ДОСЛІДЖЕННЯ НЕОДНОРІДНОЇ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНОЇ МЕРЕЖІ МНОЖИННОГО ДОСТУПУ З ДИНАМІЧНИМ ПРОТОКОЛОМ В УМОВАХ ПЕРЕВАНТАЖЕННЯ

Квєтний Р.Н., Посвятенко В.П.
Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця,
E-mail: rkvetny@ukr.net, sevaposv@innovinn.com

Abstract
Kvetny R.N., Posvyatenko V.P. Research of heterogeneous unstationary telecommunication network of plural access with dynamic protocol in the overload conditions. *The research of random access irregular telecommunication network in congestion condition was carried out. As a first approximation asymptotic average was got, as a second approximation deviation distribution in asymptotic average suburb was got. It gives an opportunity to use sufficiently random access irregular telecommunication network features in common telecommunication network Quality Of Service (QoS) models.*

Актуальність. Поняття множинного доступу до каналів передавання даних пов’язано з організацією спільного використання обмеженого відрізку спектру багатьма користувачами. В загальному випадку такі методи можливо використовувати при створенні різних систем передавання даних, зокрема при створенні нестаціонарних (супутникових, стільникових) телефонних мереж. Оскільки даний тип мереж на сьогодні переживає бурхливий розвиток, тому дослідження саме цього виду мереж в умовах перевантаження є актуальним.

Мета дослідження. Підвищення ефективності використання нестаціонарних телекомунікаційних мереж множинного доступу за рахунок вибору оптимальних умов її функціонування.

Вибір напрямку та задач досліджень. Дослідження поведінки систем зв’язку із-за випадкових впливів можливе лише за допомогою випадкових процесів. Вибір випадкових процесів, що використовуються для опису та аналізу систем, залежить від структури та типу системи, від припущень про незалежність чи залежність випадкових величин, від виду їх розподілення. Тому для дослідження таких систем часто використовується апарат теорії масового обслуговування [2]. Використання цього апарату дозволяє побудувати математичні моделі мережі зв’язку, що досліджується, та провести теоретичні дослідження параметрів функціонування реальної мережі.

Результати досліджень. В класичній літературі розділяють два основних класи систем масового обслуговування [2]: системи з втратами (без черг), та системи з очікуванням, а також комбінація цих двох типів — система с очікуванням та втратами (наприклад, система з обмеженою кількістю місць для очікування в бункері) [3]. Математичні моделі телекомунікаційних мереж з протоколами випадкового множинного доступу формують третій клас систем масового обслуговування — системи з повторними викликами. Розвиток мереж з множинним доступом почалось з появи роботи Абрамсона, в якій описане функціонування територіально-рознесених терміналів, які були з’єднані центральною ЕОМ по радіоканалам. Ця система отримала назву ALOHA. Особливістю протоколів множинного доступу є те, що на множині станцій спочатку не вводиться жорсткої черговості. Кожна станція після появи в неї готового пакету має змогу його передавати одразу ж, як тільки визначить, що канал вільний. При цьому не виключена можливість того, що вона попаде в конфлікт, тобто її пакет зіткнеться з пакетом іншої станції. В цих випадках станція завершає передавання та генерує випадку затримку, після якої знову намагається зайняти канал.

Дослідження математичних моделей телекомунікаційних мереж, поведінку та функціонування яких ми описуємо за допомогою різних типів систем масового обслуговування, характеризується великою складністю. В більшості випадків ми отримуємо доволі громіздкі моделі, точні розв'язання яких можливо отримати лише у виключних випадках, що характеризуються накладанням обмежень на статистичну природу процесів, що керують системою (наприклад вхідний потік даних та процес обслуговування). В цих випадках будемо використовувати асимптотичні методі дослідження моделей. Саме використовуючи на практиці асимптотичні методи досліджень можна отримати задовільний наближений розв'язок задачі при доволі широких наближеннях відносно входу та обслуговування навіть при відсутності явного вигляду розподілень характеристик.

