УДК 62-83-52

К.Б. КРИКУНОВА, С.С. СТАРОСТІН (канд.техн.наук, доц.)
Донецький національний технічний університет
starostin@mail8.dgtu.donetsk.ua

КОМП'ЮТЕРНА ОПТИМІЗАЦІЯ ЦИФРОВИХ РЕГУЛЯТОРІВ І СПОСТЕРІГАЧІВ СТАНУ ЕЛЕКТРОМЕХАНІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

The paper deals with the questions of computer optimization for digital state space controllers and observers. For the optimization purpose the linear state space transformation is carried out to obtain a cascade structure. Such approach simplifies the parameter determination based on the modulus criterion. The specialties of Matlab program that solves the optimization tasks are considered.

Вступ. У сучасних електромеханічних системах при врахуванні пружності кінематичних зв'язків об'єктів регулювання використовують цифрові регулятори та спостерігачі стану. Визначення їх параметрів можливо на підставі модульного критерію. При цьому необхідні математичні перетворення доцільно виконувати за допомогою комп'ютерних засобів, що суттєво зменшує витрати інтелектуальних ресурсів та мінімізує помилки перетворень.

Аналіз попередніх досліджень. Можливості сучасного комп'ютерного програмного забезпечення щодо здійснення математичних перетворень у символьному вигляді розкрито, наприклад, в [1, 2]. Підходи до використання цих можливостей розглянуто в [3 - 5] та інших публікаціях. В [6] запропоновано методику оптимізації регуляторів і спостерігачів стану електромеханічної системи з пружною кінематикою на підставі лінійної трансформації простору станів і використання модульного критерію. При цьому перевірку методики здійснено за допомогою комп'ютерного пакету Mathcad, без чого реалізація необхідних перетворень була б практично неможливою. Між тим, проведений аналіз засвідчив, що кращі можливості для вирішення подібних задач має пакет Matlab. З урахуванням цього було спрямовано зусилля на розробку відповідної програмної реалізації.

Метою досліджень є аналіз можливостей комп'ютерного пакету Matlab щодо символьних математичних перетворень і створення на цій основі програмної реалізації процесу оптимізації цифрових регуляторів і спостерігачів стану.

Матеріал і результати дослідження. Дискретній системі регулювання у просторі станів у загальному векторно-матричному вигляді відповідає структурна схема, зображена на рис. 1 [7]. Основну частину системи характеризує рівняння:

$$\mathbf{X}(z) = z^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_X)\cdot\mathbf{X}(z)\,; \quad y(z) = \mathbf{C}\,\mathbf{X}(z)\,, \tag{1}$$

де $\mathbf{X}$ – вектор змінних стану системи;
$\mathbf{A}$ – матриця переходу системи;
$\mathbf{B}$ – вектор керування;
$\mathbf{K}_x$ – вектор коефіцієнтів регулювання стану;
$\mathbf{C}$ – вектор виходу;
y – вихідна змінна системи;
z – оператор z-перетворення.

В структурі системи (рис. 1) як **I** позначено одиничну матрицю і враховано, що нерідко частину змінних стану системи неможливо безпосередньо виміряти. Отже, при цьому використовують спостерігач стану, який відтворює динамічні властивості об'єкту регулювання відповідно до рівнянь:

$$\begin{aligned} &\mathbf{X}_c(z) = z^{-1}[\mathbf{A}_c\mathbf{X}_c(z) + \mathbf{B}_c u_S(z) + \mathbf{H}\,\Delta y_c(z)]\,; \\ &\hat{y}_c(z) = \mathbf{C}_c\mathbf{X}_c(z)\,, \end{aligned} \tag{2}$$

де $\mathbf{X}_c$ – вектор змінних спостерігача стану; $\mathbf{C}_c$ і $\mathbf{H}$ – відповідно вектори виходу і корегування спостерігача стану; $\mathbf{A}_c$ – матриця переходу спостерігача; y_c – вихідна змінна спостерігача; Δy_c – похибка спостереження.

