УДК 517. 5

Н.П.Волчкова (N.P.Volchkova)

Донецкий национальный университет

Об обращении локального преобразования Помпейю

Inversion of the local Pompeiu transform

The constraction of the inversion of the local Pompeiu transform for triangle is obtained.

Одержано конструкцію обернення локального перетворення Помпейю для правильного трикутника.

УДК 517. 5 **Н.П.Волчкова**

Об обращении локального преобразования Помпейю

1. Введение

Пусть R^n – вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с евклидовой нормой $| \; |$, $M(n)$ – группа движений R^n, $F = \{\mu_i\}_{i=1}^k$ – конечное семейство распределений с компактным носителем в R^n. При фиксированном $g \in M(n)$ рассмотрим распределение $g\mu_i$, действующее на $C^\infty(R^n)$ по правилу

$$< g\mu_i, f >=< \mu_i, f \circ g^{-1} >, \; f \in C^\infty(R^n)$$

Преобразование Помпейю P_F (глобальное) отображает $C^\infty(R^n)$ в $C^\infty(M(n))^k$ и определяется равенством

$$P_F(f)(g) = \left(< g\mu_1, f >, ..., < g\mu_k, f >\right), \quad g \in M(n). \tag{1}$$

Аналогично, для открытого множества $U \in R^n$ локальное преобразование Помпейю отображает по формуле (1) $C^\infty(U)$ в декартово произведение $C^\infty(\Lambda(U,\mu_1)) \times ... \times C^\infty(\Lambda(U,\mu_k))$, где $\Lambda(U,\mu_i) = \{g \in M(n) : \operatorname{supp} g\mu_i \subset U\}$.

Для заданных F и U возникает следующая

Проблема [1]. 1) Выяснить, является ли P_F инъективным и если не является, то описать его ядро.
2) Если P_F инъективно, то найти обратное отображение.

Для отдельных F и U инъективность преобразования Помпейю и близкие вопросы изучались во многих работах (см. обзоры [1], [2], а также [3]-[10]). Особый интерес представляет случай, когда $U = B_R = \{x \in R^n : |x| < R\}$, а $F = \{\chi_E\}$ – индикатор компактного множества $E \subset B_R$ положительной меры . Для этого семейства F и широкого класса множеств E (см.[6]) преобразование P_F инъективно по отношению к U, если R больше диаметра $d(E)$ наименьшего замкнутого шара, содержащего E

(см. [6], [7], а также [5], [8]-[10], где для некоторых конкретных E найдено минимальное значение R, при котором P_{χ_E} инъективно). Для указанного класса E и $R > \frac{3d(E)}{2}$ в работе [7] приводится также схема обращения преобразования P_{χ_E} . Кроме того, для квадрата в [7] найдена конструкция обращения преобразования Помпейю и при $R > d(E)$. В связи с этим при решении проблемы 2) большой интерес представляет усиление оценки $R > \frac{3d(E)}{2}$ для других E. В данной работе получено обращение преобразования P_{χ_E} в случае, когда E является правильным треугольником и $R > d(E)$.

2.Обозначения и вспомогательные утверждения

Пусть, как обычно, $D(R^n)-$ пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций на R^n, $D'(R^n)-$ пространство распределений на R^n , $\mu_1 * \mu_2$ - свертка двух распределений, одно из которых имеет компактный носитель. Радиализацией распределения $\mu \in D'(R^n)$ называется радиальное распределение $R\mu$, действующее на функцию $\varphi \in D(R^n)$ по формуле $< R\mu, \varphi > = < \mu(x), \int\limits_{SO(n)} \varphi(kx)dk >$, где $SO(n)-$ группа вращений пространства R^n, $dk-$ нормированная мера Хаара на группе $SO(n)$. Радиальность $R\mu$ означает, что для любого $k \in SO(n)$

$$< R\mu(x), \varphi(kx) > = < R\mu(x), \varphi(x) > , \quad \varphi \in D(R^n).$$

Сферическое преобразование радиального распределения μ с компактным носителем в R^n определяется равенством

$$\tilde{\mu}(\lambda) = <\mu(x), j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda|x|)> , \quad \lambda \in C \quad , \tag{2}$$

где $j_q(z) = \dfrac{I_q(z)}{z^q}$, $I_q -$ функция Бесселя порядка q. Для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n) \in N^n$ положим $\mu(\alpha) = R(D^\alpha \chi_E)$, где $D^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1+...\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}...x_n^{\alpha_n}}$. Пусть также $\delta -$ дельта-распределение в нуле пространства R^n.

