О СУММИРОВАНИИ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ В КУРСЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Г.М.Улитин, доктор техн.наук, зав. кафедрой высшей математики,
А.Н.Гончаров, канд. физ.-мат.наук, доцент,
Донецкий национальный технический университет

При дослідженні збіжності знакосталих рядів розглядається питання оцінки решти ряду за допомогою заміни одного ряду іншим, відомим та більш простішим, який збігається швидше. Наведено приклади використання для такої заміни перетворення Кумера.

1. Введение.

При решении практических инженерно-технических задач мы достаточно редко получаем в процессе решения табличные интегралы или дифференциальные уравнения, допускающие стандартные классические решения. Как правило, наоборот, практическая задача сводится либо к «неберущимся» интегралам, либо к дифференциальным уравнениям, неразрешимым в элементарных функциях.

По этой причине достаточно важную роль в подготовке будущих инженеров играет раздел «Теория рядов», поскольку обычно только с помощью рядов мы можем получить решение инженерной проблемы. А получив в итоге решение в виде ряда, будущий инженер должен уметь оценить его сходимость и, наконец, вычислить сумму ряда с заранее заданной точностью.

Широкое использование в учебном процессе электронно-вычислительной техники и сравнительная легкость программирования процесса вычисления суммы ряда часто играет отрицательную роль в процессе решения подобных задач и приводит к ситуациям, когда необходимая точность вычисления не достижима. Полученный в процессе решения ряд может сходиться очень медленно, что при его суммировании неизбежно приводит к значительной погрешности вычислений.

Поэтому при изучении темы «Числовые ряды» в качестве основной задачи во втузовском курсе выдвигается задача исследования сходимости ряда с обязательным проведением оценки остатка ряда (точность вычислений). Это позволило бы вовремя прекратить вычисление последовательности частичных сумм.

Если полученный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ знакочередующийся, то в этом случае весьма простой ответ на этот вопрос дает теорема Лейбница – для остатка знакочередующегося ряда выполняется неравенство $|r_n| < |a_{n+1}|$.

Несколько сложнее обстоит дело в случае знакопостоянного ряда. В связи с этим в данной статье предлагается рассмотреть относительно простые приемы приближенного вычисления суммы ряда и ускорения этого процесса, не требующих особых затрат лекционного времени.

2. Методы оценки суммы ряда

Начнем с оценки суммы ряда. Введем общепринятые обозначения: S_n – частичная сумма; r_n – остаток ряда; S – сумма ряда. В некоторых случаях оценку δ можно получить непосредственно суммируя числовые ряды. Например, для ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}, \tag{1}$$

можно получить

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots = \frac{1}{n}, \tag{2}$$

т.е. оценка точности $\delta = 1/n$. Это означает, что для того, чтобы достигнуть точности вычислений, например, 0,000001, нам необходимо просуммировать 1000000 членов ряда

Для случая применения интегрального признака сходимости, если первообразная известна, можно использовать оценку [1]

$$F(\infty) - F(n+1) \le r_n \le F(\infty) - F(n). \tag{3}$$

Если же первообразная неизвестна, то

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \le r_n \le \int_{n}^{\infty} f(x)dx. \tag{4}$$

Причем, даже при известной первообразной, нахождение которой часто весьма трудоемко, провести оценку по формуле (3) порой затруднительно. Таким образом, встает вопрос о проведении оценки несобственных интегралов, используя формулы (4). Здесь целесообразно применить формулу приближенного вычисления несобственных интегралов [2], справедливую при достаточно больших a

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx \approx \frac{f^2(a)}{|f'(a)|}\omega, \tag{5}$$

где параметр ω определяется в зависимости от скорости стремления $f(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

Если, например, $f(x) \approx Ae^{-px}$ при $x \to \infty$, где A = const $\neq 0$, то $\omega = 1$ [2]. Используя аналогичный прием, для $f(x) \approx A\,x^{-p}$ легко получить $\omega = p/(p-1)$.

Тогда, например, для ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3+1} \tag{6}$$

p = 3 и в соответствии с формулой (5) получим для данного ряда оценку точности вычислений $\delta = \dfrac{1}{2n^2}$.

Рассмотрим еще один прием оценки остатка ряда. Если $u_{k+1}/u_k\downarrow$, то обозначая $q = u_{n+2}/u_{n+1}$, получим

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots = u_{n+1}\left(1 + \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} + \frac{u_{n+3}u_{n+2}}{u_{n+2}u_{n+1}} + \ldots\right) < u_{n+1}\left(1 + q + q^2 + \ldots\right) = \frac{u_{n+1}}{1-q}, \tag{7}$$

то есть

$$\delta = \frac{u_{n+1}}{1-q} = \frac{u_{n+1}^2}{u_{n+1} - u_{n+2}}.$$

Если же $u_{k+1}/u_k\uparrow$, то обозначая $q = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{u_{k-1}}{u_k}$, получим формулу, аналогичную (7), которая справедлива в этом случае при $q \neq 1$.

<u>Пример.</u> С точностью $\delta = 10^{-2}$ вычислить сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{k}{5^k}$.

