СОВМЕСТНАЯ МИНИМИЗАЦИЯ АДДИТИВНОГО ШУМА И МЕЖСИМВОЛЬНЫХ ПОМЕХ

Захарченко Н.В., Гаджиев М.М., Мамедов А.О.
Одесская национальная академия связи им. А.С. Попова, г. Одесса

Abstract
Zakharchenko N.V., Gadjev M.M., Mamedov A.O. Joint minimization of the additive noise and intersymbol interference . *The analytical expressions for minimum value of noise dispersion of the synchronous transmission system in the restriction mode per power value of the interference noise has been received.*

В работе [1] решаются вопросы оптимального предыскажения и коррекции парциально кодированных сигналов, что позволяет производить совместную минимизацию аддитивного шума и полностью устранять линейные искажения канала связи. При этом оптимизация характеристик корректора сводится к минимизации мощности шума на выходе системы

$$P_{\text{ш}} = \underset{E_{\omega}}{S} G|K|^{2}|K_{2}|d\omega \qquad (1)$$

при ограничениях

$$P_{\text{сф}} = P_{\text{ск}}$$
$$\Pi(\omega)\cdot T_{\kappa}(j\omega)\cdot K(j\omega) = 1, \qquad (2)$$

где Π, T, K — обозначение передаточных функций предысказителя, канала связи и корректора соответственно; $P_{\text{сф}}$, $P_{\text{ск}}$ — мощности сигналов на выходах передающего фильтра и кодировщика соответственно.

В данной работе рассматривается совместная минимизация аддитивного шума и интерференционных помех линейными методами.

На рис. 1 дана структурная схема синхронной системы передачи дискретных сигналов. Основные узлы системы: А — линейный формирователь, отклик которого на одиночный единичный передаваемый символ равен $\lambda(t)$ со спектром $\Delta(j\omega)$; T — канал связи с комплексной передаточной функцией $T(j\omega)$; K — приёмник (приёмный фильтр-корректор) с комплексной передаточной функцией $K(j\omega)$. На выходе канала действует источник аддитивного шума G с энергетическим спектром $G(\omega)$.

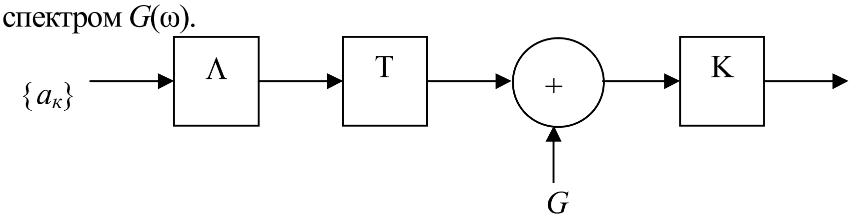

Рисунок 1 — Структурная схема системы передачи

На вход формирователя Δ поступает стационарная, в широком смысле, информационная последовательность символов $\{a_{\kappa}\}$ с нулевым средним; на выходе формирователя имеем сигнал

$$S_{\text{вх}}(t) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} a_{\kappa}\lambda(t-\kappa\Delta t), \qquad (3)$$

где a_{κ} — случайные величины ($\kappa = 0, \pm1, \pm2, ...$); Δt — тактовый интервал.

Дисперсия выходного шума системы

$$\sigma_{\text{ш}}^{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\left|K(j\omega)\right|^{2} d\omega. \qquad (4)$$

Дисперсия интерференционных помех определяется выражением

$$\sigma^2_{\text{ИП}} = \overline{\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \left[S_{\text{вых}}(\kappa\Delta t) - a_\kappa\right]^2}, \tag{5}$$

где $S_{\text{вых}}(t)$ — сигнал на выходе приёмника без учёта шума; черта означает математическое усреднение.

Будем считать рассматриваемую систему оптимальной, если $\sigma^2_{\text{ш}}$ достигает минимально возможного значения при ограничении системы сформулируем в таком виде: выбором комплексной передаточной функции приёмника $K(j\omega)$ минимизировать дисперсию шума при условии

$$\sigma^2_{\text{ип}} = A_1 = \text{const}$$

и дополнительном ограничении на взвешенную площадь квадрата амплитудно-частотной характеристики приёмника

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)\left|K(j\omega)\right|^2 d\omega = A_2 = \text{const}, \tag{7}$$

где A_1 и A_2 — заданные постоянные; $C(\omega)$ — чётная положительная весовая функция.

