

УДК 681.3

Изогеометрическое моделирование кривых линий и поверхностей высокого качества по базовым критериям плавности

Муфтеев В.Г., Марданов А.Р.

Башкирский государственный аграрный университет
muftejev@yandex.ru

Abstract

Muftejev V., Mardanov A. Isogeometric modeling of fair curves and surfaces. Geometric robust modeling is considered as isogeometric modeling. Base criteria of an estimation of quality of functional surfaces are developed. The new scheme of modeling of a curve on set of geometrically connected conic curves is generalized. The method of modeling of virtual fair curve (v-curve) of class G^5 , based on the new scheme is improved. Isogeometric modeling of NURBS curves and surfaces, uv-loft surfaces is investigated.

Введение

На всех стадиях жизненного цикла изделия важнейшей составляющей электронной модели изделия является геометрическая модель. Основные стадии жизненного цикла изделия – стадии проектирования и разработки, производства изделия обеспечиваются интегрированной CAD/CAM/CAE системой. Важнейшей составной частью, “ядром”, интегрированной CAD/CAM/CAE системы является система геометрического обеспечения. Геометрическое моделирование изделия сопровождает весь процесс проектирования, технологической подготовки и изготовления объекта.

Геометрические параметры криволинейных поверхностей часто являются определяющими для проектных характеристик объекта. К таким объектам относятся изделия с динамическими обводами (или функциональными поверхностями) в авиастроении, автомобилестроении, судостроении, энергетическом и химическом машиностроении, сельхозмашиностроении.

Устойчивость формообразования параметрических кривых линий $r(u)$ и поверхностей $r(u, v)$ является основным критерием качества методов моделирования в инженерной геометрии и компьютерной графике. Авторами устойчивость метода моделирования рассматривается как изогеометрическая определенность кривой / поверхности на комплексном чертеже [1,2,3]. Кривая / поверхность изогеометрически определена на проекции, если форма проекции ГО однозначно определяет форму проекции кривой / изопараметрических линий поверхности. Кривая / поверхность изогеометрически определена в пространстве, если кривая / поверхность изогеометрически определена на ортогональных проекциях

комплексного чертежа. Разработаны формальные критерии визуальной оценки изогеометрической определенности NURBS кривой / поверхности по конфигурации s-полигона / s-многогранника на проекциях комплексного чертежа [3].

Способ построения поверхности на сети кривых (как, например, uv-плазовая (uv-loft) поверхность в AutoCAD [4]) является одним из основных способов. Актуальной задачей является выработка формальных критериев визуальной оценки геометрической определенности поверхности, моделируемой на сети кривых, на проекциях комплексного чертежа.

К качеству геометрических характеристик функциональных поверхностей предъявляются особые требования. Методы моделирования должны соответствовать требуемому качеству функциональной поверхности изделия. В последнее время интенсивно ведутся разработки методов моделирования кривых линий высокого качества по критериям плавности. Основными критериями качества кривой являются порядок гладкости и плавность кривой. Синоним понятия “кривая высокого качества” – “плавная кривая” (“fair curve”). Этот термин появился в работах, посвященных улучшению качества кубических параметрических сплайнов [5,6].

Актуальной задачей является выработка научно обоснованных критериев оценки плавности кривых линий при моделировании функциональных поверхностей технических объектов.

Общая схема моделирования кривой линии состоит из следующих основных этапов.

1) Эскизирование кривой. Первоначальная информация о кривой может быть задана в виде а) лекальной кривой или её дискретного представления, б) множества точек, снятых с натурального макета с помощью измерительной системы, в) линии, проведенной конструктором на бумаге или экране графического дисплея и зафиксированной в виде дискретного множества точек, г) редкого дискретного множества точек, через которые должна пройти кривая, д) фиксированной аналитической кривой.

2) Построение на эскизе кривой геометрического определителя (ГО), задающего геометрическую структуру кривой.

3) Изогеометрическая аппроксимация ГО аналитической (кусочно-аналитической) кривой заданного класса или построение алгоритма генерации точек кривой на заданных параметрах ГО.

4) Переход к другому типу определителя кривой путем эквивалентного преобразования или путем изогеометрической аппроксимации определителя кривой для ее редактирования с помощью параметров нового ГО.

5) Переход к другому типу определителя кривой путем эквивалентного преобразования или путем изогеометрической аппроксимации определителя кривой для решения метрических и позиционных задач в САД системе. В этом случае новый определитель кривой называется шаблоном кривой.

Наиболее естественными видами ГО линий являются ломаные точек инцидентности и касательные ломаные. При этом предполагается, что конструируемая кривая последовательно проходит через точки ломаной инцидентности и конфигурация ломаной изогеометрично определяет форму кривой. При задании структуры кривой касательной ломаной, кривая проходит последовательно по звеньям ломаной, касаясь каждого звена в одной точке. Форма касательной ломаной изогеометрично определяет форму кривой.

ГО может быть управляющим полигоном (s-полигоном) NURBS кривой. S-полигон обычно используется в качестве начального приближения в методе эвристической подгонки b-сплайновой кривой. А также в итерационных [7,8,2,9,10] и эволюционных [11,12,13,14] методах построения b-сплайновых кривых. В любом случае, форма s-полигона должна однозначно задавать структуру (форму) моделируемой кривой. Часто в качестве первоначального приближения s-полигона принимается касательная ломаная [7,8,2,9,10] или ломаная инцидентности [11,12,13,14].

В работах авторов [1,2,15] предложена новая схема построения сплайновой кривой. В данной схеме сплайновая кривая рассматриваются как геометрическая модель (определитель) кривой в инженерной геометрии. Описание определителя сплайновой кривой в предложенной схеме выполняется привлечением т.н. "теории параметризации" или "исчисления

параметров", впервые введенной в прикладную геометрию акад. Н.Ф.Четверухиным [16,17].

В схеме задается глобальный ГО кривой в виде ломаной инцидентности или касательной ломаной. Сплайновая кривая (обвод) рассматривается как сложная фигура, составленная из неприводимых аналитических кривых по определенным геометрическим условиям связи с элементами глобального ГО и условиям связи смежных аналитических кривых. Такими связями является совпадение точек, касательных и кривизны в точках ГО кривой.

В статье ставится задача развития и обобщения данной схемы построения определителя сплайновой кривой.

Различные виды ГО имеют свои достоинства и недостатки. Ломаная инцидентности позволяет точно позиционировать кривую, касательная ломаная однозначно и точно задает форму моделируемой кривой, s-полигон NURBS кривой высокой степени позволяет локально редактировать форму кривой и может обеспечить высокое качество пространственных кривых по критериям плавности кривизны и кручения.

Метод v-кривой [18,1,2,15] позволяет использовать два вида ГО – ломаную инцидентности и касательную ломаную для моделирования плоских кривых высокого качества (5-го порядка гладкости с плавным изменением кривизны).

Разработан комбинированный метод построения кривых линий высокого качества на плоской и пространственной ломаной точек инцидентности или пространственной касательной ломаной произвольной конфигурации [10]. Метод представляет последовательность построения v-кривой для структуризации исходной ломаной и изогеометрического построения b-сплайновой кривой произвольной степени на структурированной ломаной [10]. Недостатком является небольшая точность при восстановлении b-сплайновой кривой на пространственной ломаной с кручением.

Актуальной задачей является разработка интерактивного метода изогеометрического моделирования кривой линии высокого качества по критериям плавности с одновременным использованием трех видов ГО в одном сеансе моделирования кривой и с обеспечением точного перехода от одного вида ГО к другому в любом направлении.

Цель данной статьи: дать систематизированный обзор научных результатов исследований и разработок авторов в рамках научного направления "Изогеометрическое моделирование кривых линий и поверхностей высокого качества по критериям плавности в инженерной геометрии и компьютерной графике" и решить следующие задачи:

- исследовать и развить схему построения определителя сплайновой кривой как сложной фигуры, составленной из неприводимых аналитических кривых по определенным геометрическим условиям связи с элементами глобального ГО и условиям связи смежных аналитических кривых.

