

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ СО СЛОЖНОЙ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ В ФОРМЕ ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ

Хоменко В.Н., Борисенко В.Ф.

Донецкий национальный технический университет

slava.khomenko@gmail.com

Диагностирование неисправностей электромеханических систем на базе моделей является подходом, который позволяет определить наличие неисправности и указать на их месторасположение [1]. Тем не менее, при этом возникают затруднения с построением моделей, которые, в связи с особенностями указанной методики диагностирования, должны описывать объект как можно точнее в установившихся и переходных режимах. В рамках этой статьи мы ограничимся построением моделей многомассовых сложных электромеханических систем с учетом упруго-вязких свойств механических связей. Необходимость в рассмотрении влияния типовых видов соединений на получаемую модель обусловлена стремлением создать универсальную математическую модель сложной электромеханической системы для любой степени её детализации.

Такой подход предусматривает представление структуры математической модели механической части системы в виде конечного числа сосредоточенных элементов, каждый из которых обладает своим моментом инерции. Ранее [2] нами было предложено в качестве элементарного блока принять двухмассовую расчетную схему с упругой связью между смежными массами. Изменяя количество таких блоков, то есть число масс системы, мы можем с разной степенью точности приближаться к детальному описанию объекта диагностирования.

Во время анализа систем с упругими связями принимаем следующие допущения [3]:

- 1) силы и моменты, которые действуют в системе, прикладываются к сосредоточенным массам;
- 2) упругие звенья невесомы;
- 3) коэффициенты упругости и вязкого трения являются неизменными величинами;
- 4) пренебрегаем волновым характером распространения деформаций в упругих связях.

Представление математических моделей электромеханических систем с упругими связями в виде матриц пространства состояний позволяет составить универсальную модель для заданного числа масс  $n$  системы, а также является удобной формой в случае синтеза наблюдателей состояния.

Построим математическую модель  $n$ -массовой неразветвленной электромеханической системы в виде матриц пространства состояний. Выбираем порядок следования переменных состояния  $\mathbf{x}$ , входных воздействий  $\mathbf{u}$  и выходов системы  $\mathbf{y}$  таким образом, как показано ниже на рис. 1 и в уравнениях (1).

