ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ СИСТЕМЫ ФАЗОВОЙ АВТОПОДСТРОЙКИ ИЗ УСЛОВИЯ МИНИМУМА СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ ПРИ НЕПОЛНОЙ АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ О ВХОДНЫХ СИГНАЛАХ

Кирпач Л.А.
Государственный университет информационно-коммуникационных технологий, г. Киев,
E-mail: info@uniis.kiev.ua

Abstract. ***Kirpach L.A. Definition of an optimal transfer function of the system of phase selftuning from a condition of a minimum of an error at the deficient a priori information on entry signals.*** *The solution of the problem concerning the construction of optimization under minimum criterion of standard deviation of phase lock system is given when the analytical expression for spectral density of stationary desired signal and distortion are known. The distortion is additive and is superimposed on desired signal at input of phase lock system.*

Системы фазовой автоподстройки (ФАП) находят широкое применение в устройствах связи, радиотехнике и управлении [5].

В настоящей работе решается задача определения передаточной функции оптимальной по критерию минимума СКО системы ФАП при неполной информации о полезном сигнале с наложенной помехой.

Функциональная схема системы ФАП изображена на рис.1,а. Система содержит замкнутый контур управления, состоящий из последовательно соединенных элемента сравнения ЭС, фильтра нижних частот Ф, усилителя-преобразователя УП, интегратора И и фазовращателя ФВ. Для измерения задающего воздействия $\alpha(t)$ используется фазовый дискриминатор ФД1, а для измерения управляемой величины $\beta(t)$ (разности фаз входного и выходного напряжений фазовращателя) служит фазовый дискриминатор ФД2. Для преобразования косинусной статической характеристики ФД используется элемент постоянного сдвига фазы на $\pi/2$.

На входы 1 и 2 системы ФАП (рис.1,а) поступает задающее $u_1(t)=U_{m1}\cos[\omega t+\varphi_1(t)]$ и управляемое $u_2(\mathrm{t})=U_{m2}\cos[\omega t+\varphi_2(t)]$ напряжения одинаковой частоты, сдвинутые по фазе на угол

$$\alpha(t)=\varphi_1(t)-\varphi_2(t).$$

Задача системы ФАП заключается в том, чтобы обеспечить равенство фаз напряжений $u_1(t)$ и $u_2(t)$ при любых возможных изменениях этой разности.

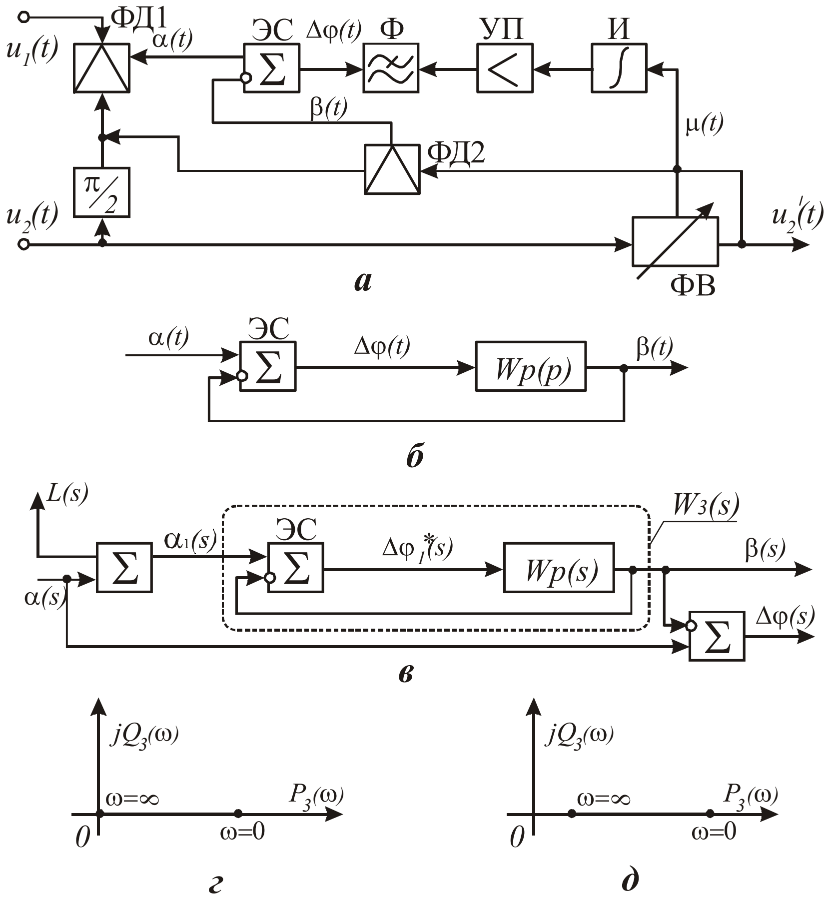

Рисунок 1 — Функциональная (а) и структурные (б, в) схемы системы ФАП; г,д — амплитудно-фазовые характеристики оптимальной физически нереализуемой системы ФАП

