УДК 681.5

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ ПРИБЛИЗНИХ МЕТОДІВ ДИСКРЕТНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ НЕПЕРЕРВНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Толочко О.І., Чекавський Г.С., Ковальов П.С.
Донецький національний технічний університет
toi@elf.dgtu.donetsk.ua

In the article the comparison of substitutional methods of discretization and methods of zeros-poles accordance has been carried out. The accuracy of discrete approximation, which reaches by the use each of methods, has been analyzed, and typical features of the methods have been shown.

Реалізація складних алгоритмів керування електромеханічними об‘єктами можлива тільки при використанні засобів цифрової обчислювальної техніки, що приводить до дискретизації процесів.

Синтез дискретних пристроїв керування неперервними системами виконують одним з наступних шляхів:

- на основі неперервного об‘єкта регулювання синтезують неперервні пристрої керування, а потім перетворюють їх у дискретну форму (метод неперервних моделей);
- будують дискретні моделі об‘єкта регулювання і на їх основі синтезують дискретні пристрої керування.

Отже, в обох випадках треба вміти знаходити дискретні апроксимації неперервних передавальних функцій (ПФ). Поставлену задачу можна виконати такими засобами:

1) за допомогою *Z*-перетворення;
2) заміною оператора аналогового інтегрування $1/s$ одним з операторів цифрового інтегрування (підстановочні методи);
3) заміною нулів та полюсів на *s*-площині відповідними нулями та полюсами на *Z*-площині (методи відповідності нулів-полюсів).

Для дискретизації неперервного процесу методом *Z*-перетворення необхідно перш за все визначитися з типом екстраполятора, що встановлюється на вході неперервного динамічного об‘єкту. Найчастіше використовують екстраполятор нульового порядку (*ZOH – Zero Order Hold*), що перетворює решітчастий вхідний сигнал у ступінчастий, тобто

$$u(t)=u(t_k) \quad \text{при} \quad t_{k-1}\le t<t_k\,, \tag{1}$$

В класичній теорії керування відомий розв‘язок задачі дискретизації неперервного об‘єкту з екстраполятором нульового порядку на вході за допомогою Z-перетворення, яке називають ступінчато-інваріантним [1-3].

Перехідні функції (реакції на стрибок при нульових початкових умовах) дискретного об‘єкту, отриманого у такий спосіб, збігаються з перехідними функціями вихідного неперервного об‘єкту в дискретні моменти часу, кратні періоду квантування T, тобто

$$y[k]=y(t_k)\,. \tag{2}$$

Для визначення дискретних ПФ за допомогою Z-перетворення для досить простих неперервних систем можна користуватися таблицями Z-перетворень, а для більш складних – треба спочатку розкласти ПФ на суму простих дробів.

При застосуванні замість ZOH екстраполятора першого порядку (FOH – First Order Hold), що утворює кусочно-лінійну апроксимацію вхідного сигналу, отримують дискретну систему, в якій значення перехідної функції дорівнюють полусумі значень відповідних аналогових сигналів на кінцях періоду квантування:

$$y[k]=\frac{y(t_k)+y(t_{k+1})}{2}\,, \tag{3}$$

а реакція на вхідний сигнал, що змінюється за лінійним законом, відповідає рівнянню (2). При більш складній формі вхідного сигналу співвідношення (2) та (3) порушуються.

Недоліком дискретизації методом Z-перетворень є його складність визначення дискретних ПФ.

Метою даної роботи є порівняння між собою підстановочних методів дискретизації та методів відповідності нулів-полюсів. Перевагою використання цих методів дискретизації неперервних динамічних об‘єктів є те, що, на відміну від точних Z-перетворень, загальна дискретна ПФ послідовно з‘єднаних неперервних об‘єктів дорівнює добутку дискретних ПФ, знайдених для кожної з неперервних ПФ окремо. Це дозволяє значно спростити процес синтезу цифрових регуляторів.

