

УДК 519.6

Каноническая форма блочных многошаговых методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

Фельдман Л.П.

Донецкий национальный технический университет
feldman@r5.dgtu.donetsk.ua

Abstract

Feldman L.P. Canonical form of the block multistep methods of solution Cauchy's problem for ordinary differential equations. The article contains generalization of results of researches [1-8], devoted the parallel methods of numerical decision the Cauchy's problem for the systems of ordinary differential equations and is continuation of the works before published an author [9-15]. In it classification of block difference methods is offered for the decision of the system of ODE, a proof of stability for parallel block methods is adduced.

Вступ

Статья содержит обобщение результатов исследований [1-8], посвященных параллельным методам численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений и является продолжением ранее опубликованных автором работ [9-15]. В ней предлагается классификация блочных разностных методов для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассматриваются алгоритмы получения, и проводится анализ устойчивых блочных разностных методов различных видов, что представляет обобщение ранее опубликованных результатов. Приведен пример решения блочным разностным методом и даны практические рекомендации их использования для более широкого набора параллельных разностных схем.

1. Каноническая форма блочных разностных уравнений

Уравнения многошаговых разностных методов для блока из k точек при использовании вычисленных значений приближенного решения в m предшествующих блоку узлах для решения задачи Коши

$$x' = f(t, x), x(t_0) = x_0$$

имеют вид [12]:

$$\frac{1}{\tau} \sum_{j=1-m}^k a_{i,j} u_{n,j} = \sum_{j=1-m}^k b_{i,j} f_{n,j}, i = \overline{1, k}, n = 1, 2. \quad (1)$$

Формулы (1) определяют m -шаговый k -точечный разностный метод. В нем множество точек $T_n^{(k)} = \{t_{n,1}, t_{n,2}, \dots, t_{n,k}\}$, в которых по формулам (1) определяются приближенные значения решения. Множество

$T_{n-1}^{(m)} = \{t_{n,1-m}, t_{n,2-m}, \dots, t_{n,0}\}$, содержит точки, приближенное значение решения в которых, было вычислено на предыдущем этапе. Обозначим матрицы коэффициентов:

$$A = (a_{i,j}),$$

$$B = (b_{i,j}), i = \overline{1, k}, j = \overline{-(m-1), k}.$$

Разобьем каждую из матриц на две части

$$A_1 = (a_{i,j}),$$

$$B_1 = (b_{i,j}), i = \overline{1, k}, j = \overline{-(m-1), 0},$$

$$A_2 = (a_{i,j}), B_2 = (b_{i,j}), i = \overline{1, k}, j = \overline{1, k}$$

Введем соответствующие им вектора

$$U_n = (u_{n,j}), j = \overline{1-m, 0}, V_{n+1} = (u_{n+1,j}),$$

$$n = 1, 2, \dots, j = \overline{1, k}.$$

$$F_n = (f_{n,j}), j = \overline{1-m, 0}, F_{n+1} = (f_{n+1,j}), j = \overline{1, k}.$$

В векторной форме уравнение (1) будет иметь вид:

$$A_1 U_n + A_2 V_{n+1} = \tau (B_1 F_n + B_2 F_{n+1}) \quad (2)$$

Чтобы система однородных разностных уравнений, соответствующая (2) была линейно независима, потребуем, чтобы матрица

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \dots & a_{k,k} \end{pmatrix}$$

была невырожденной, и разрешим систему относительно V_{n+1} :

$$V_{n+1} = S U_n + \tau (\Phi F_n + \Psi F_{n+1}), \quad (3)$$

где

$$S = -A_2^{-1} A_1, \Phi = A_2^{-1} B_1,$$

$$\Psi = A_2^{-1} B_2$$

Задав стартовые значения, полученные, например, с помощью явных формул Рунге – Кутты

$$U_0 = (u_{0,j}, j = \overline{0, m-1})$$

Необходимо на каждом последующем этапе решить нелинейное уравнение (3), определив последовательно вектора V_1, V_2, \dots .

Представление общих блочных разностных многошаговых многоточечных уравнений в виде (3) будем называть *канонической формой* их записи. Получим коэффициенты уравнений, позволяющие представлять общие многошаговые многоточечные методы (1) в канонической форме (3). Каждое i -ое разностное уравнение (4)

$$u_{n,i} = \sum_{j=l-m}^0 s_{i,j} u_{n,j} + \tau \left(\sum_{j=l-m}^0 \varphi_{i,j} f_{n,j} + \sum_{j=1}^k \psi_{i,j} f_{n,j} \right), i = \overline{1, k}. \quad (4)$$

содержит $2m+k$ неизвестных коэффициентов $s_{i,j}, \varphi_{i,j}, j = \overline{l-m, 0}, \psi_{i,j}, j = \overline{1, k}$. Для их определения следует использовать $2m+k$ уравнений условий аппроксимации.

Выражения для невязок на решении $x(t)$ исходного дифференциального уравнения имеют вид:

$$r_{n,i} = \frac{1}{\tau} (-x_{n,i} + \sum_{j=l-m}^0 s_{i,j} x_{n,j}) + \sum_{j=l-m}^0 \varphi_{i,j} x'_{n,j} + \sum_{j=1}^k \psi_{i,j} x'_{n,j}, i = \overline{1, k}, \quad (5)$$

где

$$x_{n,j} = x(t_n + j\tau), x_{n-l,m} = x_{n,0}, x'_{n,j} = x'(t_n + j\tau) = f(t_n + j\tau, x_{n,j}), x'_{n-l,m} = x'_{n,0}.$$

Для i -го уравнения потребуем его аппроксимации в точке $t_{n,0}$:

$$x_{n,j} = x(t_{n,0} + j\tau), x'_{n,j} = x'(t_{n,0} + j\tau) = f(t_{n,0} + j\tau, x_{n,j}).$$