У загальному описі спостерігача стану у вигляді рівнянь (2) враховано, що змінні стану $\mathbf{X}_c$ та вихідна змінна спостерігача y_c можуть відрізнятися від змінних, що описують основну частину системи регулювання.

З точки зору отримання бажаних динамічних властивостей регулювання стану системи необхідно визначити відповідні коефіцієнти вектора регулювання $\mathbf{K}_x$ та вектора корегування $\mathbf{H}$. Це може бути здійснено на основі стандартних дискретних поліномів [3, 4]. Іншим підходом є використання модульного критерію [6]. При цьому важливо забезпечити автоматизацію процесу синтезу регуляторів і спостерігачів стану.

Із [6] випливає, що процес синтезу на підставі модульного критерію має ряд етапів. При цьому вихідною інформацією є матриця **A** та вектори **B** і **C**, які характеризують динамічні властивості об'єкту регулювання.

Основою процесу синтезу є лінійна трансформація простору станів у вигляд, що відповідає підпорядкованій структурі з матрицею $\mathbf{A}_\Pi$ та векторами $\mathbf{X}_\Pi$, $\mathbf{B}_\Pi$ і $\mathbf{C}_\Pi$ [6]. При цьому враховуємо умови лінійної трансформації, надані в [7]. У результаті маємо наступні рівняння:

$$\mathbf{X}_\text{п} = \mathbf{T}_\text{X}\mathbf{X}\,; \quad \mathbf{B}_\text{п} = \mathbf{T}_\text{X}\mathbf{B}\,;\ \mathbf{C}_\text{п} = \mathbf{C}\mathbf{T}_\text{X}^{-1}\,;\ \mathbf{A}_\text{п} - \mathbf{B}_\text{п}\mathbf{K}_\text{п} = \mathbf{T}_\text{X}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_\text{X})\cdot\mathbf{T}_\text{X}^{-1}\,, \tag{3}$$

де $\mathbf{T}_\text{X}$ – матриця трансформації простору станів.

Важливо звернути увагу, що

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1\text{N}} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2\text{N}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3\text{N}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\text{N}1} & a_{\text{N}2} & a_{\text{N}3} & \cdots & a_{\text{NN}} \end{bmatrix};\ \mathbf{A}_\text{п} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1\text{N}} \\ 0 & 1 & a_{23} & \cdots & a_{2\text{N}} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & a_{3\text{N}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_\text{п} \end{bmatrix};\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{\text{N}-1} \\ b_\text{N} \end{bmatrix};\ \mathbf{B}_\text{п} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{\text{N}-1} \\ b_\text{п} \end{bmatrix};\ \mathbf{C}^\text{T} = \mathbf{C}_\text{п}^\text{T} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

