УДК 517.5

Н. П. Волчкова (Донец. нац. ун-т)

ОБ ОБРАЩЕНИИ ЛОКАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОМПЕЙЮ

We obtain the construction of the inversion of the local Pompeiu transform for a triangle.

Одержано конструкцію обернення локального перетворення Помпейю для трикутника.

1. Введение. Пусть R^n — вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с евклидовой нормой $|\cdot|$, $M(n)$ — группа движений R^n, $\mathcal{F} = \{\mu_i\}_{i=1}^k$ — конечное семейство распределений с компактным носителем в R^n. При фиксированном $g \in M(n)$ рассмотрим распределение $g\mu_i$, действующее на $C^\infty(R^n)$ по правилу

$$\langle g\mu_i, f\rangle = \langle \mu_i, f \circ g^{-1}\rangle, \quad f \in C^\infty(R^n).$$

Преобразование Помпейю $\mathcal{P}_\mathcal{F}$ (глобальное) отображает $C^\infty(R^n)$ в $C^\infty(M(n))^k$ и определяется равенством

$$\mathcal{P}_\mathcal{F}(f)(g) = (\langle g\mu_1, f\rangle, \ldots, \langle g\mu_k, f\rangle), \quad g \in M(n). \tag{1}$$

Аналогично, для открытого множества $\mathcal{U} \in R^n$ локальное преобразование Помпейю отображает по формуле (1) $C^\infty(\mathcal{U})$ в декартово произведение $C^\infty(\Lambda(\mathcal{U}, \mu_1)) \times \ldots \times C^\infty(\Lambda(\mathcal{U}, \mu_k))$, где $\Lambda(\mathcal{U}, \mu_i) = \{g \in M(n) \colon \operatorname{supp} g\mu_i \subset \mathcal{U}\}$.

Для заданных $\mathcal{F}$ и $\mathcal{U}$ возникает следующая проблема.

Проблема [1]. 1. Выяснить, является ли $\mathcal{P}_\mathcal{F}$ инъективным и если не является, то описать его ядро.

2. Если $\mathcal{P}_\mathcal{F}$ инъективно, то найти обратное отображение.

Для некоторых $\mathcal{F}$ и $\mathcal{U}$ инъективность преобразования Помпейю и близкие вопросы изучались во многих работах (см. [1 – 10]). Особый интерес представляет случай, когда $\mathcal{U} = B_R = \{x \in R^n \colon |x| < R\}$, а $\mathcal{F} = \{\chi_E\}$ — индикатор компактного множества $E \subset B_R$ положительной меры. Для этого семейства $\mathcal{F}$ и широкого класса множеств E [6] преобразование $\mathcal{P}_\mathcal{F}$ инъективно по отношению к $\mathcal{U}$, если R больше диаметра $d(E)$ наименьшего замкнутого шара, содержащего E (см. [6, 7], а также [5, 8 – 10], где для некоторых конкретных E найдено минимальное значение R, при котором $\mathcal{P}_{\chi_E}$ инъективно). Для указанного класса E и $R > 3/2d(E)$ в работе [7] приведена также схема обращения преобразования $\mathcal{P}_{\chi_E}$. Кроме того, для квадрата в [7] найдена конструкция обращения преобразования Помпейю и при $R > d(E)$. В связи с этим при решении п. 2 указанной проблемы большой интерес представляет усиление оценки $R > 3/2d(E)$ для других E. В данной работе получено обращение преобразования $\mathcal{P}_{\chi_E}$ в случае, когда E является треугольником и $R > d(E)$.

