СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ МНОГОСТУПЕНЧАТЫМИ ВОДООТЛИВНЫМИ УСТАНОВКАМИ УГОЛЬНЫХ ШАХТ.

Бессараб В.И. канд. техн. наук, доц., Федюн Р.В. аспирант,
Донецкий государственный технический университет

Приведен метод синтеза цифровой системы автоматического управления многоступенчатыми водоотливными установками угольных шахт на основании обобщенного критерия качества с использованием принципа максимума Понтрягина.

The synthesizing method for the digital system of self-control many-staged water-drainage installations for coal mines on the foundation of generalized yardstick quality with usage of a the maximum principle Pontryagin is reduced.

Многоступенчатая водоотливная установка с точки зрения теории автоматического управления является многомерным многосвязным объектом. Для упрощения математических выкладок при синтезе системы управления многоступенчатым водоотливом принято ограничиться рассмотрением трехступенчатой водоотливной установки [1,2].

В силу технологических особенностей функционирования многоступенчатой водоотливной установкой известно, что к переходным процессам по координатам, характеризующим режим перекачки, предъявляются требования монотонности. Кроме того, на технологические параметры, принятые в качестве переменных состояния, выходных величин и управляющих координат наложены естественные технические ограничения (предельное допустимое давление, минимальный подпор на входе в насос, максимальная подача насосов из условия кавитации).

Как показывает анализ, при синтезе алгоритмов управления многомерных многосвязных систем наибольшее распространение получили следующие критерии качества – критерий оптимальности по быстродействию, критерий оптимальности по расходу энергии на управление, критерий оптимальности по точности в динамических режимах, обобщенный квадратичный критерий качества, критерий обобщенной работы А.А. Красовского.

Для исследуемого объекта наиболее подходит обобщенный квадратичный критерий качества. Квадратичный критерий – это один из критериев, при котором для линейных систем получается оптимальный закон управления с обратной связью по состоянию (выходу). Он позволяет получить требуемый вид кривых переходных процессов при оптимальном быстродействии.

Для решения задачи синтеза цифровой системы управления объект представляется в векторно-матричной форме [3]:

$$\dot{\bar{x}}(t) = A\bar{x}(t) + B\bar{u}(t), \tag{1}$$

$$\bar{y}(t) = C\bar{x}(t). \tag{2}$$

где *x(t)*– вектор состояния; *y(t)* – вектор выхода; *u(t)* – вектор входа;

A– матрица динамики объекта; *B* – матрица входа объекта;

C – матрица выхода объекта;

Анализ протекающих процессов в объекте управления показал его стационарность. Поэтому матрицы *A*, *B*, *C* модели объекта (1), (2) состоят из постоянных (не зависящих от времени) элементов.

Функционал обобщенного квадратичного критерия качества для линейного, непрерывного, многосвязного, стационарного объекта имеет следующий вид:

$$J(x,u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left[x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\right]dt, \tag{3}$$

где *Q*, *R*– матрицы весовых коэффициентов.

В настоящее время широкое распространение получили цифровые управляющие устройства. Системы управления с такими устройствами являются дискретными. Непрерывный объект управления (1),(2) в дискретном представлении имеет следующий вид [3]:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + Hu(k), \tag{4}$$

$$y(k) = Cx(k), \tag{5}$$

где *Φ* – матрица динамики объекта; *H* – матрица входа объекта.

Задача синтеза алгоритма оптимального управления объектом состоит в формировании такого вектора управляющих переменных *u(k)* который переводит систему в конечное состояние и минимизирует квадратичный критерий качества:

$$I = x^T(N)Sx(N) + \sum_{k=0}^{N-1}\left[x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k)\right]. \qquad (6)$$

Определение оптимального управления $u^o(k)$ является задачей динамической оптимизации, которая может быть решена с использованием методов вариационного исчисления, принципа максимума Понтрягина или принципа оптимальности Беллмана [4,5].

Для нахождения оптимального управления используем принцип максимума Понтрягина [4].

Запишем гамильтониан [4]:

$$\begin{aligned} \Gamma(k) = \Gamma[x(k), p(k+1), u(k)] = x^T(k)Qx(k) + u^T(k)Ru(k) + \\ + p(k+1)[\Phi x(k) + Hu(k)], \end{aligned} \qquad (7)$$

где $p(k)$ – дополнительный вектор.