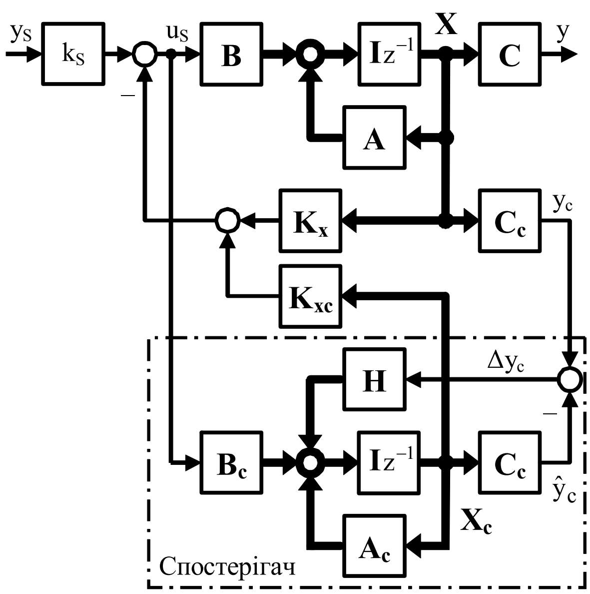

Рисунок 1 - Структурна схема дискретної системи регулювання в просторі стану

Отже, підпорядкованій структурі відповідає матриця $\mathbf{A}_\Pi$, яка є верхньою трикутною матрицею з одиницями у головній діагоналі крім останньої компоненти a_Π. Причому, частина матриці над головною діагоналлю є ідентичною до вихідної матриці **A**. Щодо вектора $\mathbf{B}_\Pi$, то його елементи відповідають елементам вектора **B** за виключенням елемента останньої строки b_Π. І, нарешті, вектори **C** і $\mathbf{C}_\Pi$ мають дорівнювати один одному.

Аналіз свідчить, що зазначені вимоги відносно векторів $\mathbf{B}_\Pi$ і $\mathbf{C}_\Pi$ визначають матрицю трансформації $\mathbf{T}_\text{X}$ як нижню трикутну матрицю з одиницями у головній діагоналі. Тобто,

$$\mathbf{T}_\text{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ T_{12} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ T_{31} & T_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{\text{N}1} & T_{\text{N}2} & T_{\text{N}3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Нижні елементи матриці $\mathbf{T}_\text{X}$ забезпечують виконання умови $(\mathbf{A}_\text{п} - \mathbf{B}_\text{п}\mathbf{K}_\text{п})\,\mathbf{T}_\text{X} = \mathbf{T}_\text{X}(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_\text{X})$, яка випливає з останнього рівняння системи (3). Також матриця $\mathbf{T}_\text{X}$ визначає елементи a_Π і b_Π відповідно матриці $\mathbf{A}_\Pi$ і вектора $\mathbf{B}_\Pi$. У результаті маємо повний опис підпорядкованої структури, на основі чого виконуємо синтез регулятора стану, коефіцієнти якого в кількості ν утворюють вектор $\mathbf{K}_\text{x}$.

При здійсненні синтезу розглядаємо послідовно часткові матриці та вектори підпорядкованої структури, які характеризують вирази:

$$\mathbf{A}_{\text{п}i} = \begin{bmatrix} 1 & a_{\text{N}-i,\text{N}-i+1} & \cdots & a_{\text{N}-i,\text{N}} \\ 0 & 1 & \cdots & a_{\text{N}-i+1,\text{N}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_\text{п} \end{bmatrix};\ \mathbf{B}_{\text{п}i} = \begin{bmatrix} b_{\text{N}-i} \\ b_{\text{N}-i+1} \\ \vdots \\ b_\text{п} \end{bmatrix};\ \mathbf{C}_{\text{п}i}^\text{T} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

де N – розмірність матриць та векторів, що описують систему регулювання; i = 1, 2 … ν;
ν – кількість коефіцієнтів вектора $\mathbf{K}_\text{x}$.

З урахуванням (6) знаходимо передавальні функції

$$\text{W}_i(\text{z}) = \mathbf{C}_{\text{п}i}\left[\text{z}\mathbf{I} - \left(\mathbf{A}_{\text{п}i} - \mathbf{B}_{\text{п}i}\mathbf{K}_{\text{п}i}\right)\right]^{-1}\mathbf{B}_{\text{п}i} = \frac{r_\text{n}\text{z}^\text{n} + r_{\text{n}-1}\text{z}^{\text{n}-1} + \ldots + r_2\text{z}^2 + r_1\text{z} + r_0}{q_\text{m}\text{z}^\text{m} + q_{\text{m}-1}\text{z}^{\text{m}-1} + \ldots + q_2\text{z}^2 + q_1\text{z} + q_0} = \frac{R(\text{z})}{Q(\text{z})}\,, \tag{7}$$