- выработать научно обоснованные формальные критерии оценки качества геометрических характеристик функциональных кривых и поверхностей;

- разработать интерактивный метод изогометрического моделирования кривой линии высокого качества по критериям плавности с одновременным использованием трех видов ГО в одном сеансе моделирования кривой и с обеспечением точности перехода от одного вида ГО к другому в любом направлении.

- исследовать метод моделирования поверхности на сети кривых линий, разработать формальные критерии визуальной оценки изогометрической определенности поверхности;

Изогеометрическое моделирование кривых

Постановка задачи изогометрической аппроксимации функции сплайнами была сделана Гребенниковым А.И. [19]. Введенные Гребенниковым А.И. понятия и определения изогометрической аппроксимации функций позволяют формализовать определение устойчивого формообразования и отказаться от таких нечетких понятий как "аппроксимация с сохранением формы" ("shape preserving approximation").

В работах [1,2] задача изогометрической аппроксимации функции обобщается на задачу изогометрического моделирования кривых.

Вводятся определения характеризующие конфигурацию ломаных и изогометричность ломаной и кривой на проекции. Для формального описания структуры ломаной вводится понятие дискретной аппроксимации кривизны [1,2]. Дискретная аппроксимация кривизны характеризует форму ломаной произвольной конфигурации так же, как вторые разделенные разности форму точечного базиса однозначной функции. На основе закона изменения дискретной аппроксимации кривизны даются определения локально выпуклой ломаной, строго выпуклой ломаной, s-образной ломаной, строго s-образной ломаной, ломаной регулярной формы порядка m. Ломаная

регулярной порядка m формы определяется как ломаная произвольной формы со следующим ограничением: любой участок из m звеньев должен быть строго выпуклым или строго s-образным [10,3].

Рассматриваются проекции ГО $\{T_i\}$ и кривой $r(u,v)$ на фиксированную плоскость. Вводятся определения характеристических порядка k ($k=0,1,2$) ГО конструируемых кривых и определения изогометрической и абсолютно изогометрической порядка k ($k=0,1,2$) ГО.

В частности, точечный каркас абсолютно изогометрически порядка $k=2$ представляет кривую линию, если направленная кривая $r(u)$ последовательно точно проходит через точки каркаса и точки перегиба кривой попадают в интервалы изменения знака дискретной аппроксимации кривизны.

Анализ устойчивости формообразования NURBS кривых

Исследуется задача изогометрического моделирования NURBS кривых s-полигонами. Рассматриваются NURBS кривые различных типов (кубические кривые Безье [20], кубические b-сплайновые кривые [21], b-сплайновые кривые произвольных степеней [9,10], NURBS кривые произвольных степеней [3]) и доказывается следующее свойство: s-полигон регулярной порядка m формы является характеристической ломаной NURBS кривой степени m.

Изогеометрическое построение b-сплайновой кривой на точечном каркасе инцидентности

На основе доказанного свойства изогометричности s-полигона регулярной порядка m формы NURBS кривой степени m разрабатываются методы изогометрического восстановления b-сплайновой кривой на точечном каркасе инцидентности [7,8,2,9].

На исходной ломаной инцидентности доопределяется касательная ломаная. На

множестве $\{P_i\}_{i=0}^n$ задается множество касательных $\{\bar{P}_i\}_{i=0}^n$ таким образом, что

касательная ломаная $\{V_i\}_{i=0}^{n+1}$, определенная точками пересечения касательных будет изогометрична моделируемой кривой.

Формулируется задача изогометрического построения на плоской ломаной инцидентности

$\{P_i\}_{i=0}^n$ b-сплайновой кривой. Необходимо определить b-сплайновую кривую $r(u)$ четной

степени, изогометрическую форму ломаной $\{V_i\}_0^{n+1}$ и инцидентную точкам $\{P_i\}_i^n : r(\xi_i) = P_i, i = 0, 1, \dots, n$ в точках ξ_i фиксированной сетки $\Delta u : u_{i-1} < \xi_i < u_{i+1}, i = 1, \dots, n-1; \xi_0 = u_0, \xi_n = u_n$.

Ключевым моментом в предлагаемом итерационном алгоритме является то, что область корректности решения ограничивается условием изогометричности s-полигона форме касательной ломаной $\{V_i\}_0^{n+1}$.

Пусть на некотором j-ом шаге приближения в области корректности получен s-полигон $\{V_i^j\}$ (рис. 1).

Невязка локального приближения на участке $u_{i-1} < u < u_{i+1}$ определяется как кратчайшее расстояние δ_i^j от точки P_i до b-сплайновой кривой:

$$\delta_i^j = r^j(\xi_i^j) - P_i, \quad u_{i-1} < \xi_i^j < u_{i+1}. \quad (1)$$

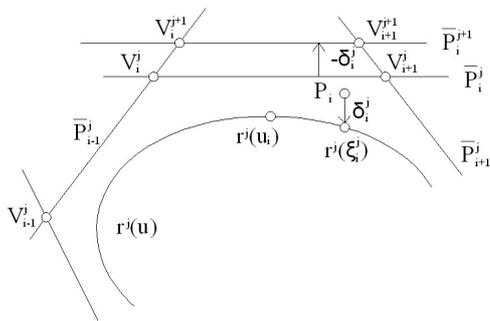


Рисунок 1 – Схема алгоритма приближения

Точки V_i^j, V_{i+1}^j получаются как точки пересечения прямых $\bar{P}_{i-1}^j, \bar{P}_i^j, \bar{P}_{i+1}^j$, совпадающих со звеньями $V_{i-1}^j, V_i^j, V_i^j, V_{i+1}^j, V_{i+1}^j$.

Переопределяются точки V_i^j, V_{i+1}^j параллельным смещением прямой \bar{P}_i^j на величину локальной невязки $-\delta_i^j$. Точки пересечения смещенной прямой \bar{P}_i^j с прямыми $\bar{P}_{i-1}^j, \bar{P}_{i+1}^j$ определяют новые точки V_i^{j+1}, V_{i+1}^{j+1} . Модифицированный s-полигон $\dots V_{i-1}^j, V_i^{j+1}, V_{i+1}^{j+1}, V_{i+2}^j \dots$ уменьшит локальную невязку δ_i^j . Благодаря свойствам b-сплайнов, влияние точек V_i^{j+1}, V_{i+1}^{j+1} наиболее сильно на отрезке $u_{i-1} < u < u_{i+1}$, резко уменьшается за его пределами и становится нулевым за пределами отрезка $u_{i-m/2} < u < u_{i+m/2}$. На основе этого свойства строится регуляризирующий алгоритм последовательных приближений как последовательность параллельных смещений звеньев $\bar{P}_i^j = V_i^j V_{i+1}^j$, на величины $-\delta_i^j, i = 0, 1, \dots, n$.

Дополнительные вершины $\{V_i\}_{i-k}^{-1}$ и $\{V_i\}_{i+n+k}^2$ открытого s-полигона $\{V_i\}_{i-k}^{n+k}$ на каждом j-м шаге итерации определяются по граничным условиям. В качестве граничных условий используются универсальные условия симметрии, инвариантные относительно степени сплайновой кривой: 1) условие замкнутости кривой; 2) условие симметрии дополнительных вершин относительно прямой, проходящей через начальную (конечную) точку v-кривой перпендикулярно первому (последнему) звену фрейма v-кривой; 3) условие центральной симметрии дополнительных вершин относительно первой (последней) точки v-кривой.

При некоторых особенностях конфигурации исходной ломаной или касательной ломаной невозможно одновременно обеспечить изогометричность и достичь заданной точности аппроксимации. К таким конфигурациям с особенностями относится ломаная с прямолинейным участком или с участком, близким к прямолинейному, ломаная с резкими изменениями длины звеньев.

