

## МОМЕНТЫ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПРОЦЕССОВ НА ВЫХОДЕ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ СОВМЕСТИМОСТИ

**Сидоренко О. А.**

**ГП «Донжеледдорпроект»**

*It is examined the problem of determination of moments of law of distribution the processes on output of dynamic models emc. unlike existing formulas are taken into account average importances of the interferences. results allow realistically to value EMC.*

**Постановка задачи.** В общем случае модель ЭМС можно представить, согласно [1], в виде последовательности блоков (рис. 1), где взвешивающий фильтр ВФ моделирует реакцию  $y(t)$  объекта на помеху  $x(t)$ . Квадратор 1 учитывает обстоятельство, что воздействие помехи зависит от мощности реакции. Инерционность объекта моделируется инерционным звеном 2, на выходе из которого протекает квадратичный инерционный процесс  $w_T(t)$ . Постоянная времени  $T$  звена совпадает с постоянной инерции объекта (в [2]  $T=0,3$  с). В таком случае процессы на входе и на выходе блока квадратичного инерционного сглаживания КСИ связаны линейным дифференциальным уравнением

$$T \frac{dw_T}{dt} + w_T = y^2.$$

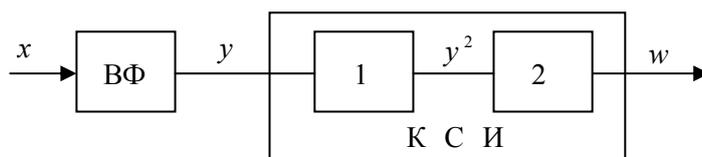


Рисунок 1 – Модель ЭМС

В инженерной практике, например, при вычислении показателей качества электроэнергии в [3], вместо инерционного сглаживания используется кумулятивное преобразование: непрерывное осреднение на заданном интервале  $\theta$ . в этом случае в модели ЭМС вместо инерционного звена 2 используется кумулятивное, а на выходе протекает квадратичный кумулятивный процесс

$$w_\theta(t) = \frac{1}{\theta} \int_{t-\theta}^t y^2(t) dt.$$

Помехи ЭМС в действующих сетях создаются работой большого количества электроприёмников и являются случайными, что даёт основание использовать нормальный закон распределения для описания помехи и процесса на выходе ВФ. Однако для нелинейной системы в общем случае не удастся выразить моменты ординат случайной функции на выходе через моменты ординат случайной функции на входе, а закон распределения выходной случайной функции уже не является нормальным, даже если входная функция подчиняется нормальному закону. В силу этого, задача нахождения распределения выходной величины не имеет аналитического решения, поэтому необходимо вычислять высокие моменты распределения.

В [4] дано общее решение для квадратичного инерционного преобразования при среднем значении  $y_c$  входного процесса, равном нулю. Кумулятивное преобразование в литературе не рассматривалось даже при таком упрощающем допущении.

Целью статьи<sup>1)</sup> является нахождение моментов распределения для инерционного и кумулятивного преобразований с учетом среднего значения входного процесса, что позволяет определить соответствующие плотности распределения, а также показатели ЭМС.

<sup>1)</sup> Автор благодарит к.т.н. Дмитриеву Е. Н. за постановку задачи.

**Общий случай.** Прежде всего отметим, что в силу нелинейности операции возведения в квадрат, нельзя вначале взять  $y_c=0$ , по соответствующей реакции  $\tilde{y}(t)$  найти решение для квадратичного инерционного процесса  $\tilde{w}_T(t)$ , а затем перейти к искомому процессу  $w_T(t)$ . В самом деле, поскольку

$$y(t) = \tilde{y}(t) + y_c,$$

то

$$w_T^2(t) = \tilde{w}_T^2(t) + 2y_c\tilde{y}_T(t) + y_c^2,$$

где  $\tilde{y}_T(t)$  – инерционный процесс, получаемый пропусканием реакции  $\tilde{y}(t)$  через инерционное звено.