2. Обозначения и вспомогательные утверждения. Пусть, как обычно, $\mathcal{D}(R^n)$ — пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций на

R^n, $\mathcal{D}'(R^n)$ — пространство распределений на R^n, $\mu_1 * \mu_2$ — свертка двух распределений, одно из которых имеет компактный носитель. Радиализацией распределения $\mu \in \mathcal{D}'(R^n)$ называется радиальное распределение $\mathcal{R}\mu$, действующее на функцию $\varphi \in \mathcal{D}(R^n)$ по формуле

$$\langle \mathcal{R}\mu, \varphi \rangle = \left\langle \mu(x), \int\limits_{SO(n)} \varphi(k\, x)\, dk \right\rangle,$$

где $SO(n)$ — группа вращений пространства R^n, dk — нормированная мера Хаара на группе $SO(n)$ [7]. Радиальность $\mathcal{R}\mu$ означает, что для любого $k \in SO(n)$

$$\langle \mathcal{R}\mu(x), \varphi(kx) \rangle = \langle \mathcal{R}\mu(x), \varphi(x) \rangle, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(R^n).$$

Сферическое преобразование радиального распределения μ с компактным носителем в R^n определяется равенством

$$\tilde{\mu}(\lambda) = \left\langle \mu(x), j_{\frac{n-2}{2}}(\lambda |x|) \right\rangle, \qquad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{2}$$

где $j_q(z) = (J_q(z))/z^q$, J_q — функция Бесселя порядка q. Для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ положим $\mu(\alpha) = \mathcal{R}(D^\alpha \chi_E)$, где $D^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$. Пусть также δ — дельта-распределение в нуле пространства R^n.

Лемма 1 [7]. *Пусть $E \subset \overline{B}_r$ и $R > r$. Тогда для любой $f \in C^\infty(B_R)$ и $x \in B_{R-r}$ справедливо равенство*

$$(f * \mu(\alpha))(x) = \int\limits_{SO(n)} \left\langle D^\alpha \delta(y), \left(\mathcal{P}_{\chi_E} f\right)\left(\begin{Vmatrix} k & x + ky \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}^{-1}\right) \right\rangle dk,$$

где $M(n)$ рассматривается как группа матриц порядка $(n+1) \times (n+1)$ вида $\begin{Vmatrix} k & x \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$, $k \in SO(n)$, $x \in R^n$, и R^n отождествляется с аффинным подпространством $\{x_{n+1} = 1\}$ в R^{n+1}.

Пусть T — замкнутый треугольник с вершинами в точках $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ и $d(T) = 2$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что T является остроугольным неравнобедренным треугольником (в остальных случаях конструкция обращения преобразования $\mathcal{P}_{\chi_T}$ строится аналогично). Кроме того, можно считать, что $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, $z_3 = \bar{z}_2$, $\operatorname{Im} z_1 > 0$ и $\operatorname{Re} z_1 < 0$. Тогда $z_1 = -e^{i(\alpha - \beta)}$, $z_2 = e^{i(\alpha+\beta)}$, $z_3 = e^{-i(\alpha+\beta)}$, где $\alpha = \arg(z_2 - z_1)$, $\beta = \pi - \arg(z_1 - z_3)$. Обозначим

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial x} + \operatorname{tg}\alpha \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_3 = \frac{\partial}{\partial x} - \operatorname{tg}\beta \frac{\partial}{\partial y}.$$

Лемма 2. *Для любой $f \in C^3(T)$ справедливо равенство*

$$\int_T (D_1 D_2 D_3 f)(x, y)\,dx\,dy =$$

$$= (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)(D_1 f)(z_1) - (D_2 f)(z_3) + (D_3 f)(z_2). \tag{3}$$

Доказательство. Переходя к повторному интегралу, имеем

$$\int_T (D_1 D_2 D_3 f)(x, y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_{-\cos(\alpha-\beta)}^{\cos(\alpha+\beta)} dx \int_{-\operatorname{tg}\beta\cdot x-(\sin\alpha)/(\cos\beta)}^{\operatorname{tg}\alpha\cdot x+(\sin\beta)/(\cos\alpha)} (D_1 D_2 D_3 f)(x, y)\,dy =$$

$$= \int_{-\cos(\alpha-\beta)}^{\cos(\alpha+\beta)} \left((D_2 D_3 f)\left(x, \operatorname{tg}\alpha\cdot x + \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\right) - (D_2 D_3 f)\left(x, -\operatorname{tg}\beta\cdot x - \frac{\sin\alpha}{\cos\beta}\right)\right) dx.$$

Учитывая, что

$$(D_2 D_3 f)\left(x, \operatorname{tg}\alpha\cdot x + \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\right) = \frac{d}{dx}\left((D_3 f)\left(x, \operatorname{tg}\alpha\cdot x + \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}\right)\right),$$

$$(D_2 D_3 f)\left(x, -\operatorname{tg}\beta\cdot x - \frac{\sin\alpha}{\cos\beta}\right) = \frac{d}{dx}\left((D_2 f)\left(x, -\operatorname{tg}\beta\cdot x - \frac{\sin\alpha}{\cos\beta}\right)\right),$$

из (3) получаем требуемое утверждение.