Структурная схема системы ФАП, соответствующая функциональной рис.1,а, изображена на рис.1,б, где $\Delta\varphi(t)=\alpha(t)-\beta(t)$ — сигнал ошибки.

Пусть на входе линеаризованной системы ФАП (рис.1,в) с передаточной функцией

$$W_з(s)=\frac{D_з(s)}{F_з(s)}=\frac{\beta(s)}{\alpha_1(s)}, \tag{1}$$

где $\alpha_1(s)$, $\beta(s)$ — изображение по Лапласу входного сигнала системы $\alpha_1(t)=\alpha(t)+L(t)$ и управляемой величины $\beta(t)$ соответственно; действует аддитивная смесь полезного сигнала $\alpha(t)$ и помехи $L(t)$. Под ошибкой такой системы ФАП понимается разность между полезным входным сигналом $\alpha(t)$ и выходной величиной системы $\beta(t)$.

Если спектральные характеристики входного сигнала и помехи известны и заданы аналитически, то в соответствии с [1] комплексная передаточная функция оптимальной системы по критерию минимума СКО может быть определена из соотношения

$$W_{3опт}(j\omega) = \frac{1}{\alpha_1(j\omega)}\left[\frac{S_\alpha(\omega)}{\alpha_1^*(j\omega)}\right], \tag{2}$$

где $\alpha_1(j\omega)$ и $\alpha_1{}^*(j\omega)$ — комплексно-сопряженные передаточные функции, удовлетворяющие условию

$$\alpha_1(j\omega)\,\alpha_1{}^*(j\omega) = S_\alpha(\omega) + S_П(\omega);$$

где $S_\alpha(\omega)$ и $S_П(\omega)$ — спектральные плотности соответственно полезного сигнала и помехи; индекс "+" означает операцию разложения выражения в квадратных скобках на сумму двух слагаемых с полюсами в разных полуплоскостях и использование только части этого выражения с полюсами в верхней полуплоскости.

Однако часто спектральные плотности $S_\alpha(\omega)$ и $S_П(\omega)$ задаются не аналитически, а графически или вообще не известны. В связи с этим возникает задача определения некоторых общих условий, которым должна отвечать амплитудно-фазовая характеристика (АФХ) и передаточная функция оптимальной физически реализуемой системы ФАП. Предпосылкой решения этой задачи могут служить следующие рассуждения. Как известно (см., например, [1]), оптимальная по критерию минимума СКО физически нереализуемая комплексная передаточная функция системы ФАП имеет вид

$$W_{3опт}(j\omega) = \frac{S_\alpha(\omega)}{S_\alpha(\omega) + S_П(\omega)}. \tag{3}$$

Представляя $W_{3опт}(j\omega)$ в алгебраической форме

$$W_{3опт}(j\omega) = P_{3опт}(\omega) + jQ_{3опт}(\omega) \tag{4}$$

и учитывая, что $S_\alpha(\omega)$ и $S_П(\omega)$ представляют собой вещественные функции, можем записать

$$P_{3опт}(\omega) + jQ_{3опт}(\omega) = \frac{S_\alpha(\omega)}{S_\alpha(\omega) + S_П(\omega)} + jO\,, \tag{5}$$

откуда следует

$$P_{3опт}(\omega) = \frac{S_\alpha(\omega)}{S_\alpha(\omega) + S_П(\omega)}; \tag{6}$$

$$Q_{3опт}(\omega) = O\,. \tag{7}$$

Поскольку входящие в выражения (5) и (6) функции $S_\alpha(\omega)$ и $S_П(\omega)$ при любом значении частоты ω_i представляют собой дисперсии амплитуд соответствующих парциональных колебаний, то из (6) и (7) вытекает, что амплитудно-фазовая характеристика (АФХ) оптимальной физически нереализуемой системы ФАП представляет собой прямую линию, лежащую на положительном направлении вещественной оси комплексной плоскости (рис.1, г, д).

