

## ПОШИРЕННЯ ПРУЖНИХ ХВИЛЬ У ОБМЕЖЕНИХ ТІЛАХ ПРИ ДІЇ ЗОСЕРЕДЖЕНИХ СИЛ

Божидарнік В.В., докт. техн. наук, проф., Шиприкевич О.А.,  
аспірант, Максимович О.В., канд. техн. наук, доц.  
Луцький державний технічний університет

**Постановка задачі та огляд літератури.** В задачах сейсмології, в розрахунках на міцність конструкцій виникають проблеми дослідження усталених коливань тіл складної форми. У даній роботі розглядається плоска задача про дослідження напружено-деформованого стану обмежених тіл, що перебувають під дією зосереджених осцилюючих зусиль і навантажень, що прикладені до границі. Для розв'язування задачі використано метод інтегральних рівнянь, що дало можливість розробити ефективний алгоритм дослідження напруженого стану для областей практично довільної форми. Інші підходи до дослідження динамічних задач теорії пружності розглядались в роботах Грінченка, Улітка, Космодем'янського, Савіна, Кубенка.

**Алгоритм розв'язування задачі.** Віднесемо пружне тіло до декартової системи координат, так, що вісь  $Ox_3$  напрямлена вздовж його твірної. Область в перерізі  $x_3=0$  позначимо через  $D$ . Прийmemo, що ця область обмежена контурами  $L_0, L_1, \dots, L_k$ , при чому контур  $L_0$  охоплює решту контурів. Будемо досліджувати гармонічні коливання тіла, які виникають від дії осцилюючих навантажень на границі  $(S_1 e^{i\omega\tau}, S_2 e^{i\omega\tau})$  та масових зосереджених сил  $(X_j e^{i\omega\tau}, Y_j e^{i\omega\tau})$ , які прикладені в точках  $(a_j, b_j)$ ,  $j=1, \dots, J$ . Тут позначено  $\omega$  – частота,  $\tau$  – час.

Для плоского напруженого стану використаємо інтегральне зображення загального розв'язку для переміщень у вигляді [3]:

$$u_j = \int_L p_i U_{ij}^* ds + \int_D F_i U_{ij}^* dD, \quad (1)$$

де  $L = L_0 + L_1 + \dots + L_k$ ;  $U_{ij}^* = \frac{1}{2\pi\rho c_2^2} (\psi\delta_{ij} - \chi r_i r_j)$ ,  $r = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2}$ ;

$r_i = \frac{\partial r}{\partial x_i}$ ;  $p_i$  — невідомі потенціальні функції,  $i, j = 1, 2$ ;  $(F_1, F_2)$  — вектор масових сил; інтегрування по області та вздовж границі проводиться за змінними  $x_1^0, x_2^0$ . Тут

$$\psi = \frac{\pi}{2} Y_0\left(\frac{\omega r}{c_2}\right) + \frac{c_2 \pi}{2 \omega r} \left( Y_1\left(\frac{\omega r}{c_2}\right) - \frac{c_2}{c_1} Y_1\left(\frac{\omega r}{c_1}\right) \right), \quad \chi = \frac{\pi}{2} \left( Y_2\left(\frac{\omega r}{c_2}\right) - \frac{c_2^2}{c_1^2} Y_2\left(\frac{\omega r}{c_1}\right) \right),$$

де  $c_1, c_2$  – поздовжні та поперечні швидкості,  $Y_j(x)$  – функції Бесселя другого роду,  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона. Тут і далі біля переміщень та напружень опущений часовий множник  $e^{i\omega t}$ . Наведені співвідношення справедливі також і для плоского деформованого стану при відповідній заміні величин  $c_1, c_2$  [ ].

Напруження в довільній точці тіла на площинці з нормаллю  $\bar{n}$  знаходиться за формулою [3].

$$2(\sigma_n - i\tau_{sn}) = \frac{2E}{1-\nu} \operatorname{Re} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (u_1 - iu_2) \right) + e^{2i\alpha} \frac{2E}{1+\nu} \left( \frac{\partial}{\partial z} (u_1 - iu_2) \right), \quad (2)$$

де  $\alpha$  – кут між нормаллю до площинки і віссю  $Ox$ .