При построении b-сплайновой кривой на ломаной с критической конфигурацией алгоритм

сохраняет изогометричность, но точность аппроксимации на критическом участке будет меньше требуемой. В этих случаях программа выводит сообщение о величине погрешности и номере точки критического участка ломаной. Этой информации достаточно, чтобы понять причину и сделать необходимые коррекции формы ломаной. При аппроксимации прямолинейных участков неустранимая погрешность принимается как необходимая плата за изогометричность. Такие участки после построения B -сплайновой кривой можно уточнить редактированием s -полигона.

Итерационный метод изогометрического построения B -сплайновой кривой (кубической [7,8,2], произвольной степени [9]) является пионерным и предвдывает эволюционные методы построения B -сплайновых кривых на точечных данных и фиксированных кривых [11,12,13,14].

Геометрически параметризованная сплайновая кривая

Предлагается новая схема построения сплайновой кривой на основе теории параметризации (или исчисления параметров) [1,2,15]

Задается глобальный геометрический определитель кривой линии $G = \{T_i, \bar{T}_i, K_i\}$ (знак [...] означает необязательность задания параметров, заключенных в квадратные скобки). Определяется система базовых m -параметрических кривых $\{R_i^m\}$ по условиям связи элементов ГО $G_i = \{g_{i,j}\}_{j=1}^m$ с фиксированными элементами глобального ГО G и условиям связи производных геометрических элементов смежных базовых кривых R_i^m , R_{i+1}^m . Такая система называется носителем или базисом сплайна.

Пусть дано множество m -параметрических кривых $\{R_i^m\}$. Кривая R_i^m однозначно определяется геометрическим определителем $G_i = \{g_{i,j}\}_{j=1}^m$. Элементы $g_{i,j}$ являются геометрическими объектами типа точки $T_{i,j}$, касательной $\bar{T}_{i,j}$, кривизны $K_{i,j}$. Элемент типа кривизны

можно брать только в комплекте с точкой, в которой фиксируется кривизна.

Вводятся определения, характеризующие структуру носителя сплайна. Сплайн называется локальным, если система базовых m -параметрических кривых определяется только на элементах глобального ГО кривой линии. Локальность выражается в том, что изменение некоторого элемента глобального ГО вызывает изменение только тех базовых кривых, в геометрические определители которых входит данный элемент.

На сплайне смежные базовые кривые R_{i-1} , R_i имеют совпадающие геометрические элементы - фиксированные (элементы принадлежат исходному геометрическому определителю кривой линии) и производные (определяется на совпадающих фиксированных элементах).

Дискретная мера близости $k_{i-1,i}$ двух смежных базовых R_{i-1} , R_i кривых сплайна определяется количеством общих параметров (фиксированных и производных).

Дефект связи $d_{i-1,i}$ смежных базовых кривых R_{i-1}^m и R_i^m сплайна характеризуется разностью между числом m и дискретной мерой близости $k_{i-1,i}$: $d_{i-1,i} = m - k_{i-1,i}$. Дефект характеризует разность между максимально возможным количеством совпадающих геометрических элементов (независимых) и производных. Дефект связи равен нулю, если смежные кривые совпадают (то есть представляют одну аналитическую кривую).

На глобальном геометрическом определителе вводится фиксированная параметрическая сетка $\{u_i\}$. На системе базовых m -параметрических

кривых $\{R_i^m\}$ определяется аналитическая параметризация кривой $r(u)$ в виде нелинейного сплайна

$$r(u) = \sum_i \varphi_i(u) B_i(u), \quad (2)$$

где $\varphi_i(u)$ - параметризация кривой R_i^m на сетке $\{u_i\}$; $B_i(u)$ - финитная весовая функция, характеризующая "вклад" кривой R_i^m в форму сплайна; финитность (конечность) весовой функции $B_i(u)$ означает, что "вклад" кривой

R_i^m учитывается на ограниченном интервале параметрической сетки $\{u_i\}$.

Впервые подобная схема построения сплайна (вернее ее частного случая) была использована в методе 2-окружностной интерполяции, предложенном Леусом В.А. [22]. Позднее метод получил название нелинейного сплайна [23]. Это название также было использовано в работах авторов [1,2,15]

В данной работе авторы считают, что более подходящим термином является термин "геометрически параметризованный сплайн". Этот термин подчеркивает тот факт, что сплайн определяется по связям геометрических элементов базисных кривых сплайна между собой и с элементами глобального ГО, независимо от способа аналитической параметризации сплайна.

Нелинейный сплайн (9) в данной схеме является вторичным и применяется для аналитической параметризации базиса "геометрически параметризованного сплайна". При этом можно использовать разные схемы определения нелинейного сплайна.

Принцип уплотнения спецификации ГО кривой

Вводится принцип уплотнения спецификации ГО кривой, который объединяет многие методы, используемые в инженерной геометрии [24].

Уплотнение может быть просто эквивалентным преобразованием кривой, при котором увеличивается количество дуг кривой, но геометрически кривая не меняется. Такого рода уплотнение используется для локального редактирования сплайновой кривой вставкой узловых точек (метод проф. Воеhm'a [25]), для реализации алгоритмов визуализации кривой без интерполирования кривой (метод Chaikin'a [26]). Процедура может являться частью алгоритмического определения кривой (методы двух, трех отношений научной школы проф. В.А.Осипова [27]) или поверхности (метод Gattmull'a, Clark'a [28]). В некоторых случаях уплотнение используется для улучшения характеристик кривой (методы Kjelander'a, Farin'a, Sapidis'a [5,6]).

Дается определение изогеометрического уплотнения спецификации ГО. Для определения кривых, не имеющих аналитического или кусочно-аналитического представления в результате выполнения процедуры уплотнения спецификации ГО,

вводится понятие "виртуальная кривая" или v -кривая [15].

Базовые критерии плавности

Основными критериями качества являются порядок гладкости и плавность кривой. Синоним понятия "кривая высокого качества" это "плавная кривая" ("faired curve"). Этот термин появился в работах, посвященных улучшению качества кубических параметрических сплайнов [5,6]. Проф. G.Farin считает, что "хорошая" кривая имеет график кривизны (линия кривизны, нарисованная над дугой по длине или по параметру), имеющий относительно немного участков монотонного изменения кривизны [29]. Проф. G.Farin также ввел понятие "кривые класса A" для обозначения кривых высокого качества, позаимствовав этот термин из описания CAD/CAM системы SYRKO фирмы Mercedes-Benz для моделирования внешних ("outside surface", "Aussenhaut" – внешний на немецком языке) поверхностей высшего сорта. Этим термином в статье [30] обозначаются кривые с монотонным изменением кривизны. К настоящему времени большое количество работ посвящено проблеме улучшения качества моделируемых кривых. Используются различные подходы к "улучшению" кривых: минимизация энергетического функционала [31,32], применение "электронных лекал" [33], улучшение конических сплайнов [34,35], кривых Безье [36,37], b-сплайновых кривых [5], NURBS кривых [38], применение клотоидных и спиральных сплайнов [39,40]

При конструировании динамических обводов объектов, работающих в условиях активного взаимодействия со средой, к методам моделирования предъявляются повышенные требования на порядок гладкости.

Эти требования вытекают непосредственно из анализа пространственной криволинейной траектории движения материальной точки.

Если рассматривать частицу почвы, жидкости, газа как материальную точку, движущуюся по криволинейной траектории, то для анализа динамики движения можно использовать основное уравнение динамики [41], связывающую силу F , массу m , скорость v и ускорение a по времени t

$$F = ma = m \frac{dv}{dt}. \quad (1)$$

При криволинейном движении вектор силы F , как и ускорение a , лежит в соприкасающейся плоскости и может быть разложен на составляющие: касательную

$$F_t = ma_t = m \frac{dv}{dt}$$

и нормальную

$$F_n = ma_n = m \frac{v^2}{\rho}$$

Для криволинейной траектории движения модуль ускорения $a = \frac{dv}{dt}$ имеет следующее выражение

$$a = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^2}{\rho^2}}, \quad (3)$$

где

ρ - радиус кривизны траектории движения.