Хотя для по отдельности взятых процессов  $\tilde{w}_T$  и  $\tilde{y}_T$  решения могут быть найдены, то при определении закона распределения суммы слагаемых потребовалось бы найти совместную плотность распределений этих процессов, так как они являются зависимыми. Подобная задача не разрешима.

Для определения моментов  $n$ -го порядка используем общие свойства характеристических функций. Как и в [4], будем использовать  $2n$  вспомогательных нормальных случайных величин  $u_1, u_2, \dots, u_{2n}$ , которые имеют нулевые математические ожидания. Элементы  $k_{jl}$  корреляционной матрицы системы этих величин выражаются через заданную корреляционную функцию реакции.

Как известно, характеристическая функция при  $i = \sqrt{-1}$  дается выражением

$$E(u_1, u_2, \dots, u_{2n}) = \exp \left\{ iy_c \sum_{j=1}^{2n} u_j - \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^{2n} k_{jl} u_j u_l \right\}. \quad (1)$$

Вспомогательные начальные моменты

$$m_n = \frac{1}{i^{2n}} \frac{\partial^{2n}}{\partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_{2n}} E(u_1, u_2, \dots, u_{2n}) \Big|_{u_1=u_2=\dots=u_{2n}=0}. \quad (2)$$

Следует отметить, что предлагаемая в [4] более простая формула (34.31) для определения моментов через показатель степени характеристической функции применима лишь для случая  $y_c=0$ .

Выполнив дифференцирование согласно (2) получим

$$m_1 = k_{11} + y_c^2, \quad (3)$$

$$m_2 = k_{11}^2 + 2k_{13}^2 + y_c^4 + 2y_c^2 k_{11} + 4y_c^2 k_{13}, \quad (4)$$

$$m_3 = k_{11}^3 + 2a_1 k_{11} + 8a_2 + y_c^6 + 3y_c^2 k_{11}^2 + 3y_c^4 k_{11} + 4a_3 y_c^2 k_{11} + 8a_4 y_c^2 + 2a_1 y_c^2 + 4a_3 y_c^4, \quad (5)$$

$$m_4 = \tilde{m}_4 + y_c^8 + d_1 + d_2 + d_3, \quad (6)$$

где обозначено

$$a_1 = k_{13}^2 + k_{15}^2 + k_{35}^2, \quad a_2 = k_{13} k_{15} k_{35},$$

$$a_3 = k_{13} + k_{15} + k_{35}, \quad a_4 = k_{13} k_{15} + k_{15} k_{35} + k_{13} k_{35}.$$

$$\tilde{m}_4 = k_{11}^4 + 2b_1 k_{11}^2 + 4b_2 + 8b_3 k_{11} + 16b_4,$$

$$d_1 = 4y_c^6 k_{11} + 4c_1 y_c^6, \quad d_2 = 6y_c^4 k_{11}^2 + 8c_2 y_c^4 k_{11} + y_c^4 (2c_3 + 8c_4 + 16c_5),$$

$$d_3 = 4y_c^2 k_{11}^3 + 4c_1 y_c^2 k_{11}^2 + y_c^2 k_{11} (8c_6 + 4c_7) + y_c^2 (16c_8 + 8c_9 + 8c_{10}),$$

$$b_1 = k_{57}^2 + k_{13}^2 + k_{17}^2 + k_{35}^2 + k_{15}^2 + k_{37}^2, \quad b_2 = k_{17}^2 k_{35}^2 + k_{13}^2 k_{57}^2 + k_{15}^2 k_{37}^2,$$

$$b_3 = k_{35} k_{37} k_{57} + k_{57} k_{51} k_{17} + k_{71} k_{73} k_{13} + k_{13} k_{15} k_{35},$$

$$b_4 = k_{13} k_{15} k_{37} k_{57} + k_{13} k_{17} k_{35} k_{57} + k_{15} k_{17} k_{35} k_{37},$$

$$c_1 = k_{13} + k_{37} + k_{17} + k_{15} + k_{35} + k_{57}, \quad c_2 = k_{37} + k_{35} + k_{17} + k_{57} + k_{13} + k_{15},$$