Лемма 3. *Пусть* $\nu = D_1 D_2 D_3 \chi_T$. *Тогда*

$$\widetilde{\mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial \bar z}\nu\right)}(\lambda) = c_1 \lambda^4 j_2(\lambda), \qquad \widetilde{\mathcal{R}\left(\frac{\partial^2}{\partial \bar z^2}\nu\right)}(\lambda) = c_2 \lambda^6 j_3(\lambda), \tag{4}$$

где $c_1, c_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$.

Доказательство. Поскольку $j_k'(t) = -t j_{k+1}(t)$ [11], имеем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(z^k j_k(\lambda|z|)\right) = k z^{k-1} j_k(\lambda|z|) - \lambda^2 z^k x j_{k+1}(\lambda|z|), \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(z^k j_k(\lambda|z|)\right) = i k z^{k-1} j_k(\lambda|z|) - \lambda^2 z^k y j_{k+1}(\lambda|z|). \tag{6}$$

Из (5), (6) индукцией по k находим $(-1)^k \frac{\partial^k}{\partial \bar z^k} J_0(\lambda|z|) = \lambda^{2k}(z/2)^k j_k(\lambda|z|)$ и (см. (2))

$$\widetilde{\mathcal{R}\left(\frac{\partial^k}{\partial \bar z^k}\nu\right)}(\lambda) = \frac{\lambda^{2k}}{2^k}\left\langle \nu(z), z^k j_k(\lambda|z|)\right\rangle. \tag{7}$$

Полагая $\psi(z) = z^k j_k(\lambda|z|)$ и используя (3), получаем

$$\langle \nu(z), \psi(z)\rangle = -(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)(D_1 f)(z_1) + (D_2 f)(z_3) - (D_3 f)(z_2). \tag{8}$$

Из (5) – (8) при $k = 1, 2$ имеем

$$\widetilde{\mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial \bar z}\nu\right)}(\lambda) = c_1\lambda^4 j_2(\lambda), \quad \widetilde{\mathcal{R}\left(\frac{\partial^2}{\partial \bar z^2}\nu\right)}(\lambda) = c_2\lambda^6 j_3(\lambda), \tag{9}$$

где

$$\operatorname{Re} c_1 = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta),$$

$$\operatorname{Re} c_2 = 2\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)\sin\alpha\sin\beta.$$

Таким образом, $c_1 c_2 \neq 0$ и лемма 3 доказана.

Согласно теореме Винера – Пэли [12] (теорема 7.3.1) существуют радиальные распределения μ_1 и μ_2 с носителями в B_1, для которых

$$\tilde\mu_1(\lambda) = c_1 j_2(\lambda), \quad \tilde\mu_2(\lambda) = c_2\lambda^2 j_3(\lambda). \tag{10}$$

Из (9), (10) находим

$$\Delta^2\mu_1 = \mathcal{R}\left(\frac{\partial}{\partial \bar z}\nu\right), \quad \Delta^2\mu_2 = \mathcal{R}\left(\frac{\partial^2}{\partial \bar z^2}\nu\right), \tag{11}$$

где Δ — оператор Лапласа в R^2. Далее нам потребуется оценка снизу функции $\tilde\mu_1(\lambda)\tilde\mu_2(\lambda)j_k(\varepsilon\lambda)$, где $\varepsilon > 0$.