Лемма 1 [7]. Пусть $E \subset \overline{B}_r$ и $R > r$. Тогда для любой $f \in C^\infty(B_R)$ и $x \in B_{R-r}$ имеет место равенство

$$(f * \mu(\alpha))(x) = \int_{SO(n)} \left\langle D^\alpha \delta(y), (P_{\chi_E} f)\left(\begin{Vmatrix} k & x+ky \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}^{-1} \right) \right\rangle dk ,$$

где $M(n)$ рассматривается как группа матриц порядка $(n+1)\times(n+1)$ вида $\begin{Vmatrix} k & x \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $k \in SO(n)$, $x \in R^n$ и R^n отождествляется с аффинным подпространством $\{x_{n+1} = 1\}$ в R^{n+1} .

Далее будем отождествлять точку $(x, y) \in R^2$ с комплексным числом $z = x + iy$. Пусть $T -$ замкнутый треугольник с вершинами в точках $z_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, z_2 = z_1 + e^{i\frac{\pi}{6}}, z_3 = \bar{z}_2$.

Обозначим $D_1 = \dfrac{\partial}{\partial y}, D_2 = \dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\dfrac{\partial}{\partial y}, D_3 = \dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\dfrac{\partial}{\partial y}$. Тогда для любой $f \in C^3(T)$ имеем

$$\int_T (D_1 D_2 D_3 f)(x, y)dxdy = \frac{2}{\sqrt{3}}(D_1 f)(z_1) + (D_2 f)(z_2) - (D_3 f)(z_3)\,. \tag{3}$$

(см. [8, лемма 2]).

Лемма 2. Пусть $\nu = D_1 D_2 D_3 \chi_T$. Тогда

$$\left(R\left(\frac{\partial^k}{\partial \bar z^k}\nu\right)\right)^{\sim}(\lambda)=\begin{cases}6k(-1)^{\frac{k}{3}}i\lambda^{2k}j_k(\frac{\lambda}{\sqrt3}), & k\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,3)\\ 0, & k\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,3)\end{cases} \tag{4}$$

где $\dfrac{\partial}{\partial \bar z}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}+i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$.

Доказательство. Поскольку $j_k'(t)=-tj_{k+1}(t)$ (см.[11, с. 349]), имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(z^k j_k(\lambda|z|)\right)=kz^{k-1}j_k(\lambda|z|)-\lambda^2 z^k x j_{k+1}(\lambda|z|)\ , \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(z^k j_k(\lambda|z|)\right)=ikz^{k-1}j_k(\lambda|z|)-\lambda^2 z^k y j_{k+1}(\lambda|z|) \tag{6}$$

Из (5), (6) индукцией по k находим $(-1)^k\dfrac{\partial^k}{\partial \bar z^k}\left(I_0(\lambda|z|)\right)=\lambda^{2k}\left(\dfrac{z}{2}\right)^k j_k(\lambda|z|)$ и (см.(2))

$$\left(R\left(\frac{\partial^k}{\partial \bar z^k}\nu\right)\right)^{\sim}(\lambda)=\frac{\lambda^{2k}}{2^k}<\nu(z),z^k j_k(\lambda|z|)>. \tag{7}$$

Полагая $\psi(z)=z^k j_k(\lambda|z|)$ и используя (3), получаем

$$<\nu(z),\psi(z)>=-\frac{2}{\sqrt3}(D_1\psi)(z_1)-(D_2\psi)(z_2)+(D_3\psi)(z_3)\,.$$

Отсюда и из (5)-(7) следует утверждение леммы 2.

В частности, при $k=3,6$ из (4) имеем

$$\left(R\left(\frac{\partial^3}{\partial \bar z^3}\nu\right)\right)^{\sim}(\lambda)=-\frac{\sqrt3}{4}i\lambda^6 j_3(\frac{\lambda}{\sqrt3})\ , \tag{8}$$

$$\left(R\left(\frac{\partial^6}{\partial \bar z^6}\nu\right)\right)^{\sim}(\lambda)=\frac{1}{48}i\lambda^{12} j_6(\frac{\lambda}{\sqrt3})\ . \tag{9}$$

По теореме Винера-Пэли [12, теорема 7.3.1] существуют радиальные распределения μ_1 и μ_2 с носителями в $B_{1/\sqrt3}$, для которых

$$\tilde\mu_1(\lambda)=\frac{\sqrt3}{4}ij_3(\frac{\lambda}{\sqrt3}),\ \tilde\mu_2(\lambda)=-\frac{i}{48}\lambda^6 j_6(\frac{\lambda}{\sqrt3})\ . \tag{10}$$

Из (8)-(10) находим

$$\Delta^3\mu_1 = R\left(\frac{\partial^3}{\partial\bar{z}^3}\nu\right),\ \ \Delta^3\mu_2 = R\left(\frac{\partial^6}{\partial\bar{z}^6}\nu\right), \tag{11}$$

где $\Delta -$ оператор Лапласа . Далее нам потребуется оценка снизу функции $\tilde{\mu}_1(\lambda)\tilde{\mu}_2(\lambda)j_k(\varepsilon\lambda)$, где $\varepsilon > 0$.

