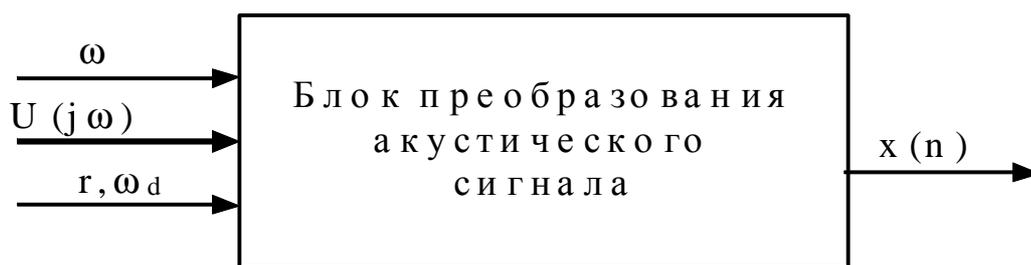


Рис.6. Структура преобразований акустического сигнала

В данной статье проведён математический анализ условий работы составного рабочего вала, определены параметры его нагруженности. Без этих расчётов использование составного вала в качестве объекта измерений является довольно затруднительным. Проведено математическое исследование возможности применения явления пьезоэффекта для определения толщины покрытия рабочего вала. В результате, получено одномерное неоднородное волновое уравнение, показывающее при каких условиях в пьезоэлементе возбуждается чисто продольная волна. Также, получена математическая модель преобразования сигнала, полученного на выходе пьезопреобразователя.

#### Литература:

1. Мухомедова Е.А. Исследование и разработка конструкции бандажированного опорного вала стана 2500 горячей прокатки ОАО ММК. Дипл. работа. – Магнитогорск, 2004. – 72 с., ил.
2. Народецкий М.З. К выбору посадок колец подшипников качения. «Инженерный сборник» Институт механики АН СССР, т.3, вып.2, 1947, с.15-26

3. Колбасин Г.Ф. Исследование работоспособности составных прокатных валков со сменным бандажом: Дис.: к.т.н. – Магнитогорск, 1974. – 176 с.
4. И.Н.Ермолов. Ультразвуковые пьезопреобразователи для неразрушающего контроля. – М.: Машиностроение, 1986. – 274 с.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Наука, 1982. – 624 с.
6. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1966. – 620 с.