МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
Державний вищій навчальний заклад
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
кафедра вищої математики імені В.В. Пака

ДОМАШНІ ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

з вищої математики:

методичний посібник для самостійної роботи студентів

ЧАСТИНА II

Донецьк ДонНТУ
2011

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
Державний вищій навчальний заклад
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
кафедра вищої математики імені В.В. Пака

ДОМАШНІ ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ

з вищої математики:

методичний посібник
для самостійної роботи студентів

ЧАСТИНА II

Розглянуто на засіданні
кафедри вищої математики
ДонНТУ, протокол № 2
від 15 вересня 2011 року

Донецьк ДонНТУ
2011

ББК: 74.58

Рекомендовано до видання навчально-видавничою радою Донецького національного технічного університету. Протокол № 6 від 06.10.11р.

Домашні індивідуальні завдання з вищої математики: методичний посібник для самостійної роботи студентів. Частина II (для студентів всіх спеціальностей) / Укл. Гребьонкіна О.С., Євсеєва О.Г., Кльоміна С.І., Савін О.І. – Донецьк: ДонНТУ, 2011. – 84с.

Посібник містить варіанти індивідуальних домашніх завдань за темами: інтегральне числення, диференціальні рівняння, ряди. Наведені теоретичні положення, необхідні для виконання даних завдань. Посібник структурований за темами.

Посібник може бути використаний студентами всіх спеціальностей денної форми навчання для самостійної підготовки до екзамену з вищої математики.

Укладачі: доц.. Гребьонкіна О.С.,
доц.. Євсеєва О.Г.,
ас. Кльоміна С.І.,
ас. Савін О.І.

Рецензент: проф., д. ф.-м. наук Лесіна М.Ю.

ББК: 74.58

Вступ.

Даний методичний посібник містить другу частину уніфікованого індивідуального завдання, що призначене для самостійного виконання студентами всіх спеціальностей денної форми навчання.

В посібнику наведені домашні завдання за темами: «Невизначений інтеграл», «Визначений інтеграл», «Функції багатьох змінних», «Диференціальні рівняння першого порядку», «Диференціальні рівняння другого порядку», «Ряди».

Домашнє індивідуальне завдання видається студенту на весь семестр і виконується по мірі вивчення матеріалу. Виконане завдання перевіряється викладачем, що веде практичні заняття.

У разі, коли індивідуальне завдання не є обов‘язковим для виконання, викладач може враховувати результати його виконання при формуванні підсумкової оцінки семестру.

При підготовці до складання модульних контрольних робіт студент має орієнтуватися на задачі індивідуального завдання, як на зразок завдань мінімального рівня складності. До індивідуального завдання включено задачі, що спрямовані на формування базових умінь. В кожній темі визначені базові вміння, що є необхідними студенту для достатнього рівня засвоєння дисципліни. Цей рівень відповідає оцінці «задовільно» за національною шкалою, або оцінці «E» за європейською шкалою.

Посібник складається з двох частин.

В першій частині посібника міститься загальне формулювання задач домашнього індивідуального завдання і 25 його варіантів.

В другій частині посібника надано довідкові матеріали, необхідні для виконання домашнього індивідуального завдання. Для кожної задачі наведено ті поняття, формули і алгоритми, які необхідні для її розв‘язання .

Загальне формулювання задач.

Частина 1.

I. Невизначений інтеграл.

1. Обчислити невизначені інтеграли за таблицею.
2. Обчислити невизначені інтеграли методом заміни змінної.
3. Обчислити невизначені інтеграли методом інтегрування частинами.
4. Обчислити невизначені інтеграли від виразів, що містять квадратний трьох-член в знаменнику.
5. Обчислити невизначені інтеграли від тригонометричних функцій.