Розглянемо супутникову мережу зв'язку, що керується динамічним протоколом випадкового множинного доступу з оповіщенням про конфлікт. Архітектура такої мережі складається з великої кількості територіально-рознесених абонентських станцій, які передають повідомлення через супутник. Так як супутниковий канал зв'язку використовують всі абонентські станції, то можливе співпадання часу ретрансляції повідомлень від двох чи більше абонентських станцій, при цьому повідомлення спотворюються та потребують повторного передавання. Така ситуація називається конфліктом. Будемо вважати, що супутник-ретранслятор має можливість визначення конфліктних ситуацій та реалізації сигналу оповіщення. Абонентські станції (АС) можуть ідентифікувати сигнал оповіщення про конфліктну ситуацію, так, щоб в кожній АС по проходженню завданого проміжку часу розповсюдження сигналу можна було визначити, чи правильно отримані передані повідомлення чи ні.

Повідомлення, що надходять на супутник під час розповсюдження сигналу оповіщення про конфлікт, вважаються спотвореними. Усі спотворені повідомлення надходять в джерело повторних викликів (ДПВ). Після визначення АС того, що надіслане повідомлення попало в конфлікт, АС генерує випадкову затримку, після якої знову реалізує передавання. В динамічному протоколі пропонується використовувати випадкову затримку повторної спроби, що розподілена за експоненційним законом з параметром, що залежить від кількості повідомлень, що знаходяться в ДПВ. Динамічні протоколи, як правило, не реалізуємі. Але можуть наближено оцінювати функціонування адаптивних протоколів, в яких кількість заявок в ДПВ замінюється деяким оціночним числовим значенням. В якості математичної моделі мережі зв'язку, що керується динамічним протоколом випадкового множинного доступу з оповіщенням про конфлікт, розглянемо однолінійну систему масового обслуговування (СМО). Супутник може знаходитись в одному зі станів:

$$k = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases},$$

стан "0" — коли супутник вільний, "1" — коли супутник зайнятий обслуговуванням заявки, та стан "2" — коли на супутнику реалізується етап сповіщення про конфлікт.

Кожна заявка в момент надходження в систему встає в супутник та одразу починає обслуговуватись. Якщо за час її обслуговування інші заявки не надходили, то після завершення обслуговування залишає систему і в подальшому не розглядається. Якщо ж за час її передавання надходить наступна заявка, то виникає конфліктна ситуація та починається етап оповіщення про конфлікт, тривалість якого розподілена за експоненційним законом.

Заявки, що потрапляють у конфлікт, а також ті, що надійшли в систему під час оповіщення про конфлікт, автоматично переходять в ДПВ. З нього знову звертаються до супутника зі спробою повторного обслуговування через випадкові інтервали часу, що розподілені за експоненційним законом з параметром $\frac{\sigma}{i}$ (i — кількість заявок в ДПВ в момент часу t), і можуть знову попасти в конфліктне передавання. Після вдалого передавання заявка залишає систему.

Час обслуговування розподілений за одним й тим самим показниковим законом з параметром μ, як для первинних, так і для повторних викликів. Будемо вважати, що на вхід системи надходить потік заявок, інтенсивність якого залежить від часу і дорівнює $\lambda\left(\frac{t}{T}\right)$, де T — деякий інтервал часу, на протязі якого функціонує мережа зв’язку. Структура мережі зображена на рисунку 1.

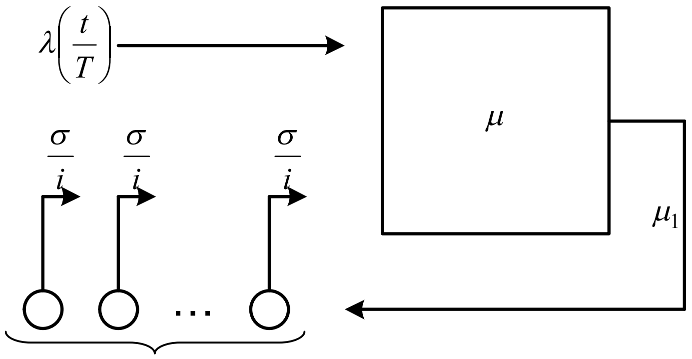

Рисунок 1 — Модель системи масового обслуговування

В нестаціонарному режимі розподіл

$$P_k(i,t) = P\{i(t) = i, k(t) = k\}, k = \overrightarrow{0,2}, i = 0,1,...$$

задовольняють системі диференційно-різницевих рівнянь вигляду [1]:

$$\frac{\partial P_0(i,t)}{\partial t} + \left[\rho\left(\frac{t}{T}\right) + \gamma\right] \cdot P_0(i,t) = P_1(i,t) + \frac{1}{a} \cdot P_2(i,t),$$