Отже, припустимо, що ми маємо неперервну динамічну систему з вхідним с сигналом $u(t)$ і вихідним сигналом $y(t)$, що описується в області змінної Лапласа s передавальною функцією

$$W(s)=\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{H_m(s)}{G_n(s)}=\frac{\beta_m s^m+\beta_{m-1}s^{m-1}+...+\beta_1 s+\beta_0}{s^n+\alpha_{n-1}s^{n-1}+...+\alpha_1 s+\alpha_0}, \quad m\le n. \tag{4}$$

Використовуючи розкладення поліномів у чисельнику та знаменнику ПФ (4) на множники, отримуємо

$$W(s)=\frac{y(s)}{u(s)}=K\frac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)}, \tag{5}$$

де $\mathbf{Z}=[z_1 \quad z_2 \quad \ldots \quad z_m]$ – вектор нулів; $\mathbf{P}=[p_1 \quad p_2 \quad \ldots \quad p_n]$ – вектор полюсів; $K=\beta_m$.

Задача полягає у визначенні при заданому періоді квантування T еквівалентної дискретної ПФ

$$W(z)=\frac{y(z)}{u(z)}=K_d\frac{(z-z_{d1})(z-z_{d2})\ldots(z-z_{dm_d})}{(z-p_{d1})(z-p_{d2})\ldots(z-p_{dn})}=\frac{H_{m_d}(z)}{G_n(z)}=\frac{\beta_{dm_d}z^{m_d}+\beta_{dm_d-1}z^{m_d-1}+...+\beta_{d1}z+\beta_{d0}}{z^n+\alpha_{n-1}z^{n-1}+...+\alpha_1 z+\alpha_0}, \quad z=e^{Ts}. \tag{6}$$

При приблизному визначенні дискретної ПФ цим методом можна використовувати такі підстановки:

$$s=\frac{z-1}{T}, \tag{7}$$

$$s=\frac{z-1}{Tz}, \tag{8}$$

$$s=\frac{2}{T}\cdot\frac{z-1}{z+1}. \tag{9}$$

Підстановку (7) називають методом Ейлера, підстановку (8) – модифікованим методом Ейлера, а підстановку (9) – білінійним перетворенням або методом Тастіна (Tustin). Метод Тастіна та його модифікацію, що передбачає фазову корекцію частотної характеристики [3], звичайно рекомендують як основний із приблизних методів дискретизації.

Щодо використання методу відповідності нулів-полюсів у більшості джерел існують вказівки тільки на те, що дискретні полюси треба розрахувати за формулою

$$\mathrm{p_{di}}=\exp(\mathrm{Tp_i}), \quad \mathrm{i}=1, 2, ..., \mathrm{n}, \tag{10}$$

яка є справедливою і для дискретних ПФ, отриманих методом Z-перетворення з будь-яким екстраполятором.

Інакше складаються справи з нулями дискретних ПФ – у більшості літературних джерел з теорії автоматичного керування не наводиться інформації щодо їхнього визначення. Із приведених в даній роботі посилань це питання розглянуто тільки в роботі [3], в якій є відомості, що вказують на напрямок розв'язання цієї задачі. Це може показатися дивним, але дискретні ПФ з екстраполятором FOH завжди мають порядок чисельника, що дорівнює порядку знаменника, незалежно від порядку чисельника перетворюваної неперервної ПФ:

$$m_{dF}=n. \tag{11}$$

Дискретна ПФ з екстраполятором ZOH має порядок чисельника на одиницю менше, за винятком того випадку, коли в неперервній ПФ $m=n$, тобто

$$m_{dZ}=\begin{cases} n & \text{при} \quad m=n, \\ n-1 & \text{при} \quad m\le n-1. \end{cases} \tag{12}$$

Нулі дискретних ПФ умовно можна поділити на дві множини: системні нулі та нулі квантування [4]. Різниця між ними полягає в тому, що при $T\to 0$ перші з них прагнуть до дискретного перетворення нулів неперервного об'єкту

$$\lim_{T\to 0} z_{dsi}=\exp(Tz_i), \quad i=1,2,...,m, \tag{13}$$

а другі – до –1:

$$\lim_{T\to 0} z_{dkj}=-1, \quad j=m+1,m+2,...,m_d. \tag{14}$$

Нулі квантування в загальному випадку можуть бути навіть немінімально-фазовими, тобто мати амплітуду більше 1.

Отже, для приблизного визначення нулів дискретної ПФ можна використовувати формули (13), (14).