II. Визначений інтеграл.

1. Обчислити визначені інтеграли за таблицею або методом заміни змінної.
2. Обчислити визначений інтеграл методом інтегрування частинами.
3. Дослідити на збіжність невласні інтеграли. У разі збіжності вказати значення інтегралів.
4. Знайти площу фігури, що обмежена наданими лініями. Зробити малюнок.
5. Знайти об‘єм тіла, що отримано обертанням наданих ліній навколо вісі *OX*. Зробити малюнок.

III. Функції багатьох змінних.

1. Знайти і зобразити на малюнку область визначення функції $z = f(x, y)$.
2. Довести, що дана функція $z = f(x, y)$ задовольняє наведеному рівнянню.
3. Знайти екстремум функції двох змінних $z = f(x, y)$.
4. Знайти градієнт функції $z = f(x, y)$ в точці M.
5. Знайти похідну функції $z = f(x, y)$ в точці M за напрямом даного вектора.

Частина 2.

IV. Диференціальні рівняння.

1. Знайти частинний розв’язок диференціального рівняння зі змінними, що розділяються.

2. Знайти загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння першого порядку.
3. Знайти частинний розв'язок лінійного диференціального рівняння першого порядку.
4. а), б) Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

   в) Знайти частинний розв'язок лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.
5. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами методом невизначених коефіцієнтів.

V. Диференціальні рівняння другого порядку.

1. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння другого порядку.
2. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння другого порядку.

3,4. Знайти загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

5. Знайти частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

VI. Числові і функціональні ряди.

1. Дослідити числовий ряд на збіжність.
2. Дослідити знакочережний ряд на збіжність.
3. Дослідити функціональний ряд на збіжність.
4. Розвинути функцію в ряд Тейлора в околі даної точки.
5. Розвинути функцію в ряд Тейлора в околі нуля, користуючись стандартним розвиненням.

ВАРІАНТИ ДОМАШНІХ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

ВАРІАНТ №1
Частина 1

I. Невизначений інтеграл

1. а) $\int \frac{x^7 + 2x^8}{x^9} dx$; б) $\int \left(\frac{6}{\sqrt{1-x^2}} + \sin x \right) dx$.

2. а) $\int \cos 2x \cdot e^{\sin 2x} dx$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{25 + \ln^2 2x}}$.

3. а) $\int (3x-5) e^{4x} dx$; б) $\int arctg 3x dx$.

4. а) $\int \frac{3-x}{2x-3-x^2} dx$; б) $\int \frac{x+15}{\sqrt{x^2 - 6x + 25}} dx$.

5. а) $\int \sin^5 x \cos^3 x dx$; б) $\int \cos^4 \frac{x}{9} dx$.

II. Визначений інтеграл

1. а) $\int_{-1}^{1} (x^3 + 1) dx$; б) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2 - 2x - 8}$; в) $\int_{3\pi/2}^{2\pi} \sqrt{1-\cos x} \cdot \sin x dx$.

2. $\int_{2}^{e} x \cdot \ln x dx$.

3. а) $\int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + 4) dx$; б) $\int_{0}^{\infty} e^{-7x} dx$.

4. $y = x^2 - 9x + 18, y = 3x + 9$.

5. $y = \frac{x(3-x)}{\sqrt{\pi}}, y = 0$.

III. Функції багатьох змінних

1. $z = \sqrt{y} + \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$.

2. $z = y \cdot tg(x^2 - y^2)$; $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$.

3. $z = 2x^2 + 5y^2 + 3x + 2y - 1$.

4. $z = \ln x + y^2 - xy$; $M(1;-3)$.

5. $z = e^x + xy + y^2$; $M(0;1)$; $\overline{a} = 3\overline{i} - 4\overline{j}$.

Частина 2

IV. Диференціальні рівняння

1. $x\ln y \cdot y' = x^3 y$, $y(0)=e$;

2. $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0$;

3. $y' - 3y = e^{-2x}$, $y(0)=0$;

4. а) $y'' + 3y' = 0$; б) $y'' - 14y' + 50y = 0$;

   в) $81y'' - 18y' + y = 0$, $y(0) = \frac{1}{9}$, $y'(0) = \frac{1}{81}$;

5. $y'' + 4y = \cos 2x$.