Изменим постановку задачи, для чего выразим $\sigma^2_{\text{ип}}$ (5) через функции $\Delta(j\omega)$, $T(j\omega)$, и $K(j\omega)$.

При передаче одной конкретной реализации последовательности $\{a_\kappa\}$ спектр выходного сигнала $S_{\text{вых}}(t)$

$$S_{\text{вых}}(j\omega) = \Delta(j\omega)\ T(j\omega)\ K(j\omega) \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} a_\kappa \mathrm{e}^{-j\omega\kappa\Delta t}. \tag{8}$$

Воспользуемся представлением сигнала во временной и частотной областях [2]. Для $s(t)$ — произвольный (вещественный либо комплексный) сигнал со спектром $S(j\omega)$ формула суммирования Пуассона имеет вид:

$$\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} s(\kappa\Delta t + t_0)\ \mathrm{e}^{-j\omega(\kappa\Delta t + t_0)} = \frac{1}{\Delta t}\sum_{m=-\infty}^{\infty} S(j\omega - jm\omega_{\text{д}})\mathrm{e}^{-jm\omega_{\text{д}}t_0}, \tag{9}$$

где t_0 — произвольный начальный момент отсчёта; Δt − произвольный шаг дискретизации (тактовый интервал); $\omega_{\text{д}}=2\pi/\Delta t$ — частота дискретизации (тактовая).

В равенстве (9) подразумевается, что разрывы (скачки) сигнала $s(t)$ уне совпадают с моментами дискретизации $\kappa\Delta t+t_0$, хотя большинство ситуаций, рассматриваемых в реальных случаях удовлетворяют этому ограничению.

Применение к $S_{\text{вых}}(t)$ формулы суммирования Пуассона даёт

$$\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} s_{\text{вых}}(\kappa\Delta t)\mathrm{e}^{-j\omega\kappa\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\left(\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} a_\kappa \mathrm{e}^{-j\omega\kappa\Delta t}\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \Lambda_m T_m K_m\right), \tag{10}$$

где $\Lambda_m = \Lambda(j\omega - jm\omega_{\text{д}}); T_m = T(j\omega - jm\omega_{\text{д}}); K_m = K(j\omega - jm\omega_{\text{д}}); (m = 0, \pm 1, \pm 2, ...);$
$\omega_{\text{д}} = 2\pi/\Delta t.$

Спектр последовательности $\{a_\kappa\}$ можно записать в виде $\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} a_\kappa \mathrm{e}^{-j\omega\kappa\Delta t}$, поэтому [3]

$$\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \left[S_{\text{вых}}(\kappa\Delta t) - a_\kappa\right] \mathrm{e}^{-j\omega\kappa\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\left(\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} a_\kappa \mathrm{e}^{-j\omega\kappa\Delta t}\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \Lambda_m T_m K_m - \Delta t\right).$$

Умножая левую и правую части этого равенства на сопряжённые им выражения и интегрируя полученные произведения на отрезке $[-0{,}5\omega_{\text{д}};\ 0{,}5\omega_{\text{д}}]$ приходим к выражению

$$\sum_{\kappa=-\infty}^{\infty}\left[S_{\text{вых}}(\kappa\Delta t)-a_\kappa\right]^2=\frac{1}{2\pi\Delta t}\int_{-0,5\omega_\text{д}}^{0,5\omega_\text{д}}\left|\sum_{\kappa=-\infty}a_\kappa \mathrm{e}^{-j\omega\kappa\Delta t}\right|^2\left|\sum_{m=-\infty}^{\infty}\Lambda_m T_m K_m-\Delta t\right|^2 d\omega.$$

Математическое усреднение полученного равенства по всем реализациям $\{a_\kappa\}$ даёт

$$\sigma_\text{ип}^2=\frac{1}{2\pi\Delta t}\int_{-0,5\omega_\text{д}}^{0,5\omega_\text{д}}S^2\left|\sum_{m=-\infty}^{\infty}\Lambda_m T_m K_m-\Delta t\right|^2 d\omega=A_1=\text{const}\,, \tag{11}$$

где $S=\sum_{n=-\infty}^{\infty}d_n \mathrm{e}^{-j\omega\kappa\Delta t}, d_n=\overline{a_\kappa a_{\kappa+n}}$.