$$c_3 = k_{13}^2 + k_{15}^2 + k_{17}^2 + k_{37}^2 + k_{35}^2 + k_{57}^2,$$

$$c_4 = k_{37} k_{17} + k_{15} k_{13} + k_{35} k_{13} + k_{17} k_{13} + k_{37} k_{13} + k_{35} k_{15} + k_{17} k_{15} + k_{57} k_{15} + k_{35} k_{37} + k_{35} k_{57} + k_{17} k_{57} + k_{37} k_{57},$$

$$\begin{aligned}
c_5 &= k_{13}k_{17} + k_{37}k_{15} + k_{35}k_{17}, \\
c_6 &= k_{35}k_{13} + k_{57}k_{15} + k_{37}k_{17} + k_{35}k_{37} + k_{35}k_{57} + k_{37}k_{57} + k_{15}k_{13} + k_{17}k_{13} + k_{37}k_{13} + k_{17}k_{15} + k_{17}k_{57} + k_{35}k_{15}, \\
c_7 &= k_{57}^2 + k_{17}^2 + k_{35}^2 + k_{13}^2 + k_{15}^2 + k_{37}^2, \\
c_8 &= k_{35}k_{37}k_{17} + k_{17}k_{35}k_{15} + k_{17}k_{35}k_{13} + k_{35}k_{57}k_{17} + k_{15}k_{57}k_{13} + k_{35}k_{57}k_{13} + \\
&+ k_{17}k_{13}k_{57} + k_{17}k_{37}k_{15} + k_{37}k_{13}k_{57} + k_{15}k_{37}k_{13} + k_{35}k_{37}k_{15} + k_{37}k_{57}k_{15}, \\
c_9 &= k_{35}k_{37}k_{57} + k_{17}k_{57}k_{15} + k_{17}k_{37}k_{13} + k_{15}k_{35}k_{13}, \\
c_{10} &= k_{57}^2k_{13} + k_{13}^2k_{57} + k_{15}^2k_{37} + k_{35}^2k_{17} + k_{37}^2k_{15} + k_{17}^2k_{35}.
\end{aligned}$$

Вспомогательные моменты, наряду с весовыми функциями при  $\gamma = 1/T$

$$g_0(t) = 1/\theta \text{ при } t \leq \theta, \quad g_T(t) = \exp(\gamma t), \quad (7)$$

используются для определения искомых начальных моментов по общим формулам из [4].

**Осреднение на интервале.** Найдем моменты распределения для квадратичного кумулятивного преобразования при  $y_c \neq 0$  и корреляционной функцией реакции  $k_y(\tau) = \sigma_y^2 \exp(-\alpha|\tau|)$ , где  $\sigma_y$  – стандарт реакции,  $\alpha$  – параметр.

Так как при  $t > \theta$  весовая функция  $g_0(t)$  обращается в нуль, то переходной случайный процесс заканчивается за время  $\theta$ . Это означает, что для получения моментов распределения в стационарном состоянии в формулах (34.20) – (34.22) из [4] в пределах интегрирования надо положить  $t = \theta$ . Например, подставив в формулу (34.20) выражение (3), при  $a = y_c/\sigma_y$  получим начальный момент первого порядка (математическое ожидание) квадратичного кумулятивного процесса

$$m_{1\theta} = y_c^2 + \sigma_y^2 = \sigma_y^2(1 + a^2), \quad (8)$$

Который, как и следовало ожидать, равно квадрату эффективного значения реакции. Для второго и третьего начальных моментов были получены следующие выражения:

$$m_{2\theta} = \sigma_y^4 \frac{1}{\alpha^2 \theta^2} \left[ e^{-2\alpha\theta} - 1 + \alpha^2 \theta^2 + 2\alpha\theta + a^2 (8e^{-2\alpha\theta} + 2\alpha^2 \theta^2 + 8\alpha\theta - 8) + a^4 \alpha^2 \theta^2 \right], \quad (9)$$

