А.И. Андрюхин
Донецкий государственный институт
искусственного интеллекта

УДК 519.9:681.3

МОДЕЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АНТИНОМИИ В БУЛЕВЫХ СЕТЯХ

Логические парадоксы оказали свое наиболее сильное воздействие на развитие логики и математики в начале нашего века. Однако они являются предметом и сегодняшних дискуссий, и, согласно современным представлениям будут постоянно привлекать к себе внимание [1, 2]. Антиномии, насколько мы их знаем, не указывают на какой-либо недостаток в человеческом мышлении и не являются результатом ложного рассуждения. Они являются результатом правильного заключения из ложных посылок. Ложность посылок зачастую связана с неправильным пониманием оборотов естественных языков и в работах [1-5] подчеркивается настоящая необходимость осторожного использования и интерпретации языковых конструкций. Наиболее известный пример: слово "есть" используется для обозначения тождества, включения элемента в класс, класса в класс, существования и т.п., с соответствующими логико-математическими конструкциями $=$, $\in$, $\subseteq$, $\exists$ [1-5].

Как указывается в [1], все антиномии имеют общее свойство, которое можно определить как самоприменимость. Та сущность, о которой идет речь, определяется посредством некоторой совокупности, к которой она сама принадлежит, т.е. во всех приводимых к антиномиям рассуждениях есть некоторый круг. Заметим, что в [5, с.476] указывается на дополнительный признак при построении антиномий: "Мы можем принять эти наблюдения в качестве указаний на то, что понятие отрицания имеет решающее значение в построении этих трех антиномий".

Эти соображения прямо указывают на вид графического отображения антиномий в булевых сетях - обратная связь с отрицанием в ней. Основную трудность при моделировании булевых схем представляют обратные связи в них, которые обычно соответствуют переменным памяти схемы и из-за которых возможна генерация модели. Другая основная трудность, тесно связанная с первой, - учет временных задержек, - может быть проигнорирована для темы статьи. Наиболее известным примером, который обычно приводится при логическом моделировании на вентильном уровне, является цепочка из нечетного числа элементов, инвертирующих входной сигнал. Осцилляция значений на линиях схемы приводит к необходимости введения дополнительных значений сигналов, расширяющих двузначный булев алфавит [6]. Эта логическая схема является основой генератора колебаний, широко применяемого в цифровой электронике [7].

В статье представлены наглядные булевы модели в виде логических схем антиномий Рассела и парадокса "лжеца", гетерологического парадокса Греллинга. Важность такого представления обусловливается необходимостью построения модели мира в нейронных сетях [8-10]. Здесь мы решаем конкретный вариант такой практически важной задачи кибернетики, как перевод с обычного, "естественного" (разговорного, письменного) языка в искусственный, т.е. в более специфичный язык однозначного представления информации проблемной области научного знания. Оглядываясь в прошлое, отметим, что Дж. Буль различал обыденный язык и символический язык. Под символическим языком он понимал совокупность символических средств и способов оперирования ими, и был убежден, что законы мышления отображаются в законах операций с логическими символами. Буль утверждал, что, изучая законы знаков, мы в действительности познаем основополагающие закономерности рассуждения. Таким образом, еще сравнительно недавно пытались отождествить логические схемы и операции с закономерностями мышления человека. В настоящее время принято считать, что процесс мышления реализуется с помощью, по крайней мере, двух языков. Задача первого состоит в генерации динамических моделей внешнего мира и основана на чувственных данных восприятия и ощущений. Он позволяет построить такую модель внешней среды, в которой возможно символическое перемещение (преобразование) аналогов объектов среды. Второй состоит из символов и связей между ними, - это и есть язык логики, служащий для построения логических схем.

Для эффективности обработки информации система должна, обучаясь, перестраиваться и при этом не только использовать специализированные подсистемы, но и строить их. Интерпретация состояний одной модели или процесса другой моделью (процессом) является действием, определяющим смысл первых. Разнообразные формы представления информации делают непосредственно зримыми различного рода аспекты окружающей реальности, позволяют в наглядной форме представить возможную эволюцию исследуемой ситуации. Специализированные подсистемы, как известно, позволяют эффективно решать задачи, невыполнимые для гораздо более мощных подсистем, но не адаптированных к конкретным условиям. Проекционные структуры рецепторов предоставляют мозгу пространство, в котором он разворачивает целый модельный мир и объекты которого для него сенсорно эквивалентны объектам окружающего мира [5]. Этими модельными объектами мозг оперирует непосредственно и естественно предположить, что физической моделью фрагмента мира является часть нейронной сети, которая сопоставлена ему.