Для розрахунку коефіцієнта K_d передавальної функції (6) можна запропонувати таку методику:

1) після визначення аналогових та дискретних полюсів і нулів виділити з них нейтральні (тобто ті, що для неперервної системи дорівнюють 0, а для дискретної – 1) та підрахувати їх кількість (μ та ν відповідно):

2) розрахувати коефіцієнт передачі неперервної системи в усталеному режимі за формулою

$$k = K\prod_{i=1}^{n1}(-p_{1i}) \Big/ \prod_{j=1}^{m1}(-z_{1j}), \tag{15}$$

де $K = \beta_m$, $m_1 = m - \mu, n_1 = n - \nu$ – кількість ненульових аналогових нулів та полюсів відповідно;

3) розрахувати коефіцієнт K_d дискретного об'єкта за формулою

$$K_d = kT^{\nu-\mu} \cdot \prod_{i=1}^{n_1}(1 - p_{d1i}) \Big/ \prod_{j=1}^{m_{d1}}(1 - z_{d1j}), \tag{16}$$

де p_{d1i}, z_{d1j} – неодиничні дискретні нулі та полюси відповідно.

Для порівняння між собою викладених вище методів дискретної апроксимації неперервних систем розглянемо приклад, в якому неперервний об'єкт має ПФ

$$W(s) = \frac{4s(2s+1)}{24s^3 + 10s^2 + 6s + 1} \approx 0.3333\frac{s(s+0.5)}{(s+0.2016)(s^2+0.215s+0.2066)} \tag{17}$$

з трьома полюсами $\mathbf{p} = [-0.1075 \pm 0.4417i, -0.2016]$, $|\mathbf{p}| = [0.4546, 0.4546, 0.2016]$ та двома нулями $\mathbf{z} = [0, -0.5]$.

Дискретні ПФ, отримані з ПФ (17) розглянутими методами при $T = 2$, наведені в табл. 1 ($W_Z(z)$, $W_F(z)$ – Z-перетворення з екстраполяцією нульового та першого порядку відповідно; $W_E(z)$, $W_{Em}(z)$, $W_T(z)$ – метод Ейлера, модифікований метод Ейлера та метод трапецій; $W_{m0}(z)$, $W_{m1}(z)$ – метод узгодження нулів-полюсів при $m_d = n - 1$ та $m_d = n$ відповідно).

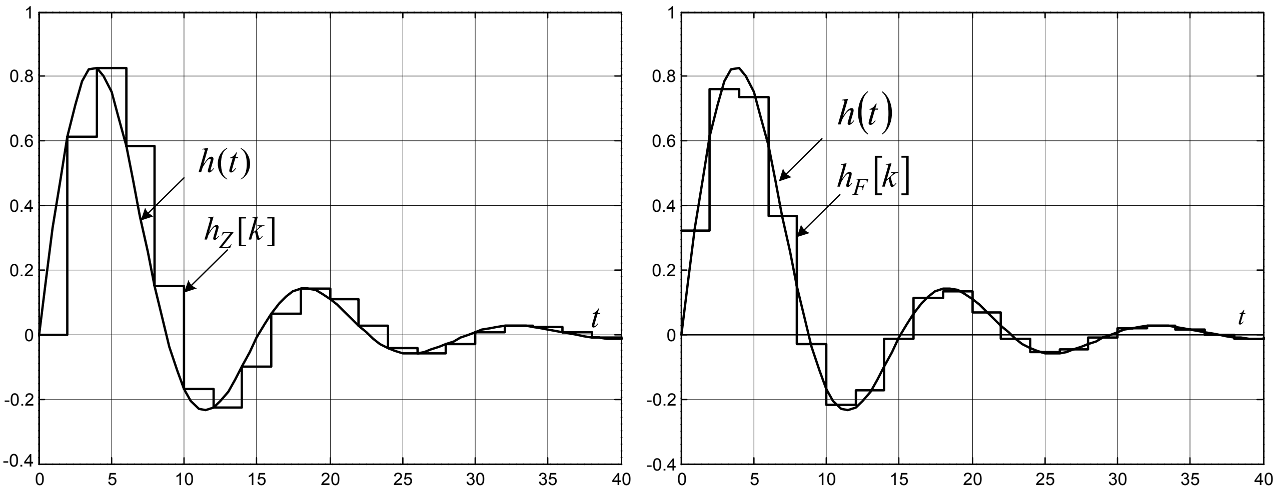
Таблиця 1 - Дискретні апроксимації неперервної передавальної функції (17)