Підставляючи переміщення (1) у формули (2), отримуємо

$$2(\sigma_n + i\tau_{sn}) = \int_L f_1 q dt + \int_L f_2 \bar{q} dt - i \int_D f_1 F dD + i \int_D f_2 \bar{F} dD, \quad (3)$$

де  $f_1(t, z), f_2(t, z)$  — відомі функції,  $z = x_1 + ix_2, t = x_1^0 + ix_2^0, dz$  — диференціал змінної  $z$  вздовж площинки,  $q = i(p_1 + ip_2) ds/dt$ .

Спрямовуючи точку  $(x_1, x_2)$  до границі тіла, отримуємо інтегральні рівняння для знаходження функції  $q$ :

$$\begin{aligned} \bar{q} + \frac{1}{2\pi i} \frac{1+\nu}{2} \int_L \left( \left( \frac{dz}{d\bar{z}} \frac{\bar{z} - \bar{t}}{z - t} - 1 \right) \frac{1}{z - t} \right) q dt - \frac{1}{2\pi i} \int_L \left( -\frac{1+\nu}{2} \frac{1}{\bar{z} - \bar{t}} + \right. \\ \left. + \frac{dz}{d\bar{z}} \frac{3-\nu}{2} \frac{1}{z - t} \right) \bar{q} d\bar{t} + \int_L G_1(t, z) q dt + \int_L G_2(t, z) \bar{q} d\bar{t} = 2S + \Phi, \end{aligned} \quad (4)$$

де  $S = (S_1 + iS_2)e^{-i\alpha}; \Phi = i \int_D F f_1 dD - i \int_D \bar{F} f_2 dD; G_1(t, z), G_2(t, z)$  — обмежені і

неперервні на граничних контурах функції. Тут використані представлення для функцій Бесселя при малих значеннях аргументу [1] та формули Племелья-Сохоцького для інтегралів типу Коші. В розглянутому нами випадку дії зосереджених сил інтеграли по області записуються в замкненому вигляді

$$\Phi = i \sum_{j=1}^J [(X_j + iY_j) f_1(t_j, z) - (X_j - iY_j) f_2(t_j, z)], \quad t_j = a_j + ib_j.$$



Розглянемо один з граничних контурів, який позначимо через  $\Omega$ . Запишемо його в параметричній формі  $x = \varphi(\theta)$ ;  $y = \psi(\theta)$ ,  $0 < \theta < 2\pi$ . Тоді на границі  $t = \varphi(\theta) + i\psi(\theta) = g(\theta)$ . Для розв'язування інтегрального рівняння (7) застосуємо метод механічних квадратур.

Для інтегралів, які мають особливість типу Коші, використаємо наступні квадратурні формули [2]:

$$\int_{\Omega} \frac{q}{t - z_\nu} dt = h \sum_{n=1}^N q_n \frac{g_n'}{t_n - z_\nu}, \quad t_n = g(\theta_n), \quad g_n' = g'(\theta_n), \quad \theta_n = hn, \quad z_\nu = z(\tilde{\theta}_\nu), \quad \tilde{\theta}_\nu = \theta_\nu + \frac{h}{2}$$

Для решти інтегралів, які мають обмежені підінтегральні функції використаємо квадратурні формули  $\int_{\Omega} qf(t, z) dt = h \sum_{n=1}^N q_n f(z, t_n) g_n'$ , причому тут  $z$  може бути довільним.

Замінивши інтеграли вказаними квадратурними формулами, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду:

$$\bar{q}_\nu + h \sum_{n=1}^N f_{1\nu n} q_n g_n' + h \sum_{n=1}^N f_{2\nu n} \bar{q}_n \bar{g}_n' = 2S_\nu + \Phi_\nu, \quad \nu = 1, \dots, N \quad (5)$$

Після розв'язування системи (5) кільцеві напруження на границі знаходимо на основі співвідношення:

$$2(\sigma_\theta - i\tau_{s\theta}) = \frac{2E}{1-\nu} \operatorname{Re} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (u_1 - iu_2) \right) - e^{2i\alpha} \frac{2E}{1+\nu} \left( \frac{\partial}{\partial z} (u_1 - iu_2) \right).$$

**Тестування алгоритму.** Для тестування розробленого підходу розглянемо задачу про знаходження напружень у тілі кругової форми радіуса  $a$ , до границі якого прикладене нормальне навантаження  $\sigma_0 e^{i\omega t}$ .