і на основі коефіцієнтів поліномів чисельника та знаменника цих функцій визначаємо рівняння

$$\left(\sum_{j=0}^{n} r_j\right)^2 \cdot \left\{\sum_{g=1}^{m} g^2 \cdot \left[\sum_{h=0}^{m-g}(q_h \cdot q_{h+g})\right]\right\} = \left(\sum_{j=0}^{m} q_j\right)^2 \cdot \left\{\sum_{g=1}^{n} g^2 \cdot \left[\sum_{h=0}^{n-g}(r_h \cdot r_{h+g})\right]\right\}. \quad (8)$$

Такі рівняння відповідають умовам модульного критерію оптимізації [6]. Розв'язання цих рівнянь дає вирази для коефіцієнтів K_i, які утворюють вектор $\mathbf{K}_П$. І, наприкінці, знаходимо елементи вектора $\mathbf{K}_x$ регулятора стану системи згідно з виразом, який отримуємо з урахуванням (3),

$$\mathbf{B}\mathbf{K}_X = \mathbf{A} - \mathbf{T}_X^{-1}(\mathbf{A}_П - \mathbf{B}_П\mathbf{K}_П)\mathbf{T}_X . \quad (9)$$

Таким чином, виходячи з розглянутих теоретичних передумов маємо наступні кроки щодо синтезу регуляторів стану:

1.формування матриці $\mathbf{A}_П$ і вектора $\mathbf{B}_П$ підпорядкованої структури на основі матрично-векторного опису системи регулювання;

2. знаходження матриці трансформації $\mathbf{T}_X$;

3.визначення коефіцієнтів: $a_П$ для матриці $\mathbf{A}_П$ та $b_П$ для вектора $\mathbf{B}_П$;

4. здійснення послідовної оптимізації підпорядкованої структури з урахуванням рівнянь (6) – (8) і знаходження елементів вектора $\mathbf{K}_П$;

5.визначення коефіцієнтів регулятора стану вихідної системи як елементів вектора $\mathbf{K}_x$.

Для перевірки запропонованої методики на попередньому етапі розробок зазначені кроки виконувалися у ручному режимі за допомогою комп'ютерного пакету Mathcad [6]. На даному етапі розроблено програмну реалізацію на базі комп'ютерного пакету Matlab (версії 6.5 і 7.6), яка повністю автоматизує процес синтезу цифрового регулятора стану складної електромеханічної системи на основі її математичного опису як дискретної системи регулювання.

З точки зору реалізації розглянутих теоретичних передумов та сформульованих кроків синтезу регуляторів стану відзначимо низку використаних можливостей пакету Matlab щодо символьних математичних перетворень.

По-перше, формування матриці $\mathbf{A}_П$ здійснюється за допомогою команди **triu(A)**, яка створює верхню трикутну матрицю на основі заданої матриці **A**. На другому кроці матрицю трансформації $\mathbf{T}_X$ дозволяють задати команда **sym(['Tx' Int2Str(i) Int2Str(j)])**, що формує символьну матрицю у загальному вигляді, і команда **tril(Tx)**, яка здійснює перетворення у нижню трикутну матрицю. Знаходження конкретних виразів для елементів матриці $\mathbf{T}_X$ забезпечує поелементне розв'язання рівняння $(\mathbf{A}_П - \mathbf{B}_П\mathbf{K}_П)\mathbf{T}_X = \mathbf{T}_X(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_X)$ за допомогою команди **solve**.

Третім кроком передбачено визначення коефіцієнтів $a_П$ і $b_П$. Це реалізується також шляхом застосування команди **solve** з урахуванням рівняння $\mathbf{A}_П = \mathbf{B}_П\mathbf{K}_П + \mathbf{T}_X(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}_X)\mathbf{T}_X^{-1}$.