Если пространственная кривая линия траектории движения задана в параметрической форме

$$r(s) = [X(s), Y(s), Z(s)], \quad (4)$$

то кривизна $\chi(s)$ и радиус кривизны из (3) $\rho(s)$ определяются выражениями

$$\chi(s) = \frac{r'(s) \times r''(s)}{|r'(s)|^3}, \quad \rho(s) = \frac{1}{\chi(s)}. \quad (5)$$

При постоянной линейной скорости $v = const$ касательная составляющая ускорения $\left(\frac{dv}{dt}\right) = 0$. Тогда динамика движения зависит только от параметров (4,5) пространственной кривой линии траектории движения.

Условием безударного движения материальной точки по криволинейной траектории является непрерывность функции кривизны (5).

Условием действительно плавного движения материальной точки по криволинейной траектории является плавность изменения кривизны. То есть векторная функция кривизны (5) должна быть непрерывной до первых производных. При этом линия траектории должна быть непрерывной до третьих производных.

И, наконец, для плавного перемещения материальной частицы по пространственной траектории необходимо обеспечить для пространственной траектории движения плавность кручения. Векторная функция кривизны (5) должна быть непрерывной до вторых производных. При этом линия траектории должна быть непрерывной до четвертых производных.

Высокий порядок гладкости линии движения сам по себе не обеспечивает

плавности траектории. Порядок гладкости характеризует локальную плавность кривой.

Плавность линии зависит также от формы графика изменения кривизны по длине линии движения. Пульсация кривизны вызовет согласно основному уравнению (1) динамики [41] пульсацию центробежных сил, действующих на материальную точку. Поэтому участок линии движения должен иметь минимальное число экстремумов кривизны или минимальное число вершин кривой линии.

Таким образом, для построения действительно плавной траектории движения необходимо обеспечить минимальное количество вершин моделируемой траектории движения и высокий, не ниже 4-го, порядок гладкости.

Приведенные рассуждения дают нам **базовые критерии** оценки качества кривых.

Первый необходимый критерий - высокий, не ниже 4-го, порядок гладкости моделируемой кривой.

Второй по важности критерий качества кривой - минимум вершин кривой при заданной форме.

Третий критерий для оценки качества пространственных кривых - плавность кручения кривой.

Перечисленные критерии легко контролируются по графикам кривизны и центров кривизны.

Эти критерии можно применить для сравнительного анализа качества кривых. Из двух кривых одинаковой формы, инцидентных одной и той же ломаной и имеющих одинаковый порядок гладкости, более качественной или более плавной будет та, которая имеет меньше вершин.

Дополнительные критерии. При сравнении качества кривых, проходящих через одну и ту же ломаную и имеющих одинаковый порядок гладкости и количество вершин при заданной форме кривых, можно использовать дополнительные критерии. В качестве дополнительного критерия можно использовать энергетический функционал вида интегральной суммы квадрата второй производной кривизны по длине кривой [31].

Необходимость применения для моделирования функциональных поверхностей технических объектов кривых линий высокого качества по критериям плавности: не менее 4-го порядка гладкости с минимальным количеством вершин при заданной форме ГО кривой требует и соответствующего метода.

Моделирование кривых высокого качества по базовым критериям плавности

На основе схемы построения геометрически параметризованного сплайна разработан ряд методов конструирования плоских выпуклых

кривых линий [18,15]. В качестве базовых аналитических кривых используются 5-параметрические кривые 2-го порядка (К2П). Исходный глобальный геометрический определитель задается локально выпуклым точечным каркасом $G = \{T_i\}_{i=1}^q$ с фиксированными касательными в первой и последней точках $\overline{T}_1, \overline{T}_q$.

Система базовых К2П $\{R_i\}_{i=2}^{q-1}$ определяется на точечном каркасе $\{T_i\}_{i=1}^q$ как множество дважды соприкасающихся К2П по условиям связи локальных ГО

$G_i = \{T_{i-1}, \overline{T}_{i-1}, T_i, T_{i+1}, \overline{T}_{i+1}\}$ с точками каркаса $\{T_i\}_{i=1}^q$

$$T_{i,1} = T_{i-1}, T_{i,2} = T_i, T_{i,3} = T_{i+1}, \\ 2 \leq i \leq q-1,$$

условиям связи производных элементов смежных базовых кривых R_i и R_{i+1}

$$\overline{T}_{i+1}(R_i) = \overline{T}_{i+1}(R_{i+1}), \\ 2 \leq i \leq q-2.$$

и двум граничным условиям

$$\overline{T}_{2,1} = \overline{T}_1, \overline{T}_{q-1,3} = \overline{T}_q.$$

Предлагается устойчивый алгоритм определения множества дважды соприкасающихся К2П на выпуклом точечном каркасе на основе априорной информации об искомом решении [18].

Исследуется специальная конфигурация точечного каркаса $\{T_i\}$ и множества дважды соприкасающихся К2П $\{R_i\}$. Особенностью такой конфигурации является то, что каждая точка T_i лежит на медиане соприкасающегося треугольника T_{i-1}, V_i, T_{i+1} , образованного точками T_{i-1}, T_{i+1} и точкой V_i пересечения касательных $\overline{T}_{i-1}, \overline{T}_{i+1}$. Благодаря этой особенности, точки $\{T_i\}$ распределяются по длине контура с плотностью пропорциональной кривизне. Разработан алгоритм перераспределения точек по длине

контура с плотностью пропорциональной кривизне.

На основе принципа уплотнения спецификации ГО разработан метод конструирования кривой путем генерации дополнительных точек на исходном каркасе [18]

В работе [1] обосновывается Положение о том, что при $m \rightarrow \infty$ множество $\{T_i^m\}$ будет сколь

угодно точно аппроксимировать регулярную кривую (5 раз дифференцируемую), огибающую непрерывное семейство дважды соприкасающихся К2П.

Предлагается модификация метода – метод построения геометрически параметризованного сплайна на геометрическом определителе вида касательной ломаной [15]. Метод основан на возможности определения К2П с помощью любой комбинации геометрических элементов вида точки или касательной.

Геометрический определитель кривой линии вида касательной ломаной более удобен для структуризации кривых линий, так как у касательных ломаных линий более высокая точность формообразования, чем у ломаных инцидентности. Кривая всегда находится в пределах соприкасающегося треугольника, образованного смежными касательными. Поэтому структуризацию кривой предпочтительнее делать касательной ломаной.

На некотором шаге генерации точек v-кривой получается дискретный базис сплайна из множества дважды соприкасающихся К2П.

Рассматриваются различные способы аналитической параметризации кривой нелинейным сплайном на базисе дважды соприкасающихся К2П. Показываются ограничения и недостатки нелинейного сплайна при использовании простейших весовых функций – постоянных и линейных [42]. Постоянные весовые функции определяют нелинейный сплайн как коробовую линию. При использовании линейной весовой функции нелинейный сплайн представляет кривую непрерывную до радиусов кривизны. Но при резких изменениях кривизны возможно появление осцилляции.

Для аналитической параметризации сплайна предлагается использовать схему, основанную на точной аппроксимации v-кривой посредством кубической NURBzS кривой (NURBS кривая в формате Безье) [44].

Благодаря изогометричности строго выпуклого b-полигона форме рациональной кривой Безье-Бернштейна при положительных весовых коэффициентах форма результирующей кубической NURBzS кривой будет также выпуклой.