Лемма 4. *Пусть* a_1, a_2, $a_3 > 0$, $k = 0, 1, \ldots$,

$$\Theta(\lambda) = j_2(a_1\lambda)j_3(a_2\lambda)j_k(a_3\lambda).$$

Тогда существуют константы $L_k, A_k > 0$, *для которых при любом значении* $l \geq L_k$ *можно выбрать* $\rho_l \in (l, l+1)$ *такое, что если* $|\lambda| = \rho_l$ *или* $|\operatorname{Im}\lambda| \geq 1$ *и* $|\lambda| \geq L_k$, *то*

$$|\Theta(\lambda)| \geq \frac{A_k}{|\lambda|^{(k+13/2)}} e^{(a_1+a_2+a_3)|\operatorname{Im}\lambda|}.$$

Доказательство. В силу четности $\Theta(\lambda)$ можно считать, что $\operatorname{Re}\lambda \geq 0$. Из асимптотического разложения функции Бесселя (см. [13]) находим

$$\Theta(\lambda) = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(a_1)^{-5/2}(a_2)^{-7/2}(a_3)^{-k-1/2}}{\lambda^{(k+13/2)}}\cos\left(a_1\lambda - \frac{5\pi}{4}\right) \times$$

$$\times \cos\left(a_2\lambda - \frac{7\pi}{4}\right)\cos\left(a_3\lambda - \frac{\pi}{4}(2k+1)\right) + O\left(\frac{e^{(a_1+a_2+a_3)|\operatorname{Im}\lambda|}}{|\lambda|^{(k+15/2)}}\right).$$

Согласно неравенству Лоясевич [7] имеем

$$|\cos z| \geq \frac{1}{\pi e} d(z, V) e^{|\operatorname{Im} z|}, \tag{12}$$

где $V = \{(2l+1)\pi/2, l \in Z\}$, $d(z, V) = \min(1, \operatorname{dist}(z, V))$. Используя (12) и повторяя рассуждения из доказательства леммы 7 работы [7], получаем утверждение леммы 4.

Всюду в дальнейшем $R > 2$, $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ — строго возрастающая последовательность положительных чисел с пределом $R/2 - 1$, $R_m = 2(1 + \varepsilon_m)$, $m \geq 1$, $R_0 = 0$.

Лемма 5. *Пусть $R > 2$. Тогда для любого $k \geq 0$, $m \geq 1$, $t \in [R_{m-1}, R_m)$ существуют две последовательности радиальных распределений, удовлетворяющих следующим условиям:*

1) $\operatorname{supp} \mu_{l,i} \subset B_{R_m-1}$, $i = 1, 2$, $l \in \mathbb{N}$;

2) *существуют константы $L = L(k, R, \varepsilon_1)$, $C = C(R, \varepsilon_1) > 0$, для которых при $l \geq L$ выполняется неравенство*

$$\left| j_k(t\lambda) - \left(\tilde{\mu}_1(\lambda)\tilde{\mu}_{l,1}(\lambda) + \tilde{\mu}_2(\lambda)\tilde{\mu}_{l,2}(\lambda)\right)\right| \leq \frac{C(R, \varepsilon_1)}{l} \frac{\|\lambda\|^{4-k}}{t^k} e^{R_m |\operatorname{Im}\lambda|},$$

$$\|\lambda\| = \max(1, |\lambda|).$$

Для доказательства леммы 5 достаточно использовать лемму 4 и повторить рассуждения из доказательства предложения 8 работы [7].

3. Обращение преобразования $\mathcal{P}_{\chi_T}$. Пусть $z \in B_{R-1}$. Положим

$$f_i(z) = \int\limits_{SO(2)} \left\langle A_i\delta(w), (\mathcal{P}_{\chi_T} f)\left(\left\| \begin{matrix} k & z + k w \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|^{-1}\right)\right\rangle dk, \qquad i = 1, 2, 3,$$

где $A_1 = \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} D_1 D_2 D_3$, $A_2 = \dfrac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} D_1 D_2 D_3$ и A_3 — тождественный оператор.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть $R > 2$. Тогда для любого $k \in \mathbb{Z}$ и $\rho \in (0, R)$ существуют (и могут быть построены явно) распределения $\mathcal{U}_{l,i}$, $l \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, 3, 4$, со следующими свойствами:*

1) $\operatorname{supp} \mathcal{U}_{l,i} \subset B_{R-1}$, $l \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2, 3$, $\operatorname{supp} \mathcal{U}_{l,4} \subset B_R$, $l \in \mathbb{N}$;