Разлагая $x(t_{n,0} \pm j\tau)$ и $x'(t_{n,0} \pm j\tau)$ в ряды Тейлора в окрестности точки $t_{n,0}$, получим

$$x_{n,j} = x_{n,0} + \sum_{q=1}^p \frac{(j\tau)^q}{q!} x^{(q)}_{n,0},$$

$$x'_{n,j} = x^{(1)}_{n,0} + \sum_{q=2}^p \frac{(j\tau)^{q-1}}{(q-1)!} x^{(q)}_{n,0} + O(\tau^p),$$

$$j = \overline{l-m, k}.$$

Подставляя эти разложения в выражение (5), будем иметь:

$$r_{n,i} = \frac{1}{\tau} [x_{n,0}(-l + \sum_{j=l-m}^0 s_{i,j}) + (-i\tau)^q / q! + \sum_{j=l-m}^0 s_{i,j} \sum_{q=1}^p \frac{(j\tau)^q}{q!} x^{(q)}_{n,0} + \dots] + x^{(1)}_{n,0} [\sum_{j=l-m}^0 \varphi_{i,j} + \sum_{j=1}^k \psi_{i,j}] + \sum_{j=l-m}^0 \varphi_{i,j} \sum_{q=2}^p \frac{(j\tau)^{q-1}}{(q-1)!} x^{(q)}_{n,0} + \sum_{j=1}^k b_{i,j} \sum_{q=2}^p \frac{(j\tau)^{q-1}}{(q-1)!} x^{(q)}_{n,0} + \dots, i = \overline{1, k}.$$

Сгруппируем члены с одинаковыми степенями τ , тогда получим (6):

$$r_{n,i} = \frac{x_{n,0}}{\tau} (-l + \sum_{j=l-m}^0 s_{i,j}) + x^{(1)}_{n,0} [-i + \sum_{j=l-m}^0 j s_{i,j} + \varphi_{i,j}] + \sum_{j=1}^k \psi_{i,j} + \sum_{q=2}^p \frac{\tau^{q-1}}{(q-1)!} [\sum_{j=l-m}^0 [s_{i,j} \frac{j^q}{q} + \varphi_{i,j} j^{q-1}] + \sum_{j=1}^k \psi_{i,j} j^{q-1}] x^{(q)}_{n,i-1}, i = \overline{1, k}. \quad (6)$$

Приравняв нулю, коэффициенты при τ^q в разложении получим систему уравнений:

$$\sum_{j=l-m}^0 s_{i,j} = l; \sum_{j=l-m}^0 [j s_{i,j} + \varphi_{i,j}] + \sum_{j=1}^k \psi_{i,j} = i, \sum_{j=l-m}^0 \frac{s_{i,j} j^l}{l} + \sum_{l=l-m}^0 \varphi_{i,j} j^{l-1} + \sum_{l=1}^k \psi_{i,j} j^{l-1} = \frac{i^l}{l}, l = \overline{2, p}, i = \overline{1, k}. \quad (7)$$

Поскольку каждое i -тое разностное уравнение (4) содержит $2m+k$ неизвестных коэффициентов, отсюда следует, что максимальный порядок аппроксимации рассматриваемого m -шагового k -точечного разностного метода равен:

$$p = 2m + k. \quad (8)$$

Каноническая форма одношаговых многоточечных уравнений будет иметь соответственно вид:

$$u_{n,i} = u_{n,0} + \tau(\varphi_{i,0}f_{n,0} + \sum_{j=1}^k \psi_{i,j}f_{n,j}), i = \overline{1, k}. \quad (9)$$

Получим, например, уравнения двухшагового двухточечного блочного метода пятого порядка аппроксимации вида (4), как решение системы (7). Формирование системы уравнений коэффициентов (7) для двухшагового двухточечного блочного метода пятого порядка аппроксимации выполним в пакете *Mathematica*. Тогда, соответствующие матрицы разностных уравнений имеют вид:

$$S = \left\{ \left\{ \frac{11}{19}, \frac{18}{19} \right\}, \left\{ \frac{-8}{19}, \frac{27}{19} \right\} \right\},$$

$$\Phi = \left\{ \left\{ \frac{10}{57}, 1 \right\}, \left\{ \frac{-3}{19}, 0 \right\} \right\},$$

$$\Psi = \left\{ \left\{ \frac{8}{19}, \frac{-1}{57} \right\}, \left\{ \frac{27}{19}, \frac{6}{19} \right\} \right\}. \quad (10)$$

Запишем разностные уравнения:

$$u_{n,1} = \frac{11}{19}u_{n,-1} + \frac{8}{19}u_{n,0} + \tau\left(\frac{10}{57}f_{n,-1} + f_{n,0} + \frac{8}{19}f_{n,1} - \frac{1}{57}f_{n,2}\right),$$

$$u_{n,2} = -\frac{8}{19}u_{n,-1} + \frac{27}{19}u_{n,0} + \tau\left(-\frac{3}{19}f_{n,-1} + \frac{27}{19}f_{n,1} + \frac{6}{19}f_{n,2}\right). \quad (11)$$

Приведем, полученные аналогично, матрицы коэффициентов трехшагового двухточечного блочного метода седьмого порядка аппроксимации:

$$S_{32} = \begin{pmatrix} 55 & 27 & 135 \\ 136 & 17 & 136 \\ -27 & -64 & 108 \\ 17 & 17 & 17 \end{pmatrix}, \Phi_{32} = \begin{pmatrix} 141 & 207 & 297 \\ 1360 & 170 & 170 \\ -36 & -336 & -216 \\ 85 & 85 & 85 \end{pmatrix},$$

$$\Psi_{32} = \begin{pmatrix} 57 & 9 \\ 170 & 1360 \\ -216 & 144 \\ 85 & 85 \end{pmatrix} \quad (12)$$