В реальных системах всегда имеет место некоторый фазовый сдвиг между входным и выходным сигналами и, следовательно, $Q_{3опт}(\omega) \neq O$. Кроме того, в устойчивых, минимально-фазовых системах $P_3(\omega)$ и $Q_3(\omega)$ однозначно связаны между собой через преобразования Гильберта [2]

$$P_3(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_3(\omega)}{u-\omega}\,du\,; \tag{8}$$

$$Q_3(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_3(\omega)}{u-\omega}\,du\,, \tag{9}$$

где берутся главные значения интегралов при $u=\omega$. Следовательно, в реальных системах совместное выполнение условий (6) и (5) и получение АФХ системы вида (рис.1,г,д) невозможно. Однако вполне естественно предположить, что амплитудно-фазовые характеристики оптимальных физически нереализуемой и физически реализуемой систем ФАП обладают некоторым общим свойством. Как видно из (6) и (7), наиболее общим свойством АФХ физически нереализуемой оптимальной системы является положительность ее вещественной частотной характеристики $P_{3опт}(\omega)$.

Попытаемся доказать, что вещественная частотная характеристика оптимальной физически реализуемой системы также должна быть положительна на всем интервале изменения ω от 0 до ∞, т.е. АФХ этой системы не должна заходить в левую полуплоскость. Данное утверждение сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема о АФХ оптимальной системы ФАП. Если на входе линейной системы ФАП действует аддитивная смесь стационарных полезного сигнала и помехи, спектральные плотности которых не обращаются в нуль на всем интервале изменения ω от 0 до ∞ и система оптимальна по критерию минимума СКО, то ее амплитудно-фазовая характеристика не заходит в левую полуплоскость.

Эта теорема определяет необходимые условия оптимальности системы. Возможны два подхода к ее доказательству. Первый подход основан на исследовании условий экстремума выражения для дисперсии ошибки системы ФАП методами вариационного исчисления. Пусть амплитудно-частотная $A_3(\omega)$ и фазо-частотная $\psi_3(\omega)$ характеристики системы удовлетворяют следующим ограничениям, характерным для реальных линейных систем ФАП:

1. $A_3(\omega)$ и $\psi_3(\omega)$ — непрерывно дифференцируемые функции на всем интервале изменения ω от 0 до ∞;

2. $A_3(\omega) \geq 0$ на всем интервале изменения ω от 0 до ∞;

3. Между $A_3(\omega)$ и $\psi_3(\omega)$ имеется некоторая связь, не позволяющая варьировать произвольно каждой на этих характеристик независимо друг от друга.

Как известно [I], дисперсия ошибки системы ФАП

$$\overline{\Delta\varphi^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Delta\varphi(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left[1-2A_3(\omega)\cos\psi_3(\omega)+A_3^2(\omega)\right]S_\alpha(\omega)+A_3^2(\omega)S_\Pi(\omega)\right\}d\omega \quad (10)$$

Поскольку спектральная плотность ошибки

$$S_{\Delta\varphi}(\omega) = \left|1-W_3(j\omega)\right|^2 S_\alpha(\omega)+\left|W_3(j\omega)\right|^2 S_\Pi(\omega) = \left[1-2A_3(\omega)\cos\psi_3(\omega)+A_3^2(\omega)\right]S_\alpha(\omega)A_3^2(\omega)S_\Pi(\omega) \quad (11)$$

является четной функцией, то вместо исследования функционала (10) достаточно исследовать равноценный ему функционал

$$\overline{\Delta\varphi^2} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}S_{\Delta\varphi}(\omega)d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\left[1-2A_3(\omega)\cos\psi_3(\omega)+A_3^2(\omega)\right]S_\alpha(\omega)+A_3^2(\omega)S_\Pi(\omega)\right\}d\omega \quad (12)$$

в области определения которого выполняются наложенные выше ограничения на $A_3(\omega)$ и $\psi_3(\omega)$.

В вариационном исчислении наиболее просто решается задача исследования экстремума функционала вида

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F(x, y, x', y', t)dt, \qquad (13)$$

где t_0, t_1 — фиксированные пределы интегрирования. Чтобы свести исследование условий экстремума функционала (12) к решению вариационной задачи с закрепленными концами, т.е. к исследованию функционала вида (13), вместо выражения (12) будем при $\omega \to \infty$ рассматривать функционал

$$\overline{\Delta\varphi^{*2}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_1} S_{\Delta\varphi}(A_3, \psi_3, \omega) d\omega. \qquad (14)$$

Очевидно, $\overline{\Delta\varphi^2} = \lim\limits_{\omega_1 \to \infty} \overline{\Delta\varphi^{*2}} = \lim\limits_{\omega_1 \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_1} S_{\Delta\varphi}(A_3, \psi_3, \omega) d\omega$.