V. Диференціальні рівняння другого порядку

1. $(1+x^2)y'' + 2xy' = 2x^3$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$;

2. $(y')^2 + yy'' = 0$;

3. $y'' + 3y' = 3xe^{-3x}$;

4. $y'' + 4y = 4\sin 2x$;

5. $y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x$, $y(0)=2$, $y'(0)=3$.

VI. Числові і функціональні ряди

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2+2}$.

2. а) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4+1}$.

3. а) $(x+1) + (x+1)^2 + (x+1)^3 + \ldots$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$.

4. $f(x) = x^2 \cos x$, $x_0 = 0$.

5. $f(x) = \ln(3x+1)$.

ВАРІАНТ №2
Частина 1

I. Невизначений інтеграл

1. а) $\int \frac{(1+x)^2}{x^3} dx$; б) $\int \left(\frac{9}{\cos^2 x} - 5e^x \right) dx$.
2. а) $\int \frac{tg^6 2x}{\cos^2 2x} dx$; б) $\int \frac{x^3 + x^7}{\sqrt{1-x^8}} dx$.
3. а) $\int (4+x)\cos 7x dx$; б) $\int \arcsin 4x dx$.
4. а) $\int \frac{x+7}{2-x^2+8x} dx$; б) $\int \frac{x+11}{\sqrt{x^2+16x+56}} dx$.
5. а) $\int \sin^2(3-x)\cos^2(3-x)dx$; б) $\int \cos^7 5x \sin^3 5x dx$.

II. Визначений інтеграл

1. а) $\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$; б) $\int\limits_0^{\pi/12} \frac{dx}{\sin^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$; в) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$.
2. $\int\limits_0^1 x \cdot 3^x dx$.
3. а) $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x}$; б) $\int\limits_0^{\infty} xe^{-x^2} dx$.
4. $y = 7 - x$; $y = \frac{x^2}{4} - 1$.
5. $y^2 = 4x, y = x$.

III. Функції багатьох змінних

1. $z = x + \arcsin y$;
2. $z = \ln(e^x + e^y)$; $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.
3. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$.
4. $z = \ln x^3 + 2y - 5xy$; $M(3;1)$.
5. $z = \sqrt{x} \cdot y + y^2 + x$; $M(1;0)$; $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j}$.

Частина 2

IV. Диференціальні рівняння

1. $x^3 y' + y = 7$, $y(1) = 5$;

2. $xy' + y\ln\frac{y}{x} = 0$;

3. $y' - \frac{y}{x} = x^2$, $y(1) = 0{,}5$;

4. а) $y'' + 4y' + 5y = 0$; б) $y'' + 2y' - 15y = 0$;

   в) $y'' + 10y' + 25y = 0$, $y(0) = -5$, $y'(0) = 25$;

5. $y'' - y = e^x - 1$.

V. Диференціальні рівняння другого порядку

1. $y'' - \frac{2xy'}{1-x^2} + \frac{2}{1-x^2} = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

2. $y^4 - y^3 y'' = 1$;

3. $y'' + 7y' + 12y = 24x^2 + 16x - 15$;

4. $y'' + 16y = -24\sin 4x$;

5. $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3)$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.

VI. Числові і функціональні ряди

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n!}$.

2. а) $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \ldots$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8n+3}$.

3. а) $(x-2) + (x-2)^2 + (x-2)^3 + \ldots$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{x^n}{n}$.

4. $f(x) = e^{\sin x}$, $x_0 = 0$.

5. $f(x) = \sqrt{3 - x^2}$.