Принцип максимума (минимума) основан на том, что гамильтониан имеет экстремум (максимум или минимум) вдоль оптимальной траектории.

Необходимые условия существования экстремума для I имеют следующий вид [4]:

$$\frac{\partial \Gamma^o(k)}{\partial x^o(k)} = p^o(k) = Qx^o(k) + \Phi^T p^o(k+1), \qquad (8)$$

$$\frac{\partial \Gamma^o(k)}{\partial p^o(k+1)} = x^o(k+1) = \Phi x^o(k) + Hu^o(k), \qquad (9)$$

$$\frac{\partial \Gamma^o(k)}{\partial u^o(k)} = Ru^o(k) + H^T p^o(k+1) = 0. \qquad (10)$$

Оптимальное управление определяется из соотношения (10):

$$u^o(k) = -R^{-1}H^T p^o(k+1). \qquad (11)$$

Подставляя последнее выражение в (8) и (9), получаем канонические уравнения состояния:

$$x^o(k+1) = \Phi x^o(k) - HR^{-1}H^T p^o(k+1), \qquad (12)$$

$$\Phi^T p^o(k+1) = p^o(k) - Qx^o(k). \qquad (13)$$

Они представляют собой $2n$ разностных уравнений, которые должны быть решены при известных граничных условиях $x(0)$ и $p^o(N)=Sx^o(N)$. Искомое решение имеет следующий вид [4]:

$$p(k) = P(k)x(k), \qquad (14)$$

где $P(k)$ – ($n \times n$)-мерная матрица с неизвестными свойствами за исключением того, что при $k=N \Rightarrow P(N)=S$.

Подставив выражение (14) в (12) и произведя соответствующие преобразования, получим:

$$x^o(k+1) = [I + HR^{-1}H^T P(k+1)]^{-1} \Phi x^o(k), \qquad (15)$$

где предполагается, что матрица $[I+HR^{-1}H^T P(k+1)]$ имеет обратную матрицу. По аналогии, подставляя (14) в (13), получаем:

$$\Phi^T P(k+1) x^o(k+1) = [P(k) - Q] x^o(k). \qquad (16)$$

Теперь подставим выражение (15) в (16):

$$\Phi^T P(k+1)[I + HR^{-1}H^T P(k+1)]^{-1} \Phi x^o(k) = [P(k) - Q] x^o(k). \qquad (17)$$

Для любого $x^o(k)$ должно выполняться соотношение:

$$\Phi^T P(k+1)[I + HR^{-1}H^T P(k+1)]^{-1} \Phi = P(k) - Q. \qquad (18)$$

Это нелинейное матричное разностное уравнение относительно $P(k)$ называется дискретным уравнением Риккати. Матрица $P(k)$ размерностью $n \times n$ известна как коэффициент Риккати. После алгебраического преобразования, приведения подобных членов и сокращения получаем уравнение Риккати в стандартном виде [4]:

$$\begin{aligned} P(k) = \Phi^T P(k+1)\Phi - HP(k+1)\Phi[R + H^T P(k+1)H]^{-1} \cdot \\ \cdot H^T P(k+1)\Phi + Q \end{aligned} \qquad (19)$$

Оптимальное управление определяется в результате подстановки выражений (14),(16),(18) в (11). Таким образом, получаем:

$$\begin{aligned} u^o(k) = -R^{-1}H^T P(k+1)[I + HR^{-1}H^T P(k+1)]^{-1} \Phi x^o(k) = \\ = -[R + HP(k+1)H^T]^{-1} H^T P(k+1)\Phi x^o(k). \end{aligned} \qquad (20)$$

Из последнего выражения видно, что оптимальное управление представлено в форме обратной связи по состоянию.

Для бесконечного интервала времени, или бесконечного числа шагов $N=$¥ , критерий качества (6) принимает вид:

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} \left[x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k) \right]. \qquad (21)$$

В этом случае терминальная составляющая $x^T(N)Sx(N)$ в критерии качества отсутствует, поскольку при бесконечном увеличении N конечное состояние $x(N)$ должно стремиться к нулю (положению равновесия).