Сравнение с методом R.W. Soanes'a

Через 15 лет после публикации метода огибающей [18] (кстати, статья была переопубликована в США) чрезвычайно близкий метод был предложен в 1995 математиком R.W. Soanes из US ARMY Benet Laboratories [43]

Метод v -кривой и метод R.W. Soanes'a чрезвычайно близки. Метод R.W. Soanes'a использует также схему построения геометрически параметризованного сплайна. В качестве базиса сплайна используются два семейства взаимно соприкасающихся К2П. Операции генерации дополнительных точек в схеме уплотнения спецификации ГО идентичны.

В приложении к работе R.W. Soanes приводит пример построения кривой на замкнутой ломаной из 6 точек. Приводится только рисунок.

Контрольное построение кривой на той же последовательности точек по методу v -кривых показывает полное визуальное совпадение построенных кривых (рис. 2) и одинаковую плавность графиков кривизны.

Различие в форме графиков объясняется тем, что в построении по методу v -кривых значения кривизны откладываются от линии кривой, а в построении по методу R.W. Soanes'a значения кривизны откладываются из одной центральной точки.

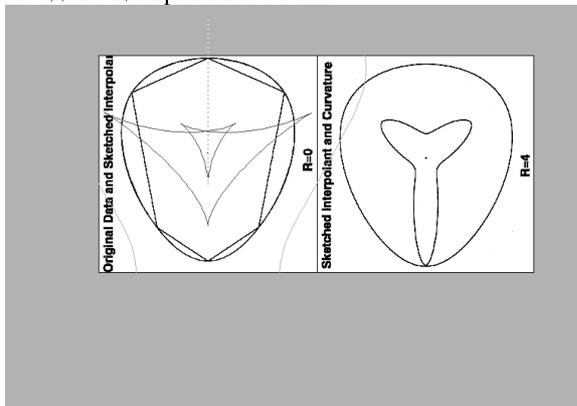


Рисунок 2 – Сравнительное тестирование методов. Слева v -кривая, справа кривая “sketched interpolation”, моделируемая по методу R.W. Soanes'a. Показаны графики кривизны.

Отметим следующий факт. Конический сплайн и график кривизны по методу R.W. Soanes'a надлежащего качества получаются после 4-ой итерации уплотнения точек. То есть конический сплайн имеет 96 конических сегментов.

В предлагаемом методе с использованием основной схемы аппроксимации кубической

NURBzS кривой достигнута плавность кривой такого же качества без итераций уплотнения при количестве дуг, равном количеству отрезков исходной ломаной. То есть основная схема аналитической параметризации сплайна сохраняет также и плавность изменения кривизны.

Этот замечательный факт можно объяснить тем, что дуга кубической NURBzS кривой по предложенной основной схеме получена минимальными преобразованиями родительской конической дуги, усредняющей смежные К2П из семейства дважды соприкасающихся К2П [44].

Дополнительная схема аналитической параметризации

Рассмотрим схему построения геометрически параметризованного сплайна на плоской ломаной произвольной формы. Для применения базового метода плоская опорная ломаная произвольной формы разбивается на ряд выпуклых участков. Для этого определяются точки перегиба и направления касательных векторов. Ломаная линия разбивается на выпуклые участки с граничными условиями вида фиксированной касательной и нулевой кривизны в точках перегиба

Основная схема не обеспечивает надлежащего качества кривой с нулевой кривизной в граничной точке (возникает концентрация кривизны перед точкой перегиба). Предлагается дополнительная схема аналитической параметризации сплайна с помощью кубической NURBzS кривой [44]. Дополнительная схема учитывает нулевую или небольшую кривизну в граничной точке выпуклого участка.

Моделирование пространственных кривых высокого качества

В работе [44] предлагается метод комбинированного применения v -кривой и b -сплайновой кривой высокой степени для изогеометрического построения b -сплайновой кривой на пространственной ломаной.

Пусть задана пространственная v -кривая пространственной касательной ломаной $\{V_i\}$ и множеством точек инцидентности $\{P_i\}$.

Вводится оператор $Q(R^3 \Rightarrow R^2)$ развертки пространственной v -кривой на плоскость R^2 . На плоской ломаной определяется v -кривая однократным уплотнением спецификации ГО. V -кривая используется для структуризации ломаной (определяются касательные в точках уплотненной ломаной). Структурированная ломаная аппроксимируется b -сплайновой кривой. С помощью обратного оператора $Q^{-1}(R^2 \Rightarrow R^3)$

осуществляется перенос s -полигона b -сплайновой кривой в пространство R^3 .

При переносе неизбежно возникает погрешность отклонения точки ломаной от b -сплайновой кривой из-за пространственного кручения ломаной.

Для устранения данного недостатка предлагается следующая модификация.

Вводится оператор $Q(R^3 \Rightarrow R^2)$ развертки пространственной v -кривой на плоскость R^2 . На плоской ломаной определяется v -кривая однократным уплотнением спецификации ГО. V -кривая используется для структуризации ломаной (определяются касательные в точках уплотненной ломаной). Структурированная ломаная с помощью обратного оператора $Q^{-1}(R^2 \Rightarrow R^3)$ переносится в пространство R^3 .

Суть адаптации алгоритма в следующем.

b -сплайновая кривая восстанавливается непосредственно на пространственной структурированной ломаной. Основным алгоритмом и в этом случае остается алгоритм приближения плоской кривой.

Невязка (1) $\delta_i^j = r^j(\xi_i^j) - P_i$ определяется

как вектор расстояния от точки $r^j(\xi_i^j)$ на пространственной b -сплайновой кривой до вершины P_i пространственной ломаной инцидентности $\{P_i\}$. Исходная

пространственная касательная ломаная $\{V_i\}_{i=0}^{n+1}$ и последующие ломаные

управляющих точек $\{V_i^j\}_{i=0}^{n+k2-k1}$ по итерациям

приближения определяются точками "псевдопересечения" скрещивающихся

касательных прямых $\{\bar{P}_i\}_{i=0}^n$. Эти точки

лежат на середине отрезка, соединяющего ближайшие точки касательных прямых.

Тестирование метода показывает, что b -сплайновая кривая высокой степени сохраняет качество v -кривой на выпуклых участках, повышает качество кривой на участках с точками перегиба, обеспечивает плавность кручения пространственной кривой линии.

Модифицированный метод проверяется на задаче аппроксимации пространственной спирально-винтовой линии (примитива HELIX) AutoCAD.

Для построения примитива HELIX в AutoCAD могут задаваться диаметр нижнего основания, диаметр верхнего основания, высота и количество витков.

Строится примитив СПИРАЛЬ (HELIX) с одним витками (диаметр нижнего основания – 100, диаметр верхнего основания – 50, высота – 50, количество витков – 1). Примитив HELIX, оформленный как БЛОК, разбивается командой BREAK. Таким образом, из примитива HELIX выделяется NURBzS-шаблон. Затем NURBzS-шаблон аппроксимируется b -сплайновой кривой 8-ой степени без улучшения и с улучшением с помощью v -кривой. Необходимая точность 0.0000001 была достигнута за 121 итерацию.

Для сравнения качества NURBzS шаблона примитива HELIX AutoCAD и аппроксимирующих b -сплайновых кривых выводятся графики центров кривизны на виде сверху (рис.3) и на виде спереди (рис. 4).

Как видно из рис. 3,4 b -сплайновая кривая 8-ой степени, построенная предложенным методом обеспечивает высокое качество аппроксимации спирально-винтовой линии.



Рисунок 3 – Вид сверху. NURBzS шаблон примитива HELIX AutoCAD (слева) и аппроксимирующие b -сплайновые кривые – без улучшения (центре) и с улучшением с помощью v -кривой (справа)



Рисунок 4 – Вид спереди. NURBzS шаблон примитива HELIX AutoCAD (слева) и аппроксимирующие b -сплайновые кривые – без улучшения (центре) и с улучшением с помощью v -кривой (справа)

Интерактивное моделирование кривой с использованием 3-х типов ГО в одном сеансе редактирования с контролем графиков кривизны

В интерактивном режиме редактирования v-кривой при построении на ломаных инцидентности и касательных ломаных обеспечивается возможность перехода от одного вида к другому дуальному (двойственному) виду. От v-кривой можно перейти к b-сплайновой кривой. Это расширяет арсенал инструментальных средств дизайнера при построении и редактировании кривых.