2) *для любой $f \in C^\infty(B_R)$ справедливы равенства*

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\Delta^2 f)(\rho e^{it}) e^{-ikt} dt = \lim_{l \to \infty} \left(\langle \mathcal{U}_{l,1}, f_1 \rangle + \langle \mathcal{U}_{l,2}, f_2 \rangle\right), \tag{13}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{it}) e^{-ikt} dt = \lim_{l \to \infty} \left(\langle \mathcal{U}_{l,3}, f_3 \rangle + \langle \mathcal{U}_{l,4}, \Delta^2 f \rangle\right). \tag{14}$$

Доказательство. Из леммы 5 следует (см. [7], доказательство теоремы 9), что существуют распределения $\mathcal{U}_{l,i}$, $l \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$, с носителями в B_{R-1}, для которых при $l \geq L(k, R, \varepsilon_1)$ и любой $f \in C^\infty(B_R)$ справедлива оценка

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{it}) e^{-ikt} dt - \langle \mathcal{U}_{l,1}, f * \mu_1 \rangle - \langle \mathcal{U}_{l,2}, f * \mu_2 \rangle \right| \leq$$

$$\leq \frac{c_3}{l} (R - R_m)^{-8} \sup_{\substack{|z| \leq R'_m \\ |\alpha| \leq 8}} \left| \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2}} f(z) \right|, \tag{15}$$

где $R'_m = (2/3)R + (1/3)R_m$ и константа c_3 зависит от R, ε_1. Применяя (15) к $\Delta^2 f$ и учитывая (11), из леммы 1 получаем равенство (13). Пусть теперь $\nu_1 = \mathcal{R}\chi_T$, $\nu_2 = \Delta^2 \delta$. Тогда

$$\tilde{\nu}_1(0) = \int_T dxdy = пл.T, \qquad \tilde{\nu}_2(\lambda) = \lambda^4,$$

т. е. $\tilde{\nu}_1$ и $\tilde{\nu}_2$ не имеют общих нулей. Кроме того, асимптотическое поведение $\tilde{\nu}_1$ такое же, как и функции Бесселя [6, 7]. Поэтому существуют распределения $\mathcal{U}_{l,i}$, $l \in \mathbb{N}$, $i = 3, 4$, для которых выполнено равенство (14). Теорема доказана.

1. *Беренстейн К. А., Струппа Д.* Комплексный анализ и уравнения в свертках // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики. Фундам. направления / ВИНИТИ. – 1989. – **54**. – С. 5–111.
2. *Zalcman L.* A bibliographic survey of the Pompeiu problem // Approximation by Solutions of Partial Differential Equations / Eds B. Fuglede et al. – 1992. – P. 185–194.
3. *Волчков В. В.* Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах // Мат. сб. – 1995. – **186**, № 6. – С. 15–34.
4. *Волчков В. В.* О множествах инъективности преобразования Помпейю // Там же. – 1999. – **190**, № 11. – С. 51–66.
5. *Волчков В. В.* Экстремальные задачи о множествах Помпейю. II / Там же. – 2000. – **191**, № 5. – С. 4–16.
6. *Berenstein C. A., Gay R.* Le probleme de Pompeiu locale // J. Anal. Math. – 1989. – **52**. – P. 133–166.
7. *Berenstein C. A., Gay R., Yger A.* Inversion of the local Pompeiu transform // Ibid. – 1990. – **54** . – P. 259–287.
8. *Волчков В. В.* Об одной экстремальной задаче, связанной с теоремой Мореры // Мат. заметки. – 1996. – **60**, № 6. – С. 804–809.
9. *Волчков В. В.* Экстремальные варианты проблемы Помпейю // Там же. – **59**, № 5. – С. 671–680.
10. *Машаров П. А.* Экстремальные задачи о множествах с локальным свойством Помпейю // Допов. НАН України. – 2001. – № 7. – С. 126–132.
11. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
12. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными: В 4 т. – М.: Мир, 1986. – Т. 1. – 474 с.
13. *Риекстыньш Э. Я.* Асимптотические разложения интегралов: В 3 т. – Рига: Зинатне, 1974. – Т. 1. – 390 с.

Получено 29.10.2001