ВАРІАНТ №3
Частина 1

I. Невизначений інтеграл

1. а) $\int\left(\frac{6}{\sin^2 x}+\frac{12}{1+x^2}\right)dx$; б) $\int\frac{(1-3x^2)^2}{x^5}dx$.
2. а) $\int\frac{3x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}$; б) $\int\frac{arctg^5 4x}{1+16x^2}dx$.
3. а) $\int(2x+1)e^{7x}dx$; б) $\int\arccos 4xdx$.
4. а) $\int\frac{x+2}{x^2-6x+13}dx$; б) $\int\frac{2-x}{\sqrt{9-x^2+6x}}dx$.
5. а) $\int\sin^5 4xdx$; б) $\int\cos^4(17+2x)dx$.

II. Визначений інтеграл

1. **а)** $\int_0^2 4^x dx$**;** **б)** $\int_{\pi/18}^{\pi/12}\cos 3xdx$**;** **в)** $\int_{1/2}^{1} x\cdot\sqrt[4]{2x-1}dx$**.**

$2\int_{\pi/6}^{\pi/4} x\cdot\sin 2xdx$.

3.а) $\int_0^{\infty}\frac{dx}{16+x^2}$; б) $\int_2^{\infty}\frac{\ln x}{x}dx$.

4. $y=x^2, y=\frac{6x-x^2}{3}$.

5. $y=\sqrt{x}, x=4, y=0$.

III. Функції багатьох змінних

1. $z=\sqrt{y}+\sqrt{1-x^2-y^2}$.
2. $z=\frac{y}{(x^2-y^2)^5}$; $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{y}$.
3. $z=5x^2+3y^2+2x-3y+1$.
4. $z=\sin x+xy+y^3$; $M(0;-2)$.
5. $z=\ln(5x^2+3y^2)$; $M(1;1)$; $\bar{a}=3\bar{i}+2\bar{j}$.

Частина 2

IV. Диференціальні рівняння

1. $(2xy+y)y' = 3-y^2$, $y(0)=2$;

2. $xy' = 2\sqrt{3x^2+y^2}+y$;

3. $y' + \frac{y}{x} = e^{x^2}$, $y(1)=\frac{e}{2}$;

4. а) $y'' + 7y' + 6y = 0$; б) $y'' - y' + 17y = 0$;

   в) $4y'' - 12y' + 9y = 0$, $y(0)=\frac{3}{2}$, $y'(0)=\frac{9}{4}$;

5. $y'' - y' = e^{2x}$.

V. Диференціальні рівняння другого порядку

1. $y'' - \frac{y'}{x} = x$, $y(1)=2$, $y'(1)=0$;

2. $2yy'' = y^2 + (y')^2$;

3. $y'' + y' - 3y = -x^2 - \frac{29}{18}$;

4. $y'' - 8y' + 12y = -65\cos 4x$;

5. $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

VI. Числові і функціональні ряди

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n(2n+1)}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{3^n(n+2)}$.

2. а) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$.

3. а) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\ldots$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)!x^n$.

4. $f(x)=\sin 2x$, $x_0=\frac{\pi}{2}$.

5. $f(x)=\ln(4x+1)$.

ВАРІАНТ №4
Частина 1

I. Невизначений інтеграл

1. а) $\int\left(\frac{7}{3x}+9x\right)^2 dx$; б) $\int\left(\frac{5}{x}-\frac{12}{x^2-49}\right)dx$.

2. а) $\int\left(x^4+27\right)^9 x^3 dx$; б) $\int\frac{e^{tg3x-11}}{\cos^2 3x}dx$.

3. а) $\int(2x+11)\sin 3x dx$; б) $\int(x+7)\ln 2x dx$.

4. а) $\int\frac{x+3}{x^2+8x+9}dx$; б) $\int\frac{2-x}{\sqrt{x^2+8x+25}}dx$.

5. а) $\int\sin^3 3x\cos^5 3x dx$; б) $\int\sin^4(12-x)dx$.

II. Визначений інтеграл

1. **а)** $\int_2^3(1+2x+3x^2)dx$**;** **б)** $\int_{1/\pi}^{2/\pi}x^{-2}\sin\frac{1}{x}dx$**;** **в)** $\int_0^3\frac{dx}{2+\sqrt{x+1}}$**.**

2. $\int_0^1 4x\cdot\arcsin x dx$.