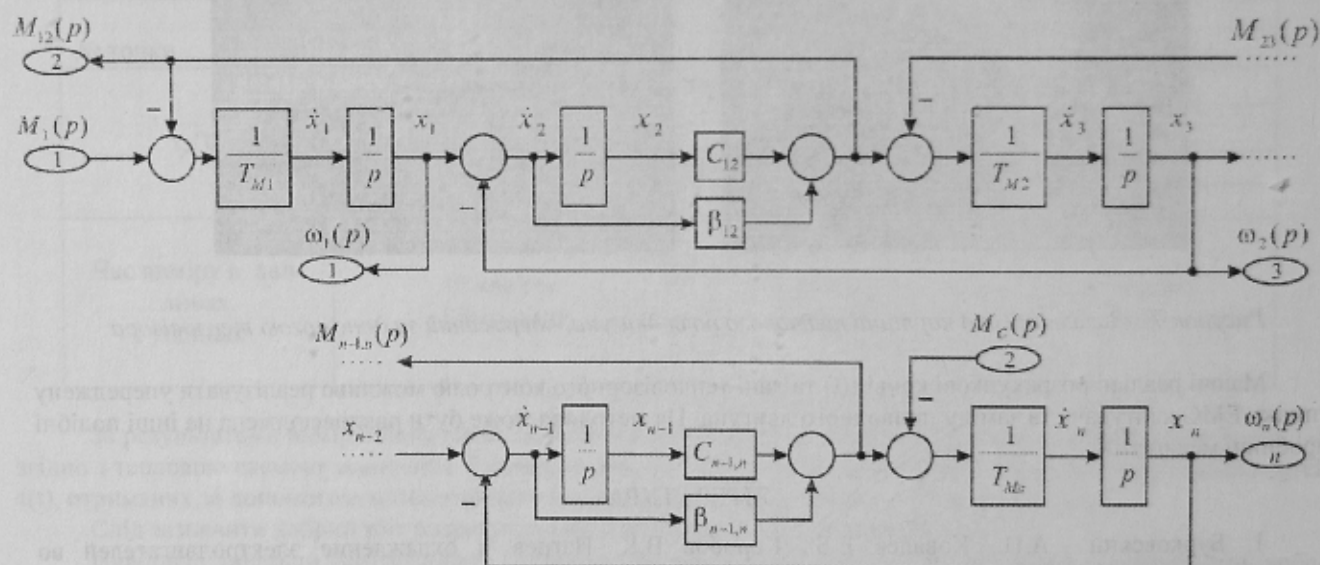


Рисунок 1 – Детализированная структурная схема  $n$ -массовой неразветвленной электромеханической системы

$$\begin{cases} \mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ \dots \ x_{n-2} \ x_{n-1} \ x_n]^T; \\ \mathbf{y} = [\omega_1 \ M_{12} \ \omega_2 \ \omega_3 \ M_{34} \ \omega_4 \ \dots \ \omega_{n-1} \ M_{n-1,n} \ \omega_n]^T; \\ \mathbf{u} = [M_1 \ M_C]^T. \end{cases} \quad (1)$$

В соответствии с приведенной детализированной схемой (рис. 1) и векторами (1), составим матрицы состояния математической модели системы (2).

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \frac{\beta_{12}}{T_{M1}} & -\frac{c_{12}}{T_{M1}} & \frac{\beta_{12}}{T_{M1}} & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_{12}}{T_{M2}} & \frac{c_{12}}{T_{M2}} & -\frac{\beta_{12} + \beta_{23}}{T_{M2}} & -\frac{c_{23}}{T_{M2}} & \frac{\beta_{23}}{T_{M2}} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta_{23}}{T_{M3}} & \frac{c_{23}}{T_{M3}} & -\frac{\beta_{23} + \beta_{34}}{T_{M3}} & & 0 & 0 & 0 \\ & & \dots & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & \frac{\beta_{n-2,n-1} + \beta_{n-1,n}}{T_{Mn-1}} & -\frac{c_{n-1,n}}{T_{Mn-1}} & \frac{\beta_{n-1,n}}{T_{Mn-1}} \\ & & & & & & 1 & 0 & -1 \\ & & & & & & \frac{\beta_{n-1,n}}{T_{Mn}} & \frac{c_{n-1,n}}{T_{Mn}} & -\frac{\beta_{n-1,n}}{T_{Mn}} \end{bmatrix}; \\
 \mathbf{C} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{12} & c_{12} & -\beta_{12} & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{23} & c_{23} & -\beta_{23} & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ & & \dots & & & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{n-1,n} & c_{n-1,n} & -\beta_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \\
 \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\frac{1}{T_{Mn}} \\ \frac{1}{T_{M1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T; \\
 \mathbf{D} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Как видно из уравнения (2), при таком выборе порядка следования переменных состояния, как указано в выражении (1), в матрице **A**, относительно главной диагонали, наблюдается симметрия. Аналогично и для матрицы **C**. Это позволяет составить простой алгоритм формирования математической модели неразветвленной *n*-массовой электромеханической системы. В частности, представляет интерес его реализация в пакете MATLAB для получения ответа в общем, символьном виде:

```

function [A, B, C, D] = n_mass_ems_sym(n_mass, TM, Cij, Bij)
syms A B C D
cols_matr=2*n_mass-1;
A=sym(zeros(cols_matr,cols_matr));
C=A;B=sym(zeros(cols_matr,2));D=B;
A(1,1)=-Bij(1)/TM(1);A(end,end)=-Bij(end)/TM(end);
for i=3:2:(cols_matr-2), k=(i-1)/2; A(i,i)=- (Bij(k) + Bij(k+1))/TM(k+1); end
for i=2:2:cols_matr,
    A(i,i-1)=1; A(i,i+1)=-1; A(i-1,i)=-Cij(i/2)/TM(i/2);
    A(i+1,i)=Cij(i/2)/TM(i/2+1); A(i-1,i+1)=Bij(i/2)/TM(i/2);
    A(i+1,i-1)=Bij(i/2)/TM(i/2+1);
end
B(1,1)=1/TM(1);B(end,end)=-1/TM(end);
for i=1:2:cols_matr, C(i,i)=1; end
for i=2:2:cols_matr, C(i,i)=Cij(i/2); C(i,i-1)=Bij(i/2);C(i,i+1)=-Bij(i/2); end