Будемо використовувати представлення для переміщень [2]:  
 $u(r, t) = A J_1(\omega r / c_1) e^{-i\omega t}$ . Сталу  $A$  знайдемо з граничної умови  $\sigma_r(r, t)|_{r=a} = -\sigma_0 e^{-i\omega t}$ . Отримаємо

$$\sigma_\theta = -\frac{\sigma_0}{\Delta} \left( \nu J_0(\omega_1 r) \omega_1 + \frac{1-\nu}{r} J_1(\omega_1 r) \right) e^{-i\omega t},$$

де  $\omega_1 = \frac{\omega}{c_1}$ ,  $\Delta = J_0(\omega_1 a) + \frac{\nu-1}{a} J_1(\omega_1 a)$ .

В таблиці 1 наведено значення розрахованих за допомогою розробленого чисельного алгоритму кільцевих напружень  $\tilde{\sigma}_\theta$  на границі тіла при  $a=1$  для низки значень  $\omega$ . Для порівняння в останньому ряд-

ку наведені значення напружень, що відповідають точному розв'язку.

Таблиця 1. Значення кільцевих напружень, що знайдені за точними і наближеними формулами.

$\omega$	0,01	0,1	1	1,5	2	2,5	3	3,5
$\tilde{\sigma}_\theta / \sigma_0$	1,0000	1,0012	1,1558	1,5331	4,6241	-1,0945	-0,1056	0,1590
$\sigma_\theta / \sigma_0$	1,0000	1,0012	1,1558	1,5331	4,6237	-1,0945	-0,1056	0,1589

Як видно з таблиці, похибка становить менше 1%. Зазначимо, як показали числові розрахунки, при малих значеннях  $\omega$  ( $\sim 0,0001$ ) втрачається точність. Це пояснюється тим, що при таких значеннях  $\omega$  напружений стан уже описується рівняннями статичної теорії пружності. Відомо, що для випадку статичної теорії пружності інтегральні рівняння, аналогічні до тих, що використовуються в роботі, мають власні розв'язки. Для того, щоб застосувати числові розв'язки до таких задач, необхідно попередньо модифікувати інтегральні рівняння, як це роблять для плоскої задачі теорії пружності (наприклад, підхід Шермана) [2].

Для тестування алгоритму в більш загальному випадку використовуємо те, що в тілі довільної форми переміщення

$$u_j = \sum_{k=1}^n [X_k U_{1j}^*(x_1 - x_1^k, x_2 - x_2^k) + Y_k U_{2j}^*(x_1 - x_1^k, x_2 - x_2^k)], \quad j = 1, 2, \quad (6)$$

є розв'язком задачі теорії пружності при довільних значеннях сталих  $X_k, Y_k$ , якщо точки  $(x_1^k, x_2^k)$  лежать поза областю, яке займає тіло. Вектор напружень на границі, який відповідає переміщенням (6) визначається за формулою

$$2(\sigma_n - i\tau_{sn}) = -i \sum_{j=1}^J [(X_j + iY_j) f_1(t_j, z) - (X_j - iY_j) f_2(t_j, z)], \quad t_j = x_1^j + ix_2^j \quad (7)$$

Тому для контролю точності розробленого алгоритму розв'яжемо задачу теорії пружності для випадку тіла кругової форми, коли до границі прикладені зусилля (7) при  $X_1 = X_2 = 0, Y_1 = 1, Y_2 = -1; x_1^1 = 0; x_2^1 = 1,5; x_1^2 = 0; x_2^2 = -2,2$ . В таблиці 2 наведено значення кільцевих напружень  $\tilde{\sigma}_\theta$  на границі при різних  $\omega$  і кількості вузлових точок  $n$ , які знайдені з використанням числового алгоритму в деяких точках границі  $M_i$ . Для порівняння тут також наведені напруження  $\sigma_\theta$ , які розраховані на основі точного розв'язку через переміщення (6). Як видно з таблиці, похибка при виборі достатньої кількості вузлових точок може бути зменшена до  $\sim 1\%$ . У випадку наближення точок прикладання сил до границі області, розв'язок описується



швидкозмінними функціями і для досягнення потрібної точності потрібно збільшити кількість розбиттів.

Таблиця 2. Значення кільцевих напружень, що знайдені за точними і наближеними формулами при різній кількості вузлових точок та значень  $\omega$ .