Дискретні ПФ	у поліноміальній формі	у формі розкладення на нулі-полюси
$W_Z(z)$	$\frac{0.61z^2 - 0.82z + 0.21}{z^3 - 1.69z^2 + 1.33z - 0.43}$	$0.61\frac{(z-1)(z-0.34)}{(z-0.67)(z^2-1.02z+0.65)}$
$W_F(z)$	$\frac{0.32z^3 - 0.11z^2 - 0.34z + 0.12}{z^3 - 1.69z^2 + 1.33z - 0.43}$	$0.32\frac{(z-1)(z-0.37)(z+1.03)}{(z-0.67)(z^2-1.02z+0.65)}$
$W_E(z)$	$\frac{0.67z^2 - 0.67z}{z^3 - 2.17z^2 + 2.33z - 0.83}$	$0.67\frac{z(z-1)}{(z-0.60)(z^2-1.57z+1.40)}$
$W_{Em}(z)$	$\frac{0.42z^3 - 0.63z^2 - 0.21z}{z^3 - 1.79z^2 + 1.21z - 0.32}$	$0.42\frac{z(z-1)(z-0.5)}{(z-0.71)(z^2-1.08z+0.44)}$
$W_T(z)$	$\frac{0.29z^3 - 0.1z^2 - 0.29z + 0.1}{z^3 - 1.78z^2 + 1.44z - 0.46}$	$0.29\frac{(z-1)(z-0.33)(z+1)}{(z-0.66)(z^2-1.12z+0.7)}$
$W_{m0}(z)$	$\frac{0.66z^2 - 0.9z + 0.24}{z^3 - 1.69z^2 + 1.33z - 0.43}$	$0.66\frac{(z-1)(z-0.37)}{(z-0.67)(z^2-1.02z+0.65)}$
$W_{m1}(z)$	$\frac{0.33z^3 - 0.12z^2 - 0.33z + 0.12}{z^3 - 1.69z^2 + 1.33z - 0.43}$	$0.33\frac{(z-1)(z-0.37)(z+1)}{(z-0.67)(z^2-1.02z+0.65)}$

В розглянутому прикладі частоту дискретизації ($\Omega = 1/T = 0.5$) для наочності обрано близькою до частот полюсів неперервної системи, що взагалі не рекомендується. Це зроблено задля того, щоб легше було побачити різницю між отриманими дискретними ПФ та графіками відповідних перехідних процесів.

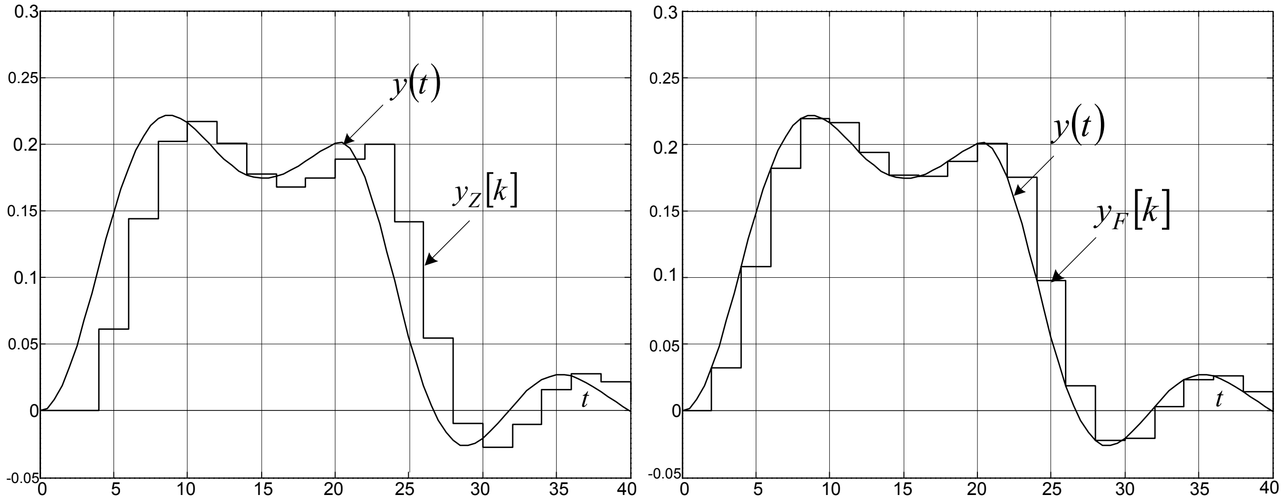
Перехідні функції вихідної неперервної системи з ПФ (17) $h_a(t)$ та дискретних систем з ПФ $W_Z(z)$ і $W_F(z)$ зображені на рис. 1. На рис. 2 показано реакції неперервної системи та її дискретних моделей на сигнал, що лінійно зростає від 0 до 1, а потім фіксується на досягнутому рівні:

$$u(t) = \begin{cases} t/20 & \text{при} \quad t < 20, \\ 1 & \text{при} \quad t \geq 20. \end{cases} \tag{18}$$



а) б)

Рисунок 1 – Перехідні функції неперервної системи та її дискретних аналогів з екстраполяцією нульового (а) та першого (б) порядків



а) б)

Рисунок 2 – Реакція неперервної системи та її дискретних аналогів з екстраполяцією нульового (а) та першого (б) порядків на лінійний вплив

З цих рисунків видно, що дискретна модель, утворена з включенням екстраполятора першого порядку, відповідає умові еквівалентності (2), а дискретна модель з екстраполяцією нульового порядку відтворює перехідний процес неперервної системи з великою похибкою.

Отже, з аналізу наведених графіків видно, що варіант *Z*-перетворення треба обирати в залежності від вигляду вхідного сигналу, який прикладається до неперервного об‘єкта, що підлягає дискретизації.

На рис. 3 наведені графіки перехідних процесів, що демонструють можливості підстановочних методів дискретизації досліджуваної системи. Після аналізу графіків та дискретних ПФ можна зробити такі висновки:

1) нулі та полюси усіх підстановочних перетворень відрізняються від нулів та полюсів Z-перетворень;

2) тільки перетворення Тастіна доповнює дискретну ПФ приблизними значеннями нулів дискретизації $z_d = -1$; обидва з перетворень Ейлера замість нуля дискретизації додають у дискретну ПФ нуль $z_d = 0$;

3) перетворення Ейлера утворює дискретну систему, яка при великих періодах квантування може стати нестійкою, незважаючи на стійкість відповідного неперервного об‘єкту; отже, перетворення Ейлера можна використовувати тільки для неперервних систем, які описуються диференційними рівняннями невисокого порядку, та при малих періодах переривання (у порівнянні зі власними сталими часу об‘єкта);

4) модифіковане перетворення Ейлера характеризується значно меншою точністю дискретизації, ніж перетворення Тастіна.

Отже, найкращим із перестановочних перетворень є перетворення Тастіна, яке за своїми параметрами і властивостями наближується до Z-перетворення з екстраполяцією першого порядку.