Важное требование при синтезе линейного оптимального регулятора на бесконечном интервале времени состоит в том, что замкнутая система должна быть асимптотически устойчивой. Система, описываемая уравнениями (4), (5) должна удовлетворять условиям:

- пара [Ф, Н] должна быть полностью управляемой;
- пара [Ф, С] должна быть полностью наблюдаемой.

Эти условия для данного объекта полностью выполняются [3].

Тогда решение задачи синтеза оптимального цифрового регулятора на бесконечном интервале времени может быть получено путем подстановки $k \to \infty$. При $N \to \infty$ матричный коэффициент Риккати ***P(k)*** становиться постоянной матрицей:

$$\lim_{k\to\infty} P(k) = P. \tag{22}$$

Заменяя в уравнении (19) *P(k+1)* и *P(k)* на *P*, получаем алгебраическое уравнение Риккати:

$$P = \Phi^T P\Phi - HP\Phi^T [R + H^T PH]^{-1} H^T P\Phi + Q \tag{23}$$

На основании (20) выражение для оптимального управления имеет вид:

$$u^o(k) = -(R + H^T PH)^{-1} H^T P\Phi x(k). \tag{24}$$

В этом случае матрица обратной связи является постоянной и определяет регулятор с постоянными параметрами:

$$K = (R + H^T PH)^{-1} H^T P\Phi. \tag{25}$$

Блок-схема обобщенной модели трехступенчатой водоотливной установки с регулятором состояния приведена на рис.1.

Основные трудности, с которыми приходится сталкиваться при решении задач синтеза алгоритма оптимального управления – выбор элементов весовых матриц *S*, *Q*, *R* в выражении функционала качества (6). В настоящее время, не смотря на большое количество работ, посвященных данному вопросу, нет каких-либо универсальных рекомендаций для выбора весовых матриц. Они задаются произвольно или используются специфические частные особенности конкретного объекта для задания их опорных значений.

Вес каждой управляющей переменной можно задать независимо, так что матрица *R* может быть представлена в диагональной форме [5]. Веса отдельных переменных состояния в большинстве случаев также задаются с помощью диагональной матрицы *Q* [5].

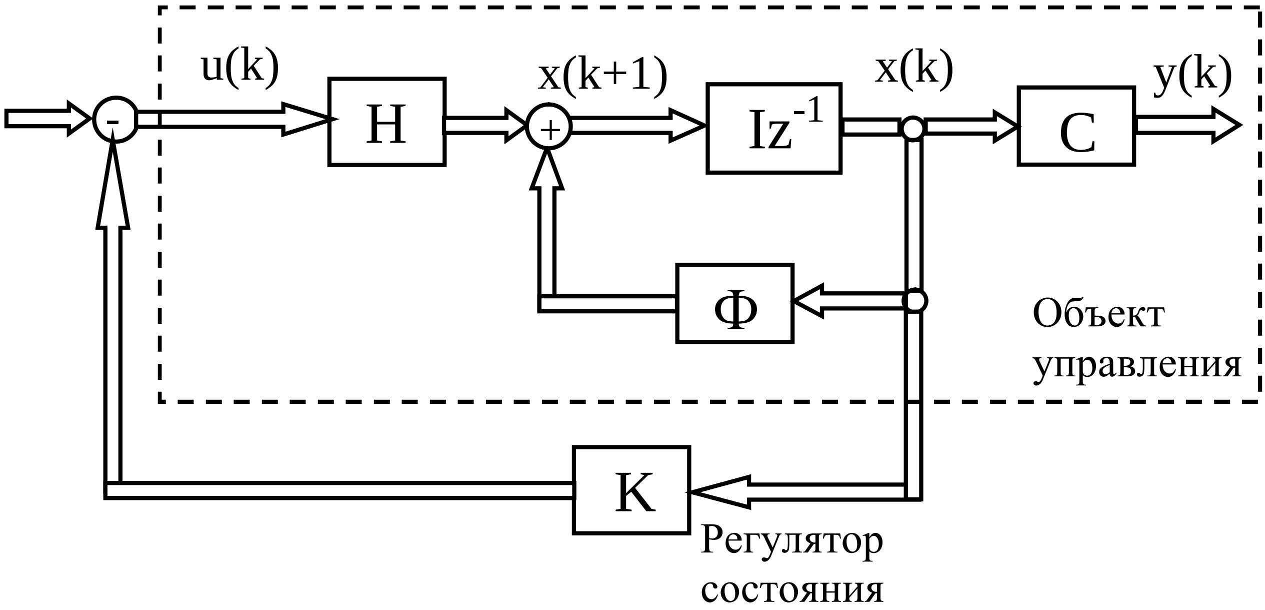

Рисунок 1 – Блок-схема обобщенной модели объекта управления в пространстве состояний с регулятором состояния.