Щодо четвертого кроку, то досвід створення програмного забезпечення свідчить, що більш компактно процес оптимізації можна реалізувати за допомогою пакету Matlab 7.6, до засобів символьних перетворень якого додано команду **coeffs**, яка формує вектори коефіцієнтів поліномів. У пакеті Matlab 6.5 процедура визначення коефіцієнтів поліномів потребує багатократного використання декількох команд.

Отже, при передавальній функції W_i, знайденої згідно з виразом (7), в пакеті Matlab 7.6 коефіцієнти поліномів визначає послідовність команд:

- **[R, Q] = numden(W(i))** – визначення поліномів чисельника R та знаменника Q;
- **r = coeffs(R,z)** – формування вектора коефіцієнтів чисельника;
- **q = coeffs(Q,z)** – формування вектора коефіцієнтів знаменника.

З урахуванням векторів коефіцієнтів **r** і **q** далі визначається рівняння оптимізації (8) у відповідності з фрагментом програми, наданої в табл. 1. Розв'язання рівняння дає вираз для відповідного коефіцієнта вектора $\mathbf{K}_П$ підпорядкованої структури.

Зв'язок коефіцієнтів регулятора стану з коефіцієнтами підпорядкованої структури знаходимо, реалізуючи рівняння (9) і приймаючи до уваги елементи вектора керування **B**.

Що стосується визначення елементів вектора корегування спостерігачів стану **H**, то процедура здійснюється аналогічно. Це обумовлено тим, що на основі виразу (2) можна записати наступне рівняння

$$\mathbf{X}_c(z) = z^{-1}[\mathbf{A}_c\mathbf{X}_c(z) + \mathbf{B}_c u_S(z) + \mathbf{H}\Delta y_c(z)] = z^{-1}\{\mathbf{A}_c\mathbf{X}_c(z) + \mathbf{B}_c u_S(z) + \mathbf{H}[y_c(z) - \mathbf{C}_c\mathbf{X}_c(z)]\} . \quad (10)$$

При однакових змінних векторів стану об'єкту і спостерігача маємо вирази:

$$\mathbf{X}(z) = z^{-1}[\mathbf{A}_c\mathbf{X}(z) + \mathbf{B}_c u_S(z)]; \quad y_c(z) = \mathbf{C}_c\mathbf{X}(z) . \quad (11)$$

Із виразів (10) і (11) випливає, що відносно похибки $\Delta\mathbf{X}_C = \mathbf{X} - \mathbf{X}_C$ спостерігач характеризує рівняння

$$\Delta\mathbf{X}_c(z) = z^{-1}[\mathbf{A}_c - \mathbf{H}\mathbf{C}_c] \cdot \Delta\mathbf{X}_c(z) . \quad (12)$$

Таблиця 1 – Фрагмент програми визначення рівняння оптимізації

Формування лівої частини рівняння (8)	Формування правої частини рівняння (8)

m = length(q);
Sq = 0;
for j = 1:m
g = j;
for h = 1:(m-g)
ql = sym(q(h));
qr = sym(q(h+g));
Sq = Sq+(g^2)*ql*qr;
end
end
qs = 0;
for j = 1:m
qs = qs+sym(q(j));
end
qs = qs^2;
	n = length(r);
	Sr = 0;
	for j = 1:n
	g = j;
	for h = 1:(n-g)
	rl = sym(r(h));
	rr = sym(r(h+g));
	Sr = Sr+(g^2)*rl*rr;
	end
	end
	rs = 0;
	for j=1:n
	rs = rs+sym(r(j));
	end
	rs = rs^2;

Рівняння оптимізації cc = rs*Sq-qs*Sr;	

Із [7] відомо, що для характеристичного полінома спостерігача, який визначає його динамічні властивості є справедливим перетворення

$$P_c(z) = \det[z\mathbf{I} - \mathbf{A}_c + \mathbf{H}\mathbf{C}_c] = \det[z\mathbf{I} - \mathbf{A}_c^T + \mathbf{C}_c^T\mathbf{H}^T] \ . \tag{13}$$

Між тим, характеристичний поліном системи регулювання стану відповідає рівнянню

$$P_x(z) = \det[z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}_x] \ . \tag{14}$$

Отже, із зіставлення $\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}_c^T$, $\mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{C}_c^T$, $\mathbf{K}_x \leftrightarrow \mathbf{H}^T$ випливає можливість безпосереднього використання розглянутої методики комп'ютерної оптимізації для визначення елементів матриці корегування **H**.

