

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ  
УКРАЇНИ  
ДОНЕЦЬКИЙ ІНСТИТУТ ЗАЛІЗНИЧНОГО ТРАНСПОРТУ

Кафедра Автоматики, телемеханіки, зв'язку та обчислювальної техніки

**МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК  
З ДИСЦИПЛІНИ  
«ОПТИМІЗАЦІЯ ТА МОДЕЛЮВАННЯ  
ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНИХ СИСТЕМ»  
(розділ «Лінійне програмування»)**

Донецьк-2011

## **УДК 681.3.06 (071)**

Методичний посібник з дисципліни «Оптимізація та моделювання телекомунікаційних систем » для студентів факультету «Інфраструктура залізничного транспорту» (розділ «Лінійне програмування») // І.М.Кононенко. – Донецьк: ДІЗТ, 2011. – 76с.

В даному навчальному посібнику розглядаються питання побудови математичних моделей основних типів задач лінійного програмування і способи їх розв'язання засобами табличного процесору Microsoft Excel. Запропоновані приклади виконання та рекомендації щодо вирішення конкретних задач, описані можливості застосування електронних таблиць, які істотно спрощують роботу і дозволяють отримувати результати. Приведені індивідуальні завдання по всіх темах курсу.

Посібник розрахований на студентів всіх форм навчання при підготовці до лабораторних і практичних занять.

Рецензент:

Тераванесов М.Р.  
Поцєпаєв В.В.

Відп. за випуск:

Кононенко І.М.

## ВСТУП

В даному навчально-методичному посібнику розглядаються основні типи задач лінійного програмування, дані рекомендації щодо побудови їх математичних моделей та пошуку оптимальних рішень засобами табличного редактора Microsoft Excel.

З метою більш ефективного оволодіння учбового матеріалу посібник

побудовано по принципу лабораторних робіт, розбитих за типами задач лінійного програмування.

Лабораторні роботи містять теоретичний опис математичних моделей задач лінійного програмування певного типу та методики їх побудови; можливі помилки при вводі початкових даних задач лінійного програмування в MS Excel; приклади рішення конкретних задач та рекомендації до їх вирішення.

Кожна лабораторна робота містить 20 варіантів учбових задач певного типу, а також перелік питань для захисту роботи, які охоплюють як теоретичні положення, так і конкретні варіанти завдань.

Застосування електронних таблиць істотно спрощує роботу з даними і дозволяє отримувати результати без проведення розрахунків уручну або спеціального програмування. З їх допомогою можна вирішувати економічні, математичні, фізичні та інженерні завдання, наприклад, здійснювати розрахунки за формулами, проводити пошук і виконувати аналіз розрахунків.

Обраний спосіб викладення учбового матеріалу дозволяє використовувати даний посібник як в учбових цілях, так і для вирішення практичних задач з використанням Microsoft Excel.

# ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1 “РІШЕННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ MICROSOFT EXCEL”.

**Ціль роботи:** набуття навиків рішення задач лінійного програмування (ЛП) в табличному редакторі Microsoft Excel.

## Одноіндексні задачі ЛП

Математичне програмування – це математична дисципліна, в якій розробляються методи відшукування екстремальних значень цільової функції серед безлічі її можливих значень, визначуваних обмеженнями.

Залежно від властивостей цільової функції і функції обмежень всі завдання математичного програмування діляться на два основні класи:

- завдання лінійного програмування
- завдання нелінійного програмування.

Якщо цільова функція і функції обмежень – лінійні функції, то відповідне завдання пошуку екстремуму є завданням лінійного програмування. Якщо хоч би одна з вказаних функцій нелінійна, то відповідне завдання пошуку екстремуму є завданням нелінійного програмування.

Лінійне програмування (ЛП) вирішує задачі знаходження оптимальних значень змінних для лінійної цільової функції та системи її обмежень, які задані лійними алгебраїчними рівняннями та нерівностями.

Завдання лінійного програмування (ЛП) полягає в знаходженні мінімуму (або максимуму) лінійної функції при лінійних обмеженнях.

Сутність лінійного програмування полягає в знаходженні точок найбільшого або найменшого значення деякої функції при певному наборі обмежень, які налагаються на аргументи і утворюють **систему обмежень**, яка має, як правило, безліч рішень. Кожна сукупність значень змінних (аргументів функції  $F$ ), які задовольняють системі обмежень, називається **допустимим планом** задачі лінійного програмування. Функція  $F$ , максимум або мінімум якої визначається, називається **цільовою функцією** задачі. Допустимий план, на якому досягається максимум або мінімум функції  $F$ , називається **оптимальним планом** задачі.

Більшість завдань, що вирішуються методами дослідження операцій, можуть бути сформульоване так: максимізувати(мінімізувати)  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  при обмеженнях

$$g_1(x_1, \dots, x_n) \leq b_1;$$

$$g_2(x_1, \dots, x_n) \leq b_2;$$

· · · · ·

$$g_m(x_1, \dots, x_n) \leq b_m;$$

де  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  - цільова функція, або критерій ефективності;  $X=\{x_1, \dots, x_n\}$ - варійовані параметри;  $g_1(x), g_m(x)$ - функції, які задають обмеження на наявні ресурси.

Розглянемо приклад знаходження рішення для наступної одноіндексної задачі ЛП:

$$L(x) = 20x_1 + 120,5x_2 + 56x_3 + 87,5x_4 \rightarrow \max;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 - x_4 \leq 450 \\ 2x_1 - 1,8x_2 + x_3 - 4x_4 = 757 \\ -1,5x_1 + 4x_2 + 12,7x_3 + 11x_4 \geq 90 \\ x_j \geq 0 (j=1..5) \end{cases}$$

Для того, щоб вирішити задачу ЛП в табличному редакторі Microsoft Excel необхідно виконати наступні дії.

### 1. Ввести умови завдання:

#### a) створити екранну форму для введення умови завдання:

- цільової функції (ЦФ)
- змінних
- обмежень;

#### b) ввести початкові дані в екранну форму:

- коефіцієнти ЦФ
- коефіцієнти при змінних в обмеженнях
- праві частини обмежень;

#### c) ввести залежності з математичної моделі в екранну форму:

- формулу для розрахунку ЦФ
- формули для розрахунку значень лівих частин обмежень;

#### d) задати ЦФ (у вікні "Пошук рішення"):

- цільовий осередок
- напрям оптимізації ЦФ;

#### e) ввести обмеження у вікні "Пошук рішення":

- осередки із значеннями змінних
- граничні умови для допустимих значень змінних

- співвідношення між правими і лівими частинами обмежень.

## 2. Вирішити задачу:

- встановити параметри рішення задачі* (у вікні "Пошук рішення");
- запустити завдання на рішення* (у вікні "Пошук рішення");
- вибрати формат виведення рішення* (у вікні "Результати пошуку рішення").

У екранній формі для введення умов завдання на рис. 1.1 кожній змінній і кожному коефіцієнту завдання поставлений у відповідність конкретний осередок в Excel. Так, наприклад змінним завдання відповідають осередки **B3** ( $x_1$ ), **C3** ( $x_2$ ), **D3** ( $x_3$ ), **E3** ( $x_4$ ), коефіцієнтам ЦФ відповідають осередки **B6** (20), **C6** (120,5), **D6** (56), **E6** (87,8), правим частинам обмежень відповідають осередки **H10** ( $\geq 450$ ), **H11** ( $= 757$ ), ( $\leq 90$ ) і т.д.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			ПЕРЕМЕННЫЕ					
2	Имя	x1	x2	x3	x4			
3	Значение							
4	Нижн.гран	0	0	0	0			
5						Значение	Направление	
6	К-ты ЦФ	20	120.5	56	87.5	=B\$3:E\$3;\$B\$6:	max	
7								
8		ОГРАНИЧЕНИЯ						
9	Вид					Левая часть	Знак	Правая часть
10	Ограничение 1	2	-6	4	-1	0	$\geq$	450
11	Ограничение 2	2	-1.8	1	-4	0	$=$	757
12	Ограничение 3	-1.5	4	12.7	11	0	$\leq$	90

Рисунок 1.1 - Екранна форма завдання разом із введеними в неї початковими даними (курсор в осередку F6)

У осередок **F6**, в якому відобразатиметься значення ЦФ, необхідно ввести формулу, за якою це значення буде розраховуватися. Згідно завдання значення ЦФ визначається виразом

$$20x_1 + 120,5x_2 + 56x_3 + 87,5x_4$$

Використовуючи позначення відповідних осередків в Excel, формулу для розрахунку ЦФ можна записати як **суму добутоків** кожного з осередків, відведених для значень змінних завдання (**B3**,

**C3, D3, E3**), на відповідний осередок, відведений для коефіцієнтів ЦФ (**B6, C6, D6, E6**), тобто

$$B3 \cdot B6 + C3 \cdot C6 + D3 \cdot D6 + E3 \cdot E6$$

Щоб задати формулу необхідно в осередок **F6** ввести наступний вираз

$$=СУММПРОИЗВ(B\$3:E\$3;B6:E6)^1,$$

і натиснути клавішу "Enter". Після цього в цільовому осередку з'явиться «0» (нульове значення).

Ліві частини обмежень завдання є **сумою добутоків** кожного з осередків, відведених для значень змінних завдання (**B3, C3, D3, E3**), на відповідний осередок, відведений для коефіцієнтів конкретного обмеження (**B10, C10, D10, E10** – 1-е обмеження; **B11, C11, D11, E11** – 2-е обмеження і **B12, C12, D12, E12** – 3-е обмеження). Формули відповідні лівим частинам обмежень, представлені в табл. 1.1.

Таблиця 1.1 - Формули, що описують обмеження заданої моделі

Ліві частина обмеження	Формули Microsoft Excel
$2x_1 - 6x_2 + 4x_3 - x_4$ або $B3 \cdot B10 + C3 \cdot C10 + D3 \cdot D10 + E3 \cdot E10$	$=СУММПРОИЗВ(B\$3:E\$3;B10:E10)$
$2x_1 - 1,8x_2 + x_3 - 4x_4$ або $B3 \cdot B11 + C3 \cdot C11 + D3 \cdot D11 + E3 \cdot E11$	$=СУММПРОИЗВ(B\$3:E\$3;B11:E11)$
$-1,5x_1 + 4x_2 + 12,7x_3 + 11x_4$ або $B3 \cdot B11 + C3 \cdot C11 + D3 \cdot D11 + E3 \cdot E11$	$=СУММПРОИЗВ(B\$3:E\$3;B12:E12)$

Як видно з табл. 1.1, формули, які задають ліві частини обмежень завдання, відрізняються один від одного і від формули цільової функції (осередок **F6**) тільки номером рядка в другому масиві. Цей номер визначається тим рядком, в якому обмеження записане в екранній формі. Тому для завдання залежностей для лівих частин обмежень досить скопіювати формулу з цільового

<sup>1</sup> символ «\$» перед номером рядка 3 означає, що при копіюванні цієї формули в інші місця листа Excel номер рядка 3 не зміниться; символ «:» означає, що у формулі будуть використані всі осередки інтервалу, розташовані між осередками, вказаними зліва і праворуч від двокрапки (наприклад, запис **B6:E6** укажує на осередки **B6, C6, D6 і E6**).

осередку в осередки лівих частин обмежень. На екрані в полях **F10**, **F11** і **F12** з'явиться «0» (нульове значення).

Для перевірки правильності введених формул проводите по черзі подвійне натиснення лівої клавіші миші на осередки з формулами. При цьому на екрані рамкою виділятимуться осередки, використовувані у формулі (рис. 1.2).

СУММПРОИЗВ						=СУММПРОИЗВ(B\$3:E\$3;B10:E10)		
	А	В	Г	Д	Е	Ж	З	
1		ПЕРЕМЕННЫЕ						
2	Имя	x1	x2	x3	x4			
3	Значение							
4	Нижн.гран	0	0	0	0			
5						Значение	Направление	
6	К-ты ЦФ	20	120.5	56	87.5	0	max	
7								
8		ОГРАНИЧЕНИЯ						
9	Вид					Левая часть	Знак	Правая часть
10	Ограничение 1	2	-6	4	-1	=СУММПРОИ	>=	450
11	Ограничение 2	2	-1.8	1	-4	0	=	757
12	Ограничение 3	-1.5	4	12.7	11	0	<=	90

Рисунок 1.2 - Перевірка правильності введення формули для лівої частини обмеження 1(курсор в осередку F10)

Подальші дії проводяться у вікні "Пошук рішення", яке викликається з меню "Сервіс" (мал. 1.6):

- в полі "Встановити цільовий осередок" вводиться адреса цільового осередку **\$F\$6** або одним натисненням лівої клавіші миші на цільовий осередок в екранній формі (це буде рівносильно введенню адреси з клавіатури);
- вказується напрям оптимізації ЦФ, клацнувши один раз лівою клавішею миші по селекторній кнопці "Максимальному значенню";
- в полі "Змінні осередки" вписується інтервал осередків **\$B\$3:\$E\$3** шляхом виділення мишею відповідних осередків змінних безпосередньо у екранній формі;
- для завдання граничних умов для допустимих значень змінних Натискають кнопку **Додати**, після чого з'явиться вікно "Додавання обмеження" (рис. 1.3).

Натиснувши кнопку **Додати** у вікні "Додавання обмеження" у полі "Посилання на осередок" вводиться адреса осередку лівої частини конкретного обмеження, наприклад **\$F\$10**. Це можна зробити як з клавіатури, так і шляхом виділення мишею



потрібного осередку безпосередньо в екранній формі. Відповідно до умови завдання в полі знаку обирається необхідний знак, наприклад «>=». У полі "Обмеження" вводиться адреса осередку правої частини даного обмеження, наприклад  $\$H\$10$ . Аналогічно вводяться обмеження:  $\$F\$11 \geq \$H\$11$ ,  $\$F\$12 \leq \$H\$12$ . Підтвердження введення всіх перерахованих вище умов відбувається натисненням кнопки **OK**.

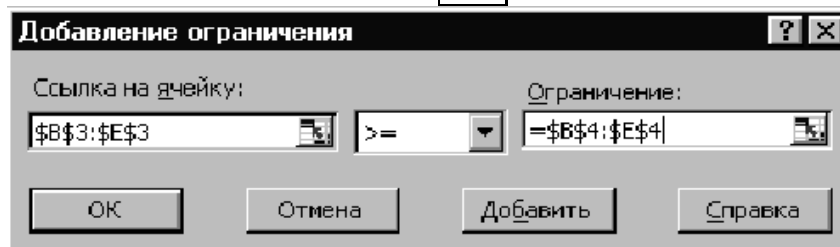


Рисунок 1.3 - Додавання умови від'ємності для змінних завдання

Вікно "Пошук рішення" після введення всіх необхідних даних завдання представлено на рис. 1.4.

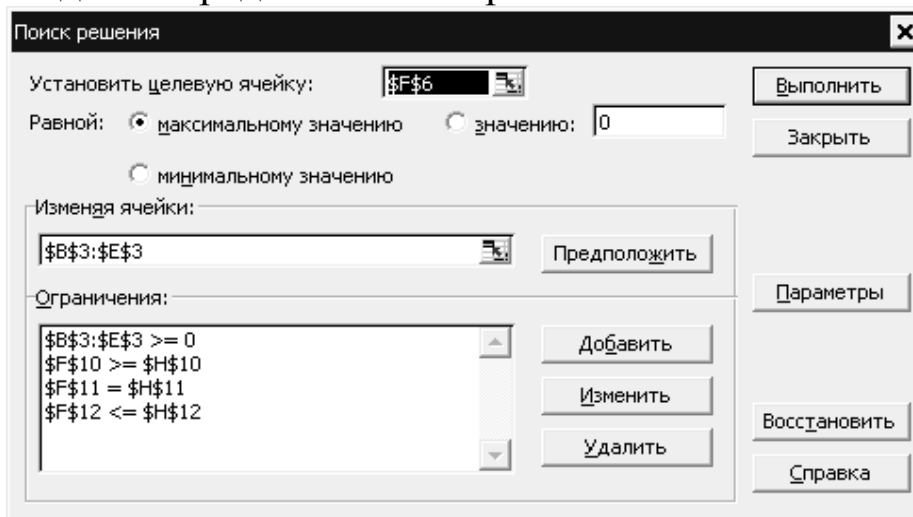


Рисунок 1.4 - Вікно "Пошук рішення"

Якщо при введенні умови завдання виникає необхідність в зміні або видаленні внесених обмежень або граничних умов, то це роблять натиснувши кнопки **Змінити** або **Видалити** (рис. 1.4).

Запуск завдання на рішення проводиться з вікна "Пошук рішення" шляхом натиснення кнопки **Виконати**. Але заздалегідь для встановлення конкретних параметрів вирішення завдань оптимізації певного класу необхідно натиснути кнопку **Параметри** і заповнити деякі поля вікна "Параметри пошуку рішення" (рис. 1.5).

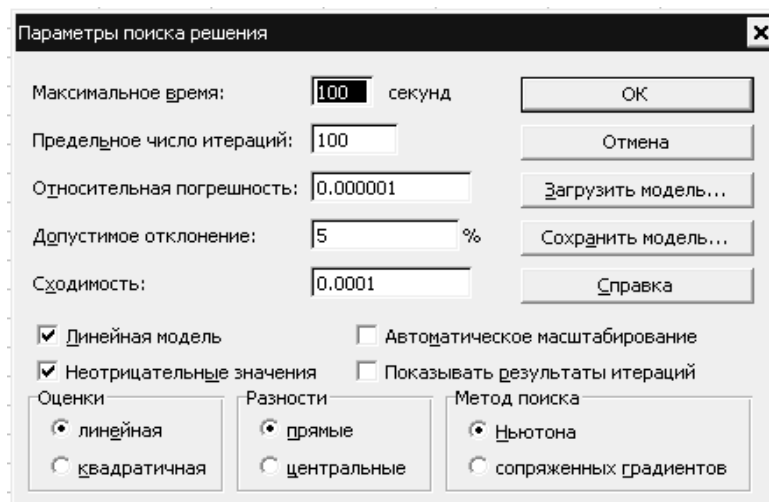


Рисунок 1.5 - Параметри пошуку рішення, відповідні для більшості завдань ЛП

Параметр "**Максимальний час**" служить для призначення часу (у секундах), що виділяється на рішення задачі. У полі можна ввести час, не що перевищує 32 767 секунд (більше 9 годин).

Параметр "**Граничне число ітерацій**" служить для управління часом рішення задачі шляхом обмеження числа проміжних обчислень. У полі можна ввести кількість ітерацій, що не перевищує 32 767.

Параметр "**Відносна погрішність**" служить для завдання точності з якою визначається відповідність осередку цільовому значенню або наближення до вказаних меж. Поле повинне містити число інтервалу від 0 до 1. Чим менше кількість десяткових знаків у введеному числі, тим нижче точність. Висока точність збільшить час, який потрібний для того, щоб зійшовся процес оптимізації.

Параметр "**Допустиме відхилення**" служить для завдання допуску на відхилення від оптимального рішення в цілочисельних завданнях. При вказівці більшого допуску пошук рішення закінчується швидшим.

Параметр "**Збіжність**" застосовується тільки при вирішенні нелінійних завдань.

Установка прапорця "**Лінійна модель**" забезпечує прискорення пошуку рішення лінійної задачі за рахунок застосування симплекс-метода.

Якщо є необхідність в знанні проміжних результатів обчислень при пошуку оптимального рішення, потрібно відзначити пункт "**Показувати результати ітерацій**" у вікні, що відкрилося (рис. 1.8). У Excel як методи пошуку рішення задачі пропонуються метод Ньютона і метод зв'язаних градієнтів. Для вирішення завдань

лінійного програмування зазвичай використовується метод Ньютона. Показані установки у вікні "Параметри пошуку рішення" на рис. 1.8, як правило виявляються достатніми для отримання оптимального вирішення завдань лінійного програмування.

Підтвердження встановлених параметрів відбувається натисненням кнопки **ОК**.

Після запуску на рішення завдання ЛП на екрані з'являється вікно "Результати пошуку рішення" з одним з повідомлень, представлених на рис. 1.6 - 1.8.