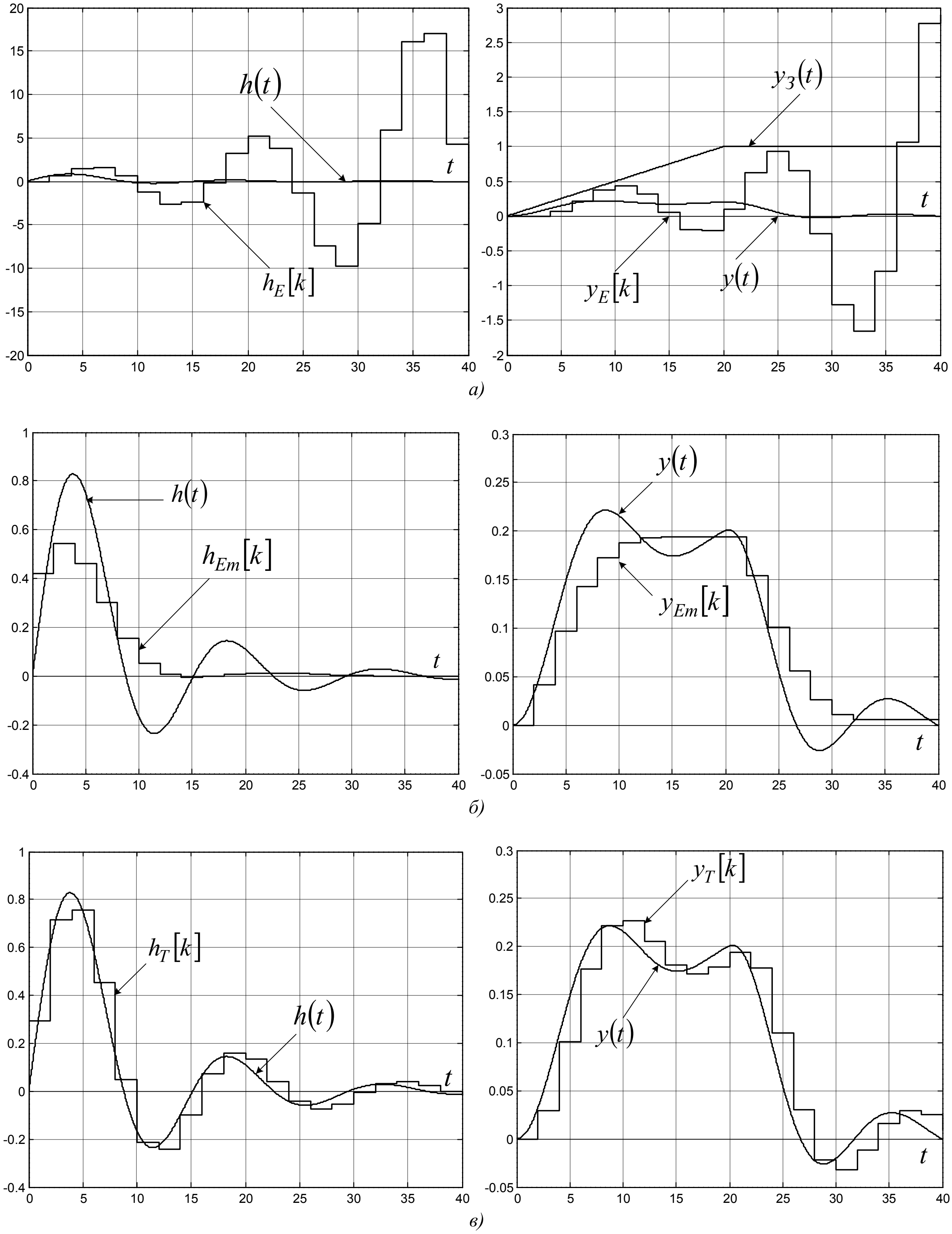
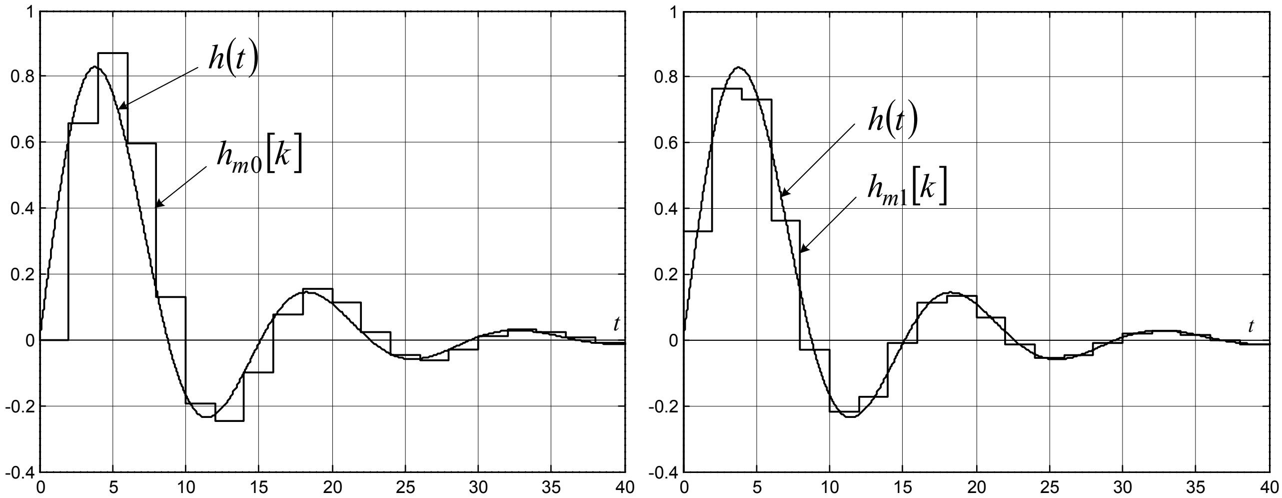