	$\omega=1, N=150$		$\omega=2, N=200$		$\omega=3, N=300$	
	$\tilde{\sigma}_\theta$	$\sigma_\theta$	$\tilde{\sigma}_\theta$	$\sigma_\theta$	$\tilde{\sigma}_\theta$	$\sigma_\theta$
$M_1$	0.1059 + 0.0064i	0.1055 + 0.0064i	0.1382 - 0.0140i	0.1370 - 0.0140i	-0.2606 + 0.0314i	-0.2606 + 0.0314i
$M_2$	-0.0852 + 0.0604i	-0.0856 + 0.0604i	0.1154 + 0.0231i	0.1170 + 0.0231i	0.0818 - 0.0144i	0.0822 - 0.0144i
$M_3$	0.0986 - 0.0223i	0.0976 - 0.0223i	0.0805 - 0.0229i	0.0771 - 0.0229i	0.0152 - 0.0187i	0.0151 - 0.0187i
$M_4$	0.1059 - 0.0064i	0.1055 - 0.0064i	0.1382 + 0.0140i	0.1370 + 0.0140i	-0.2606 - 0.0314i	-0.2606 - 0.0314i

**Дослідження напружень при дії зосереджених сил.** Використаємо розглянутий алгоритм для дослідження напруженого стану тіла, що перебуває під дією пульсуючих сил, які прикладені у точках  $(0, c)$ ,  $(0, -c)$ , що напрямлені вздовж осі  $Ox_2$  і змінюються за законом  $P_{1,2} = P \cos \omega t$ . У цьому випадку вектор масових сил описується формулами  $F_1 = 0$ ;  $F_2 = P\delta(x_1)\delta(x_2 - c) - P\delta(x_1)\delta(x_2 + c)$ . Тоді на основі (6) для даного випадку в інтегральному рівнянні (7) відомі функції, що входять у праву частину будуть

$$\int_D F f_1 dD = Pi \left( \begin{matrix} f_1|_{x_1^0=0} & - f_1|_{x_1^0=0} \\ x_2^0=-c & x_2^0=c \end{matrix} \right); \quad \int_D \bar{F} f_2 dD = -Pi \left( \begin{matrix} f_2|_{x_1^0=0} & - f_2|_{x_1^0=0} \\ x_2^0=-c & x_2^0=c \end{matrix} \right).$$

Числові експерименти показали, що для забезпечення точності порядку 1% необхідно вибирати  $\sim 200$  вузлових точок. На рис.1 наведені результати розрахунків віднесених до  $P$  кільцевих напружень на границі кругової пластинки при різних значеннях кругової частоти  $\omega$ . Аналогічні результати розрахунків для еліптичної пластинки з відношенням півосей 1,5, квадратної пластинки та прямокутної пластинки з відношенням сторін 3,2 наведено відповідно на рис. 2-4.

Як видно із рисунків напруження істотно залежать від частоти коливань прикладених зусиль. При цьому в прямокутних пластинках розподіл напружень має більш складний, що пояснюється відбиванням хвиль від кутових точок на границі.

**Висновок.** У роботі побудовано сингулярні інтегральні рівняння задачі про усталені коливання тіл довільної форми. Проведено розв'язання тестових задач, які вказують на високу точність і ефективність розробленого алгоритму. Напружений стан у тілі, що має фор-

форму круга, і розтягується пульсуючими зосередженими силами в околі прикладання зусиль зростає при збільшенні кругової частоти  $\omega$ .

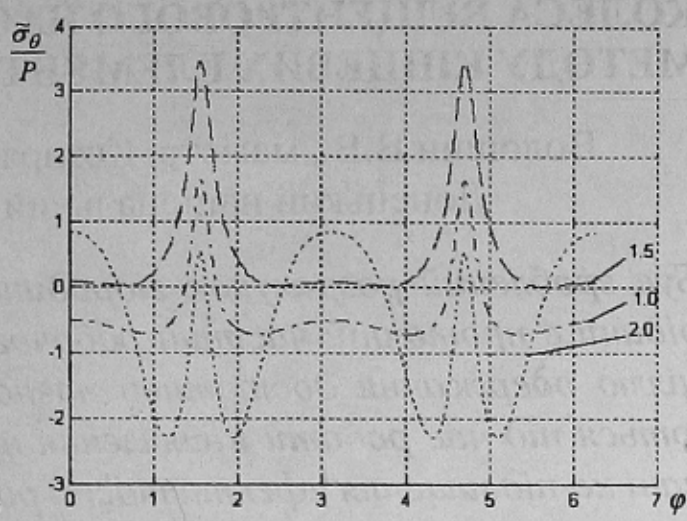
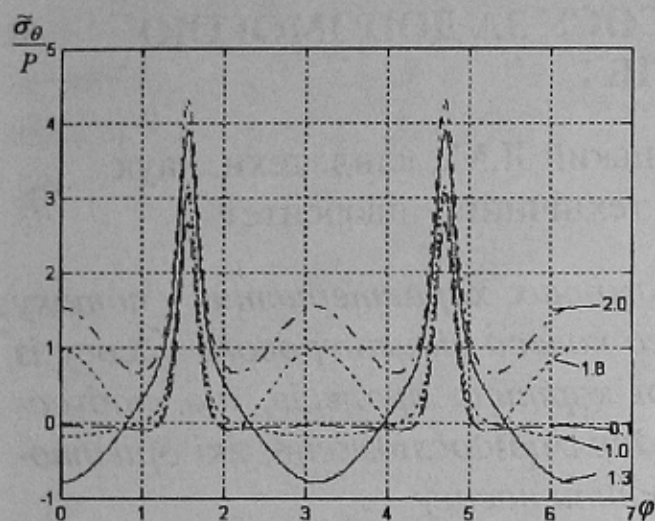