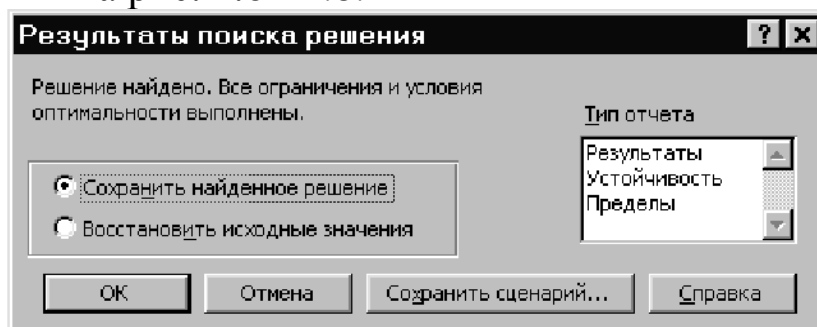


Рисунок 1.6 - Повідомлення про успішне рішення завдання

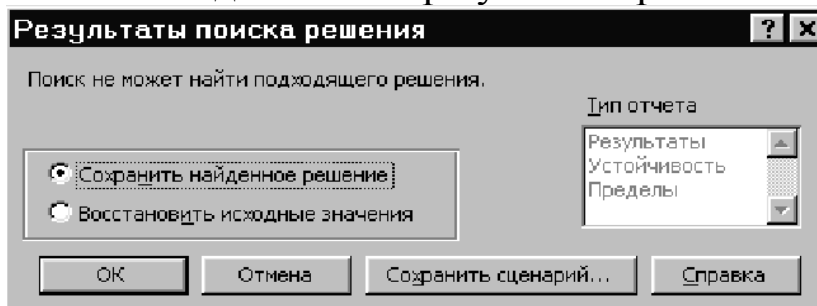


Рисунок 1.7 - Повідомлення при несумісній системі обмежень завдання

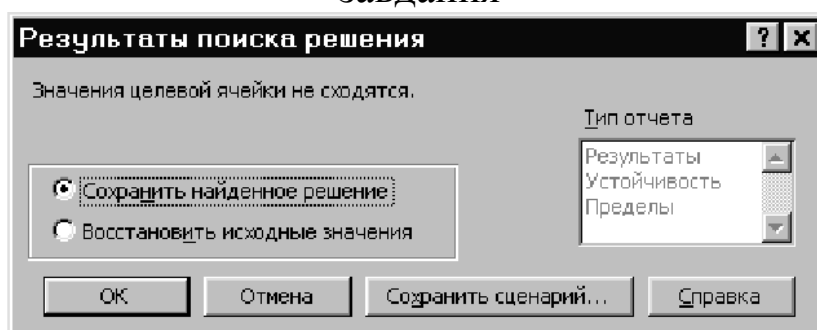


Рисунок 1.8 - Повідомлення при необмеженості ЦФ в необхідному напрямі

Іноді повідомлення, представлені на рис. 1.7 і 1.8, свідчать не про характер оптимального рішення задачі, а про те, що при введенні умов завдання в Excel були допущені помилки, які не дозволяють Excel знайти оптимальне рішення, що насправді існує.

Якщо при заповненні полій вікна "Пошук рішення" були допущені помилки, не дозволяючи Excel застосувати симплекс-метод для вирішення завдання або довести її рішення до кінця, то після запуску завдання на рішення на екран буде видано відповідне повідомлення з вказівкою причини, по якій рішення не знайдене. Іноді дуже мале значення параметра "Відносна погрішність" не дозволяє знайти оптимальне рішення. Для виправлення цієї ситуації збільшуйте погрішність порозрядного, наприклад від 0,000001 до 0,00001 і т.д.

У вікні "Результати пошуку рішення" представлені назви три типів звітів: "Результати", "Стійкість", "Межі". Вони необхідні при аналізі отриманого рішення на чутливість. Для отримання ж відповіді (значень змінних, ЦФ і лівих частин обмежень) прямо у екранній формі просто натисніть кнопку **ОК**.

Після цього в екранній формі з'являється оптимальне рішення задачі (рис. 1.9).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			ПЕРЕМЕННЫЕ					
2	Имя	x1	x2	x3	x4			
3	Значение	568.2551	106.6005	0	46.90734			
4	Нижн.гран	0	0	0	0			
5						Значение	Направление	
6	К-ты ЦФ	20	120.5	56	87.5	28314.85259	max	
7								
8			ОГРАНИЧЕНИЯ					
9	Вид					Левая часть	Знак	Правая часть
10	Ограничение 1	2	-6	4	-1	450	>=	450
11	Ограничение 2	2	-1.8	1	-4	757	=	757
12	Ограничение 3	-1.5	4	12.7	11	90	<=	90
13								

Рисунок 1.9 - Екранна форма завдання після отримання рішення

Припустимо, що до умови завдання додалася вимога цілочисельності значень всіх змінних. В цьому випадку описаний вище процес введення умови завдання необхідно доповнити наступним кроком - додати обмеження натисненням кнопки **Додати** і у вікні, що з'явилося, "Додавання обмежень" введіть обмеження таким чином: у полі "Посилання на осередок" ввести адреси осередків змінних завдання тобто  $\$B\$3:\$E\$3$ ; у полі введення знаку обмеження встановите "ціле" та підтвердити введення обмеження натисненням кнопки **ОК** (рис. 1.10).

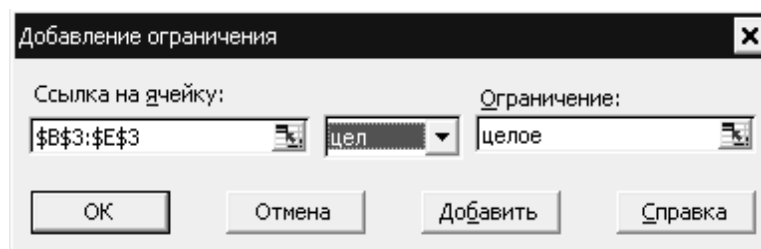


Рисунок 1.10 - Введення умови цілочисельності змінних завдання

На рис. 1.11 представлено кінцевий результат рішення задачі, до обмежень якої додана умова цілочисельності значень її змінних.

Microsoft Excel - Лабораторная работа 3.xls [Только для чтения]									
Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка									
Arial 10 Ж К Ч									
C19 fx									
	A	B	C	D	E	F	G	H	
1			ПЕРЕМЕННЫЕ						
2	Имя	x1	x2	x3	x4				
3	Значение	567	105	0	47				
4	Нижн.гран	0	0	0	0				
5						Значение	Направление		
6	К-ты ЦФ	20	120.5	56	87.5	28105	max		
7									
8			ОГРАНИЧЕНИЯ						
9	Вид					Левая часть	Знак	Правая часть	
10	Ограничение 1	2	-6	4	-1	457	>=	450	
11	Ограничение 2	2	-1.8	1	-4	757	=	757	
12	Ограничение 3	-1.5	4	12.7	11	86.5	<=	90	

Рисунок 1.11 - Результат рішення задачі за умови цілочисельності її змінних

### **Контрольні питання**

1. Які функції застосовуються в задачах лінійного програмування?
2. Яка задача називається стандартною задачею лінійного програмування?
3. Як записується загальна задача лінійного програмування?
4. Чим характеризується канонічна задача лінійного програмування?
5. Що називається областю допустимих планів задач лінійного програмування?
6. Який план називається оптимальним?
7. Яке рішення задачі лінійного програмування називається оптимальними?
8. Якими методами можна вирішити задачу лінійного програмування?

### Індивідуальні завдання до лабораторної роботи № 1.

Для моделі ЛП, відповідно до номеру вашого варіанту, знайти оптимальне рішення в табличному редакторі Microsoft Excel. До умов завдання додати вимогу цілочисленості значень всіх змінних.

№ вар-та	Математична модель
1.	$L(x) = 14x_1 - 9x_2 - x_4 + 6,4x_5 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 0,9x_1 + 10x_2 - 28x_4 + 6,4x_5 \leq 245 \\ 0,8x_1 + 1,7x_2 - 0,2x_3 - 0,5x_4 = 9 \\ 6x_1 + 4x_3 - 7x_4 + 6,3x_5 \leq 54 \\ 8x_1 + 6,2x_2 - 4,8x_4 + 2,9x_5 \geq 17 \\ x_j \geq 0 (j = 1..5) \end{cases}$
2.	$L(x) = -6x_1 + 2,3x_2 + 9,2x_3 - 4x_5 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 3x_1 + 7,8x_3 + 12x_4 + 9x_5 \geq 349 \\ 2,3x_2 + 3x_3 + 5,6x_4 - x_5 \leq 160 \\ 16x_1 + x_2 + 7x_3 - 40x_4 + 29x_5 \leq 120 \\ 180x_1 - 98x_2 + x_3 - 150x_5 \leq 190 \\ x_j \geq 0 (j = 1..5) \end{cases}$
3.	$L(x) = 0,5x_1 + 1,8x_3 - 9,2x_4 + 14x_5 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 9,6x_1 + 15,7x_2 + 24x_4 - 8x_5 \leq 74 \\ 0,8x_1 + 11,2x_2 - 4,5x_3 + 1,5x_4 - 6,3x_5 = 22 \\ 14x_1 + 45x_2 - 38x_4 + 26x_5 \leq 46 \\ 220x_1 - 148x_2 - 7x_3 + 95x_5 \geq 150 \\ x_j \geq 0 (j = 1..5) \end{cases}$
4.	$L(x) = 3x_1 - 12x_2 + 8,4x_3 + -3,3x_4 - 5x_5 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 2x_1 + 9,6x_2 + 15,7x_3 + 22x_4 - 8x_5 \leq 73 \\ 0,9x_1 + 1,7x_2 - 4,3x_3 + 1,5x_4 + 6,4x_5 = 19 \\ 14x_1 + 45x_2 - 38x_4 + 26x_5 \leq 49 \\ 8x_1 + 156,2x_2 + 3,8x_4 + 95x_5 = 133 \\ x_j \geq 0 (j = 1..5) \end{cases}$
5.	$L(x) = -38x_1 + 60x_2 + x_3 + 4x_4 + 8x_5 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 18x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 12x_5 \leq 86 \\ 2x_2 + 19x_3 - 7x_4 + 10x_5 = 264 \\ 0,4x_1 + 3x_2 - 4,2x_3 + 2x_4 - 5x_5 \leq 34 \\ 2,1x_1 + 32x_2 - 20x_3 + 6x_4 = 100,5 \\ x_j \geq 0 (j = 1..5) \end{cases}$
6.	$L(x) = 10x_1 + 36x_2 - 4x_3 + x_4 + 58x_5 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 7x_1 + 16x_3 + 5x_4 + 25x_5 \leq 600 \\ 8x_1 + 2,3x_2 - 0,5x_4 + 4,7x_5 = 890 \\ 6,2x_1 + 4x_3 - 7x_4 + 6,3x_5 \leq 270 \\ 84x_1 + 62x_2 + 80x_3 + 14x_5 \geq 230 \\ x_j \geq 0 (j = 1..5) \end{cases}$

1	2
7.	$L(x) = 0,84x_2 - 4x_3 + 3,8x_4 + 12x_5 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 15x_1 + 9,6x_3 + 34x_4 - 8x_5 \leq 180 \\ 0,6x_1 + 14,3x_2 - 2x_3 + 1,5x_4 - 6,3x_5 = 68 \\ 190x_1 - 148x_2 - 7x_3 + 84x_5 \geq 230 \\ 14x_1 + 64x_3 - 38x_4 + 12x_5 \leq 81 \\ x_j \geq 0 (j = 1..5) \end{cases}$
8.	$L(x) = 84x_1 + 5,7x_2 + 10x_4 - 3x_5 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 4x_1 + 8,5x_2 + 16x_3 + 10x_5 \geq 50 \\ 10,4x_1 + 6x_3 + 2x_4 + 4x_5 \leq 120 \\ 19x_1 + 18x_2 - 20x_4 + 30x_5 = 600 \\ 200x_1 + 454x_2 - 8x_3 + 3,4x_4 \geq 210 \\ x_j \geq 0 (j = 1..5) \end{cases}$
9.	$L(x) = 5x_1 + 7x_2 - 6x_3 + 9x_4 + 8x_5 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 0,7x_1 + 0,9x_2 + 1,5x_3 + 2,3x_4 + x_5 \leq 50000 \\ 0,4x_1 + x_2 - 0,5x_3 + 1,3x_4 - 2,8x_5 \geq 32000 \\ 0,5x_1 + 1,8x_3 + 0,7x_4 + 2x_5 \leq 40000 \\ 2,2x_1 + 1,4x_2 - 0,8x_3 + 0,9x_4 = 15000 \\ x_j \geq 0 (j = 1..5) \end{cases}$
10.	$L(x) = x_1 + 4x_3 + 8x_4 - 12x_5 \rightarrow \min$ $\begin{cases} x_1 + 9x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 250 \\ 0,4x_1 + x_2 - 5x_3 + 3x_4 + 8x_5 \leq 460 \\ 0,5x_1 + 10x_2 - 8x_3 + 6x_4 + 2x_5 \leq 190 \\ 11x_2 - 8,5x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 210 \\ x_j \geq 0 (j = 1..5) \end{cases}$
11.	$L(x) = 2,3x_2 + 9,4x_3 + 6,4x_5 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 195x_1 - 98x_2 - 4x_4 + 150x_5 \geq 300 \\ 0,8x_1 + 1,7x_2 - 0,2x_3 - 5,6x_5 = 9 \\ 6x_1 + 1,8x_3 - 7x_4 + 6,3x_5 \leq 54 \\ 8x_1 + 6,2x_2 - 4,8x_4 + 2,9x_5 \geq 17 \\ x_j \geq 0 (j = 1..5) \end{cases}$
12.	$L(x) = -45x_1 + 65x_2 + 2x_4 - 3x_5 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 15x_1 + 65x_2 + 2x_4 - 3x_5 = 56 \\ 2x_1 + 7x_3 - 4x_4 + 3x_5 \geq 91 \\ 0,2x_1 + 0,8x_2 + 1,5x_3 + 0,9x_4 + 4x_5 \leq 26 \\ 1,8x_1 - 42x_2 + 6,4x_3 + 3x_5 = 15 \\ x_j \geq 0 (j = 1..5) \end{cases}$
13.	$L(x) = 4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 49x_5 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 21x_1 - 98x_2 - 2x_4 - 12x_5 \geq 58 \\ 110x_2 - 60x_3 + 80x_4 - 45x_5 = 290 \\ 5x_2 + 27x_3 - 14x_4 + x_5 \leq 72 \\ 87x_1 + 6,4x_2 + 130x_4 = 140 \\ x_j \geq 0 (j = 1..5) \end{cases}$

1	2
14.	$L(x) = 0,74x_2 - 4x_3 + 58x_4 + 12x_5 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 15x_1 + 7,6x_2 + 34x_4 - 9x_5 \leq 185 \\ 0,6x_1 + 11,1x_2 - 2,6x_3 + 15x_4 - 6,3x_5 = 78 \\ 54x_1 + 64x_3 - 38x_4 + 12x_5 \leq 81 \\ 170x_1 + 148x_2 - 7x_3 + 84x_5 \geq 230 \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1..5) \end{cases}$
15.	$L(x) = -38x_1 + 60x_2 - x_3 + 4x_4 + 58x_5 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 58x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 12x_5 \leq 86 \\ 2x_2 + 15x_3 - 7x_4 + 10x_5 = 130 \\ 0,4x_1 + 3x_2 - 4,2x_3 + 2x_4 - 5x_5 \leq 34 \\ 8x_1 + 1,7x_2 - 0,5x_4 + 4,7x_5 \geq 260 \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1..5) \end{cases}$
16.	$L(x) = 16x_1 + 40x_3 + 13x_4 - 3x_5 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 7x_1 + 16x_2 + 5x_4 + 25x_5 \leq 630 \\ 3x_1 + 1,3x_2 - 0,6x_3 + 5,7x_5 = 890 \\ 6x_1 + 4x_3 - 7x_4 + 6,5x_5 \leq 370 \\ 84x_1 + 5,7x_2 + 80x_3 + 14x_5 \geq 430 \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1..5) \end{cases}$
17.	$L(x) = 0,5x_1 + 18x_2 - x_3 + x_4 + 6,4x_5 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 4,9x_1 + 10x_2 - 28x_4 + 5x_5 \leq 295 \\ 9,8x_1 + 1,7x_2 - 0,2x_3 - 0,5x_4 = 90 \\ 6x_1 + 4,1x_3 - 7x_4 + 6,5x_5 \leq 370 \\ 8x_1 + 6,2x_2 - 4,8x_3 + 2,9x_5 \geq 47 \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1..5) \end{cases}$
18.	$L(x) = 46x_1 + 2,3x_2 + 6,4x_3 - 4x_4 + x_5 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 3x_1 + 7,6x_2 + 128x_4 + 9x_5 \geq 49 \\ 2,3x_1 + 6x_2 + 5,6x_4 - 0,5x_5 \leq 86 \\ 16x_1 - 40x_4 + 29x_5 = 60 \\ 142x_1 - 98x_2 - 4x_4 + 180x_5 \geq 15,7 \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1..5) \end{cases}$
19.	$L(x) = 2,4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 4x_5 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 2x_1 - 8x_2 - x_4 - 12x_5 \geq 58 \\ 10x_2 - 6x_3 + 34x_4 - 45x_5 = 290 \\ 5x_2 + 7x_3 - 14x_4 + 2x_5 \leq 72 \\ 8x_1 + 4x_2 + 10x_4 = 140 \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1..5) \end{cases}$
20.	$L(x) = 12x_1 + 50x_3 + 3x_4 - 7x_5 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 7x_1 + 16x_2 + 5x_4 + 25x_5 \leq 610 \\ 23x_1 + 1,3x_2 - 7,6x_3 + 5,6x_5 = 530 \\ 6x_1 + 14x_3 - 2x_4 + 5x_5 \leq 320 \\ 8,4x_1 + 7x_2 + 30x_3 + 4x_5 \geq 240 \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1..5) \end{cases}$



## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2 “РІШЕННЯ ПОДВІЙНИХ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ MICROSOFT EXCEL”.

**Ціль роботи:** набуття навиків рішення подвійних задач лінійного програмування (ЛП) в табличному редакторі Microsoft Excel.

*Подвійні задачі ЛП та їх рішення*

**ПОДВІЙНА ЗАДАЧА** [dual problem] (інші назви: **зв'язана, зворотна задача** по відношенню до початкової або прямої) — одне з фундаментальних понять теорії ЛП; інструмент, що дозволяє встановити, чи *оптимально* дане допустиме рішення задачі ЛП, без безпосереднього порівняння його з рештою всіх допустимих рішень.

Дамо визначення подвійної задачі по відношенню до загальної задачі ЛП, що полягає в знаходженні максимального значення функції при обмеженнях "з нестачею".

До кожної завдання ЛП можна певним чином поставити у відповідність деяку іншу, свого роду симетричну задачу ЛП. Втім, хоча і прийнято вважати прямі задачі орієнтованими на максимум цільової функції, а подвійні — орієнтованими на мінімум, насправді ці позначення умовні: обидва завдання абсолютні рівноправні, будь-яку можна прийняти за пряму і шукати до неї подвійну.

Дві наступні задачі називаються **симетричними взаємно подвійними** задачами ЛП:

Задача 1	Задача 2
$F(X) = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n \rightarrow \max,$ $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m; \end{cases}$ $x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n.$	$G(Y) = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \rightarrow \min;$ $\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq C_1; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \geq C_n; \end{cases}$ $y_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m.$

Зіставляючи форми запису прямої і подвійної задач, можна встановити між ними наступні взаємозв'язки.

1. Якщо пряма задача є задачею максимізації, то подвійна буде задачею мінімізації, і навпаки.

2. Коефіцієнти цільової функції прямої задачі  $c_1, \dots, c_n$  стають вільними членами обмежень подвійної задачі.
3. Вільні члени обмежень прямої задачі  $b_1, \dots, b_m$  стають коефіцієнтами цільової функції подвійної задачі.
4. Матриця обмежень подвійної задачі виходить шляхом транспонування матриці обмежень прямої задачі (функція `ТРАНСП[F2-CTRL+SHIFT+ENTER]`).
5. Обидві задачі є стандартними задачами лінійного програмування, причому в задачі про максимум всі нерівності вигляду " $\leq$ ", а в задачі про мінімум – виду " $\geq$ ". Знаки нерівностей в обмеженнях змінюються на протилежні.
6. Число нерівностей в системі обмежень прямої задачі рівне числу змінних подвійної задачі, і навпаки.

Властивостями подвійних задач слід керуватися при їх складанні.

**Лема.** Якщо  $X$  - план початкової задачі, а  $Y$  - план подвійної задачі, то значення цільової функції початкової задачі на плані  $X$  завжди не перевершує значення цільової функції подвійної задачі на плані  $Y$ , тобто

$$F(X) \leq G(Y).$$

Зв'язок між оптимальними рішеннями подвійних задач встановлюється теоремами про подвійність.

**Теорема 1.** Якщо одна з подвійних задач має оптимальне рішення, то інша також має оптимальне рішення. При цьому для будь-яких оптимальних планів

$$X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*), \quad Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$$

має місце рівність

$$F(X^*) = G(Y^*)$$

**Слідство 1.** Для вирішуваної однієї із задач подвійної пари необхідно і достатньо, щоб безліч допустимих планів кожному з подвійних завдань було не порожньо.