Дисперсию выходного шума (4) представим в виде

$$\sigma_\text{ш}^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-0,5\sigma_\text{д}}^{0,5\omega_\text{д}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}G_m\left|K_m\right|^2 d\omega\,, \tag{12}$$

где $G_m=G(\omega-m\omega_\text{д})$.

В аналогичном виде запишем и ограничение (7):

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-0,5\omega_\text{д}}^{0,5\omega_\text{д}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}C_m\left|K_m\right|^2 d\omega=A_2=\text{const}\,, \tag{13}$$

где $C_m=C(\omega-m\omega_\text{д})$.

На отрезке $[-0{,}5\omega_\text{д};\ 0{,}5\omega_\text{д}]$ все функции K_m в (11) для различных m являются независимыми. Таким образом, в математическом плане задача оптимизации приёмника свелась к задаче минимизации функционала (12) выбором независимых комплексных функций K_m (m = 0, ±1, ±2, ...) при ограничениях (13).

Воспользуемся вариационным исчислением, для чего запишем функцию Лагранжа [3]

$$L=\sum_{m=-\infty}^{\infty}G_m\left|K_m\right|^2+\lambda_1\frac{S}{\Delta t}\left|\sum_{m=-\infty}^{\infty}\Lambda_m T_m K_m-\Delta t\right|^2+\lambda_2\sum_{m=-\infty}^{C_m}C_m\left|K_m\right|^2,$$

где λ_1 и λ_2 — неопределённые множители Лагранжа.

Дифференцируя L по K_m получим бесконечную систему уравнений Эйлера для искомых экстремалей K_m.

Обозначим $K_m = K_{am} + jK_{bm}$, $\Lambda_m = \Lambda_{am} + j\Lambda_{bm}$, $T_m = T_{am} + jT_{bm}$, где индексы «a» и «b» обозначают действительные и мнимые части функций.

Перепишем L в удобном для дифференцирования виде:

$$L=\sum_{m=-\infty}^{\infty}G_m({K_{am}}^2+K_{bm}^2)+\lambda_1\frac{S}{\Delta t}\times$$

$$\times\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\Lambda_{am}+j\Lambda_{bm}\right)\left(T_{am}+jT_{bm}\right)\left(K_{am}+jK_{bm}\right)-\Delta t\right]\times$$

$$\times\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\Lambda_{am}-j\Lambda_{bm}\right)\left(T_{am}-jT_{bm}\right)\left(K_{am}-jK_{bm}\right)-\Delta t\right]+$$

$$+\lambda_2\sum_{m=-\infty}^{\infty}C_m({K_{am}}^2+K_{bm}^2)\,.$$

Дифференцируем L по всем K_{am} и по всем K_{bm} и приравниваем полученные производные нулю, что даёт

$$\frac{dL}{dK_{ai}} = 2K_{ai}G_i + 2\lambda_2 C_i K_{ai} + \lambda_1 \frac{S}{\Delta t} \times$$

$$\times \left[\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \Lambda_m T_m K_m - \Delta t \right) \Lambda_i^* T_i^* + \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \Lambda_m^* T_m^* K_m^* - \Delta t \right) \Lambda_i T_i \right] = 0,$$

$$\frac{dL}{dK_{bi}} = 2K_{bi}G_i + 2\lambda_2 C_i K_{bi} +$$

$$+ \lambda_1 \frac{S}{\Delta t} \left[\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \Lambda_m T_m K_m - \Delta t \right) \left(-j\Lambda_i^* T_i^* \right) + \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \Lambda_m^* T_m^* K_m^* - \Delta t \right) j\Lambda_i T_i \right] = 0,$$

$$i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Умножив второе уравнение на j и сложив с первым, получим бесконечную систему уравнений Эйлера для искомых экстремалей K_m:

$$\lambda_1 \frac{S}{\Delta t} \Lambda_i^* T_i^* \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \Lambda_m T_m K_m - \Delta t \right) + G_i K_i + \lambda_2 C_i K_i = 0, \tag{14}$$

$$i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Если функция $\Lambda(j\omega), T(j\omega)$ и $G(j\omega)$ не ограничены по оси частот (общий случай), то система уравнений (14) – бесконечная. Тем не менее её можно решить в общем виде, и это решение представляет наибольший интерес.