Замечаем, что $u_{k+1}/u_k = (k+1)/5k\downarrow$ и согласно формуле (7), получаем

$$\delta = \frac{(n+1)^2}{5^n(4n+3)} = \frac{1}{475} < 10^{-2}$$

при $n = 4$ и тогда сумма ряда

$$S \approx \frac{1}{5} + \frac{2}{25} + \frac{3}{125} + \frac{4}{625} = 0{,}2 + 0{,}08 + 0{,}024 + 0{,}0064 \approx 0{,}31.$$

3. Ускорение сходимости ряда

Определяя сумму ряда (6) с достаточной точностью, замечаем, что суммировать приходится весьма значительное число членов ряда. Встает вопрос об ускорении сходимости ряда. Для этого можно использовать различные преобразования рядов, т.е. замену одного сходящегося ряда по некоторому правилу другим, более быстро сходящимся. Здесь мы рассмотрим наиболее простое из них – преобразование Куммера.

Пусть дан сходящийся ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_k + \ldots$$

и требуется вычислить его сумму с заданной точностью. Согласно необходимому условию сходимости $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = 0$.

Выберем другую бесконечно малую величину v_k эквивалентную u_k таким образом, чтобы ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ сходился и его сумма S была известна. В качестве таких рядов можно использовать, например, ряды [3]

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=1; \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)}=\frac{\pi^2}{6}-1; \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)^2}=\frac{\pi^2}{3}-3 \tag{8}$$

или другие известные значения дзета-функции Римана [4]

$$\zeta(p)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}.$$

Тогда $u_k - v_k = \alpha_k$, причем $\alpha_k = o(u_k)$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = S + \sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k \tag{9}$$

где ряд в правой части формулы (9) сходится быстрее, чем первоначальный. Причем, данное преобразование можно применять неоднократно, доведя количество значимых членов ряда до практической реализации.

4. Пример применения преобразования Куммера

Пусть нам требуется найти сумму ряда (6) с точностью $\delta = 10^{-4}$.

При простом суммировании для достижения заданной точности нам необходимо просуммировать 71 член ряда:

$$\delta = \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2\cdot 71^2} \le 0,0001.$$

В качестве ряда для применения преобразования Куммера выберем второй ряд из формул (8), тогда

$$\alpha_k = \frac{1}{k^3+1} - \frac{1}{k^2(k+1)} = \frac{k-1}{k^2(k^3+1)}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3+1} = \frac{\pi^2}{6} - 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-1}{k^2(k^3+1)}. \tag{10}$$

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\alpha_k$, стоящий в правой части формулы (9), сходится быстрее, чем данный. Для него оценка суммы остатка ряда, а, следовательно, и точности вычислений

$$r_n = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-1}{k^2(k^3+1)} < \int_n^{\infty}\frac{(x-1)dx}{x^5(x^2+1)} \approx \frac{1}{3n^3} = \frac{1}{3\cdot 15^3} = \frac{1}{10125} \le 0,0001$$

поэтому для достижения заданной точности необходимо просуммировать уже 15 членов ряда.

Применив преобразование Куммера еще раз, взяв третий ряд из формул (8), получим

$$\alpha_{k1} = \frac{k-1}{k^2(k^3+1)} - \frac{1}{k^2(k+1)^2} = \frac{k-2}{k^2(k+1)(k^3+1)}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3+1} = \left(\frac{\pi^2}{6}-1\right) + \left(\frac{\pi^2}{3}-3\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-2}{k^2(k+1)(k^3+1)}. \qquad (11)$$

Для вновь полученного ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{k1}$ в правой части выражения (11) проведем оценку точности вычислений по формуле (4) с использованием формулы (5)

$$r_n = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k-2}{k^2(k+1)(k^3+1)} < \int_n^{\infty}\frac{(x-2)dx}{x^5(x+1)(x^2+1)} \approx \frac{1}{4n^4}$$

Таким образом, для достижения заданной точности $\delta = 10^{-4}$ нужно просуммировать только $n = 5$ членов вспомогательного ряда.

Окончательно имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3+1} \approx \left(\frac{\pi^2}{2}-4\right) - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{1008} + \frac{1}{2600} + \frac{1}{6300} = 0,9348 - 0,25 + 0,0010 + 0,0004 + 0,0002 \approx 0,6864.$$

5. Заключение.

При наличии свободного лекционного времени можно рассмотреть и другие методы преобразования рядов с целью ускорения их сходимости, например, преобразование Маркова.

Рассмотренные приемы могут быть использованы при исследовании сходимости некоторых функциональных рядов, в частности, в прикладных задачах [5].

Иногда полезно знать значения сумм рядов в виде определенных или несобственных интегралов. Например [3],

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{ka+b} = \int_0^1\frac{t^{k-1}}{t^k+1}dt; \qquad \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+a)^2} = \int_0^1\frac{t^{k-1}}{t^k-1}\ln t dt;$$

и им аналогичные, суммирование которых приводит к вычислению интегралов.

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.:Наука, 1966. - т.2 - 800 с.
2. Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы прикладной математики. – М.:Наука, 1967. - 646 с.
3. Прудников А.П., Брючков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. – М.:Наука, 1981. - 798 с.
4. Пак В.В., Носенко Ю.Л.. Вища математика. – К.:Либідь, 2004. - 440 с.
5. Улитин Г.М. Продольные колебания упругого стержня, моделирующего буровую установку. – Прикладная механика. - 2000. - № 1. - с.70-74.

Summary. Investigating constantly signed series converge the problems of valuation of the series remainder with the help of other series change solved. These series are simpler and tally faster. There are examples of using for such Cummer's transform change.