$$\begin{aligned}
m_{3\theta} &= \sigma_y^6 \frac{1}{\alpha^3 \theta^3} \left[ 12e^{-2\alpha\theta} + 6\alpha^2 \theta^2 + \alpha^3 \theta^3 + 9\alpha\theta + 15\alpha\theta e^{-2\alpha\theta} - 12 + \right. \\
&+ a^2 (192e^{-\alpha\theta} - 24e^{-2\alpha\theta} - 168 + 30\alpha^2 \theta^2 + 3\alpha^3 \theta^3 + 72\alpha\theta e^{-\alpha\theta} + 3\alpha\theta e^{-2\alpha\theta}) + \\
&\left. + a^4 (24\alpha^2 \theta^2 + 3\alpha^3 \theta^3 - 24\alpha\theta + 24\alpha\theta e^{-\alpha\theta}) + a^6 \alpha^3 \theta^3 \right]. \quad (10)
\end{aligned}$$

Центральные моменты второго и третьего порядков определим по известным выражениям через начальные моменты:

$$\begin{aligned}
\mu_2 &= m_2 - m_1^2, \\
\mu_3 &= m_3 - 3m_2 m_1 - 2m_1^3.
\end{aligned}$$

В результате получим

$$\mu_{2\theta} = \sigma_y^4 \frac{1}{\alpha^2 \theta^2} \left[ e^{-2\alpha\theta} - 1 + 2\alpha\theta + 8a^2 (e^{-\alpha\theta} - 1 + \alpha\theta) \right], \quad (11)$$

$$\mu_{3\theta} = \sigma_y^6 \frac{12}{\alpha^3 \theta^3} \left[ e^{-2\alpha\theta} - 1 + \alpha\theta + \alpha\theta e^{-2\alpha\theta} + 2a^2 (8e^{-\alpha\theta} - 7 - e^{-2\alpha\theta} + 4\alpha\theta + 2\alpha\theta e^{-\alpha\theta}) \right]. \quad (12)$$

Асимметрия распределения

$$Sk_0 = \frac{\mu_{30}}{\sqrt{\mu_{20}^3}}. \quad (13)$$

На рис. 2 приведены зависимости коэффициента асимметрии от  $\alpha\theta$  при разных  $a$ . Среднее значение реакции сдвигает кривую плотности распределения вправо от оси абсцисс, поэтому мера отрицательных абсцисс уменьшается, что при возведении в квадрат приводит к уменьшению асимметрии. Чем больше интервал осреднения, тем больше сглаживается квадрат реакции. По этой причине вероятностное распределение величин  $w_0$  стремится к нормальному, а асимметрия стремится к нулю. Однако это происходит при очень больших  $\alpha\theta$ .