$$\frac{\partial P_1(i,t)}{\partial t} + \left[1 + \rho\left(\frac{t}{T}\right) + \gamma\right] \cdot P_1(i,t) = \rho\left(\frac{t}{T}\right) \cdot P_0(i,t) + \gamma \cdot P_0(i+1,t),$$

$$\frac{\partial P_2(i,t)}{\partial t} + \left[\frac{1}{a} + \rho\left(\frac{t}{T}\right)\right] \cdot P_2(i,t) = \rho\left(\frac{t}{T}\right) \cdot P_1(i-2,t) + \gamma \cdot P_1(i-1,t) + \rho\left(\frac{t}{T}\right) \cdot P_2(i-1,t), \quad (1)$$

де $\frac{1}{\mu} \cdot \lambda\left(\frac{t}{T}\right) = \rho\left(\frac{t}{T}\right), \frac{\sigma}{\mu} = \gamma, a = \frac{\mu}{\mu_1}, \mu = 1.$

Система рівнянь (1) отримана аналогічно системі рівнянь у роботі [1]. Систему (1) будемо розв’язувати в умовах перевантаження, тобто при $T \to \infty$.

Перше наближення.

В системі рівнянь (1) зробимо заміну змінних: $\frac{1}{T} = \varepsilon$, $t\varepsilon = \tau$, $i\varepsilon = x$, $\frac{1}{\varepsilon} P_k(i,t) = \pi(x,\tau,\varepsilon)$. В результаті такої заміни можна здійснити перехід від дискретної величини *i*= 0, 1, 2, ... до безперервної змінної $x (x \ge 0)$, від *t* перейшли до τ, при чому $0 \le \tau \le 1$. Після заміни похідна дорівнює $\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial P_k(i,t)}{\partial t} = \frac{\partial \pi_k(x,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \pi_k(x,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau}$.

Тоді рівняння (1) перепишемо у вигляді

$$\varepsilon \frac{\partial \pi_0(x,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} + [\rho(\tau) + \gamma]\pi_0(x,\tau,\varepsilon) = \pi_1(x,\tau,\varepsilon) + \frac{1}{a}\pi_2(x,\tau,\varepsilon),$$

$$\varepsilon \frac{\partial \pi_1(x,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} + [1 + \rho(\tau) + \gamma]\pi_1(x,\tau,\varepsilon) = \rho(\tau)\pi_0(x,\tau,\varepsilon) + \gamma\pi_2(x+\varepsilon,\tau,\varepsilon),$$

$$\varepsilon \frac{\partial \pi_2(x,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} + \left[\frac{1}{a} + \rho(\tau)\right]\pi_2(x,\tau,\varepsilon) = \rho(\tau)\pi_1(x-2\varepsilon,\tau,\varepsilon) + \gamma\pi_1(x-\varepsilon,\tau,\varepsilon) +$$
$$+ \rho(\tau)\pi_2(x-\varepsilon,\tau,\varepsilon). \quad (2)$$

Розв'яжемо систему рівнянь (2). Вважаючи $\varepsilon = 0$ та припускаючи, що $\exists \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \pi_k(x,\tau,\varepsilon) = \pi_k(x,\tau)$ отримаємо:

$$[\rho(\tau) + \gamma]\pi_0(x,\tau) = \pi_1(x,\tau) + \frac{1}{a}\pi_2(x,\tau),$$
$$[1 + \rho(\tau) + \gamma]\pi_1(x,\tau) = [\rho(\tau) + \gamma]\pi_0(x,\tau),$$
$$\frac{1}{a}\pi_2(x,\tau) = [\rho(\tau) + \gamma]\pi_1(x,\tau). \quad (3)$$

Виразимо $\pi_k(x,\tau)$ через функцію $\pi(x,\tau) = \sum\limits_{k=0}^{2} \pi_k(x,\tau)$ та отримаємо:

$$\pi_0(x,\tau) = \frac{1 + G(\tau)}{aG^2(\tau) + 2G(\tau) + 1}\pi(x,\tau),$$
$$\pi_1(x,\tau) = \frac{G(\tau)}{aG^2(\tau) + 2G(\tau) + 1}\pi(x,\tau),$$
$$\pi_2(x,\tau) = \frac{aG^2(\tau)}{aG^2(\tau) + 2G(\tau) + 1}\pi(x,\tau), \quad (4)$$

де $G(\tau) = \rho(\tau) + \gamma$, $\pi(x,\tau)$ — асимптотична щільність розподілу нормованої кількості заявок в джерелі повторних викликів.