Перевірка функціонування розробленого програмного забезпечення дала результати, які повністю збіглися з отриманими раніше результатами, наданими в [6].

Висновки. Таким чином, розроблено варіант програмної реалізації визначення параметрів цифрових регуляторів і спостерігачів стану на основі модульного критерію з використанням пакету Matlab. У результаті автоматизовано процес оптимізації систем регулювання, спрямованої на отримання бажаних динамічних характеристик електромеханічних систем.

Результати досліджень дають підстави для практичного використання виконаних розробок.

Список літератури

1. Дьяконов В.П. Справочник по MathCAD PLUS 7.0 PRO / Дьяконов В.П. – Москва: СК Пресс, 1998. – 352 с.

Дьяконов В.П. MATLAB 6/6.1/6.5 + Simulink 4/5. Основы применения / Дьяконов В.П. – Москва: СОЛОН-Пресс, 2004. – 768 с.

2. Толочко О.И. Параметрический синтез цифровой системы модального управления двухмассовым электромеханическим объектом / Толочко О.И., Коцегуб П.Х., Федоряк Р.В. - Харків: // Вісник НТУ "Харківський політехн. ін-т". Тем. Випуск №10. - Т. 1. – 2003. - С. 97-100.

3. Толочко О.И. Формирование стандартных дискретных полиномов / Толочко О.И. - Кременчук: // Вісник Кременчуцького держ. політехн. ун-ту. - №2(19). - Т. 1. – 2003. - С.30-33.

4. Старостин С.С. Оптимизация систем регулирования электропривода с помощью программного пакета Mathcad / Старостин С.С. - Харків: ХГПУ // Сб. науч. трудов конференции: Проблемы автоматизированного электропривода. Теория и практика. - 1998. - С. 99 - 102.

5. Старостін С.С. Оптимізація дискретних регуляторів та спостерігачів стану електромеханічних об'єктів / Старостін С.С. - Київ: // Електромашинобудування та електрообладнання. - 2004. - Вип.63. - С.17 - 25.

6. Изерман Р. Цифровые системы управления / Изерман Р. - Москва: Мир, 1984. - 541 с.

Надійшла до редколегії 15.05.2009 *Рецензент: О.І. Толочко*

К.Б. КРИКУНОВА, С.С. СТАРОСТИН
Донецкий национальный технический университет

Компьютерная оптимизация цифровых регуляторов наблюдателей состояния электромеханических объектов. Статья посвящена вопросам компьютерной оптимизации цифровых регуляторов и наблюдателей состояния. Для целей оптимизации выполняется линейная трансформация пространства состояний для получения каскадной структуры. Такой подход упрощает определение параметров на основе модульного критерия. Рассмотрены особенности программы на языке Matlab, которая решает оптимизационную задачу.

Пространство состояний, оптимизация, каскадная структура, модульный критерий

К.Б. КРИКУНОВА, С.С. СТАРОСТІН
Донецький національний технічний університет

Комп’ютерна оптимізація цифрових регуляторів і спостерігачів стану електромеханічних об’єктів. Статтю присвячено питанням комп’ютерної оптимізації цифрових регуляторів і спостерігачів стану. Для цілій оптимізації виконується лінійна трансформація простору станів для отримання каскадної структури. Такий підхід спрощує визначення параметрів на основі модульного критерію. Розглянуто особливості програми мовою Matlab, яка вирішує оптимізаційну задачу.

Простір станів, оптимізація, каскадна структура, модульний критерій