```

Входными параметрами функции «n\_mass\_ems\_syt» формирования матриц А, В, С, D является количество масс в системе n\_mass и три вектора: механических постоянных времени ТМ, коэффициентов упругости Сij между смежными массами системы и коэффициентов вязкого трения Вij.

Переход к рассмотрению электромеханических систем, имеющих разветвленную структуру, осуществим через модели типовых блоков разветвлений (рис. 2, а – разветвление первого рода и рис. 2, б – разветвление второго рода).

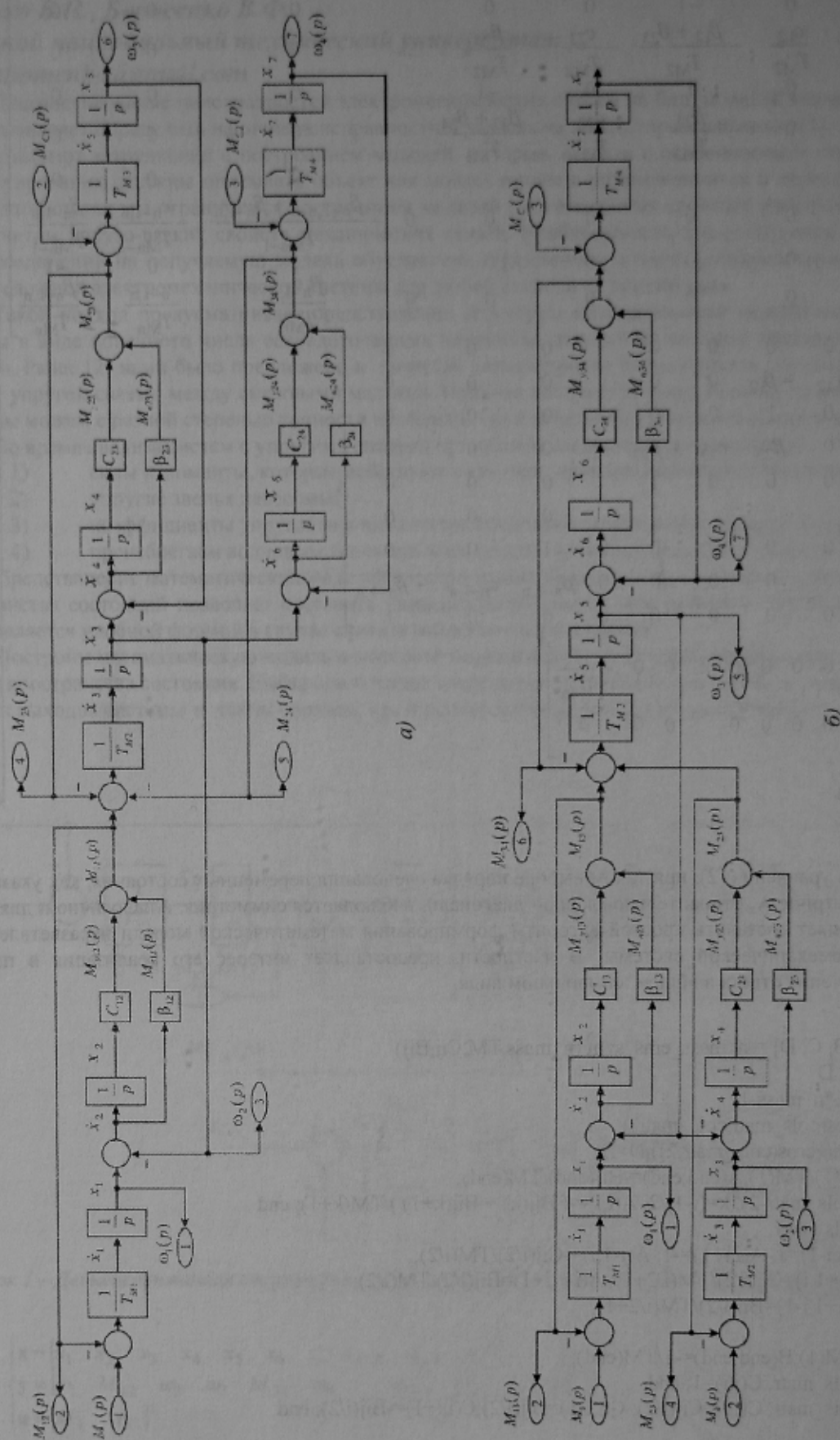


Рисунок 2 – Детализированные структурные схемы разветлений первого (а) и второго (б) рода



Выберем следующий порядок следования величин для структуры разветвления первого рода:

$$\begin{cases} \mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7]^T; \\ \mathbf{y} = [\omega_1 \ M_{12} \ \omega_2 \ M_{23} \ M_{24} \ \omega_3 \ \omega_4]^T; \\ \mathbf{u} = [M_1 \ M_{C1} \ M_{C2}]^T, \end{cases} \quad (3)$$

и для разветвления второго рода:

$$\begin{cases} \mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7]^T; \\ \mathbf{y} = [\omega_1 \ M_{13} \ \omega_2 \ M_{23} \ \omega_3 \ M_{34} \ \omega_4]^T; \\ \mathbf{u} = [M_1 \ M_2 \ M_C]^T. \end{cases} \quad (4)$$

Тогда, уравнения пространства состояния для этих структур будут иметь вид, соответственно (5) и (6).

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{(2n-1) \times (2n-1)} &= \begin{bmatrix} \frac{\beta_{12}}{T_{M1}} & -\frac{c_{12}}{T_{M1}} & \frac{\beta_{12}}{T_{M1}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_{12}}{T_{M2}} & \frac{c_{12}}{T_{M2}} & -\frac{\beta_{12} + \beta_{23} + \beta_{24}}{T_{M2}} & -\frac{c_{23}}{T_{M2}} & \frac{\beta_{23}}{T_{M2}} & -\frac{c_{24}}{T_{M2}} & \frac{\beta_{24}}{T_{M2}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta_{23}}{T_{M3}} & \frac{c_{23}}{T_{M3}} & -\frac{\beta_{23}}{T_{M3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{\beta_{24}}{T_{M4}} & 0 & 0 & \frac{c_{24}}{T_{M4}} & -\frac{\beta_{24}}{T_{M4}} \end{bmatrix}; \\ \mathbf{C}_{(2n-1) \times (2n-1)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{12} & c_{12} & -\beta_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{23} & c_{23} & -\beta_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{24} & 0 & 0 & c_{24} & -\beta_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_{(2n-1) \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{T_{M1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_{M3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{T_{M4}} \end{bmatrix}; \\ \mathbf{D}_{(2n-1) \times 3} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5)$$

Из строения матрицы  $\mathbf{A}$  в уравнениях (5) видно, что существует возможность получить уравнения, описывающие узел ветвления первого рода, в общем виде, для заданного количества ответвлений. Структура этой матрицы отличается от приведенной ранее для линейной системы (1) тем, что в местах разветвления на значение переменной состояния  $x_r$  ( $r$  - номер переменной состояния в месте ветвления) оказывают влияние все другие переменные состояния, имеющие с её производной непосредственную связь (то есть они не отделены интеграторами). Для подобного месторасположения  $x_r$  в схеме это соответствует расстоянию в две переменных состояния, если двигаться в одну или другую сторону от интегратора, на выходе которого получаем  $x_r$ . В рассматриваемом случае (рис. 2, а)  $r=3$ , на производную  $\dot{x}_3$  оказывают прямое влияние все переменные состояния, что приводит к появлению в  $r^{\text{й}}$  (третьей) строке матрицы  $\mathbf{A}$  дополнительных элементов с множителями, знаменатель которых равен  $T_{M(r-1)}$ . Элементы  $r^{\text{ой}}$  столбца отображают влияние переменной состояния  $x_r$  на отходящие от неё ответвления. Подобные зависимости можно увидеть и в матрице  $\mathbf{A}$  для разветвления второго рода, уравнения (5). В этом случае  $r=5$ . Все ветви, входящие в сумматор, расположенный перед про-