Лемма 3. Пусть $a_1,\, a_2,\, a_3 > 0,\ k = 0,1,...,\ \theta(\lambda) = j_3(a_1\lambda)\, j_6(a_2\lambda)\, j_k(a_3\lambda).$ Тогда существуют константы $L_k, A_k > 0$ такие, что для любого $l \geq L_k$ можно выбрать $\rho_l \in (l, l+1)$ с условием: если $|\lambda| = \rho_l$ или $|Im\,\lambda| \geq 1$ и $|\lambda| \geq L_k$, то

$$|\theta(\lambda)| \geq \frac{A_k}{|\lambda|^{k+\frac{21}{2}}} e^{(a_1+a_2+a_3)|Im\ \lambda|}.$$

Доказательство. В силу четности $\theta(\lambda)$ можно считать, что $Re\,\lambda \geq 0.$ Из асимптотического разложения функции Бесселя (см.[13 , с. 209]) находим

$$\theta(\lambda) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \frac{(a_1)^{-7/2}(a_2)^{-13/2}(a_3)^{-k-1/2}}{\lambda^{k+21/2}} \cos(a_1\lambda - \frac{7\pi}{4})\cos(a_2\lambda - \frac{13\pi}{4})\cos(a_3\lambda - \frac{\pi}{4}(2k+1)) +$$

$$+\, O\left(\frac{e^{(a_1+a_2+a_3)|Im\ \lambda|}}{|\lambda|^{k+23/2}}\right).$$

По неравенству Лоясевич имеем (см.[7])

$$|\cos z| \geq \frac{1}{\pi e} d(z,V) e^{|Im\,z|}\ , \tag{12}$$

где $V = \{(2l+1)\pi/2, l \in Z\}, d(z,V) = \min(1, dist(z,V)).$ Используя (12) и повторяя рассуждения из доказательства леммы 7 работы [7], получаем утверждение леммы 3.

Всюду в дальнейшем $R > 2/\sqrt{3}$, $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty} -$ строго возрастающая последовательность положительных чисел с пределом $R\sqrt{3/2} - 1,\ R_m = 2(1+\varepsilon_m)/\sqrt{3},\ m \geq 1,\ R_0 = 0.$

Лемма 4. Пусть $R > 2/\sqrt{3}$. Тогда для любого $k \geq 0$, $m \geq 1$, $t \in [R_{m-1}, R_m)$ существуют две последовательности радиальных распределений $\mu_{l,i}$ $(l \geq 1, i = 1, 2)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $supp\ \mu_{l,i} \subset B_{R_m - \frac{1}{\sqrt{3}}}$, $i = 1, 2$, $l \geq 1$,

2) существуют константы $L = L(k, R, \varepsilon_1)$, $C = C(R, \varepsilon_1) \geq 0$, для которых при $l \geq L$ имеет место неравенство

$$\left| j_k(t\lambda) - \tilde{\mu}_1(\lambda)\tilde{\mu}_{l,1}(\lambda) - \tilde{\mu}_2(\lambda)\tilde{\mu}_{l,2}(\lambda) \right| \leq \frac{C}{l} \frac{\|\lambda\|^{4-k}}{t^k} e^{R_m |Im\,\lambda|} \quad ,$$

где $\|\lambda\| = max(1, |\lambda|)$.

Для доказательства леммы 4 достаточно использовать лемму 3 и повторить рассуждения из доказательства предложения 8 работы [7].

3.Обращение преобразования P_{χ_T}

Пусть $z \in B_{R - \frac{1}{\sqrt{3}}}$. Для $i = 1, 2, 3$ положим

$$f_i(z) = \int_{SO(2)} \left\langle A_i \delta(w), (P_{\chi_T} f)\left(\left\| \begin{matrix} k & z + kw \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|^{-1} \right) \right\rangle dk \,,$$

где $A_1 = \dfrac{\partial^3}{\partial \bar{z}^3} D_1 D_2 D_3$, $A_2 = \dfrac{\partial^6}{\partial \bar{z}^6} D_1 D_2 D_3$ и $A_3 -$ тождественный оператор.