Введемо наступні позначення

$$R_0(\tau) = \frac{1 + G(\tau)}{aG^2(\tau) + 2G(\tau) + 1},$$
$$R_1(\tau) = \frac{G(\tau)}{aG^2(\tau) + 2G(\tau) + 1},$$
$$R_2(\tau) = \frac{aG^2(\tau)}{aG^2(\tau) + 2G(\tau) + 1}, \quad (5)$$

де $R_k(\tau)$ — асимптотична імовірність того, що обслуговуючий прилад знаходиться в стані k. Необхідно відмітити, що з системи (3) випливають рівності, що пов'язують $R_0(\tau)$, $R_1(\tau)$ та $R_2(\tau)$:

$$G(\tau)R_0(\tau) = R_1(\tau) + \frac{R_2(\tau)}{a},$$
$$[1 + G(\tau)]R_1(\tau) = G(\tau)R_0(\tau),$$
$$\frac{R_2(\tau)}{a} = G(\tau)R_1(\tau). \quad (6)$$

Знайдемо вигляд функції $\pi(x,\tau)$. Для цього в системі диференційних рівнянь (2) усі функції з аргументом $x \pm \varepsilon$, $x - 2\varepsilon$ розкладемо в ряд за приростом аргументу x, обмежуючись доданками порядку малості ε. Отримаємо:

$$\varepsilon \frac{\partial \pi_0(x,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} + G(\tau)\pi_0(x,\tau,\varepsilon) = \pi_1(x,\tau,\varepsilon) + \frac{1}{a}\pi_2(x,\tau,\varepsilon),$$

$$\varepsilon \frac{\partial \pi_1(x,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} + [1+G(\tau)]\pi_1(x,\tau,\varepsilon) = G(\tau)\pi_0(x,\tau,\varepsilon) + \varepsilon\gamma \frac{\partial \pi_0(x,\tau,\varepsilon)}{\partial x},$$

$$\varepsilon \frac{\partial \pi_2(x,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} + \left[\frac{1}{a} + \rho(\tau)\right]\pi_2(x,\tau,\varepsilon) = G(\tau)\pi_1(x,\tau,\varepsilon) - 2\varepsilon\rho(\tau)\frac{\partial \pi_1(x,\tau,\varepsilon)}{\partial x} -$$

$$-\varepsilon\gamma \frac{\partial \pi_1(x,\tau,\varepsilon)}{\partial x} + \rho(\tau)\pi_2(x,\tau,\varepsilon) - \varepsilon\rho(\tau)\frac{\partial \pi_2(x,\tau,\varepsilon)}{\partial x}. \quad (7)$$

Просумувавши ліві та праві частини рівнянь системи (7) отримаємо рівність

$$\frac{\partial \pi(x,\tau)}{\partial \tau} - [\gamma R_0(\tau) - 2\rho(\tau)R_1(\tau) - \gamma R_1(\tau) - \rho(\tau)R_2(\tau)]\frac{\partial \pi(x,\tau)}{\partial x} = 0. \quad (8)$$

З урахуванням того, що

$$\gamma R_0(\tau) - \rho(\tau)R_1(\tau) - \gamma R_1(\tau) - \rho(\tau)R_2(\tau) = \{G(\tau) = \rho(\tau) + \gamma\} = (G(\tau) - \rho(\tau))R_0(\tau) -$$

$$-(G(\tau) + \rho(\tau))R_1(\tau) - \rho(\tau)R_2(\tau) = G(\tau)(R_0(\tau) - R_1(\tau)) - \rho(\tau)(R_0(\tau) + R_1(\tau) + R_2(\tau)) =$$

$$= \{(6)|(1+G(\tau))R_1(\tau) = G(\tau)R_0(\tau); R_1(\tau) = G(\tau)(R_0(\tau) - R_1(\tau));\} =$$

$$= \left\{(5)\left| R_0(\tau) + R_1(\tau) + R_2(\tau) = \frac{1 + G(\tau) + G(\tau) + aG^2(\tau)}{1 + 2G(\tau) + aG^2(\tau)} = 1;\right.\right\} = R_1(\tau) - \rho(\tau),$$