Попытаемся дать ответ на некоторые общие вопросы при построении моделей. Каким образом объектам, их свойствам и отношениям между ними, о которых идет речь в упомянутых логических парадоксах, соответствуют элементы и отношения в булевых сетях? Как операции над представлениями в булевых моделях соответствуют действиям, описываемым в антиномиях? Имеется ли явная возможность и просто ли получать новые факты из булевой модели без обращения к внешней реальности?

Заметим, что при решении этих вопросов булевы логические схемы обладают преимуществом в сравнении с другими моделями. Так, интерпретируя значения линий схем как значения предикатов, отражающих свойства и отношения объектов, мы получаем для логического вывода, по сути дела, "физическую" модель. Поэтому эти схемы обладают высокими прогностическими возможностями.

Под логической схемой будем понимать далее множество логических элементов, которые соединяются согласно следующим правилам:

1. Выход логического элемента можно подсоединить к любому числу входов логических элементов.
2. В качестве значений входов элементов могут быть константы 0 и 1.
3. Никакие два выхода элементов нельзя соединять вместе.

Логические элементы имеют один выход y и несколько входов $x_1,\ x_2, \ldots, x_m$, связанных булевым соотношением $y = f(x_1, x_2, \ \ldots x_m)$. Условимся обозначать символами $\neg$, $\oplus$, $\wedge$, $\vee$ соответствующие булевы операции отрицания, суммы по модулю 2, конъюнкции и дизъюнкции.

Вычисление истинности предиката $B(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_M)$ "образуют ли множества $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_m$ множество X, если при этом они должны обладать свойством P ", определяется выражением $\wedge\ P(X_i)$. Считаем, что если $B(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_M) = 1$, то X является непустым множеством и наоборот. Логическая схема на рис. 1 выполняет вычисление предиката B.

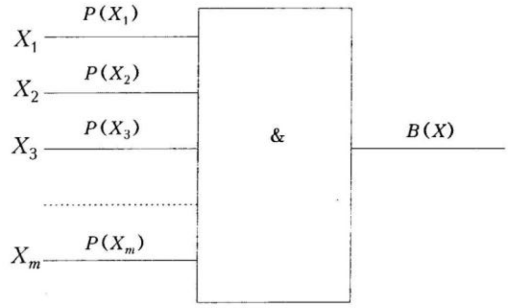

Рис.1

Как известно, парадокс Рассела возникает при попытке определения принадлежности множества всех множеств, которые не включают самих себя в качестве подмножеств. Рассмотрим его на языке исчисления предикатов. Множество всех множеств, которые не включают себя в качестве подмножеств, обозначим через Z. Определим предикат $A(X, Y)$, равный (1) 0, если множество X (не) включается в множество Y. Если $\varnothing$ - пустое множество, будем считать, что $A(\varnothing,\ Y) = 0$ для любого Y $(A(\varnothing,\ \varnothing) = 0)$. Для подмножеств Z имеем $A(X, X) = 1$. Рассматривая $A(Z,\ Z)$, получаем, что если Z включается в Z, т.е. $A(Z, Z) = 0$, то для него как подмножества необходимо $A(Z, Z) = 0$. Если Z не включается в Z, то $A(Z, Z) = 1$. Такое множество должно включаться в Z и поэтому $A(Z, Z) = 0$. Таким образом, нельзя точно определить рассматриваемое свойство Z.

Используя рис.1, рассмотрим парадокс Рассела, считая, что $P(X_i) = A(X_i, X_i)$. Подчеркнем важное соотношение $A(X, X) = \neg B(X)$. Действительно, если $B(X) = 1$, то имеем по определению $A(X, X) = 0$. Для $B(X) = 0$ имеем $x = \varnothing$ и также по определению $A(X, X) = 1$. Следовательно, логическая сеть, определяющая $B(X)$ при $P(X_i) = A(X_i, X_i)$ имеет вид, представленный на рис. 2.