и трехшагового четырехточечного блочного метода восьмого порядка аппроксимации:

$$S_{34} = \begin{pmatrix} 0 & 0.109838 & 0.890162 \\ 0 & 0.0458453 & 0.954155 \\ 0 & 0.12894 & 0.87106 \\ 0 & -0.122254 & 1.1225 \end{pmatrix}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0.00291353 & 0 & 0.59491 \\ 0.000668577 & 0 & 0.433238 \\ 0.87106 & 0 & 0.00396371 \\ -0.00672114 & 0 & 0.0891436 \end{pmatrix}$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} 0.590583 & -0.0986987 & 0.0227953 & -0.00266591 \\ 1.227889 & 0.403152 & -0.0206304 & 0.00152818 \\ 0.936772 & 1.19011 & 0.391977 & -0.0123687 \\ 1.62439 & 0.391595 & 1.47724 & 0.302098 \end{pmatrix} \quad (13)$$

2. Устойчивость канонических блочных многошаговых методов

Для проверки устойчивости многошаговых блочных методов однородное уравнение, соответствующее (3), преобразуют к эквивалентной системе [14]:

$$W_{n+1} = \tilde{S} \cdot W_n, n = 0, 1, 2, \dots \quad (14)$$

где для $m > k$:

$$W_n = \{u_{n,1-m}, u_{n,2-m}, \dots, u_n\},$$

$$W_{n+1} = \{u_{n,k-m+1}, u_{n,k-m+2}, \dots, u_{n,k}\}.$$

$$W_0 = U_0 = \{u_{0,1}, u_{0,2}, \dots, u_{0,m}\}$$

с матрицей перехода \tilde{S}_m . В случае $m \leq k$, в векторной записи (14) следует положить:

$$W_n = \{u_{n,1-k}, u_{n,2-k}, \dots, u_{n,0}\},$$

$$W_{n+1} = \{u_{n,1}, u_{n,2}, \dots, u_{n,k}\}. \quad (15)$$

$$W_0 = U_0 = \{0, \dots, 0, u_{0,1}, \dots, u_{0,m}\}$$

с матрицей перехода \tilde{S}_k [15].

$$\tilde{S}_m = \begin{bmatrix} 0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots, 0 \\ 0, 0, \dots, 0, 0, 1, 0, \dots, 0 \\ \dots \\ 0, 0, \dots, 0, 0, 0, \dots, 1 \\ s_{1,1} \ s_{1,2} \ \dots \ s_{1,m} \\ \dots \\ s_{k,1} \ s_{k,2} \ \dots \ s_{k,m} \end{bmatrix}, m > k$$

$$\tilde{S}_k = \begin{bmatrix} 0, 0, \dots, 0, s_{1,1-m}, s_{1,2-m}, \dots, s_{1,0} \\ 0, 0, \dots, 0, s_{2,1-m}, s_{2,2-m}, \dots, s_{2,0} \\ \dots \\ 0, 0, \dots, 0, s_{i,1-m}, s_{i,2-m}, \dots, s_{i,0} \\ \dots \\ 0, 0, \dots, 0, s_{k,1-m}, s_{k,2-m}, \dots, s_{k,0} \end{bmatrix}, m \leq k \quad (16)$$

В матрице \tilde{S}_m , размерности $m \times m$, последние k строк совпадают с матрицей S . Для случая $m \leq k$, в матрице \tilde{S}_k размерности $k \times k$, элементы первых m столбцов равны нулю, а последние $m - k$ совпадают с матрицей S . Оказывается что, также как и в случае многошаговых разностных методов,

рассмотренных в [1,3,4,5], устойчивость или неустойчивость уравнения (12) по начальным данным определяется расположением корней характеристического уравнения матрицы \tilde{S} .

Будем считать, что условие корней выполнено для матрицы \tilde{S} , если все корни ее характеристического уравнения лежат внутри или на границе единичного круга, причем на границе круга нет кратных корней.

Блочный разностный метод, удовлетворяющий условию корней, называют устойчивым. Приведем матрицу перехода \tilde{S}_{32} для разностного блочного трехшагового двухточечного метода наивысшего (седьмого) порядка аппроксимации (12):

$$\tilde{S}_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 55 & 27 & -135 \\ \frac{-27}{17} & \frac{-64}{17} & \frac{108}{17} \\ \frac{-27}{17} & \frac{-64}{17} & \frac{108}{17} \end{pmatrix}.$$

Нормальная жорданова форма этой матрицы

равна:
$$\begin{pmatrix} 1. & 0. & 0. \\ 0. & 0.147189 & 0. \\ 0. & 0. & 6.79399 \end{pmatrix}$$

Корни характеристического уравнения матрицы \tilde{S}_{32} равны $q_1=1, q_2=0.47189, q_3=6.79399$.

Последний корень больше 1, поэтому рассмотренный разностный неустойчив. Оказывается, как и в случае обычных многошаговых методов, блочные методы наивысшего порядка аппроксимации практически непригодны для расчетов, так как они неустойчивы.

Приведем разностные уравнения устойчивого трехшагового двухточечного метода пятого порядка аппроксимации:

$$\{u_{n,1}, u_{n,2}\} = \left(\frac{37u_{n,-1}}{173} + \frac{136u_{n,0}}{173} \right) + \left(\frac{u_{n,-2}}{29} + \frac{28u_{n,0}}{29} \right) + \left(\frac{5F_{n,-2}}{87} + \frac{133F_{n,0}}{87} \right) + \left(\frac{238F_{n,1}}{29} - \frac{4F_{n,2}}{87} \right)$$

и соответствующую им матрицу перехода и ее нормальную жорданову форму:

$$\tilde{S}_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{37}{173} & \frac{136}{173} \\ \frac{1}{29} & 0 & \frac{28}{29} \end{pmatrix},$$

$$JordanMatrix[\tilde{S}_{32}] = \begin{pmatrix} 0.0344828 & 0. & 0. \\ 0. & 0.213873 & 0. \\ 0. & 0. & 1. \end{pmatrix}.$$

Корни характеристического уравнения матрицы \tilde{S}_{32} равны $q_1=-0.0344, q_2=0.2138, q_3=1$. Отсюда следует устойчивость метода.