3. а) $\int_{-\infty}^{\infty}(x+3)dx$; б) $\int_0^{\infty}x^2e^{-x^3}dx$.

4. $y=\sin x, y=\cos x, y=0, x=0, x=\frac{\pi}{2}$.

5. $y=\frac{1}{x}, x=1, x=2, y=0$.

III. Функції багатьох змінних

1. $z=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$.

2. $z=y\cdot\ln(x^2-y^2)$; $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$.

3. $z=x^2+3xy-8x+3y^2-15y$.

4. $z=y\cdot tgx+x^3-2y$; $M(0;-1)$.

5. $z=\sin x+y^2-3$; $M(0;1)$; $\bar{a}=2\bar{i}-3\bar{j}$.

Частина 2

IV. Диференціальні рівняння

1. $xy' + y = y^2$, $y(1) = 0{,}5$;

2. $x\cos\frac{y}{x}\cdot(ydx + xdy) = y\sin\frac{y}{x}(xdy - ydx)$;

3. $y' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x^2+1}$, $y(1) = \ln\sqrt{2}$;

4. а) $y'' - 2y' - 2y = 0$; б) $y'' + 6y' + 25y = 0$;

   в) $9y'' - 42y' + 49y = 0$, $y(0) = \frac{7}{3}$, $y'(0) = \frac{49}{9}$;

5. $y'' + 2y' + 2y = x^2 - 4$.

V. Диференціальні рівняння другого порядку

1. $xy'' - y' = x^2e^x$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$;

2. $(y')^2 - yy'' = 0$;

3. $y'' - 2y' + y = x^3$;

4. $y'' + y = 2\cos x$;

5. $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

VI. Числові і функціональні ряди

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{n!}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n^3+1)}{(n+1)!}$.

2. а) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$.

3. а) $x^2 + x^4 + x^6 + \ldots + x^{2n} + \ldots$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

4. $f(x) = \ln\left(e^x + x\right)$.

5. $f(x) = \frac{\sin x - x}{x^3}$.

ВАРІАНТ №5
Частина 1

I. Невизначений інтеграл

1. а) $\int \left(x^4+3\right)^2 dx$; б) $\int \left(6^x + \dfrac{10}{\sin^2 x}\right) dx$.

2. а) $\int e^{2x}\cos e^{2x} dx$; б) $\int \dfrac{3^{\arcsin 2x-5}}{\sqrt{1-4x^2}} dx$.

3. а) $\int (x+11)\sin 4x dx$; б) $\int \arccos 12x dx$.

4. а) $\int \dfrac{x+9}{x^2-6x+10} dx$; б) $\int \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+18x+80}} dx$.

5. а) $\int \cos^5(13-x)dx$; б) $\int \cos^2 12x \sin^2 12x dx$.

II. Визначений інтеграл

1. а) $\int\limits_0^{\pi/2} (2x+\sin 2x)dx$; б) $\int\limits_{-4}^{-2} \dfrac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$; в) $\int\limits_0^1 \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2} dx$.

2. $\int\limits_0^1 (3x+1)\cdot 2^x dx$.

3. а) $\int\limits_0^{\infty} (x^2+2x+2)dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^0 x^2 3^{x^3} dx$.

4. $y = tgx, y = ctgx, x = 0, x = \dfrac{\pi}{2}, y = 0$.

5. $y^2 = 2x, y = 0, x = 0, x = 2$.

III. Функції багатьох змінних

1. $z = \ln x + \dfrac{1}{\sqrt{y-x}}$.

2. $z = \dfrac{x^2}{2y} + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$; $x^2 \dfrac{\partial z}{\partial x} + y^2 \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x^3}{y}$.

3. $z = x^2 + 2y^2 - 2x + 1$.

4. $z = x^3 y^2 - 3x + \ln(xy)$; $M(-1;1)$.