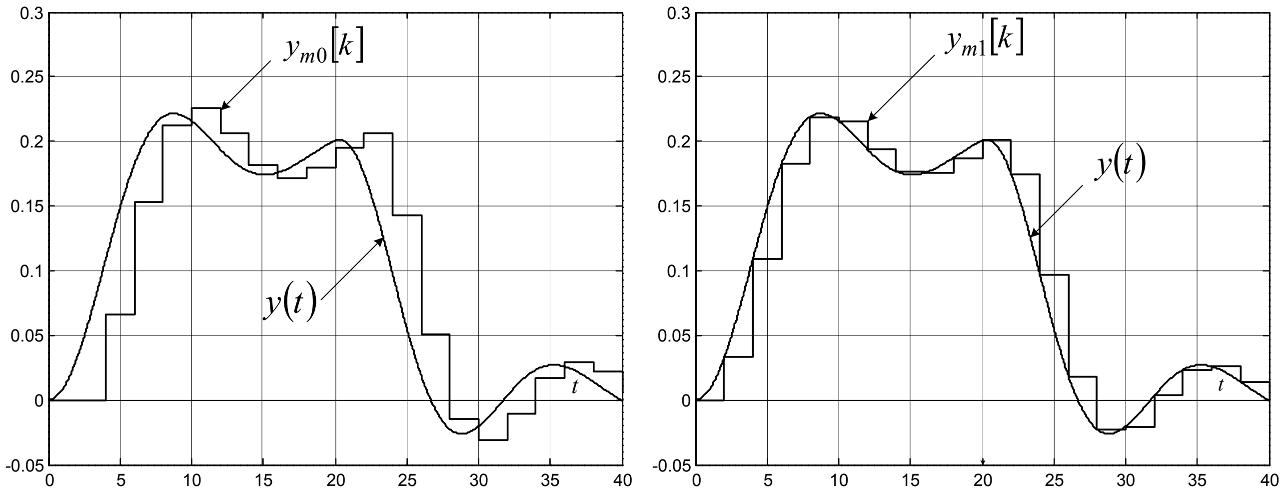
Рисунок 3 – Реакції на стрибкоподібний та лінійний впливи неперервної системи з ПФ (17) та її дискретних аналогів, визначених методом Ейлера (а), модифікованим методом Ейлера (б) та методом Тастіна (в)

Для демонстрації результатів двох запропонованих вище методів узгодження нулів та полюсів неперервної і дискретної систем на рис. 4 приведені перехідні функції досліджуваної неперервної системи та її дискретних апроксимацій, знайдених за приведеною вище методикою, а на рис. 5 – графіки перехідних процесів, які уявляють собою реакцію системи на вхідний сигнал (18).



а) *б)*

Рисунок 4 – Перехідні функції неперервної системи з ПФ (17) та її дискретних аналогів, визначених методом узгодження нулів полюсів при $m_d = n-1$ (а) та $m_d = n$ (б)



а) *б)*

Рисунок 5 – Реакція неперервної системи з ПФ (17) та її дискретних аналогів, визначених методом узгодження нулів полюсів при $m_d = n-1$ (а) та $m_d = n$ (б) на вхідний сигнал (18)

Графіки підтверджують, що навіть при такому завищеному періоді квантування отримані дискретні графіки перехідних процесів наближаються до графіків, зображених на рис.1 і рис.2.