Аналогично можно получить разностные уравнения устойчивых методов и более высоких порядков аппроксимации. Приведем матрицы коэффициентов разностных уравнений устойчивого трехшагового четырехточечного метода седьмого порядка аппроксимации:

$$S_{34} = \begin{pmatrix} 0 & 0.109838 & 0.890162 \\ 0 & 0.0458453 & 0.954155 \\ 0 & 0.12894 & 0.87106 \\ 0 & -0.122254 & 1.12225 \end{pmatrix}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0.00291353 & 0 & 0.59491 \\ 0.000668577 & 0 & 0.433238 \\ 0.87106 & 0 & 0.00396371 \\ -0.00672114 & 0 & 0.0891436 \end{pmatrix}$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} 0.590583 & -0.0986987 & 0.0227953 & -0.00266591 \\ 1.22789 & 0.403152 & -0.0206304 & 0.00152818 \\ 0.936772 & 1.19011 & 0.391977 & -0.0123687 \\ 1.62439 & 0.391595 & 1.47724 & 0.302098 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0.109838 & 0.890162 \\ 0 & 0.0458453 & 0.954155 \\ 0 & 0.12894 & 0.87106 \\ 0 & -0.122254 & 1.12225 \end{pmatrix}$$

Жорданова нормальная форма матрицы \tilde{S} имеет вид:

$$JordanMatrix[\tilde{S}] = \begin{pmatrix} 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0.251194 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 1. \end{pmatrix}$$

Корни характеристического уравнения матрицы \tilde{S} равны $q_1=q_2=0, q_3=0.251194, q_4=1$.

3. Канонические коллокационные схемы многошаговых блочных методов

Рассмотрим частный вид многошаговых канонических $m > 1, k = 1, 2, \dots$ блочных методов, определяемых следующей формулой:

$$u_{n,i} = u_{n,0} + \tau \left(\sum_{j=1-m}^0 \varphi_{i,j} f_{n,j} + \sum_{j=1}^k \psi_{i,j} f_{n+1,j} \right). \quad (17)$$

Очевидно, что эти методы устойчивы по начальным данным и максимальный порядок их аппроксимации, в соответствии с (8), равен $p = m + k$ [10-12].

Определить коэффициенты разностных коллокационных уравнений можно по формулам (5), используя их для частного случая формул вида (17) при

$$s_{i,0}=1, s_{i,j} = 0, i = \overline{1,k}, j = \overline{1-m,-1}.$$

Коэффициенты формул (17) можно также получить интегро-интерполяционным методом [16]. Построим интерполяционный многочлен $L_{m+k-1}(t)$ с узлами интерполяции $t_{n,j-m}$ и соответствующим им значениям правой части уравнения (1) $f_{n,j-m} = f(t_{n,j-m}, u_{n,j-m})$, $j = \overline{1,m+k}$. Проинтегрировав его в пределах $(t_{n,0}, t_{n,i})$, $i = \overline{1,k}$:

$$u_{n,i} = u_{n,0} + \int_{t_{n,0}}^{t_{n,i}} L_{m+k-1}(t) dt,$$

получим уравнения (17) для выбранных m и k . Построим, например, интерполяционный многочлен $L_3(t)$ с узлами интерполяции:

$$t_{n,j-m}, m = 2, k = 3, j = \overline{1-m,k}.$$

Получим следующие формулы:

$$\begin{aligned} u_{n,1} &= u_{n,0} + \frac{1}{720} \tau (-19F_{n,-1} + \\ &+ 346F_{n,0} + 456F_{n,1} - 74F_{n,2} + 11F_{n,3}) \\ u_{n,2} &= u_{n,0} + \frac{1}{90} \tau (F_{n,-1} - 34F_{n,0} + \\ &+ 114F_{n,1} - 34F_{n,2} + F_{n,3}) \\ u_{n,3} &= u_{n,0} - \frac{3}{80} \tau (F_{n,-1} - 14F_{n,0} - \\ &- 24F_{n,1} - 34F_{n,2} - 9F_{n,3}) \end{aligned}$$

Получены формулы двухшагового трехточечного блочного метода, как частный случай метода (5) для формул (17).

Рассмотрим общий вид многошаговых канонических $m > 1, k = 1, 2, \dots$ блочных методов, определяемых следующей формулой:

$$V_{n+1} = S U_n + \tau (\Phi F_n + \Psi F_{n+1}).$$

Они также могут быть получены как коллокационные схемы, если использовать интерполяционный многочлен Эрмита. Построим

интерполяционный многочлен $H_{2m+k-1}(t)$ с узлами интерполяции $t_{n,j}, j = \overline{1-m,k}$, соответствующими им значениями $u_{n,j}, j = \overline{1-m,k}$ и правой части уравнения (1) $f_{n,j} = f(t_{n,j}, u_{n,j}), j = \overline{1-m,0}$.

Искомый многочлен можно представить в виде:

$$\begin{aligned} H_{2m+k-1}(t) &= \\ &= L_{m+k-1}(t) + P_{m-1}(t) \Pi_{m+k}(t), \end{aligned} \quad (18)$$

где $L_{m+k-1}(t)$ - интерполяционный многочлен, построенный по данным $(t_{n,j}, u_{n,j}), j = \overline{1-m,k}$.

$$\Pi_{m+k}(t) = \prod_{j=1-m}^k (t - t_j), P_{m-1}(t) -$$

некоторый пока неизвестный многочлен степени $m-1$. Для построения многочлена $P_{m-1}(t)$ будем использовать условие, что производная в узлах интерполяции функции равна $H'_{2m+k-1}(t_j) = f_{n,j}, j = \overline{1-m,0}$.