рівність (8) приймає вигляд:

$$\frac{\partial \pi(x,\tau)}{\partial \tau} + [\rho(\tau) - R_1(\tau)]\frac{\partial \pi(x,\tau)}{\partial x} = 0. \quad (9)$$

Рівняння (9) є однорідним лінійним рівнянням з частковими похідними першого порядку. Для того, щоб його розв'язати складемо рівняння

$$\frac{d\tau}{1} = \frac{dx}{\rho(\tau) - R_1(\tau)},$$

його розв'язок $x = C + \int_0^\tau [\rho(s) - R_1(s)]ds$, тоді $C = x - \int_0^\tau [\rho(s) - R_1(s)]ds$.

Загальний розв'язок рівняння (9) має вигляд:

$$\pi(x,\tau) = \Phi\left(x - \int_0^\tau [\rho(s) - R_1(s)]ds\right), \quad (10)$$

де $\Phi(\cdot)$ — довільна диференційована функція, аналітичний вираз якої знаходиться шляхом задавання початкових умов.

Нехай щільність розподілу в початковий момент часу $\pi(x,0) = q(x)$, де $q(x)$ деяка щільність розподілу. Тоді $\pi(x,0) = q(x) = \Phi(x)$, відповідно $\pi(x,\tau) = q\left(x - \int_0^\tau [\rho(s) - R_1(s)]ds\right)$.

Візьмемо в якості початкової щільності розподілення $q(x) = \delta(x - x_0)$, де $\delta(\cdot)$ — функція Дірака, а $x_0 = i_0\varepsilon$, i_0 — кількість заявок в джерелі повторних викликів в початковий момент часу. Таким чином

$$\pi(x,\tau) = \delta\left(x - \left(x_0 + \int_0^\tau [\rho(s) - R_1(s)]ds\right)\right).$$

Із властивостей функції Дірака випливає, що $x = x_0 + \int_0^\tau [\rho(s) - R_1(s)]ds$. Тобто ми отримали сутність асимптотичного середнього. З приведених вище формул випливає важливий висновок: $\forall\tau : 0 \le \tau \le 1$ має місце $\rho(\tau) > R_1(\tau)$, тоді $x(\tau) > 0$, оскільки від'ємне значення $x(\tau)$ не відповідає умові задачі. В цьому випадку $R_1(\tau)$ є ніщо інше, як пропускна здатність системи. Знайдемо розподілення відхилення від асимптотичного середнього.

Друге наближення.

В початкові системі рівнянь (1) введемо заміну змінних: $\frac{1}{T} = \varepsilon^2$, $t\varepsilon^2 = \tau$, $i\varepsilon^2 = x(\tau) + \varepsilon y$, $\frac{1}{\varepsilon} P_k(i,t) = \pi_k(y,\tau,\varepsilon)$. Необхідно відмітити, що в нових позначеннях похідна за часом $\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial P_k(i,t)}{\partial t} = \frac{\partial \pi_k(y,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} + \frac{\partial \pi(y,\tau,\varepsilon)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = \varepsilon^2 \frac{\partial \pi_k(y,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau)\frac{\partial \pi_k(y,\tau,\varepsilon)}{\partial y}$. З врахуванням цього система (1) прийме вигляд

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \pi_0(y,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau)\frac{\partial \pi_0(y,\tau,\varepsilon)}{\partial y} + G(\tau)\pi_0(y,\tau,\varepsilon) = \pi_1(y,\tau,\varepsilon) + \frac{1}{a}\pi_2(y,\tau,\varepsilon),$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \pi_1(y,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau)\frac{\partial \pi_1(y,\tau,\varepsilon)}{\partial y} + \left(1 + G(\tau)\right)\pi_1(y,\tau,\varepsilon) = \rho(\tau)\pi_0(y,\tau,\varepsilon) + \gamma\pi_0(y+\varepsilon,\tau,\varepsilon),$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \pi_2(y,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau)\frac{\partial \pi_2(y,\tau,\varepsilon)}{\partial y} + \left[\frac{1}{a} + \rho(\tau)\right]\pi_2(y,\tau,\varepsilon) = \rho(\tau)\pi_1(y-2\varepsilon,\tau,\varepsilon) +$$
$$+ \gamma\pi_1(y-\varepsilon,\tau,\varepsilon) + \rho(\tau)\pi_2(y-\varepsilon,\tau,\varepsilon). \qquad (11)$$

Розв’язання системи рівнянь виконується аналогічно розв’язанню системи (3).