Рис. 1. Напруження на границі кругової пластинки одиничного радіуса, коли сили прикладені в точках  $(0; 0,8)$  та  $(0; -0,8)$ .

Рис. 2. Напруження на границі еліптичної пластинки з півсями  $a=1,5$  та  $b=1$ , сили прикладені в точках  $(0; 0,7)$  та  $(0; -0,7)$ .

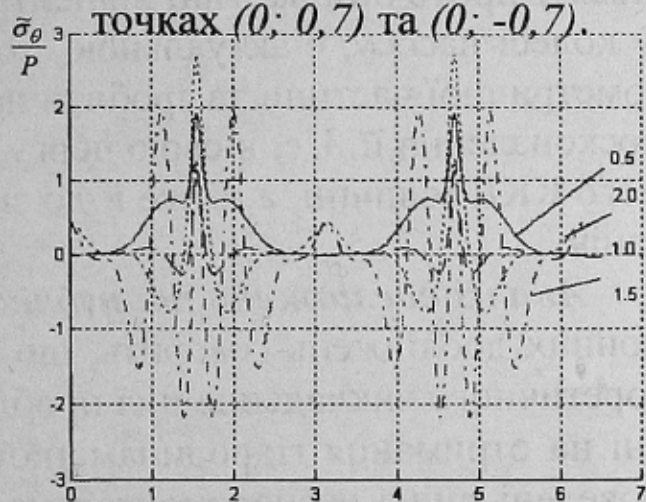
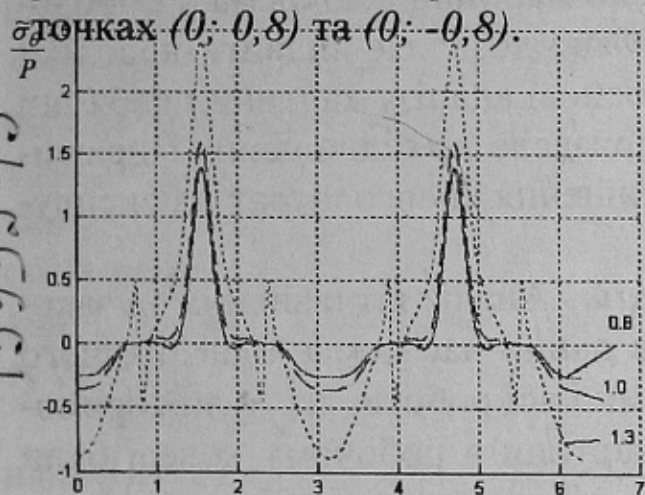


Рис. 3. Напруження на границі квадратної пластинки зі стороною  $a=1$ , сили прикладені в точках  $(0; 0,6)$  та  $(0; -0,6)$ .

Рис. 4. Напруження на границі прямокутної пластинки зі сторонами  $a=3,2$ ,  $b=1$ , сили прикладені в точках  $(0; 0,5)$  та  $(0; -0,5)$ .

Список джерел.

1. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М., 1971. — 428с.
2. Саврук М.П., Осив П.Н., Прокопчук И.В. Численный анализ в плоских задачах теории трещин. — К.: Наук. думка, 1989. — 248 с.
3. Marc Bonnet. Équations intégrales et éléments de frontière. Application en mécanique des solides et des fluides. — Paris, CNRS Éditions/Éditions EYROLLES, 1995. — 316 p.

НАУКОВО-ТЕХНІЧНА  
БІБЛІОТЕКА  
ДОННТУ