Продифференцируем равенство (18), получим:

$$\begin{aligned} H'_{2m+k-1}(t) &= \\ &= L'_{m+k-1}(t) + P'_{m-1}(t) \Pi_{m+k}(t) + \\ &+ P_{m-1}(t) \Pi'_{m+k}(t) \end{aligned} \quad (19)$$

Поскольку

$$\Pi_{m+k}(t_j) = 0, j = \overline{1-m,k},$$

$$H'_{2m+k-1}(t_j) = f_{n,j}, j = \overline{1-m,0}$$

можно записать:

$$\begin{aligned} H'_{2m+k-1}(t_{n,j}) &= \\ &= L'_{m+k-1}(t_{n,j}) + P_{m-1}(t_{n,j}) \Pi'_{m+k}(t_{n,j}) = f_{n,j}, \\ &j = \overline{1-m,0}. \end{aligned}$$

Отсюда выражаем значения многочлена:

$$\begin{aligned} P_{m-1}(t_{n,j}), j = \overline{1-m,0} \\ P_{m-1}(t_{n,j}) = \frac{f_{n,j} - L'_{m-1}(t_{n,j})}{\Pi'_{m+k}(t_{n,j})}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$j = \overline{1-m,0}.$$

Правая часть последнего равенства может быть вычислена. Таким образом, многочлен $P_{m-1}(t)$ может быть определен однозначно обычной лагранжевой аппроксимацией. Затем по формуле (18) определяется искомый многочлен Эрмита. Разностные уравнения получим, если положим:

$$f_{n,j} = H'_{2m+k-1}(t_{n,j}), L'_{m+k-1}(t_{n,j}) +$$

$$+ P_{m-1}(t_{n,j})P'_{m+k}(t_{n,j}) = f_{n,j}, j = \overline{1, k}. \quad (21)$$

Получим коллокационные разностные формулы для двухшагового двухточечного метода. Многочлен Эрмита по значениям функции $u_{n,j}, j = \overline{-1, 2}$ и производной $f_{n,j}, j = \overline{-1, 0}$ будем искать в виде (18). Введем таблицу $u_{n,j}, j = \overline{-1, 2}$ получим интерполяционный многочлен $L_{m+k-1}(t)$ и $P_{m+k}(t)$. Найдем выражения для производных функций, входящих в формулу (20), вычислим значение многочлена:

$$P_{m-1}(t_{n,j}) = \frac{f_{n,j} - L'_{m-1}(t_{n,j})}{P'_{m+k}(t_{n,j})}, j = \overline{1-m, 0},$$

составим таблицу его значений в выбранных точках. Затем найдем многочлен Лагранжа по таблице и получим разностные уравнения по (19).

$$\begin{aligned} \{ \{ u[1] \rightarrow \frac{1}{57}(57\tau f[to] + 10\tau f[to - \tau] + \\ + 24\tau f[to + \tau] - 7f[to + 2\tau] + 33u[-1] + 24u[0]) \} \} \\ \{ \{ u[2] \rightarrow \frac{1}{19}(-3\tau f[to - \tau] + 27\tau f[to + \tau] + \\ + 6\tau f[to + 2\tau] - 8u[-1] + 27u[0]) \} \}. \end{aligned}$$

Приведенные уравнения совпали с уравнениями (11) полученными выше по общим формулам для канонических уравнений.

4. Многошаговые блочные методы Биккарта

Блочные методы дифференцирования, являются частным случаем общих многошаговых методов (1). Их также можно рассматривать как обобщение соответствующих последовательных методов ФДН Гира. Эти методы предложены Биккартом и рассмотрены в статье [1]. Уравнения многошаговых разностных методов типа Биккарта для блока из k точек при использовании вычисленных значений приближенного решения в m предшествующих блоку узлах, можно записать в виде:

$$\frac{1}{\tau} \sum_{j=1-m}^k a_{i,j} u_{n,j} = f_{n,i}, i = \overline{1, k}, i = \overline{1, k}, n = \overline{1, 2}, \dots \quad (22)$$

Определить коэффициенты разностных уравнений (22) можно, используя формулы (7) для общих многошаговых блочных методов учитывая их частный вид, или интегро-интерполяционным методом. Для этого построим интерполяционный многочлен $L_{m+k-1}(t)$ с узлами интерполяции $t_{n,j-m}$ и соответствующим им значениям сеточной функции $u_{n,j}, j = \overline{1-m, k}$. Найдем

производные полученного интерполяционного многочлена в узлах сетки $t_{n,i}, i = \overline{1, k}$, приравняв их соответствующим значениям правой части дифференциального уравнения, получим разностные уравнения для блока. Наивысший порядок аппроксимации многошаговых разностных методов дифференцирования, рассматриваемых как частный вид общих многошаговых методов, равен $O(\tau^{m+k-1})$.

Получим некоторые из блочных методов дифференцирования интегро-интерполяционным методом в пакете *Mathematica*.

Приведем несколько блочных формул дифференцирования:

1) двухшаговый двухточечный

$$\begin{aligned} \frac{u_{n,-1} - 6u_{n,0} + 3u_{n,1} + 2u_{n,2}}{6\tau} = F_{n,1} \\ - \frac{2u_{n,-1} + 9u_{n,0} - 18u_{n,1} + 2u_{n,2}}{6\tau} = F_{n,2} \end{aligned}$$

2) двухшаговый четырехточечный

$$\begin{aligned} \frac{3u_{n,-1} - 30u_{n,0} - 20u_{n,1} + 60u_{n,2} - 15u_{n,3} + 2u_{n,4}}{60\tau} = F_{n,1} \\ - \frac{2u_{n,-1} + 15u_{n,0} - 60u_{n,1} + 20u_{n,2} + 30u_{n,3} - 3u_{n,4}}{60\tau} = F_{n,2} \\ \frac{3u_{n,-1} - 20u_{n,0} + 60u_{n,1} - 120u_{n,2} + 65u_{n,3} + 12u_{n,4}}{60\tau} = F_{n,3} \\ - \frac{12u_{n,-1} + 75u_{n,0} - 200u_{n,1} + 300u_{n,2} - 300u_{n,3} + 137u_{n,4}}{60\tau} = F_{n,4} \end{aligned}$$

Двухшаговый четырехточечный метод устойчив по начальным условиям. Для проверки получают матрицу перехода и находят ее собственные значения.

Многошаговые блочные методы Биккарта записанные в виде (22) не являются каноническими. Однако эти методы могут быть преобразованы в каноническую форму. Рассматривая устойчивость двухшагового четырехточечного метода Биккарта, получают матрицу перехода S . Чтобы перейти к канонической форме этого уравнения осталось вычислить матрицы Φ, Ψ .