Основным результатом данной работы является следующая

Теорема . Пусть $R > 2/\sqrt{3}$. Тогда для любого $k \in Z$ и $\rho \in (0, R)$ существуют (и строятся явно) распределения $U_{l,i}$ $(l \in N, i = 1, 2, 3, 4)$ со следующими свойствами :

1) $supp\ U_{l,i} \subset B_{R - \frac{1}{\sqrt{3}}}$ $(l \in N, i = 1, 2, 3)$, $supp\ U_{l,4} \subset B_R$ $(l \in N)$;

2) для любой $f \in C^\infty(B_R)$ имеют место равенства

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\Delta^3 f)(\rho e^{it}) e^{-ikt} dt = \lim_{l \to \infty} \left(< U_{l,1}, f_1 > + < U_{l,2}, f_2 > \right) \,, \qquad (13)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{it})e^{-ikt}dt = \lim_{l\to\infty}\left(< U_{l,3}\,,\, f_3 > + < U_{l,4}\,,\Delta^3 f\right) . \qquad (14)$$

Доказательство. Из леммы 4 следует (см. [7, доказательство теоремы 9]), что существуют распределения $U_{l,i}$ $(l\in N\,,\, i=1,2)$ с носителями в $B_{R-\frac{1}{\sqrt{3}}}$, для которых при $l \ge L(k,R,\varepsilon_1)$ и любой $f\in C^{\infty}(B_R)$ имеет место оценка

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{it})e^{-ikt}dt - < U_{l,1}\,,\, f * \mu_1 > + < U_{l,2}\,,\; f * \mu_2 > \right| \le$$

$$\le \frac{C_1}{l}(R-R_m)^{-8} \sup_{|z|\le R''_m,|\alpha|\le 8}\left|\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}}\, f(z)\right| \qquad (15)$$

где $R'_m = \frac{2}{3}R + \frac{1}{3}R_m$ и константа C_1 зависит от R,ε_1 . Применяя (15) к $\Delta^3 f$ и учитывая (11), из леммы 1 получаем равенство (13). Пусть теперь $\nu_1 = R\chi_T$, $\nu_2 = \Delta^3\delta$. Тогда $\tilde{\nu}_1(0) = \int_T dxdy = \sqrt{3}/4$, $\tilde{\nu}_2(\lambda) = -\lambda^6$, т.е. $\tilde{\nu}_1$ и $\tilde{\nu}_2$ не имеют общих нулей. Кроме того, $\tilde{\nu}_1$ имеет такое же асимптотическое поведение, что и функция Бесселя (см.[6], [7]). Поэтому, как и выше, существуют распределения $U_{l,i}$ $(l\in N\,,\, i=3,4)$, для которых выполнено равенство (14). Теорема доказана.

Литература

1. Беренстейн К.А., Струппа Д. Комплексный анализ и уравнения в свертках // Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Фундам.направления. - Т.54: ВИНИТИ. - 1989. - С. 5-111.
2. Zalcman L. A bibliographic survey of the Pompeiu problem // Approximation by solutions of partial differential equations, ed. B.Fuglede et al. - 1992 . -P.185-194.
3. Волчков В.В. Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах // Матем. сб. - 1995. - Т.186, №6. - С.15-34.
4. Волчков В.В. О множествах иньективности преобразования Помпейю // Матем. сб. - 1999. - Т.190, №11. - С.51-66.
5. Волчков В.В. Экстремальные задачи о множествах Помпейю II // Матем. сб. - 2000. - Т.191, №5. - С.4-16.
6. Berenstein C.A., Gay R. Le probleme de Pompeiu locale // J. Anal. Math. -1989. - V.52. - P. 133-166.
7. Berenstein C.A., Gay R., Yger A. Inversion of the local Pompeiu transform // J. Analyse Math. - 1990. - V.54. - P. 259-287
8. Волчков В.В.Об одной экстремальной задаче, связанной с теоремой Мореры // Матем. заметки. - 1996. - Т.60, №6. - С.804-809.
9. Волчков В.В. Экстремальные варианты проблемы Помпейю // Матем. заметки. - 1996. - Т.59, №5. - С.671-680.
10. Машаров П.А. Экстремальные задачи о множествах с локальным свойством Помпейю // Доповіді НАН України. - 2001. - №7. - С. 126-132.
11. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1981.-512с.
12. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными : В 4-х т. – М. : Мир, 1986.- Т.1. – 474 с.
13. Риекстыньш Э.Я. Асимптотические разложения интегралов : В 3-х т. - Рига : Зинатне, 1974. – Т. 1. - 390 с.