В системі диференціальних рівнянь (11) зробимо граничний перехід при $\varepsilon \to 0$ і приймемо, що $\exists \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \pi_k(y,\tau,\varepsilon) = \pi_k(y,\tau)$. Тоді отримаємо

$$G(\tau)\pi_0(y,\tau) = \pi_1(y,\tau) + \frac{1}{a}\pi_2(y,\tau),$$
$$\left[1 + G(\tau)\right]\pi_1(y,\tau) = G(\tau)\pi_0(y,\tau),$$
$$\frac{1}{a}\pi_2(y,\tau) = G(\tau)\pi_1(y,\tau). \qquad (12)$$

Розв’яжемо цю систему аналогічно тому, як розв’язували систему рівнянь (3). Введемо функцію $\pi(y,\varepsilon) = \sum\limits_{k=0}^{2} \pi_k(y,\tau)$ та виразимо через неї $\pi_k(y,\tau)$. Отримаємо

$$\pi_0(y,\tau) = \frac{1 + G(\tau)}{aG^2(\tau) + 2G(\tau) + 1}\pi(y,\tau),$$
$$\pi_1(y,\tau) = \frac{G(\tau)}{aG^2(\tau) + 2G(\tau) + 1}\pi(y,\tau),$$
$$\pi_2(y,\tau) = \frac{aG^2(\tau)}{aG^2(\tau) + 2G(\tau) + 1}\pi(y,\tau), \qquad (13)$$

де $\pi(y,\tau)$ — асимптотична щільність розподілення відхилення кількості заявок в джерелі повторних викликів від асимптотичного середнього.

Функції $\pi_k(y,\tau,\varepsilon)$ будемо шукати з точністю до ε у вигляді

$$\pi_k(y,\tau,\varepsilon) = R_k(\tau)\pi(y,\tau) + \varepsilon h_k(y,\tau) + o(\varepsilon). \qquad (14)$$

Знайдемо вигляд функцій $h_k(y,\tau)$. Для цього в системі диференціальних рівнянь (11) всі функції з аргументом $y \pm \varepsilon$, $y - 2\varepsilon$ розкладемо в ряд по приросту аргументу y, обмежимося лише доданками порядку малості ε. Отримаємо

$$-\varepsilon x'(\tau)\frac{\partial \pi_0(y,\tau,\varepsilon)}{\partial y}+G(\tau)\pi_0(y,\tau,\varepsilon)=\pi_1(y,\tau,\varepsilon)+\frac{1}{a}\pi_2(y,\tau,\varepsilon),$$

$$-\varepsilon x'(\tau)\frac{\partial \pi_1(y,\tau,\varepsilon)}{\partial y}+[1+G(\tau)]\pi_1(y,\tau,\varepsilon)=G(\tau)\pi_0(y,\tau,\varepsilon)+\varepsilon\gamma\frac{\partial \pi_0(y,\tau,\varepsilon)}{\partial y},$$

$$-\varepsilon x'(\tau)\frac{\partial \pi_2(y,\tau,\varepsilon)}{\partial y}+\left[\frac{1}{a}+\rho(\tau)\right]\pi_2(y,\tau,\varepsilon)=G(\tau)\pi_1(y,\tau,\varepsilon)-2\varepsilon\rho(\tau)\frac{\partial \pi_1(y,\tau,\varepsilon)}{\partial y}-$$

$$-\varepsilon\gamma\frac{\partial \pi_1(y,\tau,\varepsilon)}{\partial y}+\rho(\tau)\pi_2(y,\tau,\varepsilon)-\varepsilon\rho(\tau)\frac{\partial \pi_2(y,\tau,\varepsilon)}{\partial y}. \quad (15)$$