Отыскание экстремума функционала (14) сводится к решению системы вырожденных уравнений Эйлера [3]

$$\frac{\partial S_{\Delta\varphi}(A_3, \psi_3, \omega)}{\partial A_3} = 0; \qquad (15)$$

$$\frac{\partial S_{\Delta\varphi}(A_3, \psi_3, \omega)}{\partial \psi_3} = 0. \qquad (16)$$

Каждое из этих уравнений определяет экстремали $A^*_{3опт}(\omega)$ и $\psi^*_{3опт}(\omega)$, причем только на экстремалях, проходящих через заданные граничные точки ω=0 и ω=ω_1, достигается экстремум функционала (14). Поскольку между $A_3(\omega)$ и $\psi_3(\omega)$ имеется не явно выраженная связь, не позволяющая варьировать произвольно каждой из этих функций, то найти $A_{3опт}(\omega)$ и $\psi_{3опт}(\omega)$ путем совместного решения уравнений (15) и (14) невозможно [2]. Однако можно определить некоторые свойства $A_{3опт}(\omega)$ и $\psi_{3опт}(\omega)$, исследовав одну из экстремалей $A^*_{3опт}(\omega)$ и $\psi^*_{3опт}(\omega)$. Исследуем, например, выражение для экстремали $A^*_{3опт}(\omega)$. Подставляя значение $S_{\Delta\varphi}(\omega)$ из (11) в (15), получим

$$\frac{\partial S_{\Delta\varphi}(A_3, \psi_3, \omega)}{\partial A_3} = -2\cos\psi_3(\omega) S_\alpha(\omega) + 2A_3(\omega)[S_\alpha(\omega) + S_П(\omega)] = 0,$$

откуда

$$A^*_{3опт}(\omega) = \frac{S_\alpha(\omega)}{S_\alpha(\omega) + S_П(\omega)} \cos\psi_3(\omega). \qquad (17)$$

Первый сомножитель в правой части последнего выражения по условию теоремы представляет собой положительную величину при любом значении ω, $A^*_{3опт}(\omega) \geq 0$ в соответствии с ограничением 2. Следовательно, для выполнения равенства (17) необходимо, чтобы $\cos\psi_{3опт}(\omega) \geq 0$ при $0 \leq \omega < \infty$. Очевидно, данное неравенство выполняется, если АФХ системы не заходит в левую полуплоскость, т.е. если

$$-\frac{\pi}{2} \le \cos\psi_{3опт}(\omega) \le +\frac{\pi}{2}.$$

Хотя рассмотренный подход и приводит к быстрому и наглядному доказательству теоремы, однако он распространяется на слишком широкий класс АФХ, в том числе на АФХ неустойчивых систем ФАП. Действительно, при рассмотренном доказательстве не накладывалось требование устойчивости системы, следовательно, могут возникнуть опасения, что синтезируемая на основе этого подхода оптимальная система ФАП лежит в классе неустойчивых систем.

Выводы

1. Показано, что рассмотренный в статье подход приводит к быстрому и наглядному доказательству теоремы об АФХ оптимальной системы ФАП.

2. Следствие из теоремы позволяет синтезировать оптимальную систему ФАП, но требуется дополнительная проверка системы на устойчивость.

Литература

1. Фельдбаум А.А., Бутковский А.Г. Методы теории автоматического управления. — М.: «Наука», 1971. —744 с.
2. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования. Кн.2. — М.: «Машиностроение», 1967. — 682 с.
3. Гноенский Л.С., Каменский Г.А., Эльсгольц Л.Э. Математические основы теории управляемых систем. — М.: «Наука», 1969. — 512 с.
4. Демин Ю.В., Зайцев Г.Ф. Определение частотных характеристик и вида передаточной функции оптимальной по критерию минимума СКО следящей системы при неполной информации о полезном входном сигнале и помехе. — Электроэнергетика и автоматика, вып. 15, 1973. — с.51–63.
5. Зайцев Г.Ф., Стеклов В.К., Бріцький О.І. Теорія автоматичного управління. — К.: Техніка, 2002. — 688с.

Сдано в редакцию: .

Рекомендовано к печати: д.т.н., проф. Ткаченко В.Н.