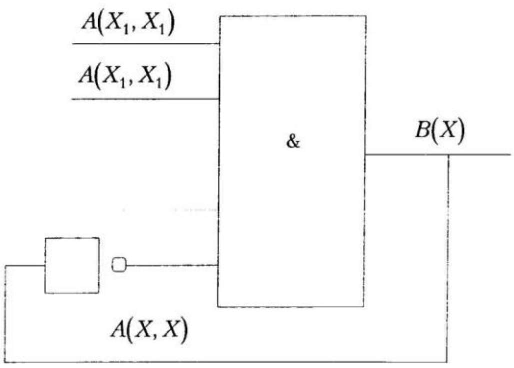

Рис.2

ГЕТЕРОЛОГИЧЕСКИЙ ПАРАДОКС ГРЕЛЛИНГА

Так как слова имеют свойства, и некоторые слова являются именами свойств, существуют слова, обладающие свойствами, именами которых они являются. К примеру, "существительное" является именем существительным, "пятисложное" является пятисложным и т.п. [1, 5].

Определение: X является автологическим, если и только если X имеет свойство, именем которого является X. Далее определяем, что X является гетерологическим, если и только если X не является автологическим. Парадокс возникает при попытке определения признака гетерологичности у слова "гетерологический".

Обозначим $S = (S_1,\ S_2,\ S_3, \dots S_m)$ - множество свойств объекта X.

Введем $P = (P_1, P_2, P_3, \dots P_m)$ - набор булевых величин (или значений предикатов), для которых P_i равно 1, если имя i -го свойсва S_i равно X, и 0 в противном случае. Булев индикатор тавтологичности объекта X, который мы обозначим через A, определяется выражением $A = \vee P_i$. Понятно, что $A \in P$ и $\exists\, k\ P_k = A$. Логическая схема, определяющая дизъюнкцию булевых величин P_i, представлена на рис. 3. Обозначим индикатор гетерологичности объекта X через G. По определению $G = \neg A$. Учитывая это, мы имеем эквивалентную схеме на рис. 3 развернутую логическую схему на рис. 4, в которой присутствует обратная связь через инвертор. Следовательно, определение значения G вызывает осцилляцию на соответствующей линии логической схемы.

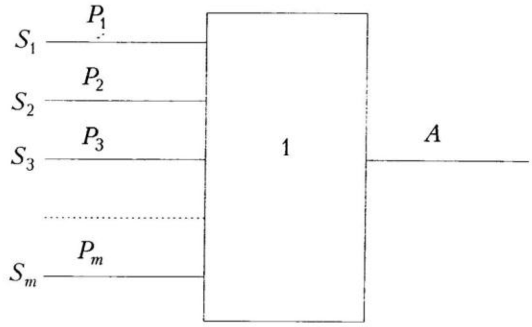

Рис.3

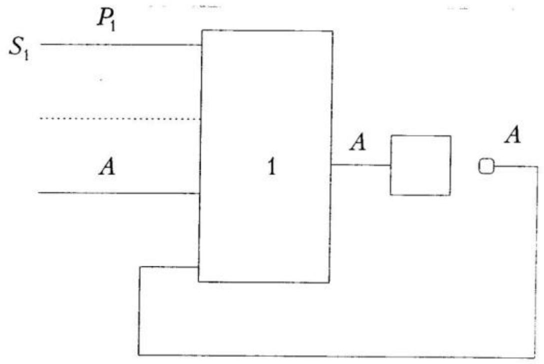

Рис.4

Парадокс лжеца известен очень давно и имеет многочисленные варианты своего выражения в языке [1-5]. Рассмотрим его в следующем виде. Жители острова делятся на людей, чьи высказывания всегда истинны, и лжецов, чьи утверждения всегда ложны. Является ли истинным или ложным высказывание жителя острова "Я - лжец" ?

Возможно ли вообще такое высказывание у жителей острова в двузначной логике?

Обозначим через T - тип жителя острова. Этот булев признак имеет значение 0 - (лжец) или 1 - (не лжец). Условия парадокса опишем функцией преобразования истинности q высказывания Q жителя острова типа T, которая имеет вид $Y(T,q) = \neg(T \oplus q)$. Эту зависимость получаем, рассматривая таблицу истинности функции преобразования. Соответствующая логическая схема представлена на рис. 5.

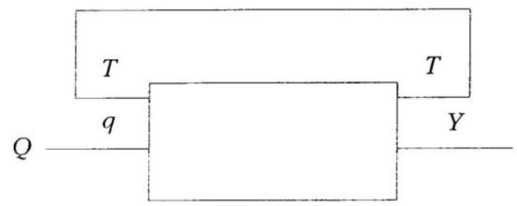

Рис.5

Истинность выражения Q "Я - лжец" есть истинность формулы $T = 0$. Истинность высказывания $F = G$, обозначенная через $U(F = G)$, где F, G - логические выражения от булевых переменных, вычисляется по формуле $U(F = G) = \neg(F \oplus G)$. Поэтому истинность высказывания "Я - лжец" равна $\neg T$, в зависимости от типа жителя острова, его высказывающего. Схема оценки истинности высказывания "Я - лжец" имеет вид согласно рис.6. На нем высказыванию Q "Я - лжец", которое не может высказываться жителями острова, соответствует точечная линия, выход Y отождествлен с T согласно условиям парадокса $Y(T, Q) = T$ и учтено, что $q = \neg T$.

