

## Перетворення моделей динамічних систем

Дячук О.А.

Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є.Пухова НАН України  
oadyachuk@ukr.net

### **Abstract**

*Dyachuk O.A. Transformation of models of the dynamic systems. Analytical methods transformation of differential and integral dynamic models are considered*

### **Вступ**

Математичне моделювання динамічних систем є одним із основних способів їх вивчення. До числа актуальних проблем математичного моделювання відносяться дослідження складних систем, що характеризуються великою розмірністю, моделювання нелінійних і жорстких динамічних систем, пониження розмірності динамічних моделей, підвищення ефективності використання таких прийомів як декомпозиція і макромоделювання [1, 3]. Одним із можливих шляхів вирішення вказаних проблем є представлення моделей в різних близьких еквівалентних формах, що потребує розвитку відповідних методів еквівалентного перетворення. Використання еквівалентних форм математичних моделей динамічних систем є загальноприйнятим підходом. Часто отримання моделі, виходячи з її фізичних властивостей, зручно в одній формі, а її чисельна реалізація в іншій, еквівалентній вихідній.

Наступним етапом після визначення оптимального типу математичної моделі і зведення її до зручного для моделювання на ЕОМ виду, є безпосередньо її комп'ютерна реалізація. На даному етапі можна використовувати стандартне програмне забезпечення, однак сучасні пакети прикладних програм для математичного моделювання, такі як Mathematica, Matlab [4], Maple та ін., орієнтовані на комп'ютерну реалізацію моделей динамічних систем у вигляді звичайних диференціальних рівнянь і в них практично відсутні засоби для реалізації інтегральних моделей. Тому актуальною є проблема синтезу ефективного програмного забезпечення, що реалізує еквівалентне перетворення динамічних систем.

### **Види математичних моделей динамічних систем**

Традиційно широку область застосування мають моделі у вигляді [1] звичайних диференціальних рівнянь, що записуються в загальному вигляді:

$$F(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n)}(x)) = 0, \quad (1)$$

де  $F$  — деяка функція, що визначає залежність (в загальному випадку нелінійну) між незалежною змінною  $x$ , шуканою функцією  $u=u(x)$  і її похідними до  $n$ -го порядку включно.

Область застосування моделей даного виду надзвичайно різноманітна, зокрема це можуть бути різноманітні механічні системи, системи керування, рухомі об'єкти тощо.

Цілий ряд переваг мають математичні моделі у вигляді інтегральних рівнянь. Зокрема, вони включають в себе повну постановку задачі разом з граничними умовами, допускають більш однотипний підхід під час чисельного розв'язку, чим у випадку диференціальних рівнянь, завдяки незмінній своїй структурі.

В достатньо загальному нелінійному випадку інтегральна модель може бути представлена у вигляді [1]

$$\int_Q K(x, y, u(y)) dy = F(x, u(x)), \quad (2)$$

де інтеграл береться по області  $Q$ , а шукана функція може залежати як від однієї, так від багатьох змінних:  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in Q$ ; функції  $K$  (ядро) і  $F$  — задані.

Область застосування інтегральних рівнянь охоплює багато задач техніки, фізики і навіть економіки [2].

### **Отримання еквівалентної інтегральної моделі**

Лінійне одновимірне (скалярне) рівняння Вольтерра II роду

$$y(x) - \int_a^x K(x, s) y(s) ds = f(x), \quad x \in [a, b], \quad (3)$$

має глибокий зв'язок з задачею Коші для звичайних диференціальних рівнянь [2]. Зокрема, для рівняння (3) можна отримати вираз для розв'язання, аналогічний формулі Коші для звичайних диференціальних рівнянь

$$y(s) = f(x) + \int_a^x R(x, s) f(s) ds, \quad (4)$$

де  $R(x, s)$  називається резольвентою (резольвентним ядром) і визначається виразом

$$R(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(x, s),$$

де  $K_n(x, s)$  — ітераційні (повторні) ядра, що підпорядковуються рекурентним співвідношенням

$$K_1(x, s) = K(x, s),$$

$$K_{n+1}(x, s) = \int_a^x K(x, t) K_n(t, s) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Для цього в формулі (4) достатньо формально виконати інтегрування по частинам, що і призводить до шуканого представлення

$$y(x) = u(x, a)f(a) + \int_a^x u(x, s)df(s), \quad (5)$$

де  $u(x, s) = 1 + \int_s^x R(x, s)ds$  є фундаментальним розв'язком (або фундаментальною матрицею при розгляді (1) як векторно-матричного рівняння) чи його ядра  $K(x, s)$ . Вираз (5) може, як і відповідна формула Коші для диференціальних рівнянь, використовуватись при якісних дослідженнях і наближеному обчисленні.