**Слідство 2.** Якщо цільова функція одного із завдань подвійної пари не обмежена, то інша задача подвійної пари не має планів.

**Слідство 3.** Для оптимальності планів  $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  і  $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$  пари подвійних задач необхідно і достатньо виконання рівності

$$F(X^*) = G(Y^*)$$

**Слідство 4.** Якщо в одній з взаємно подвійних задач порушується єдиність оптимального рішення, то оптимальне рішення подвійної задачі вироджене.

**Теорема 2.** Плани  $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  и  $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$  подвійних задач є оптимальними тоді і тільки тоді, коли для будь-якого значення  $j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) виконується рівність

$$\left[ \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* - C_j \right] \cdot x_j^* = 0$$

Якщо число невідомих змінних як в прямій, так і в подвійній задачах, створюючих дану пару, рівно двом, то вирішення цих задач можна знаходити геометричним способом.

*Завдання.*

1. Складаємо подвійну задачу:

$F(X) = x_1 - 7x_2 - x_3 - x_4 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 \geq 51; \\ 3x_1 - 13x_2 - 4x_3 + 6x_4 \geq 62; \\ 7x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 \geq 13, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0. \end{cases}$	$G(y) = 51y_1 + 62y_2 + 13y_3 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 2y_1 + 3y_2 + 7y_3 \leq 1 \\ 3y_1 - 13y_2 + 2y_3 \leq -7 \\ 2y_1 - 4y_2 - 2y_3 \leq -1 \\ 5y_1 + 6y_2 + 2y_3 \leq -1 \end{cases} \quad y_j \geq 0$
---	---

2. Знаходимо рішення подвійної

3. Виходячи з умови подвійності (лема) вирішуємо початкову задачу

### **Контрольні питання**

1. Які задачі називаються подвійними задачами лінійного програмування?

2. Коли пара подвійних задач не має рішення?

3. Який зв'язок існує між оптимальними рішеннями подвійних задач?

4. У якому випадку застосовується метод рішення подвійної задачі лінійного програмування?

5. Якими властивостями володіють подвійні задачі?

6. Які правила слід дотримувати при складанні задачі, подвійної заданій?

7. Сформулюйте теорему про вирішення подвійних задач.

8. Яка матриця називається транспонованою?

9. Сформулюйте необхідну і достатню умову оптимальності планів подвійних задач.

10. Який зв'язок між змінними подвійних задач?

11. У якому випадку оптимальне рішення подвійної задачі буде виродженим?

12. Які компоненти оптимального рішення подвійної задачі відповідають нульовим компонентам основної задачі?

*Індивідуальні завдання до лабораторної роботи № 2.*

*Відповідно до номеру Вашого варіанту для заданої задачі ЛП скласти подвійну і використовуючи її оптимальне рішення знайти оптимальне рішення початкової задачі*

№ вар-та	Математична модель	№ вар-та	Математична модель
1.	$F(X) = 5x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 9x_1 + 11x_2 + 2x_3 + 13x_4 \leq 351; \\ 21x_1 + 5x_2 + 14x_3 - 37x_4 \leq 312; \\ 81x_1 - 46x_2 + 54x_3 - 92x_4 \leq 763, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0. \end{cases}$	11.	$F(X) = x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 16x_1 - 5x_2 - 9x_3 + 22x_4 \geq 182; \\ 19x_1 - 2x_2 + 83x_3 - 15x_4 \geq 345; \\ 27x_1 + 37x_2 + 49x_3 + 71x_4 \geq 473, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0. \end{cases}$
2.	$F(X) = x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 18x_1 + 7x_2 + 14x_3 + 32x_4 \leq 627; \\ 32x_1 - 15x_2 + 19x_3 + 37x_4 \leq 841; \\ 64x_1 - 16x_2 + 54x_3 + 92x_4 \leq 932, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0. \end{cases}$	12.	$F(X) = 15x_1 + 30x_2 + 4x_3 + 8x_4 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 43x_1 - 12x_2 - 21x_3 + 35x_4 \geq 2; \\ -51x_1 + 16x_3 + 12x_4 \geq 3; \\ 14x_1 + 12x_2 - 12x_3 - 18x_4 \geq -1, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0. \end{cases}$
3.	$F(X) = 5x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} -2x_1 + 15x_2 - 19x_3 + 21x_4 \leq 4; \\ 12x_1 + 31x_2 - 28x_3 + 5x_4 \leq 4; \\ 7x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 17x_4 \leq 5, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0. \end{cases}$	13.	$F(X) = -x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 \geq 45; \\ 15x_1 + 11x_2 - 14x_3 + 6x_4 \geq 32; \\ 7x_1 + 23x_2 - 18x_3 - 12x_4 \geq 13, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0. \end{cases}$
4.	$F(X) = x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 3x_1 + 13x_2 + 21x_3 + 15x_4 \geq 51; \\ 31x_1 - 11x_2 - 24x_3 + 16x_4 \geq 112; \\ 17x_1 + 12x_2 - 22x_3 + 32x_4 \geq 163, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0. \end{cases}$	14.	$F(X) = 3x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 9x_1 + 16x_2 + 27x_3 + 33x_4 \leq 455; \\ 14x_1 + 23x_2 - 18x_3 - 41x_4 \leq 512; \\ 5x_1 - 9x_2 + 72x_3 - 12x_4 \leq 739, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0. \end{cases}$

5.	$F(X) = 7x_1 + 9x_2 + 14x_3 + 18x_4 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 10x_1 + 22x_2 + 30x_3 + 71x_4 \leq 32; \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 4; \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 11x_4 \leq 11 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0. \end{cases}$	15.	$F(X) = x_1 + 7x_2 - x_3 - x_4 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 52x_1 - x_2 - 17x_3 - 41x_4 \leq 46; \\ 4x_1 + 152x_2 + 44x_3 - 7x_4 \leq 48; \\ 81x_1 - 46x_2 - 55x_3 - 83x_4 \leq 59, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0. \end{cases}$
6.	$F(X) = 9x_1 + 9x_2 - x_3 + x_4 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 12x_1 - 23x_2 + 25x_3 + 41x_4 \leq 579; \\ 41x_1 + 17x_2 + 44x_3 - 77x_4 \leq 489; \\ 81x_1 - 7x_2 + 14x_3 + 37x_4 \leq 591, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0. \end{cases}$	16.	$F(X) = 8x_1 + 150x_2 - 2x_3 - x_4 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 3x_1 + 13x_2 + 21x_3 - 15x_4 \geq 51; \\ -31x_1 - 15,2x_2 - 34x_3 + 62x_4 \geq -17; \\ 6,7x_1 + 18x_2 + 27x_3 - 53x_4 \geq 7,3 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0. \end{cases}$
7.	$F(X) = 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 41x_1 - 13x_2 - 21x_3 + 15x_4 \geq 51; \\ 72x_1 - 15x_2 - 24x_3 - 16x_4 \geq 112; \\ 53x_1 - 12x_2 - 22x_3 + 32x_4 \geq 161, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0. \end{cases}$	17.	$F(X) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 22x_1 + 15x_2 + 21x_3 + 33x_4 \leq 124; \\ 21x_1 + 25x_2 + 15x_3 + 37x_4 \leq 128; \\ 11x_1 + 26x_2 + 14x_3 + 12x_4 \leq 163, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0. \end{cases}$
8.	$F(X) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 13x_3 + 11x_4 \geq 51; \\ 21x_1 + x_2 + 14x_3 + 16x_4 \geq 73; \\ 7x_1 + 12x_2 + 22x_3 + 12x_4 \geq 63; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0. \end{cases}$	18.	$F(X) = 6x_1 + 36x_2 + 14x_3 + 25x_4 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 11x_4 \leq 7; \\ 5x_1 + 4x_2 + 12x_3 + 4x_4 \leq 4; \\ 21x_1 + 12x_2 - 5x_3 + 7x_4 \leq 1,1, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0. \end{cases}$
9.	$F(X) = 9x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 9x_1 + 12x_2 + 28x_3 + 25x_4 \geq 77; \\ 21x_1 - 11x_2 - 24x_3 + 46x_4 \geq 93; \\ 17x_1 + 17x_2 - 12x_3 - 12x_4 \geq 39, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0. \end{cases}$	19.	$F(X) = -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max;$ $\begin{cases} 12x_1 - 23x_2 + 25x_3 + 41x_4 \leq 579; \\ 21x_1 - 7x_2 + 14x_3 + 37x_4 \leq 945; \\ 82x_1 - 44x_2 + 54x_3 + 92x_4 \leq 831, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0. \end{cases}$
10.	$F(X) = x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 21x_1 + 25x_2 + 15x_3 + 37x_4 \leq 129; \\ 31x_1 - 15x_2 - 24x_3 + 39x_4 \geq 202; \\ 17x_1 + 26x_2 + 14x_3 + 12x_4 \leq 163, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0. \end{cases}$	20.	$F(X) = 4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \min;$ $\begin{cases} 3x_1 + 13x_2 + 21x_3 + 15x_4 \geq 151; \\ 31x_1 - 11x_2 - 24x_3 + 16x_4 \geq 182; \\ 17x_1 + 12x_2 - 22x_3 + 32x_4 \geq 193, \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0. \end{cases}$

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №3 “РІШЕННЯ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ MICROSOFT EXCEL”.

**Ціль роботи:** набуття навиків рішення транспортних задач лінійного програмування (ЛП) в табличному редакторі Microsoft Excel.

### *Транспортні задачі ЛП та їх рішення*

До завдань математичного програмування відносяться транспортні задачі. Під назвою "транспортна задача" об'єднується широке коло завдань з єдиною математичною моделлю. Вирішити транспортну задачу означає *на безлічі невід'ємних рішень системи обмежень знайти таке рішення, при якому лінійна функція приймає мінімальне значення.*

У загальній постановці транспортна задача полягає в знаходженні оптимального плану перевезень деякого однорідного вантажу з  $m$  пунктів відправлення  $A_1, A_2, \dots, A_m$  в  $n$  призначення пунктів споживачам  $B_1, B_2, \dots, B_n$ .

Розрізняють два типи транспортних задач: за критерієм вартості (план перевезень оптимальний, якщо досягнутий мінімум витрат на його реалізацію) і за критерієм часу (план оптимальний, якщо на його реалізацію витрачається мінімум часу).

У цих задачах вирішується проблема про перевезення деякого однорідного вантажу зі складів у пункти призначення. Кількість вантажів на кожному складі обмежена. До пунктів призначення необхідну кількість вантажу можна доставити багатьма способами. Задача полягає в тому, щоб визначити такий план перевезення вантажу, який дає мінімум загальної вартості перевезення за умови, що вантаж буде вивезений повністю від усіх постачальників і будуть задоволені всі потреби споживачів. У такому випадку сумарні можливості постачальників повинні бути рівні сумарним потребам споживачів. Таку задачу називають збалансованою або закритою.

Транспортна задача називається **закритою**, якщо сума запасів усіх  $n$  постачальників дорівнює сумі потреб усіх  $m$  споживачів:

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j$$

В іншому випадку транспортна задача називається *відкритою*. Рішення відкритої транспортної задачі зводять до рішення закритої транспортної задачі введенням фіктивних споживачів, коли сума запасів перевищує суму потреб, або фіктивних постачальників, коли сума потреб перевищує суму запасів. При цьому тарифи перевезень для фіктивних постачальників і споживачів приймаються рівними нулю.

Будь-яка транспортна задача, у якої сумарний об'єм запасів співпадає з сумарним об'ємом потреб, має рішення.

Розглянемо приклад транспортної задачі з наступними початковими даними. На рис.3.1 приведені дані про наявні запаси в містах Львів (300), Полтава(200), Суми(100). Є споживачі продукції, що вивозиться, причому Києву для задоволення потреб необхідно 350 вантажівок, Донецьку-200, Луганську слід відвезти 50 машин.

У таблиці приведена так звана таблиця постачань – вартість перевезення одиниці вантажу з пункту виробництва в пункт споживання. Наприклад, перевезення продукції однією вантажівкою зі Львова до Києва коштує 2 ум.од, зі Львова до Донецька – 3 ум.од. Слід визначити такий план перевезення, який дає мінімальну сумарну вартість перевезень зі всіх міст-постачальників в міста-споживачі.

Верхній рядок на рис.3.1 – адреси стовпців електронної таблиці, в яку вводилися початкові дані, перший стовпець - номер рядка Excel.

	<b>А</b>	<b>В</b>	<b>С</b>	<b>Д</b>	<b>Е</b>	<b>Ф</b>
<b>1</b>			<b>Споживачі</b>			
<b>2</b>			Київ	Донецьк	Луганськ	<b>Запаси</b>
<b>3</b>	<b>Постачальники</b>	Львів	2	3	2,3	300
<b>4</b>		Полтава	1	2	1,8	200
<b>5</b>		Суми	3	2,6	2,2	100
<b>6</b>		<b>Потреби</b>	350	200	50	

Рисунок 3.1 - Таблиця постачань

Визначається кількість невідомих в поставленому завданні. Перше невідоме  $-x_1$  – це кількість вантажівок зі Львова до Києва. Точно також невідома кількість вантажівок, що відправляються зі Львова до Донецька,  $-x_2$ , точно також за невідомі беремо решту

вантажівок, що відправляються з кожного міста в іншій. Отже, кількість невідомих рівно дев'яти.

У табл.3.2 приведені невідомі, закріплені за кожним перевезенням.

Таблиця 3.2 - Розподіл невідомих

Міста	Київ	Донецьк	Луганськ
Львів	$x_1$	$x_2$	$x_3$
Полтава	$x_4$	$x_5$	$x_6$
Суми	$x_7$	$x_8$	$x_9$

Використовуючи невідомі визначається сумарна вартість перевезення, яке буде цільовою функцією нашій завдання.

$$2x_1+3x_2+2,3 x_3 +x_4 + 2x_5+1,8x_6+3 x_7 +2,6 x_8 +2,2 x_9 \rightarrow \min \quad (1),$$

(мінімум, оскільки ставиться завдання мінімізації вартості транспортних перевезень)

Якби не було обмежень, то завдання вирішувалося б дуже просто за принципом, нікуди нічого не відвозити і вийде нульова сумарна вартість. Але.

Зі Львова потрібно вивезти 300 вантажівок вантажу, отже

$$x_1+x_2+ x_3=300 \quad (2),$$

аналогічно слід задати умови вивозу вантажів з Полтави і Сум

$$x_4 + x_5+x_6=200 \quad (3),$$

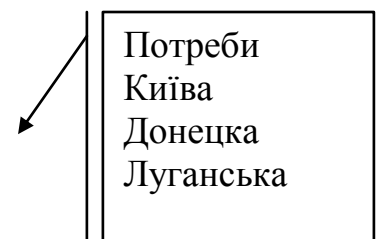
$$x_7 +x_8 +x_9=100 \quad (4).$$

Тепер врахуємо потреби споживачів:

$$x_1+ x_4 + x_7=350 \quad (5),$$

$$x_2+ x_5 + x_8=200 \quad (6),$$

$$x_3+ x_6 + x_9=50 \quad (7),$$



Кількість вантажівок, яка визначиться після рішення задачі, повинна бути додатнім і цілим числом.

Запрограмуємо цільову функцію і обмеження в Excel. На рис.3.2 показана електронна таблиця з приведеними формулами.



	A	B	C	D	E	F
1		Споживачі				
2			Київ	Донецьк	Луганськ	Запаси
3	Постачальники	Львів	2	3	2,3	300
4		Полтава	1	2	1,8	200
5		Суми	3	2,6	2,2	100
6		Потребности	350	200	50	
7						
8		РЕШЕНИЕ				
9			Київ	Донецьк	Луганськ	Запаси
10		Львів				=C10+D10+E10
11		Полтава				=C11+D11+E11
12		Суми				=C12+D12+E12
13		Потреби	=C10+C11+C12	=D10+D11+D12	=E10+E11+E12	
14		Вартість	=СУММПРОИЗВ(C9:D11;C3:E6)			

В цьому осередку запрограмована цільова функція (формула 1)

Обмеження (5-7)

Обмеження (2-4)

Рисунок 3.2 - Формули, що описують математичну модель транспортної задачі

Після введення формул викликаємо пункт меню Сервіс/Пошук рішення і задаємо осередки, що містять формули. Для нашого завдання вікно Пошуку рішення матиме вигляд:

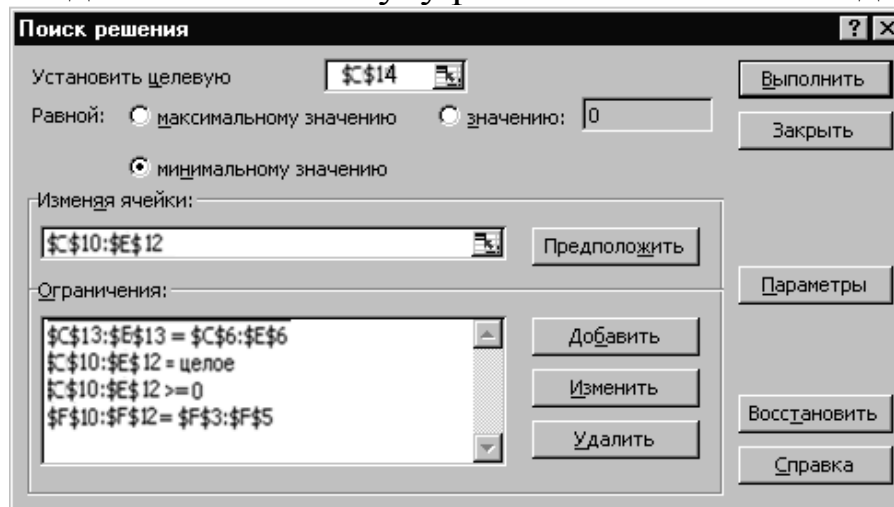


Рисунок 3.3 - Модель рішення транспортної задачі

Перед запуском на виконання необхідно звірити введені в модель адреси осередків з адресами, вказаними на рис.3.3. Результат рішення транспортної задачі приведений в табл.3.3.

Таблиця 3.3 - Рішення транспортної задачі

	Київ	Донецьк	Луганськ	Запаси
Львів	214	36	50	<b>300</b>
Полтава	136	64	0	<b>200</b>
Суми	0	100	0	<b>100</b>
<b>Потреби</b>	<b>350</b>	<b>200</b>	<b>50</b>	
<b>Вартість</b>	<b>1175</b>			

Отже, для забезпечення оптимального плану перевезення з Львова в Києва потрібно направити 214 вантажівок, до Донецька –36, до Луганська –50. Їх сума і складе 300, стільки, скільки і було наявності в цьому місті. З Полтави по містах відправляють 136, 64 і 0 вантажівок відповідно, звернете увагу, що до Луганська не потрапляє жодної вантажівки з цього міста, в наступному рядку таблиці аналогічна інформація про вантажівки, що вивозяться, з Сум. Всі перевезення в сумі коштуватимуть 1175 грн., це і є мінімальна вартість, але якщо ви не довіряєте отриманому рішенню, замініте план на власний і порівняйте результат.

### **Контрольні питання**

1. Для вирішення яких економічних завдань застосовуються математичні моделі, що приводять до транспортних завдань?
2. Яка мета ставиться при рішенні транспортної задачі?
3. Як прийнято називати учасників економічних або виробничих процесів, що описуються за допомогою математичної моделі у вигляді транспортного завдання?
4. Сформулюйте математичну постановку транспортного завдання ЛП.
5. До чого прагне цільова функція транспортного завдання?
6. Яке транспортне завдання називається закритим?
7. Яке транспортне завдання називається відкритим?
8. Як називається таблиця, за допомогою якої знаходиться рішення транспортної задачі?
9. Коли транспортне завдання не має рішення?

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №4 “МЕТОДИ СКЛАДАННЯ ОПОРНОГО ПЛАНУ ТРАНСПОРТНИХ ЗАДАЧ”.

**Мета роботи:** придбання навиків рішення транспортних задач лінійного програмування (ЛП) різними методами.

Будь-яке ненегативне рішення систем рівнянь, визначуване матрицею  $X=(x_{ij})$ , називають опорним планом ТЗ, а план  $X^*=(x_{ij}^*)$ , при якому функція  $Z$  приймає мінімальне значення, - називається **оптимальним планом** ТЗ. Знаходження опорних планів ТЗ можна здійснити одним з п'яти методів: північно-західного кута, мінімальної вартості, апроксимації Фогеля, подвійної переваги і дельта-метода.