Каждый член функционала качества (6) влияет на технические свойства проектируемой системы определенным образом [4,5]. Так, слагаемое $x^T(k)Qx(k)$ оценивает отклонение фазовых координат от желаемых. Слагаемое $u^T(k)Ru(k)$ оценивает стоимость управления (часто называют затратами энергии на управление). Слагаемое $x^T(k)Q_Nx(k)$ гарантирует относительно малую ошибку в конечный момент времени N, его необходимо учитывать в том случае, когда влияние величины $x(k)$ в конечный момент времени (установившееся значение) особенно важно.

Применительно к трехступенчатой водоотливной установке при принятых переменных состояния можно считать, что допустимые отклонения фазовых координат в любой момент времени вносят в функционал качества одинаковый вклад, так как представляют собой переменные одной физической природы – гидравлические параметры процесса перекачки (напор и подача). Аналогичные рассуждения можно распространить и на отклонения сигналов управления. Тогда очевидно, что суммарный вклад допустимых отклонений фазовых координат должен приблизительно равняться суммарному вкладу допустимых отклонений сигналов управления. Выше изложенные рассуждения можно представить в виде следующих математических соотношений:

$$q_{ii} = \left(\frac{x_{1\max}}{x_{i\max}} \right)^2 q_{11}; \qquad r_{jj} = \left(\frac{u_{1\max}}{u_{i\max}} \right)^2 r_{11}, \tag{26}$$

$$\sum_{i=1}^{n} q_{ii} x_{i\max}^2 = \sum_{j=1}^{l} r_{jj} u_{i\max}^2 . \tag{27}$$

Здесь x_{imax} – максимально допустимое отклонение i-той координаты ($i=1,2,3,\ldots n$), определяемое техническими характеристиками ступени водоотлива; u_{jmax} – максимально допустимое отклонение j-той управляющей переменной ($j=1,2,3,\ldots l$). Так как возможности изменения управляющих воздействий u_j каждой ступени водоотлива одинаковые (оборудование разных горизонтов, как правило, одинаковое), то заведомо можно считать, что диагональные элементы матрицы R равны между собой и приняты единичными.

Окончательный выбор весовых коэффициентов производится после нескольких пробных расчетов матрицы K и последующего моделирования динамики проектируемой системы.

Выводы.

1. На основании общей теории автоматического управления, с использованием технологических особенностей функционирования многоступенчатой водоотливной установки обоснована целесообразность применения обобщенного квадратичного критерия качества при синтезе оптимального дискретного регулятора.
2. Для синтеза оптимального дискретного регулятора применен принцип максимума Понтрягина.
3. Предложены общие рекомендации по выбору элементов весовых матриц, входящих в критерий качества.

Список источников

1.Бессараб В.И., Федюн Р.В. Принципы моделирования динамических процессов в многоступенчатых водоотливных установках. Наукові праці ДонДТУ. Серія: Обчислювальна техніка та автоматизація, випуск 12. Донецьк: ДонДТУ, ТОВ “Лебідь” – 1999, с.33-40.

2.Бессараб В.И., Федюн Р.В. Динамическая модель многоступенчатого водоотлива угольных шахт. Наукові праці ДонДТУ. Серія: гірнича електромеханіка, випуск 16. Донецьк, ДонДТУ – 2000, с.19–25.

3.Бессараб В.І., Федюн Р.В. Дослідження багатоступінчатої водовідливної установки методом простору станів. Наукові праці ДонДТУ. Серія: Обчислювальна техніка та автоматизація, випуск 20. Донецьк, ДонДТУ – 2000, с.16 – 22.

4.Куо Б. Теория и проектирование цифровых систем управления: Пер. с англ. – М.: Машиностроение, 1986. – 448 с.

5.Изерман Р. Цифровые системы управления. – М.: “Мир”, 1984. – 541.