Пример. Построение и редактирование v-кривой с переходом от одного вида ГО к другому. На рис. 5, 6, 7 показано построение v-кривой на ломаной инцидентности, переход к касательной ломаной и конвертирование в b-сплайновую кривую 8-ой степени с отображением эволюты кривой.

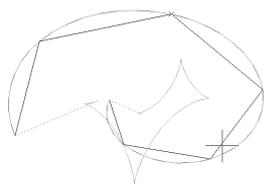


Рисунок 5 – Построение v-кривой на ломаной инцидентности. Отображение эволюты кривой.

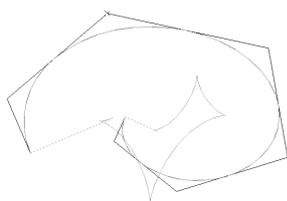


Рисунок 6 – Переход к касательной ломаной. Отображение эволюты кривой.

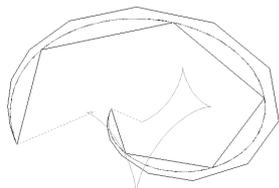


Рисунок 7 – Конвертирование v-кривой в b-сплайновую кривую. Отображение эволюты кривой.

Изогеометрическое моделирование поверхностей

В работах [1, 45, 3] исследуется устойчивость формообразования поверхности $r(u, v)$, заданной ГО вида двумерного точечного каркаса.

На комплексном чертеже пространственная структура поверхности $r(u, v)$ определяется проекциями ГО вида двумерного точечного каркаса $\{T_{i,j}\}$ и семейств изопараметрических

линий поверхности $\{r(u_i, v)\}, \{r(u, v_j)\}$.

Проекции ГО $\{T_{i,j}\}$ должны однозначно определять форму проекций изопараметрических линий $\{r(u_i, v)\}, \{r(u, v_j)\}$ поверхности $r(u, v)$.

Поверхность изогеометрически определена на проекции, если по конфигурации проекции ГО $\{T_i\}$ можно однозначно судить о форме изопараметрических линий поверхности $\{r(u_i, v)\}, \{r(u, v_j)\}$ на проекции.

Поверхность изогеометрически определена в пространстве, если обеспечивается изогеометрическая определенность поверхности на трех ортогональных проекциях комплексного чертежа.

Определяются и формулируются условия изогеометрической определенности поверхности, заданной ГО вида двумерного точечного каркаса, на проекции.

Вводятся определения, характеризующие взаимное расположение ломаных строк и столбцов многогранника, которые рассматриваются как многозвенники: определение подобия двух 2-звенников (одинаково ориентированные 2-звенники $(w_{i,1}, w_{i+1,1})$ и $(w_{i,2}, w_{i+1,2})$ подобны,

если также ориентированы производные от них 2-звенники $(w_{i,1}, w_{i+1,2})$, $(w_{i,2}, w_{i+1,1})$;

определения подобия n-звенников, подобия ломаной и кривой; определения производной ломаной как линейной комбинации исходных двух n-звенников, линейной комбинации m n-звенников, нормализованной линейной комбинации m n-звенников. Определяется свойство попарно подобных n-звенников: нормализованная линейная комбинация m попарно подобных n-звенников определит n-звенник, подобный исходным.

Исследуется геометрическое моделирование b-сплайновой поверхности на неравномерной сетке произвольных степеней (m,n) с помощью фрейма (s-многогранника). Определяются геометрически наглядные ограничения на форму фрейма b-сплайновой поверхности, соблюдение

которых обеспечивает изогеометричность формы фрейма и изопараметрических линий поверхности на плоскости проекции при параллельном проецировании [3].

Предлагается метод формирования s-многогранника NURBS поверхности для обеспечения перехода от одной формы изопараметрических линий участка NURBS поверхности к другой форме без осцилляции изопараметрических линий. Дана методика обеспечения изогеометрической определенности NURBS поверхности применением предложенных методов анализа изогеометричности и исправления формы s-многогранников NURBS поверхности [3].

Геометрически устойчивое моделирование uv-плазовой поверхности на сети кривых

Геометрический определитель вида сети кривых точен. Сохраняет в uv-плазовой поверхности геометрию кривых. Кривые сети высокого качества переходят в изопараметрические кривые uv-плазовой поверхности высокого качества. Применение v-кривых для формирования сети позволяет точно моделировать конические кривые (параболы, окружности, эллипсы, гиперболы) и прямолинейные участки. Это важно для технических поверхностей.

Для аналитической параметризации uv-плазовой поверхности используется схема Гордона-Кунса [46].

Анализ устойчивости формобразования uv-плазовой поверхности

Основная формула построения аналитического участка uv-плазовой поверхности по схеме Кунса в интерпретации Форреста [46] (рис. 8) представляет следующее выражение

$$r(u, v) = r_1(u, v) + r_2(u, v) - r_3(u, v), \tag{6}$$

где

$$r_1(u, v) = \alpha_0(u)r(0, v) + \alpha_1(u)r(1, v), \tag{7}$$

$$r_2(u, v) = \alpha_0(v)r(u, 0) + \alpha_1(v)r(u, 1), \tag{8}$$

$$r_3(u, v) = \alpha_0(u)\alpha_0(v)r(0, 0) + \alpha_1(u)\alpha_0(v)r(1, 0) + \alpha_0(u)\alpha_1(v)r(0, 1) + \alpha_1(u)\alpha_1(v)r(1, 1) \tag{9}$$

$$\alpha_0(u) + \alpha_1(u) = 1, \quad \alpha_0(v) + \alpha_1(v) = 1. \tag{10}$$

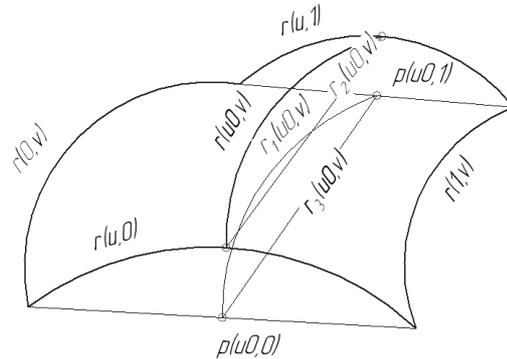


Рисунок 8 – Поверхность Кунса

Если использовать функции смешения, удовлетворяющие условиям (10), например базисные сплайны (b-сплайны), то можно применить результаты леммы 4 из [3]: нормализованная линейная комбинация двух подобных n-звеньев определит n-звеньев, подобный исходным.

Пусть две противоположные граничные линии участка (6) $r(0, v)$, $r(1, v)$ интерполированы и интерполированные ломаные $\bar{r}(0, v)$, $\bar{r}(1, v)$ подобны. При фиксированном u_0 , мы получим ломаную промежуточной кривой

$$\bar{r}_1(u_0, v) = \alpha_0(u_0)\bar{r}(0, v) + \alpha_1(u_0)\bar{r}(1, v). \tag{11}$$

Согласно свойству подобных ломаных, если противоположные граничные ломаные линии участка подобны, то и любая промежуточная ломаная как нормализованная линейная комбинация будет подобна исходным двум ломаным. Следовательно, ломаная $\bar{r}_1(u_0, v)$ будет подобна ломаным $\bar{r}(0, v)$, $\bar{r}(1, v)$.