### *Метод північно-західного кута*

Північно-західним кутом називається елемент таблиці постачань, відповідний значенню змінної  $x_{11}$ . У цей осередок записується максимально можливе постачання. Рух по таблиці постачань може відбуватися або по горизонталі, або строго по вертикалі, причому повороти при русі по трасі робляться тільки під прямим кутом. При заповненні таблиці стежать за виконанням балансу по рядках і стовпцях. Число заповнених кліток в отриманому розподілі повинне бути рівним числу базисних (основних) змінних. Якщо поворот відбувається в клітці, де розмір постачання рівний нулю, то говорять про вироджений план постачань. В цьому випадку нульове постачання записується в клітку, де траса розподілу постачань робить поворот, і клітка вважається зайнятою.

Якщо розподіл виконується без обчислювальних помилок, в останню заповнювану клітку запишеться число, що отримується автоматично і рівне залишку нерозподілених кількостей у останнього з постачальників, що беруть участь в розподілі, або кількості незадоволеного попиту останнього споживача.

Хай умови транспортного завдання задані табл. 4.1. Не враховуючи вартості перевезення одиниці вантажу, починаємо задоволення потреб першого споживача  $B_1$  за рахунок запасу постачальника  $A_1$ . Для цього порівнюємо  $a_1 = 200$  з  $b_1 = 300$ ,  $a_1 < b_1$  менший з об'ємів, тобто  $= 200$  од. записуємо в лівий нижній кут клітки  $A_1B_1$ . Запаси першого постачальника повністю витрачені, тому решту кліток першого рядка прокреслюємо. Потреби  $B_1$  залишилися незадоволеними на  $300 - 200 = 100$  од. Порівнюємо цей залишок із запасами постачальника  $A_2$ : оскільки  $100 < 230$ , то 100 ед.

записуємо в клітку  $A_2B_1$ , чим повністю задовольняємо потреби споживача  $B_1$ , а клітки, що залишилися, в першому стовпці прокреслюємо.

Таблиця 4.1 - Вирішення ТЗ методом північно-західного кута

Поставщики	Потребители				Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	7 200	3 -	10 -	1 -	200
$A_2$	12 100	7 130	10 -	6 -	230
$A_3$	2 -	5 30	3 100	8 50	180
Потребности	300	160	100	50	610

У постачальника  $A_2$  залишилося  $130$  од. вантажу. Задовольняємо споживача  $B_2$  за рахунок того, що залишився у постачальника  $A_2$  вантажу. Для цього порівнюємо цей залишок з потребами споживача  $B_2$ :  $130 < 160$ , записуємо  $130$  ед. у клітку  $A_2B_2$  і, оскільки запаси  $A_2$  повністю витрачені, прокреслюємо решту кліток другого рядка. Потреби  $B_2$  залишилися незадоволеними на  $30$  од. Задовольняємо їх за рахунок постачальника  $A_3$  і переходимо до задоволення  $B_3$  за рахунок залишку, що є у постачальника  $A_3$  і т.д. Процес продовжуємо до тих пір, поки не задовольнимо всіх споживачів за рахунок запасів постачальників. На цьому побудова первинного опорного плану закінчується.

Таким чином, в табл. у правих верхніх кутах кліток коштують числа, що визначають вартість перевезення одиниці вантажів, а в лівих нижніх кутах - числа, що визначають план перевезень, оскільки їх сума по рядках рівна запасам відповідного постачальника, а сума по стовпцях - потреби відповідного споживача.

Перевіримо, чи є план, побудований в табл. 2.2, опорним. Бачимо, що, починаючи рух від зайнятої клітки  $A_1B_1$ , повернутися не тільки в неї, але і в будь-яку іншу зайняту клітку, рухаючись тільки по зайнятих осередках, неможливо. Отже, план є опорним. В той же час план не вироджений, оскільки містить точно

$$m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$$

зайнятих кліток.

При складанні первинного опорного плану методом північно-західного кута вартість перевезення одиниці вантажу не враховувалася, тому побудований план далекий від оптимального, отримання якого пов'язане з великим об'ємом обчислювальних робіт.

Знайдемо загальну вартість складеного плану як суму творів об'ємів перевезень, що стоять в лівому кутку зайнятих кліток, на відповідні вартості в цих же осередках:

$$Z = 200 \cdot 7 + 100 \cdot 12 + 130 \cdot 7 + 30 \cdot 5 + 100 \cdot 3 + 50 \cdot 8 = 4360(\text{од.})$$

План не враховував тарифів перевезень і, напевно, не буде оптимальним. Якщо при складанні опорного плану враховувати вартість перевезення одиниці вантажу, то, очевидно, план буде значно ближчий до оптимального.

### **Метод мінімальної вартості**

Суть методу полягає в тому, що при визначенні об'ємів постачань в першу чергу займають клітки, що мають найменші тарифи перевезень. Так, зі всієї таблиці вартостей вибирається найменша, і в клітку, яка їй відповідає, поміщають менше з чисел  $a_i$  або  $b_j$ . Потім, з розгляду виключається або рядок, відповідний постачальникові, запаси якого повністю витрачені, або стовпець, відповідний споживачеві, потреби якого повністю задоволені, або і рядок і стовпець, якщо витрачені запаси постачальника і задоволені потреби споживача. З частини таблиці вартостей, що залишилася, знову вибирається найменша вартість, і процес розподілу запасів продовжується, поки всі запаси не будуть розподілені, а потреби задоволені.

Умова розглянутого завдання записується таблицею (табл. 4.2) і складається опорний план. Вибирається в таблиці найменша вартість (це вартість, поміщена в клітці  $A1 B4$ ) оскільки  $A1 = B4$ , 50 од. вантажу поміщаємо в цій клітці і виключаємо з розгляду четвертий стовпець. У таблиці вартостей, що залишилася, найменшою є вартість, розташована в клітці  $A3, B1$ . Записуємо в неї 180 і виключаємо з розгляду рядок  $A3$ . У таблиці вартостей, що залишилася, знову вибираємо найменшу вартість і продовжуємо процес до тих пір, поки всі запаси не будуть розподілені, а потреби задоволені. В результаті отриманий план:

$$X = (X_{12} = 150; X_{14} = 50; X_{21} = 120; X_{22} = 10; X_{23} = 100; X_{31} = 180),$$

решта значень змінних рівна нулю.

Таблиця 4.2 - Вирішення ТЗ методом мінімальної вартості

Поставщики	Потребители				Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	7 —	3 150	10 —	1 50	200
$A_2$	12 120	7 10	10 100	6	230
$A_3$	2 180	5	3	8	180
Потребности	300	160	100	50	610

План не містить циклів і складається з шести позитивних перевезень, отже, є виродженим опорним планом. Визначимо його вартість:

$$Z = 150 \cdot 3 + 50 \cdot 1 + 120 \cdot 12 + 10 \cdot 7 + 100 \cdot 10 + 180 \cdot 2 = 3370 \text{ (од)}$$

Вартість плану перевезень значно менша, отже, він ближче до оптимального. Питання про оптимальність отриманого плану залишається невирішеним.

#### Метод апроксимації Фогеля

Даний метод полягає в наступному:

1. на кожній ітерації знаходять різниці між двома найменшими тарифами у всіх рядках і стовпцях, записуючи їх в додатковий стовпець і рядок таблиці;

2. знаходять  $\max \Delta c_{ij}$  і заповнюють клітку з мінімальною вартістю в рядку (стовпці), яким відповідає дана різниця.

Процес продовжується до тих пір, поки всі вантажі не будуть розвезені по споживачах. Даний метод у ряді завдань приводить до оптимального плану. Вирішимо і цим методом завдання (табл.4.3).

На першому кроці заповнюється клітка  $A_3B_3$  ( $\max \Delta c = 7$  и  $\min c_{ij} = 3$ ), виключається 3-ий стовпець, відзначивши в додатковому рядку буквою « $B$ » факт виконання замовлення пункту  $B_3$ . Знаходяться нові різниці мінімальних тарифів по рядках (у стовпцях вони не змінилися) в 1-му і в 4-му стовпці. Заповнюється клітка  $A_1B_4$  ( $\max \Delta c = 5$  и  $\min c_{ij} = 1$ ) і виключається 4-й стовпець і так далі В кінці залишається послідовно заповнити клітки 3-го стовпця залишками запасів в  $A_1, A_3, A_2$ .

Таблиця 4.3 - Вирішення ТЗ методом мінімальної вартості

$A_i \backslash B_j$	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	Запасы $a_i$	$\Delta c_{ij}$
$A_1$	150 7	3	10	50 1	200	2,2,4,4,B
$A_2$	70 12	160 7	10	6	230	1,1,5,5,5,B
$A_3$	80 2	5	100 3	8	180	2,3,3,B
Потребности $b_j$	300	160	100	50	610	
$\Delta c_{ij}$	5,5,5,5,5,B	2,2,4,4,B	7,B	5,5,B		

Складений опорний план дає значення

$$Z = 150 \cdot 7 + 50 \cdot 1 + 70 \cdot 12 + 160 \cdot 7 + 80 \cdot 2 + 100 \cdot 3 = 3520 \text{ (од)}$$

*Метод подвійної переваги*

У випадку якщо таблиця вартостей велика і, отже, перебір всіх елементів скрутний, використовують метод подвійної переваги, суть якої полягає в наступному.

У кожному стовпці наголошується знаком  $V$  клітка з найменшою вартістю (табл. 4.4). Потім те ж проробляється в кожному рядку. В результаті деякі клітки матимуть відмітку  $VV$ . У них знаходиться мінімальна вартість, як по стовпцю, так і по рядку. У ці клітки поміщаються максимально можливі об'єми перевезень, кожного разу виключаючи з розгляду відповідні стовпці або рядки. Потім розподіляються перевезення по осередках, відміченим знаком  $V$ . У частині таблиці перевезення, що залишилася, розподіляють за найменшою вартістю.

Таблиця 4.4 – Аналіз матриці постачань для здійснення методу подвійної переваги

Поставщики	Потребители				Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	7	3	10	1	200
		V		VV	
$A_2$	12	7	10	6	230
				V	
$A_3$	2	5	3	8	180
	VV		V		
Потребности	300	160	100	50	610

Осередки  $A_1B_4$ ,  $A_3B_1$  мають відмітку  $VV$ , отже, з них і починається заповнення. Потім заповнюється осередок  $A_1B_2$  (оскільки в стовпці  $B_2$  немає жодного осередку з відміткою  $VV$ ). У частині таблиці, що залишилася, послідовно заповнюємо осередки за мінімальною вартістю  $A_1B_3$ ,  $A_4B_3$ ,  $A_4B_5$ . План, отриманий в табл.4.5, є виродженим опорним планом.

Таблиця 4.5- Рішення ТЗ методом подвійної переваги

Поставщики	Потребители				Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	7 150	3	10	1 50	200
$A_2$	12 120	7 10	10 100	6	230
$A_3$	2 180	5	3	8	180
Потребности	300	160	100	50	610

Обчислимо загальну суму витрат на перевезення вантажу по цьому плану:

$$Z = 150 \cdot 3 + 50 \cdot 1 + 120 \cdot 12 + 10 \cdot 7 + 100 \cdot 10 + 180 \cdot 2 = 3370 \text{ (од)}$$

Таким чином, найменшу вартість має опорний план, отриманий методами мінімальної вартості і подвійної переваги, отже, він найбільш близький до оптимального плану.

**Критерій оптимальності для транспортного завдання:** базисний розподіл постачань оптимальний тоді і тільки тоді, коли оцінки всіх вільних кліток ненегативні.

Для визначення оцінок вільних кліток використовують два взаємозамінні методи: розподільний і потенціалів.

Розглянемо один з них, а саме **метод потенціалів**.

**Потенціали** - числа для знаходження оцінок допустимого плану, отриманого в ході розподілу запасів постачальників. Потенціали для постачальників і споживачів обчислюються по тарифах  **$C_{ij}$  зайнятих** кліток таблиці постачань.

Питання про оптимальність опорного плану вирішує наступна теорема:

**Теорема.** Якщо для деякого плану  $X^* = (x_{ij})$ , ( $i=1 \dots m$ ;  $j=1 \dots n$ ) транспортного завдання виконуються умови:

1.  $u_i + v_j = c_{ij}$  для  $x_{ij} > 0$  (для зайнятих кліток),
  2.  $u_i + v_j < c_{ij}$  для  $x_{ij} = 0$  (для вільних кліток),
- то план  $X^*$  є **оптимальним**.



З теореми виходить, що якщо для деякої вільної клітки  $u_i + v_j < c_{ij}$ , то план не є оптимальним.

Відзначимо, що система  $(m + n - 1)$  рівнянь містить  $(m + n)$  невідомих  $u_i, v_j$ , і тому, прирівнюючи одне з них, наприклад  $u_1$  до нуля, однозначно визначимо решту невідомих.

Для потенціалів постачальників  $u_i$  і споживачів  $v_j$ , відповідних зайнятим кліткам, справедлива рівність

$$i = 1..m, j = 1..n$$

Оскільки зайняті кліток на одну менше, ніж число потенціалів, значення одне з потенціалів (все одно якого) призначається довільно і може бути будь-яким дійсним числом (зазвичай вважають рівними нулю, щоб не ускладнювати обчислення решти потенціалів). Вирішуючи рівність щодо потенціалів для опорного плану табл.4.5, набуваємо їх числових значень для зайнятих кліток.

$$u_1 = 0; u_1 + v_2 = c_{12} \rightarrow 0 + v_2 = 3 \rightarrow v_2 = 3;$$

$$u_1 + v_4 = c_{14} \rightarrow 0 + v_4 = 1 \rightarrow v_4 = 1;$$

$$u_2 + v_2 = c_{22} \rightarrow u_2 + 3 = 7 \rightarrow u_2 = 4;$$

$$u_2 + v_1 = c_{21} \rightarrow 4 + v_1 = 12 \rightarrow v_1 = 8;$$

$$u_2 + v_3 = c_{23} \rightarrow 4 + v_3 = 10 \rightarrow v_3 = 6;$$

$$u_3 + v_1 = c_{31} \rightarrow u_3 + 8 = 2 \rightarrow u_3 = -6;$$

Оцінки **вільних** кліток таблиці постачань розраховуються по формулах

$$\delta_{11} = c_{11} - u_1 - v_1 = 7 - 0 - 8 = -1 < 0;$$

$$\delta_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 10 - 0 - 6 = 4 > 0;$$

$$\delta_{24} = c_{24} - u_2 - v_4 = 6 - 4 - 1 = 1 > 0;$$

$$\delta_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 5 + 6 - 3 = 8 > 0;$$

$$\delta_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 3 + 6 - 3 = 6 > 0;$$

$$\delta_{34} = c_{34} - u_3 - v_4 = 8 + 6 - 1 = 13 > 0;$$

Якщо побудоване первинне рішення не задовольняє критерію оптимальності, то для «поліпшення» опорного плану серед вільних кліток, що мають негативну оцінку, вибираємо ту, для якої абсолютна величина оцінки найбільша  $\max (u_i + v_j - c_{ij})$  і будують для неї цикл перерахунку (зрушення).

**Циклом** називають замкнуту ламану лінію, всі вершини якої лежать в зайнятих осередках, окрім однієї, розташованою у вільній клітці, що підлягає заповненню, а ланки паралельні рядкам і стовпцям, причому в кожному рядку (стовпці) лежить не більш 2-х вершин.

Клітки, через які проходить ламана лінія, не роблячи в них повороту, називаються **транзитними**, і наявні в них постачання не беруть участь в процесі перерозподілу. Таким чином, цикл

проходить через зайняті клітки і лише через одну вільну клітку, починаючись і закінчуючись в ній.

Новий опорний план знову перевіряють на оптимальність за допомогою системи рівнянь потенціалів.

Відмітимо, що в результаті перерахунку по циклу може опинитися число зайнятих кліток менше, ніж  $n+m-1$  (план називається виродженням). В цьому випадку слід заповнити числом «0» порожню клітку, що має мінімальний тариф, і не створюючи із зайнятими клітками замкнутого прямокутного контура.

Послідовно відзначаємо всі вершини циклу знаками "+" і "-", починаючи з вільної клітки так, щоб сусідні вершини були відмічені протилежними знаками.

Серед постачань, що знаходяться в клітках помічених знаком "-", вибираємо найменшу і поміщаємо її в порожню клітку, помічену знайомий "+". Потім розраховуємо нові значення постачань, додаючи вибране число до всіх постачань, що стоять в клітках, помічених знайомий "+", і віднімаючи його зі всіх постачань, що стоять в клітках, помічених знайомий "-".

Новий опорний план знову перевіряють на оптимальність за допомогою системи рівнянь потенціалів.

Якщо критерій оптимальності виконується для отриманого плану, то завдання вирішене. Інакше продовжуємо процес перерозподілу постачань до тих пір, поки не буде отримано оптимальне рішення транспортної задачі.

Серед знайдених оцінок одна менше нуля, отже, знайдений план не є оптимальним. Робимо перерозподіл постачання в клітку  $(A_1, B_1)$ .

Цикл, знайдений для зміни плану постачань, показаний на рис. 4.1.

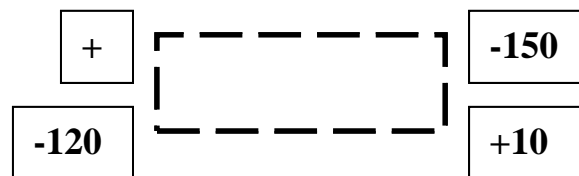


Рисунок 4.1 – Цикл для зміни плану постачань

Знаходимо розмір переміщуваного в клітку  $(A_1, B_1)$  постачання по розмірах відмічених знаком "-" постачань, а саме:

$$x_{11} = \min(x_{12}, x_{21}) = \min(150, 120) = 120$$

Додаємо число 120 до поставчань, відміченим знаком "+", віднімаємо число 120 з поставчань, відмічених знаком "-", отримуємо розподіл поставчань, показаних на рис. 4.2.

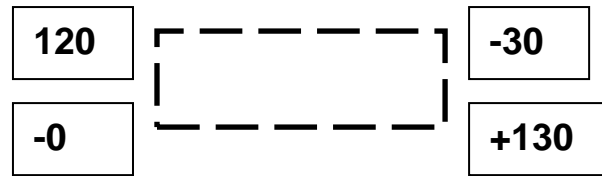


Рисунок 4.2 – Новий розподіл поставчань

Для знов отриманого опорного плану поставчань (табл.4.6) і по тарифах зайнятих кліток рахуємо значення потенціалів.

Таблиця 4.6 - Новий опорний план

Поставщики	Потребители				Запасы
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	
$A_1$	7 120	3 30	10	1 50	200
$A_2$	12	7 130	10 100	6	230
$A_3$	2 180	5		8	180
<b>Потребности</b>	<b>300</b>	<b>160</b>	<b>100</b>	<b>50</b>	<b>610</b>

$$u_1 = 0; u_1 + v_1 = c_{11} \rightarrow 0 + v_1 = 7 \rightarrow v_1 = 7;$$

$$u_1 + v_2 = c_{12} \rightarrow 0 + v_2 = 3 \rightarrow v_2 = 3;$$

$$u_1 + v_4 = c_{14} \rightarrow 0 + v_4 = 1 \rightarrow v_4 = 1;$$

$$u_2 + v_2 = c_{22} \rightarrow u_2 + 3 = 7 \rightarrow u_2 = 4;$$

$$u_2 + v_3 = c_{23} \rightarrow 4 + v_3 = 10 \rightarrow v_3 = 6;$$

$$u_3 + v_1 = c_{31} \rightarrow u_3 + 7 = 2 \rightarrow u_3 = -6;$$

Оцінки **вільних** кліток таблиці поставчань розраховуються по формулах

$$\delta_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 10 - 0 - 6 = 4 > 0;$$

$$\delta_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 12 - 4 - 7 = 1 > 0;$$

$$\delta_{24} = c_{24} - u_2 - v_4 = 6 - 4 - 1 = 1 > 0;$$

$$\delta_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 5 + 6 - 3 = 8 > 0;$$

$$\delta_{33} = c_{33} - u_3 - v_3 = 3 + 6 - 3 = 6 > 0;$$

$$\delta_{34} = c_{34} - u_3 - v_4 = 8 + 6 - 1 = 13 > 0;$$

Для знайденого плану підрахуємо значення цільової функції:

$$Z = 120 \cdot 7 + 30 \cdot 3 + 50 \cdot 1 + 130 \cdot 7 + 100 \cdot 10 + 180 \cdot 2 = 3250 \text{ (од)}$$

Оскільки всі оцінки вільних кліток позитивні, знайдений план є оптимальним планом транспортного завдання. Мінімальна

вартість перевезень визначається значенням цільової функції на цьому плані, і вона рівна 3250денежних одиниць.