Из (14) имеем

$$K_i = \frac{\lambda_1 S \Lambda_i^* T_i^* \left(\Delta t - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Lambda_m T_m K_m \right)}{\Delta t (G_i + \lambda_2 C_i)}, \tag{15}$$

$$i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Последовательное умножение и левой, и правой частей этого равенства на $\Lambda_i T_i$ и суммирование по i (с заменой обозначений i на m) даёт

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \Lambda_m T_m K_m = \frac{\lambda_1 S}{\Delta t} X \left(\Delta t - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Lambda_m T_m K_m \right), \tag{16}$$

откуда

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \Lambda_m T_m K_m = \frac{\lambda_1 S X}{1 + \frac{\lambda_1 S X}{\Delta t}},$$

где

$$X = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\left| \Lambda_m T_m \right|^2}{G_m + \lambda_2 C_m}. \tag{17}$$

Подставив (16) в (15), получим

$$K_i = \frac{\Lambda_i^* T_i^*}{G_i + \lambda_2 C_i} \cdot \frac{\lambda_1 S}{1 + \lambda_1 \frac{SX}{\Delta t}}, \tag{18}$$

где X определяется соотношением (17). Для получения оптимальной передаточной функции на всей оси частот необходимо функции K_i сместить по оси частот на $i\omega_д$ и взаимно состыковать. В результате этого передаточная функция оптимального приёмника на всей оси частот будет описываться выражением

$$K(j\omega) = \frac{\Lambda^*(j\omega)T^*(j\omega)\lambda_1 S}{[G(\omega) + \lambda_2 C(\omega)](1 + \lambda_1 SR)}, \tag{19}$$

где

$$R = \frac{1}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\left|\Lambda(j\omega - jm\omega_д)T(j\omega - jm\omega_д)\right|^2}{G(\omega - m\omega_д) + \lambda_2 C(\omega - m\omega_д)}; \tag{20}$$

S определяется, как указано в (11);

λ_1 и λ_2 находятся из условий выполнения ограничений (6), (7).

Полученное выражение (19) является предельно общим и из него вытекает ряд частных случаев, представляющих самостоятельный интерес.

Для примера рассмотрим случай при минимизации взвешенной суммы дисперсий шума и интерференционных помех. Пусть $\lambda_1 = 1$. Такой выбор эквивалентен тому, что ограничение на величину интерференционных помех не накладывается, т.е. мы минимизируем не выходной шум $\sigma^2_ш$, а сумму дисперсий шума и интерференционных помех ($\sigma^2_ш + \sigma^2_{ип}$) при ограничении (7) (совместная минимизация шума и интерференционных помех). Если придавать λ_1 различные числовые значения (не задаваясь величиной A_1 в (6) или (11), выражение будет описывать передаточную функцию оптимального приёмника, минимизирующего взвешенную сумму $\sigma^2_ш + \lambda_1 \sigma^2_{ип}$.

Найдём передаточную функцию приёмника, минимизирующего сумму

$$a\sigma^2_ш + b\sigma^2_{ип} \to \min$$

при ограничении (7) (здесь a и b – заданные весовые коэффициенты).

Нетрудно видеть, что решением сформулированной задачи является функция

$$K(j\omega) = \frac{\Lambda^*(j\omega)T^*(j\omega)bS}{[aG(\omega) + \lambda_2 C(\omega)](1 + bSR)}, \tag{21}$$

где

$$R = \frac{1}{\Delta t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\left|\Lambda(j\omega - jm\omega_д)T(j\omega - jm\omega_д)\right|^2}{aG(\omega - m\omega_д) + \lambda_2 C(\omega - m\omega_д)}.$$

Эти выражения получаются из (19) и (20) заменой λ_1 на b и умножением $G(\omega)$ на a.

Вывод.

Получено аналитическое выражение комплексной передаточной функции приёмник, обеспечивающая совместную минимизацию аддитивного шума и интерференционных помех линейными методами при заданных передаточных функциях формирователя, канала связи и характеристике шума $G(j\omega)$.

Литература

1. Кисель В.А. Дискретизация сигналов и интерференционные помехи: Учеб. пособие. — Одесса: ОЭИС, 1983. — 64 с.
2. Френкс Л. Теория сигналов. — М.: Сов. радио, 1974. — 344 с.
3. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — Москва, 1988. — 720 с.