Задача Коші для диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами

$$\frac{d^n y(x)}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y(x)}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x) y(x) = f(x), \quad x \geq 0, \quad (6)$$

$$y(0) = C_0; y'(0) = C_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = C_{n-1},$$

має еквівалентне представлення у вигляді інтегрального рівняння

$$u(x) - \int_a^x K(x, s)u(s)ds = \varphi(x),$$

де

$$\begin{cases} u(x) = \frac{d^n y(x)}{dx^n}, \\ \int_0^x u(s)ds + C_1 = \frac{d^{n-1} y(x)}{dx^{n-1}} \text{ і т.д.}, \end{cases} \quad (7)$$

$$y(x) = C_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + C_1 x + C_0 + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-s)^{n-1} u(s)ds,$$

$$K(x, s) = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{(x-s)^{i-1}}{(i-1)!}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & f(x) - C_{n-1} a_1(x) - (C_{n-1} x + C_{n-2}) a_2(x) - \\ & - \dots - \left( C_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + C_1 x + C_0 \right) a_n(x). \end{aligned}$$

При отриманні даних виразів виконуються інтегрування виразів (7) і використовується формула

$$\int_a^x dx_1 \int_a^{x_1} dx_2 \dots \int_a^{x_{n-1}} z(x_n) dx_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-s)^{n-1} z(s) ds.$$

Можна побачити, що задача (6) еквівалентна інтегральному рівнянню Вольтерра II роду з частковим виглядом ядра (8). Вибір однієї з двох екві-

валентних форм запису задачі Коші залежить від самої постановки задачі, що розв'язується, і від її властивостей при чисельному розв'язанні.

Для розв'язування інтегральних рівнянь, отриманих шляхом еквівалентних перетворень, є велика кількість чисельних методів, в основі більшості з них лежить заміна інтегралу квадратурними формулами [6], крім цього, широке застосування знаходять ітераційні методи, методи Рунге-Кута, методи основані на використанні сплайнів і кусково-гладких поліномів [2].

### **Отримання еквівалентних диференціальних рівнянь**

Перехід від інтегральних рівнянь до диференціальних, як один з підходів до розв'язання лінійних і нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерра, можливий лише в частковому випадку, що є наслідком високої універсальності рівнянь Вольтерра II роду як форми опису задачі Коші. Одним з таких часткових, але розповсюджених випадків є випадок виродженого, або близького до нього, ядра. Такий підхід може бути цілком аргументованим як при математичній постановці задачі, так і при їх розв'язуванні, оскільки методи розв'язування диференціальних рівнянь досить добре розроблені і широко застосовуються.

Під час розв'язування інтегральних рівнянь Вольтерра апроксимація ядра виродженим незалежно від того, як в подальшому будуть розв'язуватись наближені рівняння, майже завжди спрощує алгоритми, що використовуються.

Метод, що розглядається нижче, дозволяє звести інтегральне рівняння до системи диференціальних рівнянь.

Нехай для рівняння Вольтерра II роду (3) маємо

$$K(x, s) = L(x, s) + R(x, s),$$

де

$$L(x, s) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \beta_i(s), \quad |R(x, s)| < \varepsilon. \quad (9)$$

Тоді можна отримати наближене рівняння

$$\tilde{y}(x) = \int_a^x L(x, s) \tilde{y}(s) ds + f(x), \quad (10)$$

або

$$\tilde{y}(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) \int_a^x \beta_i(s) \tilde{y}(s) ds + f(x). \quad (11)$$

Введемо позначення

$$v_i(x) = \int_a^x \beta_i(s) \tilde{y}(s) ds. \quad (12)$$

Після диференціювання виразу (12) і підстановки в нього (11) отримуємо систему диференціальних рівнянь для визначення функції  $v_i(x)$

$$v_i'(x) = \beta_i(x) \left[ \sum_{j=1}^m \alpha_j(x) v_j(x) + f(x) \right], \quad i = \overline{1, m}, \quad v_i(a) = 0. \quad (13)$$

Шуканий розв'язок визначається виразом

$$\tilde{y}(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(x) v_i(x) + f(x). \quad (14)$$

З самого способу введення функції  $v_i(x)$  видно, що достатньо знайти тільки одну з них, так як

$$\frac{v_i'(x)}{\beta_i(x)} = \frac{v_k'(x)}{\beta_k(x)}.$$

Це означає, що система (13) принципово може бути зведена до одного диференціального рівняння  $m$ -го порядку, однак при великих значеннях  $m$  ця процедура зв'язана з великим об'ємом попередніх викладок.