Для обчислення оцінки вільної клітки (  $A_s, B_k$  ), таблиці постачань *розподільним методом* необхідно побудувати цикл для неї і знайти оцінку по формулі:

$$\delta_{sk} = c_{sk} - c_{s,k+1} + c_{s-1,k+1} - \dots + c_{s+1,k-1} - c_{s+1,k},$$

де записані в порядку проходження циклу з чергуванням знаків "+" і "-" тарифи перевезень для всіх кліток, створюючих цикл оцінюваної вільної клітки.

*Індивідуальні завдання до лабораторної роботи № 3-4.*

*Використовуючи матрицю постачань з вказівкою транспортних витрат на перевіз одиниці продукції від кожного постачальника кожному споживачеві, відповідно до номера Вашого варіанту, скласти опорні плани різними методами, перевірити на оптимальність, знайти рішення транспортної задачі в табличному редакторі Microsoft Excel, і порівняти значення сумарної вартості перевезень по кожному плану.*

### Варіант№1

Постачальники/ Споживачі	Суми	Луганськ	Одеса	Черкаси	Мукачєво	Наявність
Київ	16	30	17	10	16	<b>40</b>
Чернівці	30	27	26	9	23	<b>60</b>
Вінниця	13	4	22	3	1	<b>100</b>
Полтава	3	1	5	4	24	<b>100</b>
<b>Потреба</b>	<b>50</b>	<b>60</b>	<b>70</b>	<b>90</b>	<b>30</b>	

### Варіант№2

Постачальники/ Споживачі	B1	B2	B3	B4	Наявність
A1	5	8	1	2	<b>210</b>
A2	2	5	4	9	<b>170</b>
A3	9	2	3	1	<b>65</b>
<b>Потреба</b>	<b>125</b>	<b>90</b>	<b>130</b>	<b>100</b>	

### Варіант№3

Постачальники/ Споживачі	Рівно	Суми	Ужгород	Черкаси	Наявність
Луганськ	23	8	7	14	<b>1600</b>
Полтава	12	32	6	9	<b>600</b>
Кіровоград	14	25	16	5	<b>1800</b>
<b>Потреба</b>	<b>1500</b>	<b>700</b>	<b>600</b>	<b>1200</b>	

### Варіант №4

Постачальник/ Споживач	№1	№2	№3	№4	№5	Наявність
П.1	1	2	3	4	5	<b>100</b>
П.2	2	1	3	5	4	<b>100</b>
П.3	2	2	2	2	4	<b>80</b>
П.4	3	1	5	4	6	<b>100</b>
<b>Потреба</b>	<b>70</b>	<b>110</b>	<b>100</b>	<b>70</b>	<b>30</b>	

### Варіант №5

Постачальник/ Споживач	Завод	Комбінат	Фабрика	Наявність
Кар'єр №1	3	2	5	<b>40</b>
Кар'єр №2	4	7	1	<b>160</b>
Кар'єр №3	13	4	2	<b>100</b>
Кар'єр №4	3	1	5	<b>100</b>
<b>Потреба</b>	<b>100</b>	<b>70</b>	<b>230</b>	

### Варіант №6

Об'єкти	Ціна перевезення 1 тисячі штук						Виробництво цегли
	1	2	3	4	5	6	
1	8	7	5	10	12	8	<b>240</b>
2	7	3	4	6	8	5	<b>360</b>
3	4	3	2	8	3	6	<b>180</b>
4	9	7	5	8	4	2	<b>120</b>
5	3	8	7	6	15	4	<b>150</b>
<b>Потреба</b>	<b>230</b>	<b>220</b>	<b>130</b>	<b>170</b>	<b>190</b>	<b>110</b>	

### Варіант №7

Авіакомпанія/ Пункт призначення	Анкара	Пекін	Токіо	Київ	Казань	Можливо- сті
БМС	15	1	9	19	7	<b>85</b>
Аерофлот	21	18	11	4	3	<b>130</b>
Україна	26	9	23	26	24	<b>290</b>
Сибір	2	10	3	19	8	<b>45</b>
<b>Потреби</b>	<b>190</b>	<b>70</b>	<b>100</b>	<b>130</b>	<b>60</b>	

### Варіант №8

Пункти відправле- ння	Пункти призначення					Наявність	
	Д1	Д2	Д3	Д4	Д5		
	A1	3	5	11	2	8	<b>45</b>
	A2	2	14	5	7	8	<b>140</b>
A3	9	5	4	13	2	<b>95</b>	
<b>Потреба у вагонах</b>		<b>35</b>	<b>65</b>	<b>80</b>	<b>70</b>	<b>30</b>	

### Варіант №9

Постачальник/ Споживач	Родзинки	Київ	Вінниця	Чернігів	Наявність
Харків	23	8	17	24	<b>1600</b>
Слов'янськ	16	30	6	9	<b>540</b>
Кривий Ріг	19	27	18	15	<b>1800</b>
<b>Потреба</b>	<b>1720</b>	<b>380</b>	<b>600</b>	<b>1240</b>	

### Варіант №10

Постачальник/ Споживач	Авдєєвка	Слов'янськ	Харцизьк	Макіївка	Наявність
Донецьк	5	8	9	11	<b>1200</b>
Горез	12	3	6	9	<b>530</b>
Докучаєвськ	3	4	8	7	<b>270</b>
Маріуполь	4	8	6	5	<b>1000</b>
<b>Потреба</b>	<b>1700</b>	<b>700</b>	<b>300</b>	<b>300</b>	

### Варіант №11

Постачальник/ Споживач	Завод 1	Завод 2	Завод 3	Завод 4	Наявність
Шахта 1	50	80	92	110	<b>7000</b>
Шахта 2	109	37	44	93	<b>3000</b>
Шахта 3	96	102	25	48	<b>4100</b>
<b>Потреба</b>	<b>6000</b>	<b>3020</b>	<b>1000</b>	<b>4080</b>	

### Варіант №12

Пункти відправлення	Запаси вантажу	Пункти призначення і їх потреби			
		1	2	3	4
I	<b>60</b>	4	6	3	5
II	<b>70</b>	8	9	7	6
III	<b>80</b>	10	12	5	9
IV	<b>70</b>	4	16	9	7
		<b>80</b>	<b>50</b>	<b>110</b>	<b>40</b>

### Варіант №13

Постачальник/ Споживач	П1	П2	П3	П4	Запаси
І1	8	6	10	15	<b>135</b>
І2	3	4	2	3	<b>80</b>
І3	12	7	1	9	<b>170</b>
<b>Потреба</b>	<b>90</b>	<b>140</b>	<b>80</b>	<b>75</b>	

### Варіант №14

Пункти ввезення		Київ	Донецьк	Макіївка	Запаси
Пункти вивозу	Харків	23	25	27	<b>700</b>
	Вінниця	11	12	13	<b>1200</b>
	Чернівці	34	33	32	<b>2100</b>
	<b>Потреби</b>	<b>1000</b>	<b>1500</b>	<b>1500</b>	

### Варіант №15

Постачальник/ Споживач	Завод 1	Завод 2	Завод 3	Завод 4	Наявність
Коксохім 1	150	80	120	170	<b>6450</b>
Коксохім 2	69	57	44	98	<b>2700</b>
Коксохім 3	35	65	80	70	<b>1150</b>
<b>Потреба</b>	<b>2300</b>	<b>3000</b>	<b>1700</b>	<b>3300</b>	

### Варіант №16

Пункти відправлення	Запаси вантажу	Пункти призначення і їх потреби				
		П1	П2	П3	П4	П5
А	<b>50</b>	4	1	2	3	3
В	<b>20</b>	3	1	5	2	4
С	<b>30</b>	5	6	1	4	2
		<b>30</b>	<b>5</b>	<b>25</b>	<b>15</b>	<b>25</b>

### Варіант №17

Постача льник	Денна произ- водительность	Споживач			
		1	2	3	4
А	<b>80000</b>	4	1	3	5
У	<b>120000</b>	5	2	8	4
З	<b>100000</b>	3	4	6	7
		<b>90000</b>	<b>65300</b>	<b>84700</b>	<b>60000</b>

### Варіант №18

Постачальник/ Споживач	Агрофірма 1	Агрофірма 2	Агрофірма 3	Агрофірма 4	Наявність
Шахта 1	40	80	92	11	<b>6800</b>
Шахта 2	10	37	44	39	<b>2040</b>
Шахта 3	29	17	25	48	<b>3160</b>
<b>Потреба</b>	<b>3600</b>	<b>3000</b>	<b>1400</b>	<b>4000</b>	

### Варіант №19

Пункти відправлення	Запаси вантажу	Пункти призначення і їх потреби			
		1	2	3	4
I	<b>60</b>	4	6	3	5
II	<b>70</b>	10	12	5	9
III	<b>80</b>	6	2	8	7
IV	<b>70</b>	4	9	16	7
		<b>80</b>	<b>50</b>	<b>110</b>	<b>40</b>

### Варіант №20

Постачальник/ Споживач	Родзинки	Київ	Вінниця	Чернігів	Наявність
Харків	23	8	17	24	<b>1600</b>
Слов'янськ	16	30	6	9	<b>540</b>
Кривий Ріг	19	27	18	15	<b>1800</b>
<b>Потреба</b>	<b>1720</b>	<b>380</b>	<b>600</b>	<b>1240</b>	

#### **Контрольні питання**

1. Назвіть відомі вам методи визначення опорного плану постачань.
2. Як знайти план транспортного завдання методом "північно-західного кута"?
3. Як знайти план транспортного завдання методом найменшої вартості перевезень?
4. Як знайти план транспортного завдання методом найбільшої переваги тарифів?
5. Як знайти план транспортного завдання методом Фогеля?
6. Що називається циклом?
7. Скільки зайнятих кліток повинне бути в таблиці постачань?
8. Скільки циклів можна побудувати для кожної вільної клітки таблиці постачань?



9. Що називається потенціалом клітки?
10. Як порахувати потенціали для зайнятих кліток?
11. Як методом потенціалів знайти оцінки незайнятих осередків ?
12. Як перерозподілити постачання із зайнятого осередку у вільну?
13. Скільки осередків можна перерозподілити за один крок алгоритму транспортного завдання?

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №5 “ВИРІШЕННЯ ЗАВДАНЬ ВИРОБНИЧОГО ПЛАНУВАННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ MICROSOFT EXCEL”.

**Мета роботи:** придбання навиків вирішення завдань виробничого планування в табличному редакторі Microsoft Excel.

*Завдання виробничого планування.*

Допустимо вирішується завдання про визначення оптимального плану виробництва цукерок, в табл.5.1 наводяться дані про витрату цукру, шоколаду і так далі на виробництво одиниці продукції, запаси, що є на складі і прибуток від продажу одиниці виробу.

Таблиця 5.1- Витрати і прибуток від реалізації цукерок

Цукерки	Грильяж	Білочка	Метеорит	Вишня	Запаси
Цукор	2,70	2,70	3,00	3,00	800,00
Шоколад	1,00	2,00	1,20	1,30	400,00
Горіхи	0,70	1,50	0,20	0,00	260,00
Ваніль	0,10	0,00	0,10	0,00	220,00
Сироп	0,60	0,20	0,20	0,40	120,00
Прибуток	4,00	3,80	4,10	3,90	

Здійснимо математичну постановку завдання.

1. За невідомих приймемо оптимальну кількість виробництва цукерок одного вигляду, кількість «Грильяжу», яку вигідно провести позначимо через  $x_1$ , кількість «Білочки» через  $x_2$ , відповідно «Метеорит» через  $x_3$ , «Вишню» через  $x_4$ . Таким чином, маємо чотири невідомих.
2. Цільова функція повинна визначати прибуток від виробництва, тоді, якщо прибуток від продажу одиниці «Грильяжу» рівний 4, то продаж  $x_1$  кількості принесе прибуток рівну  $4x_1$ , відповідно прибуток від реалізації «Білочки» складе  $3,80 x_2$ , «Метеорита» -  $4,10 x_3$ , «Вишні» -  $3,90 x_4$ . Оскільки ми розраховуємо загальний прибуток, то цільова функція має вигляд

$$4x_1 + 3,80 x_2 + 4,10 x_3 + 3,90 x_4 \rightarrow \max \quad (1)$$

(максимум, ясно, що ставиться завдання отримання максимального прибутку, а не мінімальною)

3. Якби не було обмежень, то завдання наважувалося б дуже просто за типом проводити всього і більше, проте нас лімітують запаси на складі. Ми не можемо використовувати цукру більш 800ед., шоколаду більше 400 і так далі Отже, ми повинні задати обмеження, пов'язані з витратою цукерок, що становлять для виробництва. Вони виглядають таким чином:

$$2,70x_1 + 2,70x_2 + 3,00x_3 + 3,00x_4 \leq 800 \quad (2)$$

(витрата цукру при виробництві всіх видів цукерок не повинна перевищувати 800)

$$1x_1 + 2x_2 + 1,20x_3 + 1,30x_4 \leq 400 \quad (3)$$

$$0,70x_1 + 1,50x_2 + 0,20x_3 \leq 220 \quad (4)$$

$$0,60x_1 + 0,20x_2 + 0,20x_3 + 0,40x_4 \leq 120 \quad (5)$$

Завдання полягає у визначенні ненегативних змінних  $x_i$ , що задовольняють системі обмежень і що забезпечують максимум цільової функції.

### Комп'ютерна реалізація рішення поставленої задачі

1. На рис.4.1 показана таблиця в Excel с введеними початковими даними и комітками, виділеними для введення приведених вище формул

	А	В	С	Д	Е	F
2	Конфеты	Грильяж	Белочка	Метеорит	Вишня	Запасы
3	Сахар	2,70	2,70	3,00	3,00	800,00
4	Шоколад	1,00	2,00	1,20	1,30	400,00
5	Орехи	0,70	1,50	0,20	0,00	260,00
6	Ваниль	0,10	0,00	0,10	0,00	220,00
7	Сироп	0,60	0,20	0,20	0,40	120,00
8	Прибыль	4,00	3,80	4,10	3,90	
9						
10	Результат					
11	Ограничение на сахар					
12	Ограничение на шоколад					
13	Ограничение на орехи					
14	Ограничение на ваниль					
15	Ограничение на сироп					
16	Прибыль					
17						

Таблиця початкових даних

В ці осередки будуть вводиться обмеження

Осередки, що відводиться для невідомих, наприклад, В10 буде використовуватися як  $x_1$ , С10 як  $x_2$

Рисунок 5.1 - Електронна таблиця з початковими даними

2. Почнемо з програмування обмежень (2-5). Встановимо курсор в осередок В11. Розглянута раніше функція СУММПРОІЗВ, яка використовується для перемножування поелементно двох масивів В10:Е10 і В3:Е3 з подальшим складанням, дозволить запрограмувати ліву частину нерівності (2). На рис.5.2 показано вікно, використовуване для завдання параметрів функції.

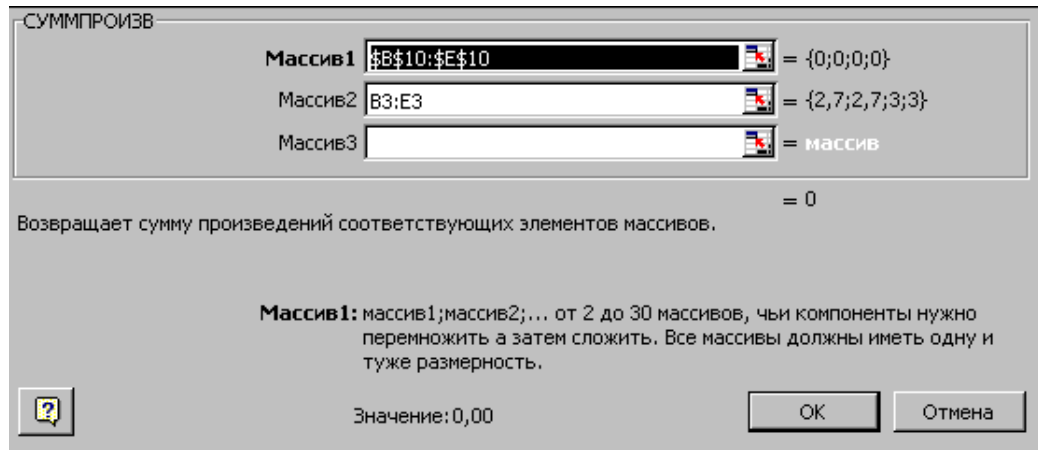


Рисунок 5.2 - Вікно функції СУММПРОИЗВ

Зверніть увагу, що перший масив заданий в абсолютній адресації, бо формулу  $=СУММПРОИЗВ(B10:E10;B3:E3)$  слід копіювати в осередки B12:B15. Якщо не використати абсолютної адресації, формула буде перетворена на  $=СУММПРОИЗВ(B11:E11;B4:E4)$ , причому, якщо в осередках B4:E4 містяться дані щодо витрат шоколаду, то осередки B11:E11 використовуватися не повинні, бо для невідомих виділений інтервал B10:E10. На рис.5.3 показано вікно з використаними формулами.

	А	В	
5	Орехи	0,7	1,4
6	Ваниль	0,1	0,2
7	Сироп	0,6	0,6
8	Прибыль	4	3,4
9			
10	<i>Результат</i>		
11	Ограничение на сахар	$=СУММПРОИЗВ(\$B\$10:\$E\$10;B3:E3)$	
12	Ограничение на шоколад	$=СУММПРОИЗВ(\$B\$10:\$E\$10;B4:E4)$	
13	Ограничение на орехи	$=СУММПРОИЗВ(\$B\$10:\$E\$10;B5:E5)$	
14	Ограничение на ваниль	$=СУММПРОИЗВ(\$B\$10:\$E\$10;B6:E6)$	
15	Ограничение на сироп	$=СУММПРОИЗВ(\$B\$10:\$E\$10;B7:E7)$	
16	Прибыль	$=СУММПРОИЗВ(\$B\$10:\$E\$10;B8:E8)$	
17			
18			

Рисунок 5.3 - Формули, використовувані для створення моделі

- Після введення формул викликати меню Сервіс/Пошук рішення. На екрані з'явиться вікно, показане на рис.5.4. Спочатку заповнюється поле «Встановити цільову», в це поле вводиться адреса осередку, що містить цільову функцію, в нашому випадку, це осередок B16 (рис.5.1). Потім указується, що функція повинна прагнути до максимуму (формула 1).

Вибирається група осередків, пов'язаних з формулою в цільовому осередку. Обмеження вводяться в поле з назвою «Обмеження» при клацанні по кнопці **Додати**. Після введення всіх параметрів натискається кнопка **Виконати** і у виділених як змінні осередки, з'явиться результат рішення задачі.