Каноническая форма уравнений двухшагового четырехточечного метода имеет вид:

$$\begin{pmatrix} v_{n,1} \\ v_{n,2} \\ v_{n,3} \\ v_{n,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{251}{1901} v_{n,-1} + \frac{2152}{1901} v_{n,0} \\ -\frac{232}{1901} v_{n,-1} + \frac{2133}{1901} v_{n,0} \\ -\frac{243}{1901} v_{n,-1} + \frac{2144}{1901} v_{n,0} \\ -\frac{224}{1901} v_{n,-1} + \frac{2125}{1901} v_{n,0} \end{pmatrix} +$$

$$+ \tau \begin{pmatrix} -\frac{8018F_{n,1}}{5703} + \frac{1609F_{n,2}}{1901} - \frac{724F_{n,3}}{1901} + \frac{413F_{n,4}}{5703} \\ -\frac{3513F_{n,1}}{1901} + \frac{336F_{n,2}}{1901} - \frac{495F_{n,3}}{1901} + \frac{102F_{n,4}}{1901} \\ -\frac{3360F_{n,1}}{1901} - \frac{828F_{n,2}}{1901} - \frac{1428F_{n,3}}{1901} + \frac{156F_{n,4}}{1901} \\ -\frac{10700F_{n,1}}{5703} - \frac{200F_{n,2}}{1901} - \frac{3100F_{n,3}}{1901} - \frac{1540F_{n,4}}{5703} \end{pmatrix}$$

4. Канонические коллокационные схемы одношаговых блочных методов

Одношаговые многоточечные блочные методы (23):

$$u_{n,i} = u_{n,0} + \tau(\varphi_{i,0}f_{n,0} + \sum_{j=1}^k \psi_{i,j}f_{n,j}),$$

$$i = \overline{1, k}, n = \overline{1, N}. \quad (23)$$

являются частным видом коллокационных многшаговых многоточечных блочных методов. Поэтому их анализ можно выполнить, используя соответствующие результаты, полученные для этих методов. Определить коэффициенты формул (23) можно по формулам (17) или интегро-интерполяционным методом так же, как это было сделано выше для коллокационных методов. Построим

интерполяционный многочлен $L_k(t)$ с узлами интерполяции $t_{n,i}, i = \overline{0, 1, \dots, k}$, и соответствующим им значениям правой части уравнения (23). Проинтегрировав его в пределах $(t_n, t_n + i\tau)$,

$$i = \overline{1, k}, u_{n,i} = u_{n,0} + \int_{t_n}^{t_n+i\tau} L_k(t) dt, \quad (24)$$

получим соответствующие формулы.

Построим интерполяционный многочлен $L_2(t)$ с узлами интерполяции $t_{n,i}, i = \overline{0, 1, \dots, k}$ и соответствующим им значениям правой части уравнения $F_{n,i} = f(t_{n,i}, u_{n,i})$. Проинтегрируем его в соответствующих пределах, используя программу *Mathematica*, получим формулы одношагового четырехточечного блочного метода.

$$u_{n,1} = u_{n,0} + \frac{1}{720} \tau(251F_{n,0} + 646F_{n,1} - 264F_{n,2} + 106F_{n,3} - 19F_{n,4})$$

$$u_{n,2} = u_{n,0} + \frac{1}{90} \tau(29F_{n,0} + 124F_{n,1} + 24F_{n,2} + 4F_{n,3} - F_{n,4})$$

$$u_{n,3} = u_{n,0} + \frac{3}{80} \tau(9F_{n,0} + 34F_{n,1} + 24F_{n,2} + 14F_{n,3} - F_{n,4})$$

$$u_{n,4} = u_{n,0} + \frac{3}{45} \tau(7F_{n,0} + 32F_{n,1} + 12F_{n,2} + 32F_{n,3} + 7F_{n,4})$$

Рассмотрим частный случай одношаговых многоточечных методов для случая, когда вектор коэффициентов разностных уравнений (23) равен нулю, т.е. $\overline{\varphi}_0 = (\varphi_{i,0}) = 0, i = \overline{1, 2, \dots, k}$.

$$u_{n,i} = u_{n,0} + \tau \sum_{j=1}^k \psi_{i,j} f_{n,j}$$

$$i = \overline{1, k}, n = \overline{1, N}. \quad (25)$$

Поскольку эти методы являются частным случаем одношаговых методов, то формулы для них можно получить по программе *InterpolEinschrit*, положив в ней $j=1$. Приведем формулы для одношагового чисто неявного трехточечного метода.

$$u_{n,1} = u_{n,0} + \frac{1}{12} \tau(23F_{n,1} - 16F_{n,2} + 5F_{n,3})$$

$$u_{n,2} = u_{n,0} + \frac{1}{3} \tau(7F_{n,1} - 2F_{n,2} + F_{n,3})$$

$$u_{n,3} = u_{n,0} + \frac{3}{4} \tau(3F_{n,1} + F_{n,3}) \quad (25^*)$$

6. Алгоритм решения разностных канонических коллокационных одношаговых блочных уравнений методом Ньютона

Для приближенного решения системы нелинейных уравнений (23) с неизвестными в фиксированном блоке n :

$$u_{n,i} = u_{n,0} + \tau(\varphi_{i,0}f_{n,0} + \sum_{j=1}^k \psi_{i,j}f_{n,j}).$$

$$i = \overline{1, k}, n = \overline{1, N}.$$

определим начальные приближения для неизвестных по формуле Эйлера:

$$u_{n,i}^{(0)} = u_{n,0} + \tau f_{n,0}, i = \overline{1, k}, n = \overline{1, 2, \dots, N}.$$

Предположим теперь, что найдены на шаге s приближенные значения решения уравнений $u_{n,i}^{(s)}, i = \overline{1, k}$. Найдем поправки $\varepsilon_{n,i}^{(s)}$, уточняющие полученные приближенные значения, т.е. следующие приближенные значения будут равны:

$$u_{n,i}^{(s+1)} = u_{n,i}^{(s)} + \varepsilon_{n,i}^{(s)}, i = \overline{1, k}. \quad (26)$$