При подстановке u_0 в уравнение поверхности (6) составляющие (8) $r_2(u_0, v)$ и (9) $r_3(u_0, v)$ представляют ломаные, интерполирующие прямолинейные отрезки

$$r_2(u_0, v) = \alpha_0(v)r(u_0, 0) + \alpha_1(v)r(u_0, 1) \tag{12}$$

$$\begin{aligned} r_3(u_0, v) &= \alpha_0(u_0)\alpha_0(v)r(0, 0) + \\ &+ \alpha_1(u_0)\alpha_0(v)r(1, 0) + \\ &+ \alpha_0(u_0)\alpha_1(v)r(0, 1) + \alpha_1(u_0)\alpha_1(v)r(1, 1) = \\ &= \alpha_0(v)(\alpha_0(u_0)r(0, 0) + \\ &+ \alpha_1(u_0)r(1, 0)) + \alpha_1(v)(\alpha_0(u_0)r(0, 1) + \\ &+ \alpha_1(u_0)r(1, 1)) \end{aligned} \tag{13}$$

Разность между (7) $r_1(u_0, v)$ и (9) $r_3(u_0, v)$

$$\begin{aligned}
 r_1(u_0, v) - r_3(u_0, v) &= \alpha_0(u_0)r(0, v) + \\
 &+ \alpha_1(u_0)r(1, v) - [\alpha_0(v)(\alpha_0(u_0)r(0, 0) + \\
 &+ \alpha_1(u_0)r(1, 0)) + \alpha_1(v)(\alpha_0(u_0)r(0, 1) + \\
 &+ \alpha_1(u_0)r(1, 1))]
 \end{aligned} \quad (14)$$

представляет кривую (11) $r_1(u_0, v)$ как функцию над отрезком (13) $r_3(u_0, v)$.

Обозначим

$$p(u_0, 0) = (\alpha_0(u_0)r(0, 0) + \alpha_1(u_0)r(1, 0))$$

$$p(u_0, 1) = (\alpha_0(u_0)r(0, 1) + \alpha_1(u_0)r(1, 1))$$

Тогда разность кривой (11) $r_1(u_0, v)$ и отрезка (13) $r_3(u_0, v)$ как функция над

отрезком $p(u_0, 0) - p(u_0, 1)$ выразится следующим образом

$$\begin{aligned}
 f(u_0, v) &= r_1(u_0, v) - r_3(u_0, v) = \\
 &= \alpha_0(u_0)r(0, v) + \alpha_1(u_0)r(1, v) - \\
 &[\alpha_0(v)p(u_0, 0) + \alpha_1(v)p(u_0, 1)]
 \end{aligned} \quad (15)$$

Функция (15) используется для восстановления изопараметрической кривой $r(u_0, v)$ на отрезке (12) $r_2(u_0, v)$

$$r(u_0, v) = r_2(u_0, v) + f(u_0, v) \quad (16)$$

Очевидно, что процедура восстановления кривой (16) $r(u_0, v)$ функцией (15) $f(u_0, v)$ на отрезке (12) $r_2(u_0, v)$ не изменит формы исходной кривой $r_1(u_0, v)$. Таким образом, подобные интерполированные ломаные $\bar{r}(0, v)$, $\bar{r}(1, v)$ граничных линий $r(0, v)$, $r(1, v)$ определяют подобную им интерполированную ломаную $\bar{r}(u_0, v)$ изопараметрической кривой $r(u_0, v)$.

Контроль изогеометрической определенности uv-плазовой поверхности осуществляется по форме многогранника узловых точек сети, по формам b-полигонов NURBzS кривых, составляющих сеть и по форме интерполированных ломаных граничных линий. При различной форме граничных линий на проекции возможно появление осцилляции у проекции изопараметрических линий поверхности (рис. 9, слева). Для обеспечения изогеометрической определенности необходимо переход граничных линий различной формы разделить нейтральной (прямолинейной) граничной линией.

Введение прямолинейной граничной линии не устраняет в общем случае осцилляции изопараметрических линий, но изменяет их форму и существенно уменьшает амплитуду.

Для окончательного устранения осцилляции участок необходимо разбить на несколько участков с граничными линиями подобной формы (рис 9, справа).

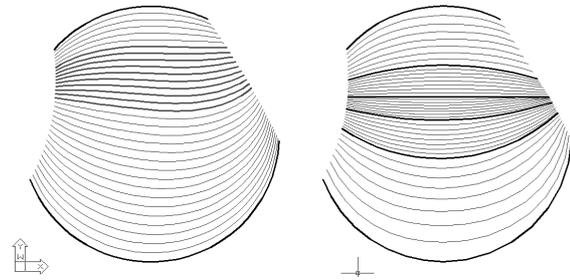


Рисунок 9 – Устранение осцилляции изопараметрических линий uv-плазовой поверхности

Заключение

1. Исследована и обобщена схема построения определителя сплайновой кривой как сложной фигуры, составленной из неприводимых аналитических кривых по определенным геометрическим условиям связи с элементами глобального геометрического и условиям связи смежных аналитических кривых.

Предложенная схема названа схемой моделирования геометрически параметризованной сплайновой кривой.

2. На основе анализа существующих методов и анализа пространственного движения материальной частицы выработаны базовые критерии оценки плавности кривых, необходимые при проектировании объектов с динамическими (функциональными) поверхностями: гладкость кривой не ниже 4-го порядка и минимальное количество вершин кривой при заданной форме.

3. Для обеспечения точности конвертирования определителей кривых усовершенствован комбинированный метод изогеометрического восстановления b-сплайновой кривой на структурированной ломаной с помощью v-кривой. Модифицированный метод обеспечивает точное прохождение пространственной b-сплайновой кривой через вершины исходной пространственной ломаной инцидентности.

4. Исследовано геометрическое моделирование uv-плазовой поверхности на сети кривых по схеме Гордона-Кунса. Определены геометрически наглядные ограничения на форму кривых сети, соблюдение которых обеспечивает изогеометрическую определенность uv-плазовой поверхности на комплексном чертеже. Дана

методика устраниęcia осциляції ізопараметрических ліній.

6. Направление будущих работ:

- исследование проблемы изогеометрического восстановления на пространственной ломаной инцидентности NURBS кривой общего вида произвольной степени (рациональной b-сплайновой кривой на неравномерной сетке). Как и в методе моделирования v-кривой должно обеспечиваться точное моделирование К2П, прямолинейных участков;

- исследование задачи изогеометрического восстановления на двумерном точечном каркасе инцидентности NURBS поверхности общего вида произвольных степеней. Как и в методе моделирования uv-плазовой поверхности на сети v-кривых должно обеспечиваться точное моделирование К2П, прямолинейных участков на ломаных строках / столбцах двумерного точечного каркаса инцидентности.