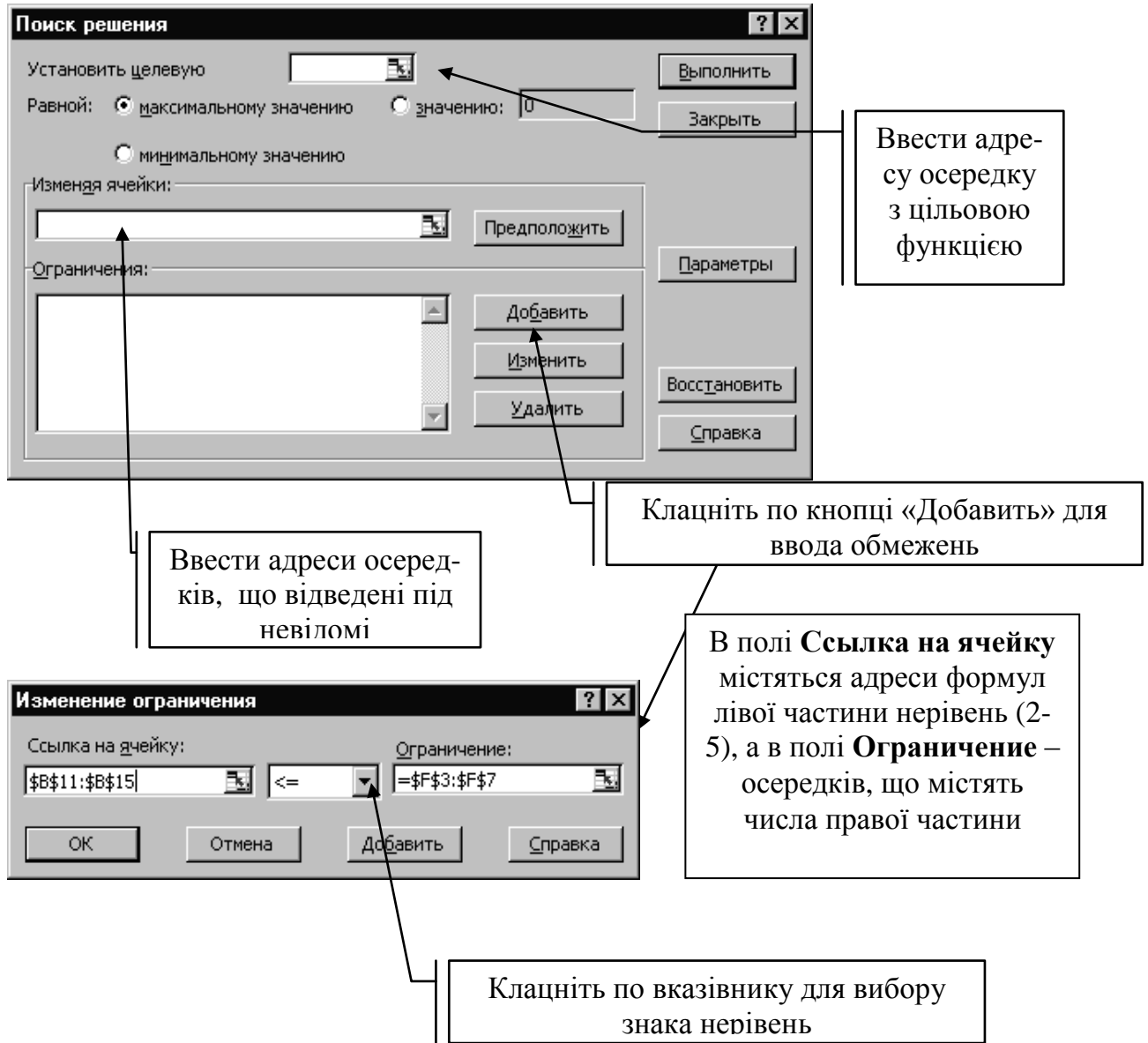


Рисунок 5.4 - Вікно «Пошук рішення»

На рис.5.5 показано вікно з вже введеними параметрами. Звернете увагу, що обмеження вводилися відразу інтервалом осередків, хоча можна було вводити їх поодинці, просто це зайняло б більше часу. Перше обмеження використовується для завдання додатності невідомих (погодитесь, кількість цукерок не може бути рівною  $-10$ , навіть, якщо ви їх вже з'їли), друге - для програмування нерівностей (2-5).

Після клацання по кнопці **Виконати** (рис.5.5) отримані результати, які представлені в табл.5.2.

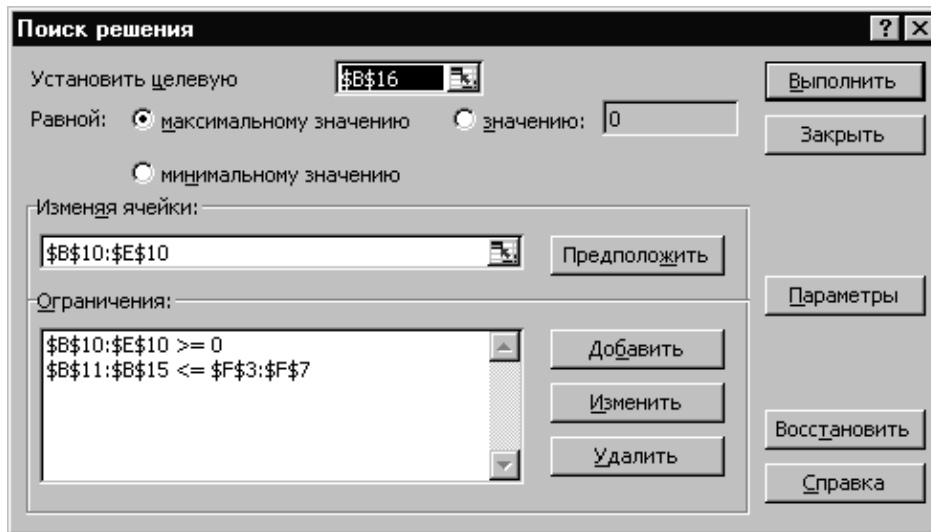


Рисунок 5.5 Вікно «Пошук рішення» із заповненими параметрами

Таблиця 5.2 - Результати рішення задачі про оптимальний план виробництва цукерок

Цукерки	Грильяж	Білочка	Метеорит	Вишня
<i>Результат</i>	<b>154,17</b>	<b>95,83</b>	<b>41,67</b>	<b>0,00</b>
Обмеження на цукор	800,00			
Обмеження на шоколад	395,83			
Обмеження на горіхи	260,00			
Обмеження на ваніль	19,58			
Обмеження на сироп	120,00			
Прибуток	1151,67			

Як видно з таблиці, виробництво цукерок «Вишня» недоцільно ( $x_4=0$ ), «Грильяж» вигідно провести в кількості 154,17 од. ( $x_1=154,17$ ), кількість «Білочки»  $x_2=95,83$ , «Метеорит»  $x_3=41,67$ . Отриманий при цьому прибуток становитиме 1151,67. Аналіз таблиці результатів показав, що повністю використані наявні запаси цукру, а ось ваніль - всього 19,58ед., при запасах рівних 220,00, але це вже завдання для економічного аналізу.

### **Індивідуальні завдання до лабораторної роботи № 5.**

Для моделі ЛП, відповідно до номера Вашого варіанту, знайти оптимальне рішення задачі виробничого планування в табличному редакторі Microsoft Excel.

#### **Варіант №1**

Для виготовлення чотирьох виробів використовується токарне, фрезерне, зварювальне і шліфувальне устаткування. Витрати часу на обробку кожного виробу приводяться в таблиці. Визначити, скільки виробів і якого вигляду потрібно виготовити підприємству, щоб прибуток був максимальним.

Тип устаткування	A	B	C	D	Фонд робочого часу
Фрезерне	2	4	5	3	120
Токарне	1	8	6	9	280
Зварювальне	4	5	2	1	240
Шліфувальне	4	6	7	11	360
Прибуток	2	3	1	4	

#### **Варіант №2**

При відгодівлі тварин кожна тварина повинна отримувати щодня не менше 60 од. живильної речовини А, не менше 40 од. живильної речовини В, не менше 50 од. живильної речовини С. Ці живильні речовини містяться в п'яти видах корму. Скласти денний раціон, що забезпечує необхідну кількість живильних речовин, при мінімальних витратах, якщо ціна 1 кг корма I виду складає 9 грн., II – 12 грн, III – 10 грн, IV - 13 грн, V – 8 грн.

Живильні речовини	Кількість одиниць живильного речовини в 1 кг корму				
	I	II	III	IV	V
A	0	3	4	2	5
B	2	4	2	5	3
C	3	7	4	6	3

#### **Варіант №3**

Із стандартних листів потрібно вирізувати заготовки в кількостях відповідно 31, 24, 18 і 45 шт. Кожен лист може розрізати на заготовки декількома способами. Кількість отримуваних заготовок при даному способі розкрою приведена в таблиці. Визначити, скільки листів фанери і за яким способом слід розкроїти так, щоб було отримано не менше потрібної кількості заготовок при мінімальних витратах.

Вид заготовки	Кількість заготовок в шт. при розкрої за способом			
	1-й спосіб	2-ою спосіб	3-ий спосіб	4-й спосіб
I	3	4	6	8
II	3	3	5	9
III	5	5	3	5
IV	7	7	3	4

#### Варіант №4

На звірофермі для забезпечення нормальних умов вирощування використовуються три види кормів. Кількість кормів кожного виду, яке повинні щодня отримувати звіри, приведена в таблиці. Визначити, скільки і яких звірів слід вирощувати, щоб прибуток від реалізації був максимальним.

Вид кормів	Кількість одиниць корми, які щодня повинні отримувати				Загальна кількість корму
	лисиця	песець	нірка	соболь	
I	4	5	6	4	123
II	3	4		4	345
III	3	5	7	2	234
IV	6	7	2	2	567
Прибуток від реалізації	31	23	34	45	

#### Варіант №5

Для виготовлення чотирьох видів виробів може бути використана тканина трьох видів. Норми витрати на пошиття одного виробу приведені в таблиці. Визначити, скільки виробів і якого вигляду повинна провести фабрика, щоб вартість виготовленої продукції була максимальною.

Артикул тканини	Норми витрати тканини на один виріб вигляду				Загальна кількість тканини
	Сорочка	Халат	Спідниця	Піджак	
шерсть	5	-	6	-	180
шовк	6	8	-	9	380
ситець	3	-	8	-	900
Ціна одного виробу	9	6	4	7	

#### Варіант №6

Для виготовлення столів і шаф застосовується три види деревини. Витрата деревини для кожного виробу приведена в



таблиці: Дохід від виготовлення одного столу складає 10 грн., книжкової полиці – 7грн, а шафи -12 грн. Знайти, скільки і яких видів виробів слід виготовити, щоб прибуток був максимальним.

Виріб	Вид деревини		
	1	2	3
Стіл, м <sup>3</sup>	0.3	0.25	0.25
Книжкова полиця, м <sup>3</sup>	0.2	0.4	0.32
Шафа, м <sup>3</sup>	0.43	0.53	0.34
Запаси деревини, м <sup>3</sup>	60	50	40

### Варіант№7

Розподілити площу для засіву під різні культури, щоб валова продукція у вартісному виразі була найбільшою. У таблиці вказані витрати праці на кожну культуру.

Показники	Яч- мінь	Соняшник	Цукровий буряк	Виробничі ресурси
Витрати на механі- зованих роботах	0.6	2.5	4.5	4500
Витрати кінно- ручної праці	2	3	22	8000
Ціна 1 ц продукції	5	7	4	-

Врожайність ячменю складає 25ц з гектара, соняшнику–45ц, буряка–80ц.

### Варіант№8

Фабрика випускає іграшки. На кожну іграшку потрібний матеріал. Яку іграшку і в якій кількості вигідно проводити, щоб отримати найбільший прибуток, причому металу на складі 254 од., пластмаси- 345, фарби - 189.

Показники	Лялька	Літак	Конструктор	Кубики
Пластмаса	4	2	0.5	0.7
Фарба	0.3	0.6	0.5	0.8
Метал	1	5	3	0
Прибуток	3	5	2	1

### Варіант№9

У виробництві використовуються сталеві лозини завдовжки 110 см. Необхідно розрізати на заготовки довгої 45, 35 і 50 см. Необхідна кількість заготовок кожного типу 40, 30 і 20 шт. відповідно. Скільки лозин по кожному варіанту слід розрізати для отримання потрібної кількості при мінімальних відходах.

Довжина заготовки	Варіант розрізу					
	1	2	3	4	5	6
45	2	1	1	-	-	-
35	-	1	-	3	1	-
50	-	-	1	-	1	2
Відходи	20	30	15	5	25	10

### Варіант №10

Для виробництва деяких видів меблів фабрика використовує ресурси, норми витрат на один виріб і загальну кількість ресурсів приведені в таблиці. Знайти, скільки і яких видів виробів слід виготовити, щоб прибуток був максимальним.

Ресурси	Норми витрат ресурсів на один виріб				Загальна кількість ресурсів
	стіл	шафа	табурет	ліжка	
Деревина (м <sup>3</sup> )					
І виду	2	1	0.4	3	45
II виду	3	2	0.8	4	60
Трудомісткість	2	5	1	7	378
Прибуток	6	8	4	9	

### Варіант №11

Фабрика випускає шкіряні брюки, куртки, пальто. В процесі виготовлення вироби проходять три ділянки, час обробки і планова собівартість виробів приведені в таблиці. Обмеження на фонд часу на ділянках відповідно складають 4000, 4200 і 4400 годин. Скласти модель випуску вказаних виробів, виходячи з вимог мінімізації собівартості продукції, що випускається, і необхідності забезпечення плану випуску 1800, 3600 і 1500 виробів відповідно.

Показники	Брюки	Куртки	Пальто
Норма часу на дубильній ділянці	0.4	0.5	0.7
Норма часу на ділянці розкрою	0.5	0.3	0.8
Час на пошивочній ділянці	0.6	0.5	0.8
Планова собівартість, крб.	20	35	80

### Варіант №12

На заводі використовується сталь три марки: А, В і С, запаси яких відповідно рівні 10, 16, і 12 од. Завод випускає два види виробів. Для виробу I потрібний по одній одиниці сталі всіх марок. Для виробу II потрібно 2 одиниці сталі марки В, одна- марки С і не потрібна сталь марки А. Від реалізації одиниці виробу I виду завод

отримує 300грн. прибутку, II виду - 200грн. Скласти план випуску продукції, що дає найбільший прибуток.

### Варіант№13

На трьох ділянках шахти спільно здобувається вугілля, причому за день необхідно отримувати не менше 6000 т. енергетичного і 2000т коксуючого вугілля. Знайти оптимальний розподіл плану між ділянками, що дає максимум прибули.

Номер ділянки	Енергетичне вугілля	Коксуюче вугілля	Витрати на 1т.
1	100	-	9
2	50	50	11
3	20	80	13
Прибуток крб.	9,9	14,3	

### Варіант№14

При виробництві двох видів кабелю виконуються чотири технологічні операції. Норми витрат на 1 км. кабелю кожного виду і прибуток від реалізації приведена в таблиці. Визначити такий план випуску кабелю, при якому прибуток буде максимальним.

Операція	Норми витрат часу			Фонд часу
	1	2	3	
Волочіння	1,2	1,8	1,6	4200
Накладення ізоляцій	1,0	0,6	0,7	5300
Алітирування	3,0	1,6	1,8	2800
Прибуток	2,8	1,9	2,3	

### Варіант№15

На фабриці виготовляють тканину, для виробництва якої необхідні верстати, пряжи і фарбники. Визначити план виготовлення тканин з максимальною загальною вартістю.

Ресурси	Норми витрат на 1 м			Вартість
	1	2	3	
Продуктивність верстатів 1 виду	0,02	-	0,04	200
2 види	0,04	0,03	0,01	500
Пряжа, кг	1,0	1,5	2,0	15000
Фарбники, кг	0,03	0,02	0,025	450
Ціна 1 м	5	8	8	

### Варіант №16

Підприємство має в своєму розпорядженні три групи устаткування і може випускати на ньому чотири види продукції. Трудомісткість обробки кожного виробу на різному устаткуванні і прибуток приведені в таблиці. Виходячи з вимог максимізації прибули, сформувавши модель розподілу виробів по різних групах устаткування.

Номер виробу	Трудомісткість обробки по групах, устаткування/година			Прибуток за штуку	Мінімальний об'єм реалізації, шт.
	1	2	3		
1	2	4	3	3	1200
2	7	3	4	6	1500
3	3	0	2	5	1300
Фонд часу, година	1200	1000	1800	-	-

### Варіант №17

Фабрика випускає три види тканин. Добові ресурси фабрики наступні: 700 од. виробничого устаткування, 800 од. сировини і 900 од. електроенергії, витрата яких на одиницю тканини представлена в таблиці.

Ресурси	Тканини			
	I	II	III	IV
Устаткування	2	4	4	8
Сировина	7	3	5	2
Електроенергія	13	14	12	10

Ціна одного метра тканини I рівна 8грн., тканини II- 7грн. і тканини III- 6грн., тканини IV- 5грн. Скільки треба провести тканини кожного виду, щоб прибуток від реалізації був найбільшим?

### Варіант №18

Вироби чотирьох типів проходять послідовну обробку на трьох верстатах. Час обробки кожного виробу приведений в таблиці.

Верстат	Час обробки одного виробу, ч.			
	Тип 1	Тип 2	Тип 3	Тип 4
1	14	12	10	12
2	13	14	11	10
3	15	15	12	12

Витрати на виробництво одного виробу кожного типу визначаються як величини, прямо пропорційні часу використання верстатів (у машино-годинах). Вартість однієї машиногодини складає 10 грн. для верстата1, 15 грн. - для верстата2 і 8 грн. - для верстата3. Допустимий час використання верстатів обмежений наступними значеннями: 500 машиногодин - для верстата1, 380 машиногодин для верстата2 і 420 машиногодин - для верстата3. Ціни виробів 1, 2, 3 і 4 типів рівні 65, 70, 55 і 45 грн. відповідно. Сформулюйте для приведених умов завдання максимізації сумарного чистого прибутку.

### Варіант №19

Виробник елементів центрального опалювання виготовляє радіатори чотирьох моделей. Обмеження на виробництво обумовлених кількістю робочої сили і кількістю сталевих листів, з яких виготовляються радіатори.

Модель радіатора	A	B	C	D
Необхідна кількість робочої сили, людино-години	0,5	1,5	2	1,5
Необхідна кількість сталевих листів, м <sup>2</sup> .	4	2	6	8
Прибуток від продажу одного радіатора, грн.	5	5	12,5	10

У яких об'ємах випускати продукцію, щоб прибуток від продажу був максимальним?

### Варіант №20

Фірма виробляє два типи підшипників А, Б і В, кожен з яких повинен бути оброблений на трьох верстатах, а саме на токарному, шліфувальному і свердлувальному. Час, потрібний для кожної із стадій виробничого процесу, приведений в таблиці.

Тип підшипника	Час обробки, ч.			Прибуток від продажу 1 підшипника, грн
	Токарний верстат	Шліфувальний верстат	Свердлувальний верстат	
А	0,01	0,02	0,04	0.80
Б	0,06	0,04	0,01	1.25
В	0,04	0,02	0,02	1.12
Час роботи в тиждень	160	120	150	

Фірма хотіла б проводити підшипники в кількостях, що максимізували її прибуток.

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №6 “ВИРІШЕННЯ ЗАВДАНЬ ПРО ПРИЗНАЧЕННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ MICROSOFT EXCEL”.

**Ціль роботи:** придбання навиків вирішення завдань про призначення в табличному редакторі Microsoft Excel.

### **Завдання про призначення**

Уявимо собі, що у нас є три людини, кожна з яких може виконати три види робіт. Наприклад, Булкін може провести наклейку шпалер за 45 хвилин, укладання кахлю за 2, столярні роботи умовного об'єму за 60 хвилин. Є три об'єкти, на які потрібно направити фахівців, причому в кожному квартиру піде одна людина і одна людина виконає тільки одну роботу.

Дані про витрати часу кожним робочим приведені в табл.6.1.

Таблиця 6.1 - Початкові дані для вирішення завдання про призначення

	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>
<b>1</b>		Булкін	Шапкін	Кошкін
<b>2</b>	Шпалери	45	55	200
<b>3</b>	Плитка	120	100	80
<b>4</b>	Сантехніка	60	45	110

Проблема полягає в тому, щоб правильно розподілити наявні людські ресурси відповідно до професійних вимог. Це завдання про призначення персоналу. У ній змінні інтерпретуються як призначення відповідної людини на певну роботу, причому сумарний час виконання ними робіт повинно бути мінімальне.

Дамо математичну постановку завдання. Вона багато в чому нагадує рішення транспортної задачі, зокрема невідомі розподіляються в таблиці аналогічно приведеним в табл.3.2. Цільова функція завдання повинна визначати сумарний час зайнятості робочих.

$$45x_1 + 55x_2 + 200x_3 + 120x_4 + 100x_5 + 80x_6 + 60x_7 + 45x_8 + 110x_9 \rightarrow \min$$

Кожна змінна може приймати лише значення, рівні одиниці або нулю. ( або показники витрат ).

	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>D</b>
<b>1</b>		<b>Булкін</b>	<b>Шапкін</b>	<b>Кошкін</b>
<b>2</b>	<b>Шпалери</b>	<b>45</b>	<b>55</b>	<b>200</b>
<b>3</b>	<b>Плитка</b>	<b>120</b>	<b>100</b>	<b>80</b>
<b>4</b>	<b>Сантехніка</b>	<b>60</b>	<b>45</b>	<b>110</b>

На рис.6.2 приведені формули, використовувані для завдання моделі.

	A	B	C	D	E
1		Булкін	Шапкін	Кошкін	
2	Обои	45	55	200	
3	Плитка	120	100	80	
4	Сантехника	60	45	110	
5					
6		Булкін	Шапкін	Кошкін	
7	Обои				=B7+C7+D7
8	Плитка				=B8+C8+D8
9	Сантехника				=B9+C9+D9
10		=СУММ(B7:B9)	=СУММ(C7:C9)	=СУММ(D7:D9)	
11	Время выполнения	=СУММПРОИЗВ(B2:D4;B7:D9)			
12					

Исходная таблица

Один человек на одну работу

Один человек на одну работу

Суммарное время выполнения

Рисунок 5.2 - Формулы, використовувані для програмування моделі

На рис.5.3 показано вікно «Пошуку рішення».