После подстановки (26) в (7.3) и, ограничиваясь линейными членами разложений в ряды по приращениям $\varepsilon_{n,i}^{(s)}$, получим:

$$u_{n,i}^{(s)} + \varepsilon_{n,i}^{(s)} =$$

$$= u_{n,0} + \tau \varphi_{i,0} f_{n,0} + \tau \sum_{j=1}^k \psi_{i,j} f_{n,j}^{(s)} +$$

$$+ \tau \sum_{j=1}^k \psi_{i,j} \varepsilon_{n,j}^{(s)} \frac{\partial f_{n,j}^{(s)}}{\partial u_{n,j}}, \quad i = \overline{1, k},$$

где $f_{n,j}^{(s)} = f(t_{n,j}, u_{n,j}^{(s)})$, $\frac{\partial f_{n,j}^{(s)}}{\partial u_{n,j}} = \frac{\partial f(t_{n,j}, u_{n,j}^{(s)})}{\partial u_{n,j}}$.

Таким образом, для определения поправок $\varepsilon_{n,i}^{(s)}$ получена следующая система линейных алгебраических уравнений.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n,i}^{(s)} - \tau \sum_{j=1}^k \psi_{i,j} \varepsilon_{n,j}^{(s)} \frac{\partial f_{n,j}^{(s)}}{\partial u_{n,j}} = \\ = u_{n,0} + \tau f_{n,0} \varphi_{i,0} + \tau \sum_{j=1}^k \psi_{i,j} f_{n,j}^{(s)} - u_{n,i}^{(s)}, \\ i = \overline{1, k}. \end{aligned}$$

Запишем последнее уравнений в матричной форме:

$$(E - \tau \Psi \partial F_n^{(s)}) \varepsilon_n^{(s)} = u_{n,0} e + \tau (f_{n,0} \Phi_0 + \Psi F_n^{(s)}) - U_n^{(s)}, \quad (27)$$

здесь введены обозначения:

$U_n^{(s)} = \{u_{n,i}, i = \overline{1, k}\}$, $F_n^{(s)}$ - вектор столбец с компонентами $f(t_{n,i}, u_{n,i}^{(s)})$, $i = \overline{1, k}$, $\partial F_n^{(s)}$ - диагональная матрица с элементами: $\frac{\partial f_{n,i}^{(s)}}{\partial u_{n,i}}$, $i = \overline{1, k}$, $\Phi_0 = \{\varphi_{i,0}, i = \overline{1, k}\}$, $\varepsilon_n = \{\varepsilon_{n,i}, i = \overline{1, k}\}$.

Приведем результаты решение задачи Коши:

$$x' = -10(t-1)x, \quad x(0) = 1, \quad (28)$$

методом Ньютона. Решение системы уравнений соответствующей (27) выполнялось в системе *Mathematica* с использованием обратной матрицы.

$$\begin{aligned} \varepsilon_n^{(s)} = (E - \tau \Psi \partial F_n^{(s)})^{-1} (u_{n,0} e + \\ + \tau (f_{n,0} \Phi_0 + \Psi F_n^{(s)}) - U_n^{(s)}), \end{aligned}$$

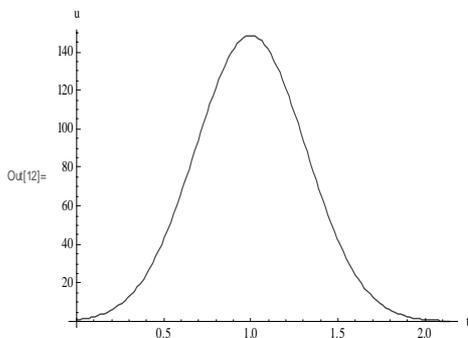


Рисунок 1 - График приближенного решения уравнения (28) с использованием метода Ньютона

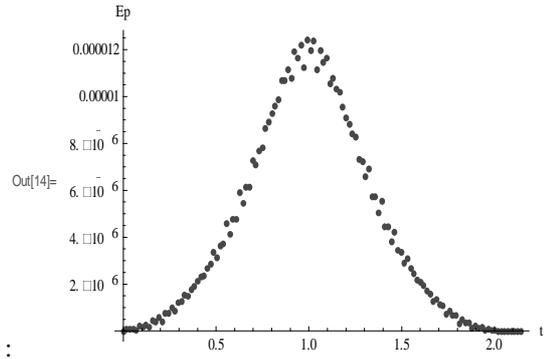


Рисунок 2 - График погрешностей приближенного решения уравнения (28) с использованием метода Ньютона

Полученная ошибка решения методом Ньютона на порядок меньше погрешности итерационного решения этой же задачи при выполнении шести итераций для каждого блока. В методе Ньютона для каждого блока выполнялась одна итерация.

7. Одношаговые блочные коллокационные методы Биккарта

Блочные методы дифференцирования, являются частным случаем общих многошаговых методов Биккарта:

$$\frac{1}{\tau} \sum_{j=0}^k a_{i,j} u_{n,j} = f_{n,i}, \quad i = \overline{1, k}, \quad (29)$$

Их можно получить интегро-интерполяционным методом так же, как это было сделано выше в п.5 для многошаговых методов Биккарта (22). Для этого надо лишь изменить соответственно таблицу интерполирования. Приведем некоторые из них. Разностные уравнения одношагового трехточечного метода Биккарта имеют вид:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1} + u_{n+2} - \frac{1}{6}u_{n+3} = \mathcal{F}_{n+1}, \\ \frac{1}{6}u_n - u_{n+1} + \frac{1}{2}u_{n+2} + \frac{1}{3}u_{n+3} = \mathcal{F}_{n+2}, \\ -\frac{1}{3}u_n + \frac{3}{2}u_{n+1} - 3u_{n+2} + \frac{11}{6}u_{n+3} = \mathcal{F}_{n+3} \end{aligned} \quad (30)$$