изводной переменной состояния  $\dot{x}_5$ , оказывают на неё влияние. Что, в свою очередь, влияет также и на вид матрицы **C**, так как она отображает взаимосвязь между переменными состояния и выходами системы. Матрица **B** содержит элементы, соответствующие местам приложения к системе внешних воздействий – движущих моментов и моментов сопротивления. Матрица **D** в рассматриваемых случаях всегда нулевая, так как отсутствует прямое влияние входов системы (в нашем случае – моменты) на выходы (частоты вращения).

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_{(2n-1) \times (2n-1)} &= \begin{bmatrix} \frac{\beta_{13}}{T_{M1}} & -\frac{c_{13}}{T_{M1}} & 0 & 0 & \frac{\beta_{13}}{T_{M1}} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\beta_{23}}{T_{M2}} & -\frac{c_{23}}{T_{M2}} & \frac{\beta_{23}}{T_{M2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_{13}}{T_{M3}} & \frac{c_{13}}{T_{M3}} & \frac{\beta_{23}}{T_{M3}} & \frac{c_{23}}{T_{M3}} & -\beta_{13} + \beta_{23} + \beta_{34} & -\frac{c_{34}}{T_{M3}} & \frac{\beta_{34}}{T_{M3}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_{34}}{T_{M4}} & \frac{c_{34}}{T_{M4}} & -\frac{\beta_{34}}{T_{M4}} \end{bmatrix}; \\
 \mathbf{C}_{(2n-1) \times (2n-1)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_{13} & c_{13} & 0 & 0 & -\beta_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{23} & c_{23} & -\beta_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{34} & c_{34} & -\beta_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B}_{(2n-1) \times 3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_{M1}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{T_{M2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_{M4}} \end{bmatrix}; \\
 \mathbf{D}_{(2n-1) \times 3} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{6}$$

На основании приведенных матриц пространства состояния для блоков разветвленной и неразветвленной частей системы, имеется возможность построения моделей систем со сложной структурой, которые должны более точно описывать поведение реальной электромеханической системы.

Для их практического применения в системах диагностирования далее необходимо будет составить алгоритм формирования модели по заданной топологии соединений в системе, при любом количестве структурных блоков и характере их взаимосвязи. Аналогичным образом должны быть описаны остальные элементы, из которых состоит объект диагностирования, то есть питающая сеть и электромеханический преобразователь.

Приведенные математические модели электромеханических систем позволяют изменять не только свои параметры, но и структуру, что является необходимым в задачах диагностирования на базе моделей неисправностей для точного выявления месторасположения дефектов. В этом случае целесообразно пользоваться описанием объекта в виде матриц пространства состояния. Для приближения модели к реальным условиям, в неё необходимо добавить воздействия, вызванные дополнительными неисправностями и возмущающие воздействия в виде помех.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Lopez-Valeria C.G. Diagnostique distribué à base de modèles. 7ème Congrès des Doctorants de l'Ecole Doctorale Systèmes LAAS. – Toulouse, 2006. – 6 p. ([http://www.laas.fr/EDSYS/contents/congres/2006/communications/edsys2006\\_41.pdf](http://www.laas.fr/EDSYS/contents/congres/2006/communications/edsys2006_41.pdf))
2. Особенности оценки технического состояния электромеханической системы. Электромеханические системы транспортирующих механизмов / Под общ. ред. В.Ф. Борисенко. – Донецк: «Вебер» (Донецкое отделение), 2007. – 332 с., с. 15 – 73
3. Борпов Ю.А., Соколовский Г.Г. Автоматизированный электропривод с упругими связями. – 2-е изд., перераб. и доп. – СПб.: Энергоатомиздат. Санкт-Петербург. отд-ние, 1992. – 288 с.: ил.
4. Логов А.Б., Замараев Р.Ю. Математические модели диагностики уникальных объектов. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. – 228 с.