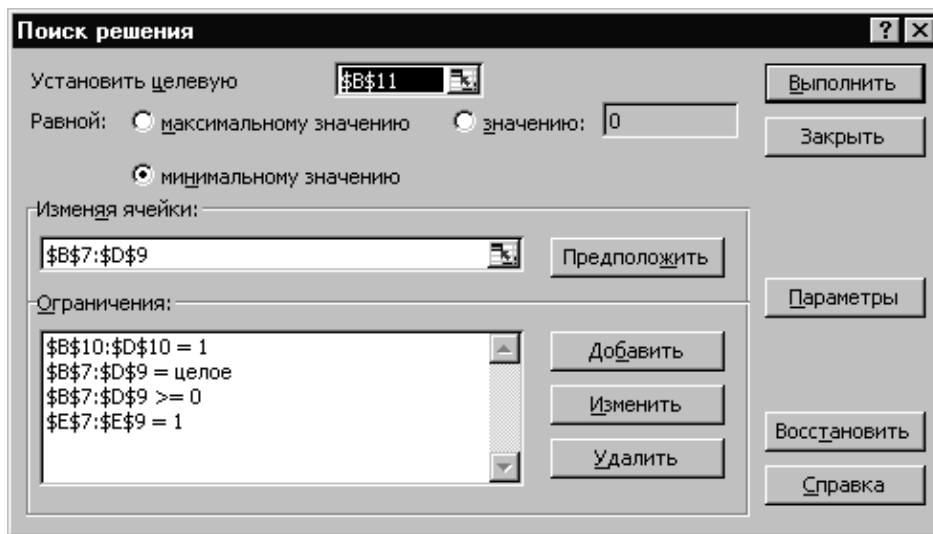


Рисунок 5.3 - Вікно «Пошуку рішення»

Результати розрахунків в табл.5.2.

Таблиця 5.2 - Результати розрахунку

	Булкін	Шапкін	Кошкін	
Шпалери	1	0	0	1
Плитка	0	0	1	1
Сантехніка	0	1	0	1
	1	1	1	
Час виконання	170			



Як видно з таблиці, Булкіну доцільно зайнятися наклейкою шпалер, Шапкіну – установкою сантехніки, а Кошкіну - виконувати роботу, пов'язану з укладанням плитки. Сумарний мінімальний час роботи скласти 170 годин для всіх працівників разом.

**Індивідуальні завдання до лабораторної роботи № 6.**

Для моделі ЛП, відповідно до номера Вашого варіанту, знайти оптимальне рішення задачі про призначення в табличному редакторі Microsoft Excel. У кожному завданні розподілити 6 працівників 6 робочим місцям, вважаючи, що числа в таблицях характеризують витрати часу для кожного учасника.

1

3	10	5	9	16	8
6	8	11	8	18	19
7	13	10	3	4	14
5	9	6	21	12	17
5	4	11	6	13	14
17	7	12	13	16	17

2

5	13	6	10	13	8
10	9	7	11	8	12
11	5	8	12	4	18
12	6	9	8	5	8
9	4	4	5	6	6
11	8	7	4	7	3

3

6	5	9	10	7	12
9	7	11	6	8	11
8	10	7	8	10	7
5	6	10	5	6	11
4	9	8	9	4	1
5	6	10	11	10	12

4

4	5	9	5	6	14
8	12	4	13	16	15
2	15	8	10	17	7
14	8	4	9	5	6
3	5	4	12	10	11
10	9	11	5	6	12

5

7	10	8	11	7	15
1	2	5	6	10	18
8	11	9	2	16	3
5	2	5	14	3	10
8	7	6	7	13	8
6	8	17	10	11	9

6

8	4	5	18	6	1
9	5	7	2	4	8
1	10	5	6	12	9
2	4	7	13	10	8
12	3	11	9	12	10
5	13	8	2	3	12

7

18	4	6	7	8	11
13	5	12	13	5	6
10	13	14	17	3	4
5	6	5	6	4	15
19	20	10	7	8	6

8

13	4	5	12	3	6
7	1	9	4	11	2
12	4	7	6	8	7
5	4	6	1	7	8
7	4	4	5	4	3

9

1	17	1	4	5	18
21	5	6	7	8	6
9	10	9	14	10	15
14	2	3	13	6	7
10	8	12	1	11	2
6	7	1	10	3	8

10

12	13	8	5	5	16
1	2	6	7	8	3
6	7	2	16	3	9
4	5	15	20	19	11
10	1	2	18	17	3
5	6	4	10	5	7

11

1	4	5	8	9	4
5	6	7	8	10	11
4	18	4	7	6	7
5	4	3	6	10	4
9	10	8	9	5	13
6	8	11	12	7	8

12

1	5	7	10	2	3
8	2	5	4	7	10
8	3	10	17	8	2
5	6	7	10	1	3
4	8	12	5	4	5
10	15	1	2	5	6

13

5	1	4	2	10	6
4	5	10	4	5	8
15	12	14	15	4	5
4	8	9	10	12	13
5	4	7	8	9	10
7	8	4	3	5	6

14

3	5	10	7	8	10
4	6	7	4	5	6
12	13	11	6	7	8
10	4	5	8	9	4
8	7	9	5	6	7
1	3	12	1	4	5

**15**

15	3	4	2	10	6
3	5	10	2	5	8
1	12	13	15	4	5
14	8	9	10	14	13
5	4	7	6	9	12
6	2	4	3	5	6

**16**

12	5	10	5	8	10
4	6	5	4	7	6
2	13	21	2	7	8
11	4	5	8	2	4
8	7	9	5	6	3
7	3	12	1	4	5

**17**

20	4	3	5	12	4
9	13	14	7	11	11
8	6	7	4	5	7
10	4	5	3	7	4
3	6	7	8	12	13
9	8	5	11	8	8

**18**

12	5	3	11	2	6
5	2	5	4	7	10
6	3	18	17	8	2
5	5	7	10	1	3
4	8	12	5	3	4
17	15	1	2	5	6

**19**

9	4	5	7	9	4
5	6	7	8	10	11
4	18	4	3	6	7
5	4	7	6	18	4
9	10	8	9	5	19
6	4	11	12	7	8

**20**

10	5	7	10	4	3
8	6	5	4	7	16
8	3	10	13	8	1
5	6	2	10	1	3
4	8	2	6	4	5
10	7	1	2	6	6

## ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №7 “ВИКОНАННЯ АНАЛІЗУ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИРІШЕННЯ ЗАВДАНЬ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ MICROSOFT EXCEL”.

**Мета роботи:** придбання навиків виконання аналізу результатів вирішення завдань лінійного програмування (ЛП) в табличному редакторі Microsoft Excel.

*Аналіз результатів вирішення завдань лінійного програмування*

Неминуче коливання значень таких економічних параметрів, як ціни на продукцію і сировину, запаси сировини, попит на ринку і так далі може привести до неоптимальності або непридатності колишнього режиму роботи. Для обліку подібних ситуацій проводиться аналіз чутливості, тобто аналіз того, як можливі зміни параметрів початкової моделі вплинуть на отримане раніше оптимальне рішення задачі ЛП.

Для вирішення завдань аналізу чутливості обмеження лінійної моделі класифікуються таким чином: *Зв'язуючі* обмеження проходять через оптимальну крапку. *Незв'язуючі* обмеження не проходять через оптимальну крапку. Аналогічно ресурс, що представляється зв'язуючим обмеженням, називають *дефіцитним*, а ресурс, що представляється незв'язуючим обмеженням, – *недефіцитним*. Обмеження називають надмірним в тому випадку, якщо його виключення не впливає на ОДР і, отже, на оптимальне рішення.

Виділяють наступні три завдання аналізу на чутливість.

1. *Аналіз скорочення або збільшення ресурсів:*  
- на скільки можна збільшити (обмеження типу  $\leq$ ) запас дефіцитного ресурсу для поліпшення оптимального значення ЦФ?

- на скільки можна зменшити (обмеження типу  $\leq$ ) запас недефіцитного ресурсу при збереженні оптимального значення ЦФ?

2. *Збільшення (обмеження типу  $\leq$ ) запасу якого з ресурсів найвигідніше?*

3. Аналіз зміни коефіцієнтів ЦФ: який діапазон зміни коефіцієнтів ЦФ, при якому не міняється оптимальне рішення?

Застосовуючи Пошук рішення, окрім знаходження оптимального рішення отримали 3 листи із звітами: Звіт по результатах, Звіт по межах, Звіт по стійкості. Аналізуючи ці звіти, ми можемо отримати відповіді на всі вищеперелічені питання.

**Розглянемо приклад.** Меблева фабрика проводить недорогі столи і стільці. У розпорядженні фабрики 4 види ресурсів, запаси яких обмежені. Потреби в ресурсах і можливості по їх використанню (запаси) протягом доби приведені в таблиці. Максимальна потреба в столах на плановий період - 40 шт. Кожен проданий стіл приносить прибуток в 7грн, а проданий стілець в 5грн (табл.7.1) .

Таблиця 7.1 – Початкові дані завдання

Ресурс	Потреба в ресурсі		Денний запас ресурсу
	Столи	Стільці	
Теслярська ділянка (час)	4	3	240
Ділянка фарбування (час)	2	1	100
Ділянка контролю (час)	0,5	0,6	36
Деревина (кв. м)	32	10	1248

Визначити оптимальний план виробництва меблевої фабрики. Початкові дані вводяться в таблицю Microsoft Excel (рис.7.1).

	A	B	C	D	E
1	Ресурс	Потреба в ресурсі		Денний запас ресурсу	Денний запас ресурсу (ограничение)
2		Столы	Стулья		
3	Плотницкий участок (время)	4	3	240	=СУММПРОИЗВ(B3:C3;\$B\$8:\$C\$8)
4	Участок покраски (время)	2	1	100	=СУММПРОИЗВ(B4:C4;\$B\$8:\$C\$8)
5	Участок контроля (время)	0,5	0,6	36	=СУММПРОИЗВ(B5:C5;\$B\$8:\$C\$8)
6	Древесина (кв. м)	32	10	1248	=СУММПРОИЗВ(B6:C6;\$B\$8:\$C\$8)
7	Потреба в столах	40			
8	План (шт)	10	10		
9	Прибыль (\$)	7	5		=СУММПРОИЗВ(B9:C9;\$B\$8:\$C\$8)
10					

	A	B	C	D	E
1	<b>Ресурс</b>	<b>Потребность в ресурсе</b>		<b>Дневной запас ресурса</b>	<b>Дневной запас ресурса (ограничение)</b>
2		<b>Столы</b>	<b>Стулья</b>		
3	Плотницкий участок (время)	4	3	240	70
4	Участок покраски (время)	2	1	100	30
5	Участок контроля (время)	0,5	0,6	36	11
6	Древесина (кв. м)	32	10	1248	420
7	Потребность в столах	40			
8	План (шт)	10	10		
9	Прибыль (\$)	7	5		120
10					
11					

Рисунок 7.1 – Представлення цільової функції і обмежень по денному запасу ресурсів у виді формул

Для вирішення завдання використовується команда: Сервіс - Пошук рішення. Вікно Пошуку рішень представлено на рис.7.2. У **Параметрах** поставити відмітку – Лінійна модель (рис.7.3). Після натиснення кнопки **ОК** – Виконати з'являється вікно результатів пошуку рішень (рис.7.3). Для отримання всіх видів звітів треба клацнути кнопкою миші на кожному з них – відповідні строчки будуть закрашені – а потім на **ОК**. Звіти відображаються в нижньому рядку Листа на екрані Excel. Для їх виклику необхідно клацнути на відповідному звіті.

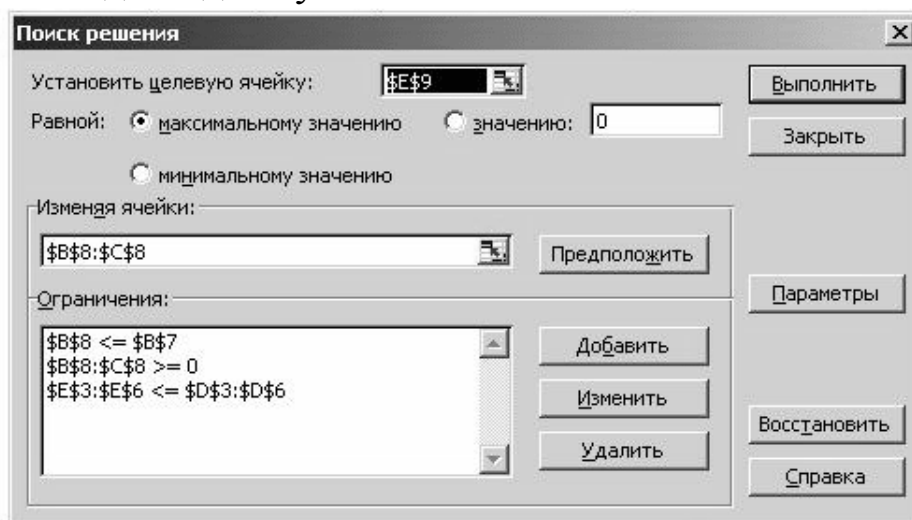


Рисунок 7.2 – Заповнене вікно Пошуку рішень

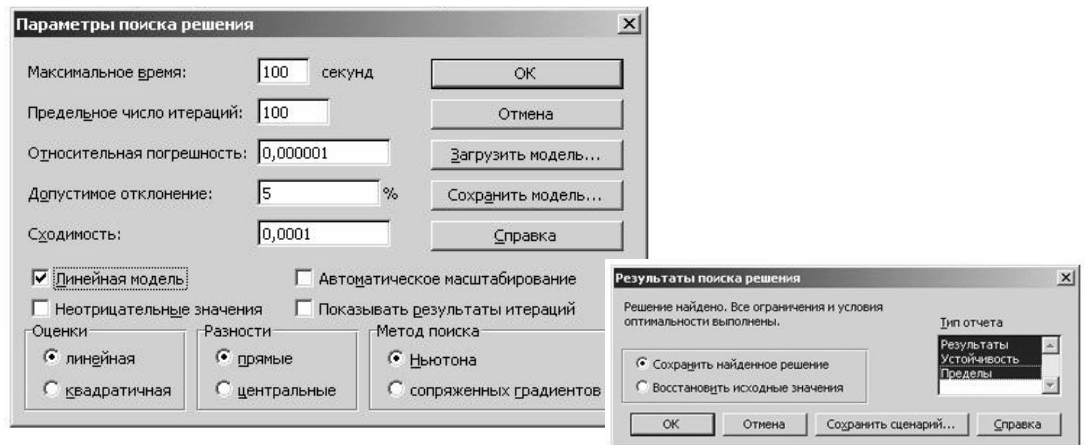


Рисунок 7.3 – Вікно параметрів і результатів Пошуку рішень  
Результати розрахунків приведені в табл.7.2.

Таблиця 7.2 – Отримані результати розрахунків

<i>Ресурс</i>	<i>Потреба в ресурсі</i>		<i>Денний запас ресурсу</i>	<i>Денний запас ресурсу (обмеження)</i>
	<i>Столи</i>	<i>Стільці</i>		
Теслярська ділянка (час)	4	3	240	221,0704225
Малярна ділянка (час)	2	1	100	91,94366197
Ділянка контролю-ОТК (час)	0,5	0,6	36	36
Деревина (кв. м)	32	10	1248	1248
Потреба в столах	40			
План (шт)	27,3803	37,1831		
Прибуток (\$)	7	5		377,5774648

Відповідь: оптимальний план виробництва меблевої фабрики: 27,4 столу і 37,2 стільця в добу. При цьому досягається максимальний прибуток в 377,58 одиниць.

У вікні **Результати пошуку рішення** міститься тип звіту: Результати, Стійкість, Межі. Використовуючи ці звіти можна проаналізувати поведінку оптимального плану в різних змінах.

Звіт по результатам складається з 3 таблиць (рис.7.4).

A	B	C	D	E	F	G
1	Microsoft Excel 11.0 Отчет по результатам					
2	Рабочий лист: [Практика_22.xls]Лист1					
3	Отчет создан: 14.03.2008 10:06:18					
4						
5						
6	Целевая ячейка (Максимум)					
7	Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат		
8	\$E\$9	Прибыль (\$) Дневной запас ресурса (ограничение)	120	377,5774648		
9						
10						
11	Изменяемые ячейки					
12	Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат		
13	\$B\$8	План (шт) Столы	10	27,38028169		
14	\$C\$8	План (шт) Стулья	10	37,18309859		
15						
16						
17	Ограничения					
18	Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
19	\$E\$3	Плотницкий участок (время) Дневной запас ресурса (ограничение)	221,0704225	\$E\$3<=\$D\$3	не связан.	18,92957746
20	\$E\$4	Участок покраски (время) Дневной запас ресурса (ограничение)	91,94366197	\$E\$4<=\$D\$4	не связан.	8,056338028
21	\$E\$5	Участок контроля (время) Дневной запас ресурса (ограничение)	36	\$E\$5<=\$D\$5	связанное	0
22	\$E\$6	Древесина (кв. м) Дневной запас ресурса (ограничение)	1248	\$E\$6<=\$D\$6	связанное	0
23	\$B\$8	План (шт) Столы	27,38028169	\$B\$8>=0	не связан.	27,38028169
24	\$C\$8	План (шт) Стулья	37,18309859	\$C\$8>=0	не связан.	37,18309859
25	\$B\$8	План (шт) Столы	27,38028169	\$B\$8<=\$B\$7	не связан.	12,61971831
26						

Рисунок 7.4 - Звіт по результатах

1 – *Цільовий осередок*. У ній відображається початкове значення цільової функції і оптимальне (результат). У нашому випадку 120 і 377,58.

2- *Змінні осередки*. У ній відбиті початкові значення змінних і результуючі (оптимальні). У нашій завданню – 10 і 27,38 столів, 10 і 37,18 стільців. Якщо продукт не входить в оптимальне рішення (рівний 0), то він вважається не рентабельним.

3- *Обмежень*. Окрім імені обмеження, осередку, в який вписана ліва частина обмеження, в ній відображені стовпці:

*Значення* – значення лівої частини обмеження при оптимальному плані показує кількість фактично використано ресурсу. Наприклад, Теслярська ділянка – 221,07 од., деревина – 1248 кв.м.

*Формула* – відображається знак обмеження (більше або рівно, менше або рівно і так далі)

*Статус* – Якщо статус *зв'язане*, то ресурс використаний повністю (наприклад, деревина, ділянка контролю). Якщо ж статус – *незв'язане*, то ресурс використаний не повністю (наприклад, теслярська ділянка, ділянка фарбування).

*Різниця* – відображена кількість ресурсу, що залишився не використаним (тобто різниця між значенням змінної в знайденому оптимальному рішенні і заданою для неї граничною умовою). Наприклад, теслярську ділянку – 18,93 одиниць, ділянку фарбування – 8,06 одиниць.



Таблиця 3 звіти по результатах дає інформацію для аналізу можливої зміни запасів *недефіцитних* ресурсів при збереженні набутого оптимального значення ЦФ. Якщо на ресурс накладено обмеження типу  $\geq$ , то в графі "Різниця" дається кількість ресурсу, на яку була перевищена мінімально необхідна норма. Якщо на ресурс накладено обмеження типу  $\leq$ , то в графі "Різниця" дається кількість ресурсу, яка не використовується при реалізації оптимального рішення.

На підставі проведеного аналізу можна зробити вивід про те, що існують причини (обмеження), що не дозволяють меблевому комбінату випускати більшу кількість полиць і отримувати великий прибуток. Проаналізувати ці причини дозволяє звіт по стійкості.

У звіті по стійкості (рис.7.5) межі стійкості невідомих завдання – допустиме збільшення і зменшення коефіцієнтів цільової функції, межі стійкості подвійних оцінок.

A	B	C	D	E	F	G	H
1	Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости						
2	Рабочий лист: [Практика_22.xls]Лист1						
3	Отчет создан: 14.03.2008 10:06:18						
4							
5							
6	Изменяемые ячейки						
7			Результ.	Нормир.	Целевой	Допустимое	Допустимое
8	Ячейка	Имя	значение	стоимость	Кoeffициент	Увеличение	Уменьшение
9	\$B\$8	План (шт) Столы	27,38028169	0	7	9	2,833333333
10	\$C\$8	План (шт) Стулья	37,18309859	0	5	3,4	2,8125
11							
12	Ограничения						
13			Результ.	Теневая	Ограничение	Допустимое	Допустимое
14	Ячейка	Имя	значение	Цена	Правая часть	Увеличение	Уменьшение
15	\$E\$3	Плотницкий участок (время) Дневной запас ресурса (огр	221,0704225	0	240	1E+30	18,92957746
16	\$E\$4	Участок покраски (время) Дневной запас ресурса (огран	91,94366197	0	100	1E+30	8,056338028
17	\$E\$5	Участок контроля (время) Дневной запас ресурса (огран	36	6,338028169	36	4,8	16,5
18	\$E\$6	Древесина (кв. м) Дневной запас ресурса (ограничение)	1248	0,11971831	1248	163,4285714	648
19							

Рисунок 7.5 - Звіт по стійкості

Звіт по стійкості складається з 2 таблиць.