З рівняння (15) підставимо $\pi_k(y,\tau,\varepsilon)$ у вигляді (14), зведемо подібні та отримаємо систему неоднорідних лінійних алгебраїчних рівнянь відносно $h_k(y,\tau)$ вигляду

$$G(\tau)h_0(y,\tau)-h_1(y,\tau)-\frac{1}{a}h_2(y,\tau)=x'(\tau)R_0(\tau)\frac{\partial \pi(y,\tau)}{\partial y},$$

$$-G(\tau)h_0(y,\tau)+[1+G(\tau)]h_1(y,\tau)=x'(\tau)R_1(\tau)\frac{\partial \pi(y,\tau)}{\partial y}+\gamma R_0(\tau)\frac{\partial \pi(x,\tau)}{\partial y},$$

$$-G(\tau)h_1(y,\tau)+\frac{1}{a}h_2(y,\tau)=x'(\tau)R_2(y,\tau)\frac{\partial \pi(y,\tau)}{\partial y}-2\rho(\tau)R_1(\tau)\frac{\partial \pi(y,\tau)}{\partial y}-$$

$$-\gamma R_1(\tau)\frac{\partial \pi(y,\tau)}{\partial y}-\rho(\tau)R_2(\tau)\frac{\partial \pi(y,\tau)}{\partial y}. \quad (16)$$

Між рівняннями цієї системи є залежність і ранг матриці системи дорівнює 2. Для того, щоб система (16) мала розв'язок, необхідно щоб виконувалась рівність

$$[x'(\tau)-[\rho(\tau)-R_1(\tau)]]\frac{\partial \pi(y,\tau)}{\partial y}=0. \quad (17)$$

З однорідного лінійного рівняння з частковими похідними першого порядку (9),ми знаємо, що $x'(\tau)=\rho(\tau)-R_1(\tau)$. Таким чином, можна зробити висновок, що система (16) має розв'язок. При умові, що функція $h_1(y,\tau)$ відома, розв'язок можна записати у вигляді

$$h_0(y,\tau)=\frac{1}{G(\tau)}\left[[1+G(\tau)]h_1(y,\tau)-x'(\tau)R_1(\tau)\frac{\partial \pi(y,\tau)}{\partial y}-\gamma R_0(\tau)\frac{\partial \pi(y,\tau)}{\partial y}\right],$$

$$h_2(y,\tau)=a\left[G(\tau)h_1(y,\tau)+x'(\tau)R_2(\tau)\frac{\partial \pi(y,\tau)}{\partial y}-2\rho(\tau)R_1(\tau)\frac{\partial \pi(y,\tau)}{\partial y}-\right.$$

$$\left.-\gamma R_1(\tau)\frac{\partial \pi(y,\tau)}{\partial y}-\rho(\tau)R_2\frac{\partial \pi(y,\tau)}{\partial y}\right]. \quad (18)$$

Тепер визначимо асимптотичну щільність розподілу відхилення кількості заявок в джерелі повторних викликів від асимптотичного середнього.

В системі (11) усі функції з аргументом $y\pm\varepsilon$, $y-2\varepsilon$ розкладемо в ряд по приросту аргументу y, обмежуючись лише складовими порядку малості ε^2. Отримаємо

$$\varepsilon^2\frac{\partial \pi_0(y,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau}-\varepsilon x'(\tau)\frac{\partial \pi_0(y,\tau,\varepsilon)}{\partial y}+G(\tau)\pi_0(y,\tau,\varepsilon)=\pi_1(y,\tau,\varepsilon)+\frac{1}{a}\pi_2(y,\tau,\varepsilon),$$

$$\varepsilon^2\frac{\partial \pi_1(y,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau}-\varepsilon x'(\tau)\frac{\partial \pi_1(y,\tau,\varepsilon)}{\partial y}+[1+G(\tau)]\pi_1(y,\tau,\varepsilon)=G(\tau)\pi_0(y,\tau,\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon\gamma\frac{\partial \pi_0(y,\tau,\varepsilon)}{\partial y}+\frac{\varepsilon^2}{2}\gamma\frac{\partial^2 \pi_0(y,\tau,\varepsilon)}{\partial y^2},$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \pi_2(y,\tau,\varepsilon)}{\partial \tau} - \varepsilon x'(\tau) \frac{\partial \pi_2(y,\tau,\varepsilon)}{\partial y} + \left[\frac{1}{a} + \rho(\tau)\right]\pi_2(y,\tau,\varepsilon) = G(\tau)\pi_1(y,\tau,\varepsilon) -$$