Особливо слід підкреслити той факт, що дискретна апроксимація методом узгодження нулів-полюсів при $m_d = n$ для розглянутого прикладу має значно менше відхилення від апроксимації методу Z-перетворення з екстраполяцією першого порядку, ніж при використанні методу Тастіна, який найчастіше рекомендується для застосуванні у якості приблизного методу дискретизації. Це підтверджується графіками відповідних відхилень, зображених на рис. 6.

Отримані результати дають підстави для перегляду загально прийнятої рекомендації щодо приблизної дискретної апроксимації неперервних систем. До переваг методу узгодження належить також те, що дискретні системи, отримані у такий спосіб не треба перевіряти на стійкість.

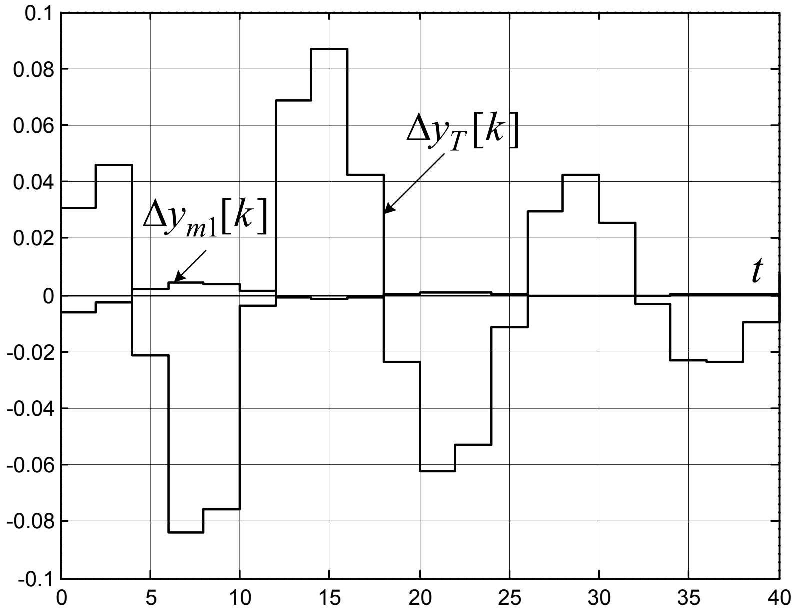


Рисунок 6 – Відхилення перехідних функцій дискретних систем, утворених методами Тастіна та узгодження нулів-полюсів, від перехідної функції системи, утвореної методом Z-перетворення з FOH.

Висновки.

1. Підстановочні методи дискретизації утворюють дискретні ПФ, у яких ані чисельник, ані знаменник в загальному випадку не співпадає з відповідними поліномами, отриманими методами *Z*-перетворень.
2. Метод Ейлера характеризується низькою точністю апроксимації, а при великих періодах дискретності система, створена за допомогою цього методу, може втратити стійкість (знайдено аналітичну умову стійкості).
3. Найбільшу точність дискретної апроксимації із підстановочних методів забезпечує метод Тастіна, який за своїми властивостями при малих періодах квантування наближається до метода *Z*-перетворення з екстраполяцією першого порядку.
4. Метод узгодження нулів-полюсів утворює дискретну ПФ, що має такий же характеристичний поліном, як функції, що утворені методами *Z*-перетворень. Чисельник ПФ, як показано в статті, можна наблизити як до дискретної ПФ з екстраполяцією нульового порядку, так і до дискретної ПФ з екстраполяцією першого порядку.
5. Метод узгодження нулів-полюсів, що прагне до методу *Z*-перетворення з екстраполяцією першого порядку, для розглянутого прикладу має набагато більшу точність, ніж метод Тастіна.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. – М.: Наука. – 1975. – 768 с.
2. Дорф Р. Современная теория автоматического управления / Р. Дорф, Р.Бишоп. Пер. с англ. Б. И. Копылова. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002.–832 с
3. Проектирование систем управления / Г.К. Гудвин, С.Ф. Гребе, М.Э. Сальгадо. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2004. – 911 с.
4. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB / Б.Р. Андриевский, А.Л. Фрадков. – СПб.: Наука, 2000. –475 с.

Рекомендовано д.т.н. Коцегубом П.Х.