Таблиця 1– *змінні осередки* містить інформацію, що відноситься до змінним. Окрім імені змінних і адрес осередків в ній присутні стовпці:

1. *Результат рішення задачі(Результуюче значення)* – це оптимальний план.

2. *Нормована (зредукована) вартість* – показує, на скільки зміниться цільова функція після примусового включення одиниці цієї продукції в оптимальний план. Якщо продукт рентабельний, то нормована вартість буде рівна 0. У нашому прикладі нормована вартість рівна 0 і для столів і для стільців, оскільки продукція рентабельна.

**3. Коефіцієнти ЦФ** – значення коефіцієнтів цільової функції. У нашому прикладі – питомий прибуток – 7 і 5.

**4. Допустиме збільшення, допустиме зменшення** – показує межі змін коефіцієнтів цільової функції, при яких зберігається набір змінних, що входять в оптимальне рішення. Наприклад, якщо вартість столу збільшиться на 9 і більш за одиниці (наприклад, 17), то зміниться набір змінних, що входять в оптимальне рішення. Який саме буде оптимальний план, ми сказати не можемо.

Таблиця 2 містить інформацію, що відноситься до *обмежень*. Окрім імені змінних і адрес осередків в ній присутні стовпці:

Величина використаних ресурсів в колонці "**Результ. значення**" - значення лівої частини обмеження при оптимальному плані показує кількість фактично використаного ресурсу. Наприклад, Теслярська ділянка – 221,07 од., деревина – 1248 кв.м.

*Результуюче значення Тіньова ціна* – зміна цільовій функції при зміні дефіцитного ресурсу на 1 одиницю. Тіньова ціна недефіцитного ресурсу буде рівна 0. Наприклад, зміни кількості ресурсу теслярської ділянки або ділянки фарбування не вплине на значення цільової функції (= 0). Якщо ж збільшити ресурс ділянки контролю на 2 одиниці (38 одиниць), то цільова функція збільшиться на  $2 * 6,338 = 12,676$  одиниць і стане рівною  $377,577 + 12,676 = 390,253$  одиниць.

*Обмеження Права частина* – запас ресурсу. *Допустиме збільшення, допустиме зменшення* - показує, на скільки можна змінити праву частину обмеження до того моменту поки це впливатиме на цільову функцію. Наприклад, збільшення запасу часу ділянки контролю більше, ніж на 4,8 одиниць вже не впливатиме на цільову функцію.

У графі "**Допустиме Зменшення**" показують, на скільки можна зменшити (усунути надлишок) або збільшити (підвищити мінімальна необхідна вимога) ресурс, зберігши при цьому оптимальне рішення. Аналізуючи звіт по результатах, ми встановили, що існують причини (обмеження), що не дозволяють меблевому комбінату випускати більше, ніж в оптимальному рішенні, кількість виробів і отримувати вищий прибуток.

**Примітка.** Якщо в параметрах Пошуку рішення не указувати – Лінійна модель, звіт по стійкості матиме вигляд (рис.7.6):

	A	B	C	D	E
1	M	Microsoft Excel 11.0 Отчет по устойчивости			
2	R	Рабочий лист: [Практика_22.xls]Лист1			
3	O	Отчет создан: 14.03.2008 13:44:38			
4					
5					
6		Изменяемые ячейки			
7				Результ.	Нормир.
8		Ячейка	Имя	значение	градиент
9		\$B\$8	План (шт) Столы	27,38028151	0
10		\$C\$8	План (шт) Стулья	37,18309916	0
11					
12		Ограничения			
13				Результ.	Лагранжа
14		Ячейка	Имя	значение	Множитель
15		\$E\$3	Плотницкий участок (время) Дневной запас ресурса (ограничение)	221,0704235	0
16		\$E\$4	Участок покраски (время) Дневной запас ресурса (ограничение)	91,94366218	0
17		\$E\$5	Участок контроля (время) Дневной запас ресурса (ограничение)	36,00000025	6,338027828
18		\$E\$6	Древесина (кв. м) Дневной запас ресурса (ограничение)	1248	0,119718315

Рисунок 7.6 - Звіт по стійкості для нелінійної моделі

*Нормований градієнт* - показує, на скільки зміниться значення цільового осередку при збільшенні значення змінної на одну одиницю.

*Лагранжа множник* - показує, на скільки зміниться значення в цільовому осередку при збільшенні запасу деякого ресурсу на одну одиницю.

У **звіті по межах** (рис.7.7) показані нижні і верхні межі зміни невідомих і значення цільової функції при цих змінах.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	M	Microsoft Excel 11.0 Отчет по пределам								
2	R	Рабочий лист: [Практика_22.xls]Отчет по пределам 1								
3	O	Отчет создан: 14.03.2008 10:06:18								
4										
5										
6			Целевое							
7		Ячейка	Имя	Значение						
8		\$E\$9	Прибыль (\$) Дневной запас ресурса (ограничение)	377,5774648						
9										
10										
11			Изменяемое							
12		Ячейка	Имя	Значение	Нижний предел	Целевой результат	Верхний предел	Целевой результат		
13		\$B\$8	План (шт) Столы	27,38028169	0	185,915493	27,38028169	377,5774648		
14		\$C\$8	План (шт) Стулья	37,18309859	0	191,6619718	37,18309859	377,5774648		

Рисунок 7.7 - Звіт по межах

Звіт по межах складається з 2 таблиць.

1 – оптимальне значення цільового осередку.

2 - результуючі (оптимальні) значення змінних з їх нижніми і верхніми межами і відповідними цільовими результатами.

*Значення* – оптимальне значення змінної.

*Нижня межа, верхня межа* - найменше значення, яке може мати змінний осередок за умови, що обмеження ще виконуються, а значення решти змінних осередків фіксовані (рівні оптимальним).

*Цільовий результат* - це значення цільового осередку, коли значення змінного осередку рівне її нижній або верхній межі. Наприклад, якщо столів не випускатимуть (0 штук – нижня межа), то при випуску 37,18 стільців, прибуток (цільова функція) дорівнюватиме 185,91.

### **Індивідуальні завдання до лабораторної роботи № 7.**

Для моделі ЛП, відповідно до номера Вашого варіанту, виконати аналіз результатів рішення задачі ЛП в табличному редакторі Microsoft Excel.

#### **Варіант 1**

Компанія проводить м'які меблі в звичайного виконання і у виконання люкс. Потреби в ресурсах приведені в таблиці. 364 годин часу в тиждень можуть бути використані на ділянці збірки, 280 годин в тиждень на ділянці фарбування і 60 годин в тиждень на ділянці контролю. Деревина є в кількості 5000 кв.м., тканина в кількості 1001 кв.м. Попит на меблі, щонайменше 150 одиниць продукції в звичайного виконання і 90 одиниць у виконання люкс. Компанія зацікавлена в оптимальному поєднанні випуску продукції протягом тижня.

Продукт	Внесок в прибуток	Витрата деревини	Час збірки	Витрата тканини	Час фарбування	Час контролю
Звичайний	\$50	15	1.2	3	0.8	0.2
Люкс	\$75	17	1.6	5	0.9	0.2

#### **Варіант 2**

Меблевий цех проводить платтяні і книжкові шафи. У розпорядженні цеху 4 види ресурсів, запаси яких обмежені. Потреби в ресурсах і можливості по їх використанню (запаси) протягом тижня приведені в таблиці. Максимальна потреба в платтяних шафах на плановий період - 100 шт. Кожну продану платтяну шафу приносить прибуток в 90 грн, а продана книжкова шафа в 57 грн.

	Платтяна шафа	Книжкова шафа	Тижневий запас ресурсу
Ділянка збірки (час)	4	3	638
Ділянка фарбування (час)	2	1	300
Ділянка контролю (час)	0.5	0.6	90
Деревообробна ділянка (час)	9	12	276

#### **Варіант 3**

Кооператив, використовуючи три типи ресурсів, реалізує продукцію чотирьох видів. Загальний об'єм ресурсів, їх витрати на

продаж одній партії виробів, а також прибуток від її реалізації приведені в таблиці.

Тип ресурсів	Витрати на реалізацію однієї партії виробів, грн.				Загальний об'єм ресурсів
	1-го виду	2-го виду	3-го виду	4-го виду	
Деревина	3	4	2	6	64
Тканина	4	7	3	5	83
Збірка	2	3	6	1	58
Прибуток від реалізації виробів, грн	14	15	12	17	

#### Варіант4

Меблева фабрика проводить комоди і крісла. У розпорядженні фабрики 4 види ресурсів, запаси яких обмежені. Потреби в ресурсах і можливості по їх використанню (запаси) протягом тижня приведені в таблиці. Максимальна потреба в кріслах на плановий період - 35шт. Кожен проданий комод приносить прибуток в 7,5грн., а продане крісло - в 6,2грн.

Ресурс	Потреба в ресурсі		Тижневий запас ресурсу
	Комоди	Крісла	
Ділянка збірки (годин)	4	3	220
Ділянка металоконструкцій (годин)	12	10	100
Ділянка контролю (годин)	0,5	0,6	32
Тканина		0,7	20

#### Варіант5

Завод випускає вироби двох типів: А і В. При цьому використовується сировина чотирьох видів. Витрата сировини кожного виду на виготовлення одиниці продукції і запаси сировини задані наступною таблицею:

Вироби	Сировина			
	I	II	III	IV
А	2	1	0	2
В	3	0	1	1
Запаси сировини	21	4	6	10

Випуск одного виробу типу А приносить 3,8 грн. прибули, одного виробу типу В - 2,4 грн. Скласти план випуску продукції, що забезпечує найбільший прибуток.

### **Варіант6**

На заводі використовується сталь трьох марок: 40ХН, У12 і Р18, запаси яких відповідно рівні 8, 16, і 10 од. Завод випускає два види виробів. Для виробу І потрібний по одній одиниці сталі всіх марок. Для виробу ІІ потрібно 2 одиниці сталі марки У12, одна - марки 40ХН і не потрібна сталь марки Р18. Від реалізації одиниці виробу І виду завод отримує 470грн. прибули, ІІ виду - 220грн. Скласти план випуску продукції, що дає найбільший прибуток.

### **Варіант7**

Підприємство має в своєму розпорядженні ресурси двох видів в кількості 120 і 80 од. відповідно. Ці ресурси використовуються для випуску продукції І і ІІ, причому витрата на виготовлення одиниці продукції першого вигляду складає 4 од. ресурсу першого вигляду і 2 од. ресурсу другого вигляду, одиниці продукції другого виду - 3 од. ресурсу першого вигляду і 1 од. ресурсу другого вигляду. Прибуток від реалізації одиниці продукції першого вигляду складає 600грн., другого виду - 400грн. Скласти план випуску продукції, що забезпечує найбільший прибуток, за умови, що продукції першого вигляду повинно бути випущено не менше продукції другого вигляду.

### **Варіант8**

Фабрика випускає три види тканин. Добові ресурси фабрики наступні: 700 од. виробничого устаткування, 800 од. сировини і 900 од. електроенергії, витрата яких на одиницю тканини представлена в таблиці.

Ресурси	Тканини		
	І	ІІ	ІІІ
Устаткування	21	32	16
Сировина	14	16	15
Електроенергія	17	14	22

Ціна одного метра І тканини рівна 8,2грн, ІІ тканини 7,4грн і ІІІ тканини - 6,6грн. Скільки треба провести тканини кожного виду, щоб прибуток від реалізації був найбільшим?

### Варіант9

Два види деталей А і В проходять обробку на всіх чотирьох верстатах. Відомі час обробки деталі на кожному верстаті, час роботи верстатів протягом одного циклу виробництва і прибуток, що отримується від випуску однієї деталі кожного виду. Ці дані приведені в таблиці.

Верстати	Час обробки однієї деталі, ч.		Час верстата за один цикл виробництва, ч
	А	В	
I	4	2	16
II	6	3	25
III	8	7	10
IV	3	1	24
Прибуток на одну деталь, грн.	400	100	

Скласти план виробництва, що забезпечує найбільший прибуток.

### Варіант10

Для відгодівлі тварин вживають два корми: 1 і 2. Вартість одного кілограма корму 1- 5 грн., корма 2- 2 грн. У кожному кілограмі корму 1 міститься 5 од. вітаміну А, 2,5 од. вітаміну В і 1 од. вітаміну С. В кожному кілограмі корму 2 міститься 3 од. вітаміну А, 3 од. вітаміну В і 1 од. вітаміну С. Яку кількість корму кожного виду необхідно витратити щодня, щоб витрати на відгодівлю були мінімальними, якщо добовий раціон передбачає не менше 225 живильних одиниць вітаміну А, не менше 150 од. вітаміну В і не менше 80 од. вітаміну С?

### Варіант11

На птахофермі уживається два види кормів - I і II. У одиниці ваги корму I міститься одиниця речовини А, одиниця речовини В і одиниця речовини С. В одиниці ваги корму II містяться чотири одиниці речовини А, дві одиниці речовини В і не міститься речовина С. В денний раціон кожного птаха треба включити не менше одиниці речовини А, не менше чотирьох одиниць речовини В і не менше одиниці речовини С. Ціна одиниці ваги корму I складає 30грн., корма II- 20грн. Скласти щоденний раціон



годування птаха так, щоб забезпечити найбільш дешевий раціон живлення.

### Варіант12

Меблеве мале підприємство проводить два види виробу. Потреби в ресурсах і можливості по їх використанню (запаси) протягом тижня приведені в таблиці. Максимальна потреба в изделии1 на плановий період - 120 шт. Кожне продане изделие1 приносить прибуток в 80грн, а продане изделие2 - в 67грн.

Запаси	Вироб1	Вироб2	Тижневий запас ресурсу
Ділянка збірки (годин)	6	4	638
Ділянка фарбування (годин)	3	2	400
Ділянка контролю (годин)	0.6	0.6	120

### Варіант13

На машинобудівному підприємстві для виготовлення чотирьох видів продукції використовується токарне, фрезерне, свердлувальне, розточувальне і шліфувальне устаткування, а також комплектуючі вироби. У таблиці вказані: норми витрати ресурсів на виготовлення одного виробу кожного виду, ресурси, що є в наявності, обмеження, обумовлені попитом на випуск продукції другого і третього видів, і прибуток від реалізації одного виробу. Потрібно визначити такий об'єм випуску продукції, який забезпечує підприємству найбільшою прибуток.

Устаткування	Норма витрати ресурсів на 1 виріб				Наявність
	Вироб1	Ізделиє2	Ізделиє3	Ізделиє4	
токарне	520		580		62400
фрезерне	30	40	20	20	3800
свердлувальне	75	110	140	32	21300
розточувальне	140	82	132	128	18620
шліфувальне		156	60	40	6300
Комплектуючі деталі	3	6	3	5	480
Випуск(шт)min		35			
max			130		
Прибуток від реалізації	315	278	620	350	

### Варіант14

Кооператив, використовуючи три типи ресурсів, виготовляє продукцію трьох видів. Загальний об'єм ресурсів, їх витрати на продаж одній партії виробів, а також прибуток від її реалізації приведені в таблиці.

Тип ресурсів	Витрати на виготовлення однієї партії виробів, грн.			Загальний об'єм ресурсів
	1-го вигляду	2-го вигляду	3-го вигляду	
Деревина	13	14	12	64
Тканина	14	17	15	83
Збірка	2	3	6	58
Прибуток від реалізації виробів, грн	24	16	12	

### Варіант15

Макаронна фабрика випускає три види продукції. Добові ресурси фабрики наступні: 600од. виробничого устаткування, 500од. сировини і 800од. електроенергії, витрата яких на одиницю продукції представлена в таблиці.

Ресурси	Вид продукції		
	I	II	III
Устаткування	2	3	4
Сировина	1	4	5
Електроенергія	3	4	2

Ціна однієї упаковки макаронного виробу I рівна 9грн, макаронного виробу II- 10грн і макаронного виробу III- 7грн. Скільки треба провести макаронних виробів кожного виду, щоб прибуток від реалізації був найбільшим?

### Варіант16

Три шліфувальні верстати обробляють два види деталей: А і В. Кожна деталь проходить обробку на всіх трьох верстатах. Відомі: час обробки деталі на кожному верстаті, час роботи верстатів в перебігу одного циклу виробництва і прибуток, що отримується від випуску однієї деталі кожного виду. Ці дані приведені в таблиці.

Верстати	Час обробки однієї деталі, мин.		Час верстата за один цикл виробництва, ч.
	А	В	
I	30	10	18
II	10	30	22
III	30	20	20
Прибуток на одну деталь, грн.	600	200	

### Варіант17

Підприємство, використовуючи чотири типи ресурсів, випускає продукцію трьох видів. Загальний об'єм ресурсів, їх витрати на виготовлення однієї партії виробів, а також прибуток від її реалізації приведені в таблиці.

Тип ресурсів	Витрати на реалізацію однієї партії виробів, грн.				Загальний об'єм ресурсів
	1-го виду	2-го виду	3-го виду	4-го виду	
Деревина	3	4	2	6	54
Папір	1	2	2	3	42
Тканина	4	7	3	5	73
Збірка	2	3	6	1	48
Прибуток від реалізації виробів, грн	16	18	22	15	

### Варіант18

Кондитерська фабрика випускає три види продукції. Добові ресурси фабрики наступні: 1200 од. виробничого устаткування, 2500 од. сировини і 1800 од. електроенергії, витрата яких на одиницю продукції представлена в таблиці.

Ресурси	Вид продукції		
	Цукерки	Кекси	Торти
Устаткування	10	22	18
Сировина	16	25	17
Електроенергія	20	24	26

Ціна однієї упаковки цукерок рівна 90грн, кексів - 10грн і тортів - 70грн. Скільки треба провести кондитерських виробів кожного виду, щоб прибуток від реалізації був найбільшим?

### Варіант19

Три шліфувальні верстати обробляють два види деталей: А, В і С. Кожна деталь проходить обробку на всіх трьох верстатах. Відомі: час обробки деталі на кожному верстаті, час роботи верстатів в перебігу одного циклу виробництва і прибуток, що отримується від випуску однієї деталі кожного виду. Ці дані приведені в таблиці.

Верстати	Час обробки однієї деталі, хвил.			Час верстата за один цикл виробництва, ч.
	А	В	С	
I	30	14	22	28
II	12	20	24	12
III	30	10	28	30
Прибуток на одну деталь, грн.	450	300	200	

### Варіант20

Підприємство, використовуючи три типи ресурсів, реалізує продукцію трьох видів. Загальний об'єм ресурсів, їх витрати на продаж одній партії виробів, а також прибуток від її реалізації приведені в таблиці.

Тип ресурсів	Витрати на реалізацію однієї партії виробів, грн.			Загальний об'єм ресурсів
	1-го виду	2-го виду	3-го виду	
Деревина	34	42	28	64
Папір	10	12	12	32
Клей	4	7	3	53
Збірка	12	15	16	38
Прибуток від реалізації 1 партії виробів, грн	16	18	22	

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	3
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1 “РІШЕННЯ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ MICROSOFT EXCEL” .....	4
· Контрольні питання.....	13
· Індивідуальні завдання до лабораторної роботи № 1. ....	14
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №2 “РІШЕННЯ ПОДВІЙНИХ ЗАДАЧ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ MICROSOFT EXCEL” .....	17
· Контрольні питання.....	19
· Індивідуальні завдання до лабораторної роботи № 2. ....	20
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №3 “РІШЕННЯ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧИ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ MICROSOFT EXCEL” .....	22
· Контрольні питання.....	26
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №4 “МЕТОДИ СКЛАДАННЯ ОПОРНОГО ПЛАНУ ТРАНСПОРТНИХ ЗАДАЧ” .....	27
· Індивідуальні завдання до лабораторної роботи № 3-4. ....	36
· Контрольні питання.....	40
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №5 “ВИРІШЕННЯ ЗАВДАНЬ ВИРОБНИЧОГО ПЛАНУВАННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ MICROSOFT EXCEL” .....	42
· Індивідуальні завдання до лабораторної роботи № 5. ....	47
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №6 “ВИРІШЕННЯ ЗАВДАНЬ ПРО ПРИЗНАЧЕННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ MICROSOFT EXCEL” ...	55
· Індивідуальні завдання до лабораторної роботи № 6. ....	57
ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №7 “ВИКОНАННЯ АНАЛІЗУ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИРІШЕННЯ ЗАВДАНЬ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ З ВИКОРИСТАННЯМ MICROSOFT EXCEL” .....	60
· Індивідуальні завдання до лабораторної роботи № 7. ....	69