### Програмна реалізація розглянутих методів

Для розв'язування диференціальних рівнянь використовується вмонтована в Matlab функція **ode45** [4], що базується на однокрокових явних методах Рунге-Кутти 4-го та 5-го порядку, і яка дає найменшу похибку в порівнянні з іншими вмонтованими солверами. Для використання даної функції диференціальне рівняння має бути представлене у вигляді нормальної системи диференціальних рівнянь, для чого вводиться така кількість допоміжних функцій, який порядок рівняння.

Для розв'язування нелінійного інтегрального рівняння Вольтерра II роду, з ядром, що розділяється, існує розроблена програма в середовищі Matlab, в основі яких лежить модифікований метод Ньютона-Канторовича [5].

Для розв'язування інтегрального рівняння Вольтерра II роду з виродженим ядром застосовуються формули трапецій зі сталим кроком  $h = const$ , які дозволяють отримати розрахункові формули

$$\begin{cases} \tilde{y}(0) = f(0), \\ \tilde{y}_i = \frac{1}{1 - \frac{h}{2} \sum_{l=1}^m \alpha_{li} \beta_{li}} \left( f_i + h \sum_{l=1}^m \alpha_{li} \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{lj} A_j \tilde{y}_j \right), \end{cases}$$

де  $i=2,3,\dots,n$ ;  $x_i = (i-1)h$ ;  $A_j = \begin{cases} 0,5 & \text{при } j=1, \\ 1 & \text{при } j>1. \end{cases}$

В середовищі Matlab було розроблено програму **VOLT2DYFF**, яка призначена для розв'язання інтегрального рівняння Вольтерра II роду з виродженим ядром та еквівалентного йому диференціального рівняння.

Основні параметри, що використовуються під час виклику програми: **n** — кількість точок розбиття заданого інтервалу, **x0** — початок інтервалу,

$x_n$  — кінець інтервалу,  $y_0$  — масив початкових умов, при яких шукається розв'язок диференціального рівняння.

Розглянемо приклад. Для рівняння

$$y(x) = \int_0^x xsy(s)ds + x, \quad (16)$$

де

$$L(x, s) = xs, \quad R(x, s) = 0, \quad f(x) = x, \quad \alpha(x) = x, \quad \beta(x) = x,$$

диференціальне рівняння має вигляд

$$v'(x) = xy(x) = x[xv(x) + x], \quad (17)$$

і його аналітичний розв'язок

$$v(x) = -1 + Ce^{\frac{x^3}{3}},$$

звідки розв'язок вихідного рівняння (16)

$$y(x) = Cxe^{\frac{x^3}{3}}.$$

Для визначення  $C$  отриманий розв'язок підставляємо у вихідне інтегральне рівняння. Отримуємо  $C = 1$ . Подібний прийом рівносильний використанню початкових умов  $v(0) = 0$ .

Для чисельного розв'язування рівнянь (16) і (17) використаємо програму *VOLT2DYFF*, що має такий алгоритм роботи.

1. В окремих файлах задаємо:

1) функцію **alpha**, що містить змінну  $x$  ядра рівняння (16):

**alpha=x;**

2) функцію **beta**, що містить змінну  $s$  ядра рівняння (16):

**beta=s;**

3) функцію **fx**, що містить функцію  $f(x)$ :

**fx=x.**

2. Під час виклику програми *VOLT2DYFF*, задаємо основні параметри:  $n=100$ ;  $x_0=0$ ;  $x_n=2$ ;  $y_0=0$ .

Запускаємо програму *VOLT2DYFF* на виконання.