5. $z = e^{xy} + \cos x + 2x + y$; $M(0;0)$; $\bar{a} = \bar{i} - \bar{j}$.

Частина 2

IV. Диференціальні рівняння

1. $(1-e^x)\sin y \cdot y' = e^x \cos^3 y$, $y(0)=\dfrac{\pi}{4}$;

2. $xdy = (y+\sqrt{y^2-4x^2})dx$;

3. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $y(1)=2$;

4. а) $3y'' - 2y' - 8y = 0$; б) $y'' - 14y' + 58y = 0$;

   в) $16y'' - 40y' + 25y = 0$, $y(0)=\dfrac{5}{4}$, $y'(0)=\dfrac{25}{16}$;

5. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$.

V. Диференціальні рівняння другого порядку

1. $y'' + \dfrac{y'}{x} = x$, $y(1)=1$, $y'(1)=1$;

2. $yy'' + (y')^2 - (y')^3 = 0$;

3. $y'' - 10y' + 25y = e^{5x}$;

4. $y'' + 25y = \cos 5x$;

5. $y'' - 2y' = e^x(x^2+x-3)$, $y(0)=2$, $y'(0)=2$.

VI. Числові і функціональні ряди

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n}{3^n}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(n+2)!}{(3n+5)2^n}$.

2. а) $\dfrac{1}{3} - \dfrac{4}{9} + \dfrac{9}{27} - \dfrac{16}{81} + \ldots$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n\ln(n+1)}$.

3. а) $x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!x^n$.

4. $f(x) = (e^x+1)^{-1}$, $x_0 = 0$.

5. $f(x) = \dfrac{1-\cos 2x}{x}$.

ВАРІАНТ №6
Частина 1

I. Невизначений інтеграл

1. а) $\int \left(\frac{16}{\sqrt{9-x^2}} + 7e^x \right) dx$; б) $\int \frac{(x-2)^3}{x^4} dx$.

2. а) $\int \sqrt[7]{x^5 - 9} \cdot x^4 dx$; б) $\int \frac{\arcsin^5 9x}{\sqrt{1-81x^2}} dx$.

3. а) $\int (5x+6) \cos 2x dx$; б) $\int arctg 5x dx$.

4. а) $\int \frac{3-x}{12-x^2+4x} dx$; б) $\int \frac{x-1}{\sqrt{17+x^2+6x}} dx$.

5. а) $\int \sin^5 4x \cos 4x dx$; б) $\int \sin^4 \frac{x}{14} dx$.

II. Визначений інтеграл

1. а) $\int_0^1 2^x \cdot 5^x dx$; б) $\int_{1/2}^{3/2} \frac{dx}{3+4x^2}$; в) $\int_0^2 x \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} dx$.

2. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x dx}{\sin^2 x}$.

3. а) $\int_0^{\infty} 4^{-x} dx$; б) $\int_{-\infty}^{+\infty} (x^2+2x+5)^{-1} dx$.

4. $y = x^2, y = 0, x = -2, x = -1$.

5. $y = \sin x, y = 0, x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}$.

III. Функції багатьох змінних

1. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

2. $z = \frac{xy}{x+y}$; $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$.

3. $z = x^2 + y^2 - 4x - 8y + 4$.

4. $z = x^2 y + y \cdot \cos x + 3x - 5y$; $M(0;0)$.

5. $z = x \cdot tgy + y^2 - 3x$; $M(1;0)$; $\bar{a} = 4\bar{i} - 3\bar{j}$.

Частина 2

IV. Диференціальні рівняння

1. $xy' \ln y - y = 0$, $y(1) = e^2$;

2. $4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0$;

3. $y' - \dfrac{y}{x} = \ln x$, $y(1) = 5$;

4. а) $9y'' - 3y' - 2y = 0$; б) $y'' + 10y' + 61y = 0$;

   в) $16y'' - 56y' + 49y = 0$, $y(0) = \dfrac{7}{4}$, $y'(0) = \dfrac{49}{16}$;

5. $y'' + y' = \cos 5x$.