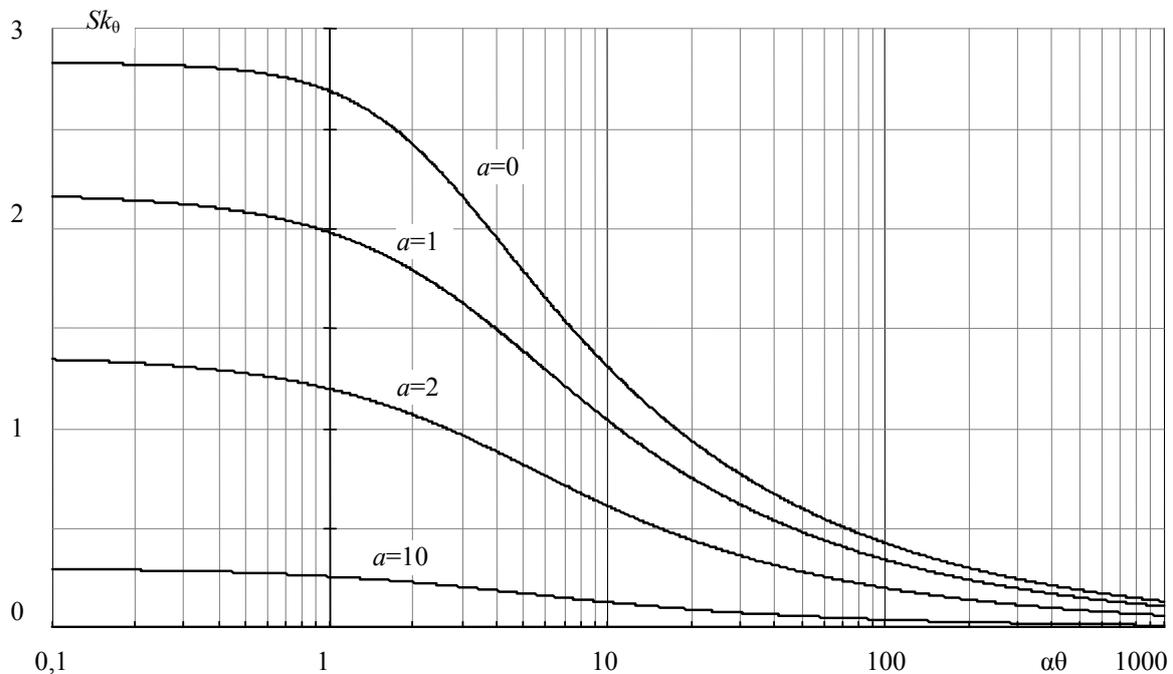


Рисунок 2 – Зависимости коэффициента асимметрии от  $\alpha\theta$  при разных  $a$

Искомая плотность распределения квадратичного кумулятивного процесса находится по найденным моментам путем представления ее в виде ряда Лагерра [5].

**Инерционное сглаживание.** В отличие от предыдущего случая весовая функция инерционного преобразования не ограничена во времени, поэтому интегрирование выполняется от 0 до бесконечности. Это не сказывается на величине первого начального момента, который совпадает с (8). Результаты интегрирования дают следующие выражения начальных моментов второго и третьего порядков в стационарном состоянии:

$$m_{2T} = \sigma_y^4 \frac{1}{(1 + \alpha T)(1 + 2\alpha T)} \left[ 2\alpha^2 T^2 + 5\alpha T + 3 + 2a^2 (2\alpha^2 T^2 + 7\alpha T + 3) + a^4 (\alpha^2 T^2 + 3\alpha T + 1) \right], \quad (14)$$

$$m_{3T} = \sigma_y^6 \frac{1}{(1 + \alpha T)^2 (2 + 5\alpha T + 2\alpha^2 T^2)} \left[ 2\alpha^4 T^4 + 46\alpha^3 T^3 + 46\alpha^2 T^2 + 63\alpha T + 30 + \right. \\ \left. + a^6 (2\alpha^4 T^4 + 9\alpha^3 T^3 + 14\alpha^2 T^2 + 9\alpha T + 2) + 3a^4 (2\alpha^4 T^4 + 17\alpha^3 T^3 + 43\alpha^2 T^2 + 37\alpha T + 10) + \right. \\ \left. + a^2 (90\alpha^4 T^4 + 261\alpha^3 T^3 + 214\alpha^2 T^2 + 261\alpha T + 90) \right]. \quad (15)$$

В свою очередь центральные моменты

$$\mu_{2T} = \sigma_y^4 \frac{2}{(1 + \alpha T)(1 + 2\alpha T)} \left[ \alpha T + 1 + 2a^2 (2\alpha T + 1) \right], \quad (16)$$

$$\mu_{3T} = \sigma_y^6 \frac{8}{(1 + \alpha T)^2 (2 + 5\alpha T + 2\alpha^2 T^2)} \left[ \alpha^2 T^2 + 3\alpha T + 2 + a^2 (8\alpha^2 T^2 + 15\alpha T + 6) \right]. \quad (17)$$

Коэффициент асимметрии распределения

$$Sk_T = \frac{\mu_{3T}}{\sqrt{\mu_{2T}^3}}. \quad (18)$$

Выражения для начального и центрального моментов четвертого порядка, а также коэффициента эксцесса не приведены в виду их громоздкости.

На рис. 3 утолщенными линиями показаны кривые зависимостей асимметрии от  $\alpha T$  при разных средних значениях. они располагаются ниже кривых кумулятивных асимметрий (тонкие линии), что объясняется большим сглаживающим действием инерционного преобразования.