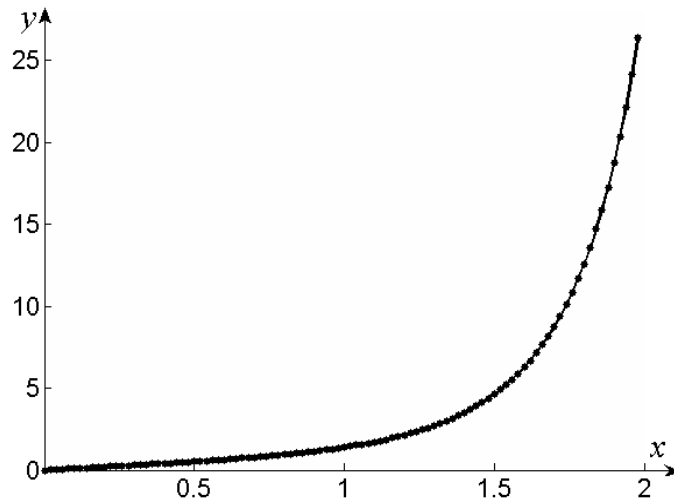


Рисунок 1 – Графіки диференціального (•) і аналітичного (–) розв'язків.

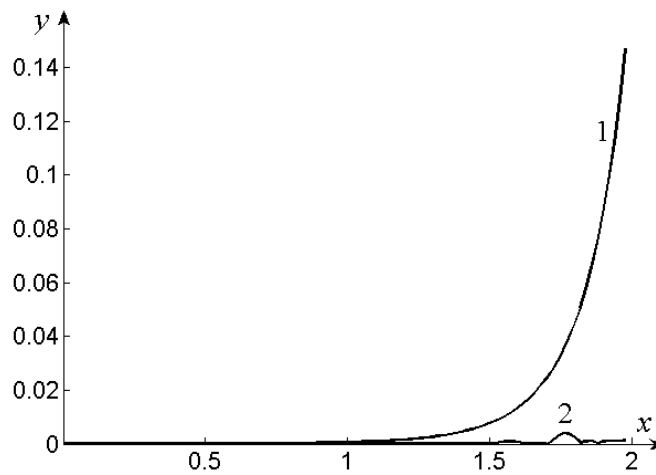


Рисунок 3 – Графік відносних похибок розв'язків інтегральної (1) та диференціальної (2) моделей

Результати дослідження, для вище розглянутого прикладу, показали, що при кроці розрахунку 0.02, відносна та середня абсолютна похибки обчислення інтегральної моделі становлять 0.15% і  $3.23 \cdot 10^{-3}$ , а диференціальної моделі  $4.01 \cdot 10^{-3}\%$  і  $7.62 \cdot 10^{-5}$  відповідно. Тому, можна зробити висновок, що розв'язок еквівалентної диференціальної моделі більш точно співпадає з точним розв'язком вихідної моделі на інтервалі (0, 2), про що також свідчить побудовані графіки даних розв'язків (рис. 1). Графіки відносних похибок розв'язку інтегральної і еквівалентної їй диференціальної моделі (рис. 2) показують, що крива похибки диференціальної моделі тільки на кінці інтервалу має невеликі відхилення від осі абсцис, а крива похибки інтегральної моделі тільки на першій половині інтервалу дуже мала, але вже на другій половині інтервалу значення похибки швидко зростає, що говорить про ефективність використання еквівалентної диференціальної моделі.

## **Висновок**

Таким чином, розглянуті методи перетворення динамічних моделей дозволяють отримувати наближені еквівалентні моделі, які покращують якість дослідження динамічних систем. Методи є працездатними, а запропонована програма *VOLT2DYFF* є достатньо ефективною, гнучкою та зручною при використанні. Вона може бути застосована разом з іншими пакетами прикладних програм, що входять у програмний комплекс Matlab.

## **Список використаної літератури**

1. Верлань А.Ф., Москалюк С.С. Математическое моделирование непрерывных динамических систем. — К.: Наукова думка, 1988. — 287 с.
2. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: Методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. — К.: Наукова думка, 1986. — С.19-60.
3. Дячук О.А. Апроксимаційний алгоритм пониження розмірності диференціальної моделі динамічного об'єкту // Моделирование-2006: Сборник трудов конференции, Киев, 16-18 мая 2006. — С.209-212.
4. Дьяконов В.П.. Matlab 6.0: Учебный курс. — СПб.: Петер, 2001. — 592 с.
5. Контрерас Д.Э. Пакет программ для анализа нелинейных динамических систем, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями Вольтерра // Труды второй международной научно-практической конференции «Современные информационные и электронные технологии». — Одесса. — 2001. — С.48-49.
6. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. — М.: Наука, 1967. — 500 с.