Литература

1. Муфтеев В.Г. Конструирование криволинейных поверхностей на основе метода огибающей и параметрических b-сплайнов. Диссертация на соиск. ученой степени канд. техн. наук.-Киев, 1986.
2. V.A. Osipov, V.G. Muftajev. Modelling Curvilinear Lines and Surfaces via Modified B-Splines // Computers and Industry 13 (1989) 61-67.
3. Муфтеев В.Г., Романюк А.Н., Марданов А.Р., Фархутдинов И.М. Геометрически устойчивое моделирование NURBS кривых и поверхностей произвольных степеней // Прикладная геометрия. Applied Geometry [Электронный ресурс]: науч. журн./Моск. авиационный ин-т (гос.техн.университет) "МАИ". - Электрон. журн. - Москва : МАИ, 2009. - №22; вып.11, -стр. 19-77. - Режим доступа к журн.: <http://www.mai.ru>. - Загл. с титул. экрана. - №гос.регистрации 019164
4. AutoCAD 2007. Руководство пользователя.
5. Kjellander J.A. Smoothing of cubic parametric splines // Computer Aided Design, 15:175-179, 1983.
6. Farin G., G. Rein, N. Sapidis, and A. J. Worsey. Fairing cubic B-spline curves // Computer Aided Geometric Design, 4(1-2):91-103, July 1987.
7. Муфтеев В.Г. Кубический сплайн регламентированной формы // Республ.межотр.конф.Применение ЭВМ, математических моделей в автоматизации проектирования и автоматизации управления организационными и техническими системами: Тез.докл.-Уфа:Баш ОС НТО, 1981, ч.2. -С.125-128.
8. Муфтеев В.Г. Моделирование кривых с помощью b-сплайнов третьей степени с учетом ограничений, накладываемых на форму кривой // Прикладная геометрия и инженерная графика. - Киев: Будівельник, 1982. Вып. 35. С.111-116
9. Муфтеев В.Г. Конструирование динамических обводов b-сплайновыми кривыми высоких степеней // Всесоюз.конф. Интегрированные системы автоматизированного проектирования: Тез.докл. -Вологда: ВПИ, 1989. С.142-145.
10. Муфтеев В.Г., Марданов А.Р., Геометрическое моделирование кривых линий и поверхностей высокого качества // Прикладная геометрия. Applied Geometry [Электронный ресурс]: науч. журн. / Моск. авиационный ин-т (гос.техн.университет) "МАИ". - Электрон. журн. - Москва : МАИ, 2006. - №18; вып.8,-Режим доступа к журн.: <http://www.mai.ru>. - Загл. с титул.-стр. 67-89.
11. Hoschek J, Lasser D, Fundamentals of Computer Aided Geometric Design, Wellesley: AK Peters; 1996.
12. Pottmann H, Leopoldseeder S, Hofer, M. Approximation with active Bspline curves and surfaces // Proc. Pacific Graphics IEEE; 2002, p. 8-25.
13. Pottmann H, Leopoldseeder S, Hofer, M., Wang W. Industrial geometry: recent advances and applications in CAD // Computer-Aided Design 2005; 37: 751-66.
14. Wang W, Pottmann H, Liu Y. Fitting B-spline curves to point clouds by squared distance minimization // ACM Transactions on Graphics 2006; 25: 214-38.
15. Муфтеев В.Г., Марданов А.Р. Геометрическое моделирование кривых линий высокого качества // Прикладная геометрия. Applied Geometry [Электронный ресурс]: науч. журн./Моск. авиационный ин-т (гос.техн.университет) "МАИ". - Электрон. журн. - Москва : МАИ, 2006. - №18; вып.8, -Режим доступа к журн.: <http://www.mai.ru>. - Загл. с титул.-стр. 37-66.
16. Четверухин Н.Ф. О параметризации кривых линий и поверхностей и её значении в учебном процессе // Математика в школе, 1964, № 5, с.29-33.
17. Четверухин Н.С., Яцкевич Л.А. Параметризация и её применение в геометрии // Математика в школе, 1965, № 5, с.15-23.
18. Муфтеев В.Г. Конструирование плоских кривых методом огибающей // Изв. ВУЗов. Авиационная техника, 1980, №4, с.43-47.
19. Гребенников А.И. Метод сплайнов и решение некорректных задач теории приближений. -М.: Изд-во Москов.ун-та,1983.-208 с.
20. Муфтеев В.Г., Лукманов Ф.Ф., Спиридонова Е.Б., Сыртланов Р.В. Конструирование плоских обводов кривыми Безье-Бернштейна // Изв.ВУЗов. Авиационная техника, 1983, №2.С.106-108

21. Лукманов Ф.Ф., Муфтеев В.Г. Математическое моделирование сложных поверхностей посредством параметрических кривых и b-сплайнов // Прикладная геометрия и машинная графика в авиастроении. - М.:МАИ, 1981 г. С.30-33
22. Леус В.А. Гладкая окружностная интерполяция кривых // Вычислительные системы, -Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1970. -с.102-127.
23. Ю.С.Завьялов, В.А.Леус, В.А. Скороспелов. Сплайны в инженерной геометрии / -М.: машиностроение,1985. -224 с.
24. Осипов В.А. Муфтеев В.Г. Принцип уплотнения спецификации определителя кривых линий в геометрическом моделировании и машинной графике // Всесоюз.конф. Современные вопросы математики и механики и приложения: Избранные докл. и сообщ.-М: ИОФ АН СССР, 1983. -С.73-78.
25. Boehm W. (1980). Inserting new knots into B-spline curves // Computer aided design. -v.12. -N4. -p.199-201.
26. Chaikin, G., An algorithm for high-speed curve generation // Computer Graphics and Image Processing, Vol. 3, 1974, pp. 346-349.
27. Осипов В.А. Теоретические основы автоматизации геометрических расчетов и машинной графики (автоматизированная система геометрии и графики). -М.: Воениздат, 1985. -80 с.
28. Gatmull E, Clark J. Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes // Computer Aided Design 1978;10:350-5.
29. Farin, G., 2001. Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design, fifth ed. Morgan Kaufmann.
30. Farin, G. Class A Bézier curves // Computer Aided Geometric Design 23 (2006) 573-581
31. Mehlum, E. Nonlinear splines // Computer Aided Geometric Design. Academic Press, London, 173-207, 1974.
32. Brunnett G., and J. Kiefer. Interpolation with minimal-energy splines // Computer-Aided Design 26(2) (1994), 137-144.
33. D. J. McConalogue. Algorithm 66 - an Automatic French-Curve Procedure for Use with an Incremental Plotter // Computer Journal, v14, 207-209, 1971.
34. Frey WH, Field DA. Designing Bezier conic segments with monotone Curvature // Computer Aided Geometric Design 2000;17(6):457-83.
35. Xunnian Yang. Curve fitting and fairing using conic splines // Computer-Aided Design 36 (2004) 461-472
36. Mineur, Y., Lichah, T., Castelain, J.M., Giaume, H., 1998. A shape controlled fitting method for Bézier curves // Computer Aided Geometric Design 15 (9), 879-891.
37. Wang, Y., Wang, S., Zhang, L., Zhao, B., 2003. Shape control of Bézier surfaces with iso-parametric monotone curvature constraints // ComputerAided Geometric Design 20 (6), 383-394.
38. Seymour C, Unsworth K. Interactive shape preserving interpolation by curvature continuous rational cubic splines // Journal of Computer Applied Mathematic, 1999;102(1):87-117.
39. Walton DJ, Meek DS. Planar G2 curve design with spiral segments // Computer Aided Design 1998;30(7):529-38.
40. Meek, D.S., and D.J. Walton, A quided clothoid spline // Computer Aided Geometric Design, 8 (1991), 163-174.
41. Карякин Н.И., Быстров К.Н., Киреев П.С.. Краткий справочник по физике. -М.: Высшая школа, 1969. - 600с.
42. Муфтеев В.Г. Конструирование плоских кривых 2-го порядка гладкости методом весовых функций на множестве соприкасающихся кривых 2-го порядка // Прикладная геометрия и инженерная графика. -Киев: Будівельник, 1983. Вып. 35. С.111-113.
43. R.W. Soanes. Thrice differentiable affine conic spline interpolation. U.S.Army ARDEC Technical Report ARCCB-TR-95038, Benet Laboratories, Watervliet, NY, September 1995.
44. Муфтеев В.Г. Моделирование кривых высокого качества на основе метода v-кривых. Прикладная геометрия. Applied Geometry [Электронный ресурс]: науч. журн./ Моск. авиационный ин-т (гос.техн.университет) "МАИ". - Электрон. журн. - Москва : МАИ, 2007. - №19; вып.9, -стр. 25-74. - Режим доступа к журн.: <http://www.mai.ru>. - Загл. с титул. экрана. - №гос.регистрации 019164.
45. Муфтеев В.Г., Романюк А.Н. Геометрически устойчивое моделирование b-сплайновых кривых и поверхностей произвольной степени // Wspolczesne problemy informatyki. Nowe kierunki w badan w informatyce. Pod redakcja Swietlany Lebidewej I Arkadiusza Libera. Seria: monografie I prace naukowe. Wydawnictwo Wyzszej Szkoły Mtnedzarskiej. Legnica 2007. с.209-233.
46. Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве / Пер. с англ. -М.: Мир, 1982. -304 с.

Поступила в редколлегию 10.03.2009