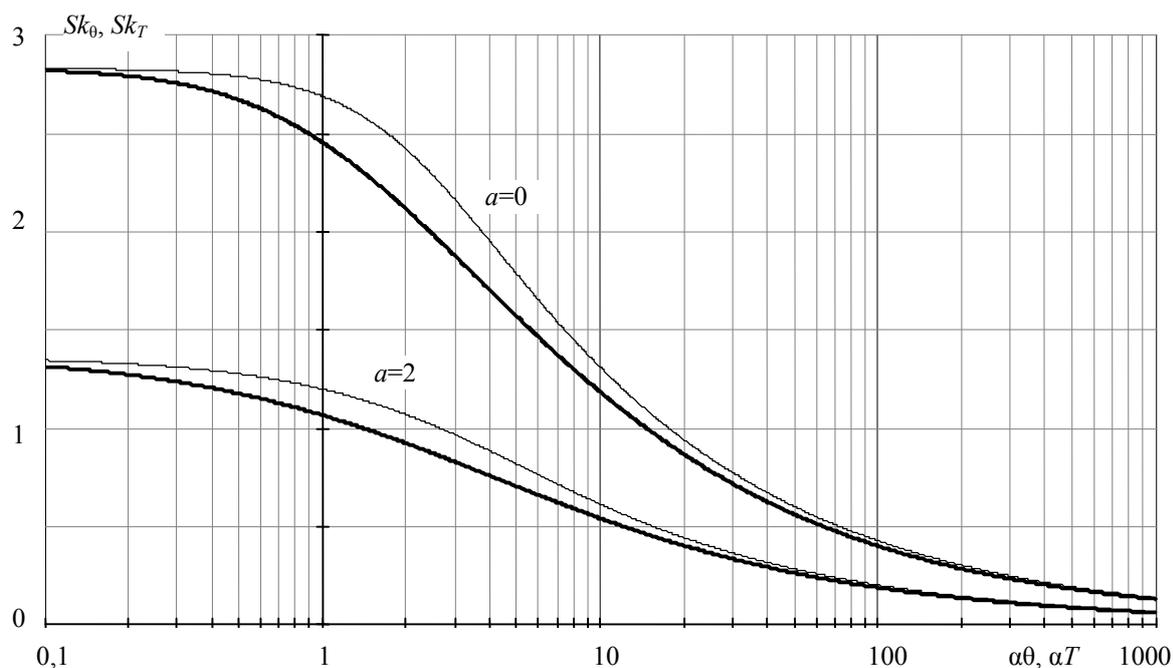


Рисунок 3 – Кривые зависимостей асимметрии от  $\alpha T$  при разных средних значениях

Плотность распределения квадратичного инерционного процесса определяется по моментам (8), (14) – (18).

#### Выводы.

1. Нелинейность квадратичных преобразований исключает раздельное рассмотрение средних значений и центрированных случайных процессов.
2. Полученные выражения для трех начальных моментов позволяют определить плотность распределения квадратичных инерционных и кумулятивных процессов в виде ряда Лагерра, а по ней – расчетные значения показателей ЭМС.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов В. Г., Куренный Э. Г., Лютый А. П. Электромагнитная совместимость. Несимметрия и несинусоидальность напряжения. – Донецк: Норд-Пресс, 2005. – 250 с.
2. СЕИ/IEC 61000-4-15. Electromagnetic compatibility – Part 4, Section 15: Flickermeter – Functional and design specification. 1997.
3. ГОСТ 13109-97. Межгосударственный стандарт. Электрическая энергия. Электромагнитная совместимость технических средств. Нормы качества электрической энергии в системах электроснабжения общего назначения. – Введ. В Украине с 01.01.2000.
4. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. – М.: «Наука», 1968. – 464 с.
5. Тихонов В. И., Статистическая радиотехника. – М.: Сов. Радио, 1966. – 678 с.

Рекомендовано д.т.н. Куринним Е.Г.