Трудность графического отображения этой антиномии обусловлена невыразимостью свойства истинности формулы теории T в самой теории, следующей из известной теоремы Тарского.

Процедура диагонализации, имеющая основополагающее значение в математической логике, частным случаем которой является диагональный метод Кантора, неявно использует модель обратной связи с отрицанием. Используя универсальность двузначного алфавита, считаем, что действительные числа X_i в диагональном методе представлены в двоичной системе счисления. Будем строить X_k - двоичное число, не имеющее номера при любом перечислении, меняя i -ый бит чисел X_i. Это соответствует построению числа $X_k = \vee\left(\neg X_i^i\, E^i\right)$, где $X_i^i - i$ -ый бит двоичного представления X_i, а E^i - булев вектор-орт с i -ой единичной компонентой. Если X_k имеет номер N, то можно определить $k = F(N)$ при котором $X_k^k = \neg X_k^k$.

Резюмируя, укажем, что логические парадоксы вызвали разработку многозначных логик, из которых наиболее известны работы Васильева, Лукасевича, Поста и многих других. В многозначном логическом моделировании современных микроэлектронных СБИС представляют значения сигналов как булев вектор с соответствующей интерпретацией его компонент и вводят операции над сигналами, которые позволяют обойти условие 3 в логических схемах двузначной логики [11].

Это дает возможность изменить рис. 6, заменив точечную линию от Q к q на линию от Q к Y, получая более адекватную схему парадокса.

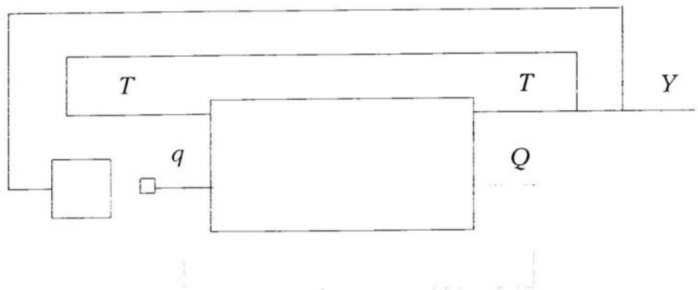

Рис. 6.

Этим мы получаем псевдобулеву сеть (в ней возможна частичная обработка высказываний, не имеющих смысл с точки зрения двузначной, булевой логики). Последняя требует введения своего алфавита, а также аппарата операций и интерпретаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Френкель А., Бар-Хиллел И. Основания теории множеств. М.: Мир, 1966.
2. Клини С. Введение в метаматематику. - М: Иностранная литература, 1957.
3. Справочная книга по математической логике: - ч.4. Теория доказательств и конструктивная математика. - М. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. - 392 с.
4. Хинтикка Я. Логико-эпистомологические исследования. - М.: Прогресс, 1980.
5. Фон Вригт Г.Х. Логико-философские исследования. Избранные труды.- М.: Прогресс, 1986. - 600с.
6. Киносита К. Асада К. Карацу К. Логическое проектирование СБИС. Пер. с японского. - М.: Мир, 1988. - 309 с.
7. Преснухин Л.Н., Воробьев Н.В., Шишкевич А.А. Расчет элементов цифровых устройств. - М.: Высшая школа, 1990.
8. Дорфман Я.Г., Сергеев В.М. Нейроморфогенез и модели мира в сетях нейронных компьютеров.//В книге: Интеллектуальные процессы и их моделирование. - М.: Наука, 1987.
9. Шуберт Л. Усиление выразительной мощности семантических сетей.//Кибернетический сборник. Новая серия. - Вып. 17, 1979. - с.171-212.
10. Шенк Р. Обработка концептуальной информации. - М.: Энергия, 1980. -360 с.
11. Андрюхин А.И. Алгоритмы параллельного логического моделирования и псевдослучайной генерации тестов для МОП-структур.//Микроэлектроника. - 1995. - № 55. - с. 331 - 336.