$$-2\varepsilon\rho(\tau)\frac{\partial \pi_1(y,\tau,\varepsilon)}{\partial y} + \frac{4\varepsilon^2}{2}\rho(\tau)\frac{\partial^2 \pi_1(y,\tau,\varepsilon)}{\partial y^2} - \varepsilon\gamma \frac{\partial \pi_1(y,\tau,\varepsilon)}{\partial y} + \frac{\varepsilon^2}{2}\gamma \frac{\partial^2 \pi_1(y,\tau,\varepsilon)}{\partial y^2} +$$

$$+\rho(\tau)\pi_2(y,\tau,\varepsilon) - \varepsilon\rho(\tau)\frac{\partial \pi_2(y,\tau,\varepsilon)}{\partial y} + \frac{\varepsilon^2}{2}\rho(\tau)\frac{\partial^2 \pi_2(y,\tau,\varepsilon)}{\partial y^2}. \qquad (19)$$

Підставивши в рівняння (19) $\pi_k(y,\tau,\varepsilon)$ у вигляді (14), просумувавши ліві та праві частини рівнянь, отримаємо

$$\frac{\partial \pi(y,\tau)}{\partial \tau} - x'(\tau)\frac{\partial}{\partial y}\left[h_0(y,\tau) + h_1(y,\tau) + h_2(y,\tau)\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\gamma h_0(y,\tau) - 2\rho(\tau)h_1(y,\tau) -\right.$$

$$\left. -\gamma h_1(y,\tau) - \rho(\tau)h_2(y,\tau)\right] + \frac{1}{2}\left[\gamma R_0(\tau) + (4\rho(\tau)+\gamma)R_1(\tau) + \rho(\tau)R_2(\tau)\right]\frac{\partial^2 \pi(y,\tau)}{\partial y^2}. \qquad (20)$$

Підставляючи замість $h_0(y,\tau)$ та $h_2(y,\tau)$ їх вирази (18), отримаємо рівняння Фоккера-Планка для $\pi(y,\tau)$

$$\frac{\partial \pi(y,\tau)}{\partial \tau} = \frac{A(\tau)}{2}\frac{\partial^2 \pi(y,\tau)}{\partial y^2}, \qquad (21)$$

де

$$A(\tau) = 2x'(\tau)\left[-x'(\tau)\frac{R_1(\tau)}{G(\tau)} - \gamma\frac{R_0(\tau)}{G(\tau)} + ax'(\tau)R_2(\tau) - 2a\rho(\tau)R_1(\tau) - a\gamma R_1(\tau) -\right.$$

$$\left. - a\rho(\tau)R_2(\tau)\right] - 2\gamma\left[x'(\tau)\frac{R_1(\tau)}{G(\tau)} + \gamma\frac{R_0(\tau)}{G(\tau)}\right] - 2\rho(\tau)(ax'(\tau)R^2(\tau) -$$

$$-2a\rho(\tau)R_1(\tau) - a\gamma R_1(\tau) - a\rho(\tau)R_2(\tau)) + \gamma R_0(\tau) + \left[4\rho(\tau)+\gamma\right]R_1(\tau) + \rho(\tau)R_2(\tau).$$

Висновки.

Проведено дослідження неоднорідної мережі випадкового доступу в умовах перевантаження. В першому наближенні отримано асимптотичне середнє, а в другому розподілення відхилення в околі асимптотичного середнього, яке задовольняє рівнянню Фоккера-Планка з нульовим коефіцієнтом переносу та є нормальним. Це дає змогу адекватно використовувати показники роботи нестаціонарних телекомунікаційних мереж в загальних моделях оцінки якості зв'язку в телекомунікаційних системах [4].

Щодо подальших напрямків досліджень — необхідним є дослідження неоднорідної мережі випадкового доступу зі статичним протоколом в умовах великої затримки передавання пакетів.

Література

1. Кветный Р.Н., Посвятенко В.П. Исследование стационарной сети случайного доступа в условиях большой загрузки // Вісник Черкаського технологічного університету. — 2005. — №3. — С. 21–24.
2. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. — М.: Наука, 1987. — 215 с.
3. Кениг Д., Штоян Д. Методы теории массового обслуживания. — М.: Радио и связь, 1981. — 688 с.
4. Квєтний Р.Н., Посвятенко В.П. Математична модель показників якості зв'язку в телекомунікаційних системах. // Науковий вісник Інституту економіки та нових технологій "Нові технології". — 2005. — №1–2 (7–8). — С. 130–133.