Приведем разностные уравнения одношагового четырехточечного блочного метода Биккарта:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}u_{n,0} - \frac{5}{6}u_{n,1} + \frac{3}{2}u_{n,2} - \frac{1}{2}u_{n,3} + \frac{1}{12}u_{n,4} = \mathcal{F}_{n,1}, \\ \frac{1}{12}u_{n,0} - \frac{2}{3}u_{n,1} + \frac{2}{3}u_{n,3} - \frac{1}{12}u_{n,4} = \mathcal{F}_{n,2}, \\ \frac{1}{12}u_{n,0} + \frac{1}{2}u_{n,1} - \frac{3}{2}u_{n,2} + \frac{5}{6}u_{n,3} + \frac{1}{4}u_{n,4} = \mathcal{F}_{n,3}, \\ \frac{1}{4}u_{n,0} - \frac{4}{3}u_{n,1} + 3u_{n,2} - 4u_{n,3} + \frac{25}{12}u_{n,4} = \mathcal{F}_{n,3}. \end{aligned}$$

Можно показать, что блочные методы дифференцирования Биккарта (29), также

являются частным случаем одношаговых коллокационных методов (23) и совпадают с чисто неявными одношаговыми коллокационными методами (25). Для этого необходимо разрешить уравнения (29)

$$\frac{1}{\tau} \sum_{j=0}^k a_{i,j} u_{n,j} = f_{n,i}, \quad i = \overline{1, k},$$

относительно $u_{n,i}, \quad i = \overline{1, k}$. Приведем, например, разностные уравнения одношагового трехточечного метода Биккарта (30) к виду соответствующих чисто неявных одношаговых трехточечных уравнений. Введем матрицы коэффициентов уравнений (30) и разрешим их относительно $u_{n,1}, u_{n,2}, u_{n,3}$:

$$\begin{pmatrix} u_{1+n} \\ u_{2+n} \\ u_{3+n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ u_n \\ u_n \end{pmatrix} + \tau \begin{pmatrix} \frac{23f_{1+n}}{12} - \frac{4f_{1+n}}{3} & \frac{5f_{1+n}}{12} \\ \frac{7f_{1+n}}{3} - \frac{2f_{1+n}}{3} & \frac{f_{1+n}}{3} \\ \frac{9f_{1+n}}{4} + \frac{3f_{1+n}}{4} & \end{pmatrix}$$

Полученные уравнения совпали с уравнениями (25*). Поскольку одношаговые многоточечные уравнения Биккарта совпадают с чисто неявными одношаговыми уравнениями, отсюда следует их устойчивость по начальным данным.

Заключение

Проведенный анализ существующих блочных разностных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений позволил систематизировать и ввести их классификацию. При этом были установлены совпадения между разностными уравнениями, представленными в различной форме и носящими разные названия. Введенная систематизация позволила облегчить анализ существующих блочных методов, используя общие подходы. Предложен единый алгоритм получения блочных разностных уравнений для коллокационных методов различных типов. Полученные результаты представляют возможность построения новых более эффективных блочных алгоритмов и их реализации на мультитипроцессорных системах.

Литература

1. Bickart T.A., Picel Zd. High order stiffly stable composite multistep methods for numerical integration of stiff differential equations, bit 13 (1973), P. 272-286.
2. Холл Д., Уатт Д. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Мир, 1979. - 312с.
3. Береговенко Г.Я., Пухов Г.Е., Саух С.Е. Численные операторные методы решения

дифференциальных уравнений и анализа динамических систем. Киев, Наукова Думка, 1979. - 162 с

4. Системы параллельной обработки. Под ред. Ивенса Д. М.: Мир, 1985. - 416с.

5. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. - М.: Наука, 1989. - 432с.

6. Хайрер Э., Нёрсет С., Ваннер. Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. - М.: - Мир, 1990. - 512с.

7. Хайрер Э., Ваннер. Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие задачи. - М.: Мир, 1999. - 685с.

8. Молчанов И.Н. Введение в алгоритмы параллельных вычислений. АН УССР, Инст. Кибернетики им. В.М. Глушкова. Киев: Наукова думка. 1990. - 128с.

9. Фельдман Л.П. Сходимость и оценка погрешности параллельных одношаговых блочных методов моделирования динамических систем с сосредоточенными параметрами // Научн. Тр. ДонГТУ. Серия: ИКВТ, выпуск 15:- Донецк: -ДонГТУ, 2000, С. 34-39.

10. Feldmann L.P. Implementierung und Effizienzanalyse von parallelen blockartigen Simulationsalgorithmen für dynamische Systeme mit konzentrierten Parametern. In: Möller, D.P.F. (Hrsg.): Tagungsband 14. ASIM-Symposium Simulationstechnik in Hamburg, September 2000, SCS-Europe BVBA, Ghent/Belgium 2000, S. 241-246.

11. Фельдман Л.П., Дмитриева. О.А. Разработка и обоснование параллельных блочных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений на SIMD-структурах // Научн. Тр. ДонГТУ. Серия: ПМиАПДС, выпуск 29:- Донецк: ДонГТУ, 2001, С. 70-79.

12. Feldman L.P., Dmitrieva O.A., Gerber S.. Abbildung der blockartigen Algorithmen auf Parallelrechnerarchitekture. In: Tavangarian, D., Grützner, R. (Hrsg.): Tagungs-band 15. ASIM-Symposium Simulationstechnik in Rostock, September 2002, SCS-Europe BVBA, Ghent/Belgium, 2002, S. 359-364.

13. Фельдман Л.П. Параллельные алгоритмы моделирования динамических систем, описываемых ОДУ // Электронное моделирование, том 26, № 1, 2004. - С. 19-30.

14. Фельдман Л.П. Общие линейные блочные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений // Наук. пр. ДонНТУ. - Серия: ИКОТ, вип. 8(120):-Донецк: -ДонНТУ, 2007, С.282-296.

15. Фельдман Л.П., Параллельные коллокационные методы решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений // Наук. пр. ДонНТУ. - Серия: ИКОТ, вип. 9(132):-Донецк, ДонНТУ, 2008, С.33 -40.

Поступила в редколлегию 10.03.2009