V. Диференціальні рівняння другого порядку

1. $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

2. $4y^3 y'' = y^4 - 1$;

3. $y'' + y' + y = (x + x^2)e^x$;

4. $y'' + 4y = 2\cos x$;

5. $y'' + 9y = 6e^{3x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

VI. Числові і функціональні ряди

1. а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{n+1}$, б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{n!}$.

2. а) $-\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} - \dfrac{1}{3 \cdot 4} + \ldots$, б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)2^{2n}}$.

3. а) $x + \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x^3}{9} + \ldots$, б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3 - x)^n}{\sqrt{n}}$.

4. $f(x) = \arccos x$, $x_0 = 0$.

5. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

ВАРІАНТ №7
Частина 1

I. Невизначений інтеграл

1. а) $\int\left(\frac{27}{\sqrt{9+x^2}}-e^x\right)dx$; б) $\int\frac{(x^2+3)^2}{x^5}dx$.

2. а) $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int\frac{ctg^{12}3x}{\sin^2 3x}dx$.

3. а) $\int(4-5x)\cos 6xdx$; б) $\int\arcsin 8xdx$.

4. а) $\int\frac{x+9}{x^2-16x+7}dx$; б) $\int\frac{x-7}{\sqrt{6-5x-x^2}}dx$.

5. а) $\int\sin^3 4x\cos^5 4xdx$; б) $\int\cos^4 15xdx$.

II. Визначений інтеграл

1. а) $\int\limits_0^1 e^{5x}dx$; б) $\int\limits_0^{\pi/3}\cos 8x\cdot\sin 2xdx$; в) $\int\limits_2^3 x\cdot(3-x)^7dx$.

2. $\int\limits_0^1\frac{x\cdot arctgx}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

3. а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{9+x^2}$; б) $\int\limits_3^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}$.

4. $y=x^3, y=0, x=1$.

5. $y=\frac{6}{x}, x=1, x=4$.

III. Функції багатьох змінних

1. $z=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-y^2}$.

2. $z=\cos^2(2x-3y)$; $3\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

3. $z=x^2-xy+y^2+3x-2y+1$.

4. $z=y^2\sin x+e^x-3y$; $M(0;2)$.

5. $z=y^2tgx+x^3+5xy-2y$; $M(0;-3)$; $\overline{a}=2\overline{i}-\overline{j}$.

Частина 2

IV. Диференціальні рівняння

1. $y\sin x dx + (\cos x - 1)dy = 0$, $\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$;

2. $xy' - y = x \cdot tg\frac{y}{x}$;

3. $y' - \frac{y}{x} = x\sin x$, $\quad y(\pi) = 0$;

4. а) $y'' - 3y' - 40y = 0$; $\quad$ б) $y'' - 2y' + 50y = 0$;

   в) $y'' + 6y' + 9y = 0$, $\quad y(0) = -3$, $\quad y'(0) = 9$;

5. $y'' - 2y' + y = e^x$.

V. Диференціальні рівняння другого порядку

1. $y'' + y' tgx = \sin 2x$, $\quad y(0) = -1$, $\quad y'(0) = 0$;

2. $yy'' - (y')^2 = 2$;

3. $y'' - 7y' = (x-1)^2$;

4. $y'' + y = \sin x$;

5. $y'' - y' = -2x$, $\quad y(0) = 0$, $\quad y'(0) = 1$.

VI. Числові і функціональні ряди

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5^{n+1}}$, $\quad$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$.

2. а) $-\frac{12}{5} + \frac{13}{6} - \frac{14}{7} + \frac{15}{8} + \ldots$, $\quad$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)3^n}$.

3. а) $\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x^2}{\sqrt{3}} + \frac{x^3}{\sqrt{4}} + \ldots$, $\quad$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n-1}$.

4. $f(x) = \sec x$, $\quad x_0 = 0$.

5. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4+x}}$.

ВАРІАНТ №8
Частина 1

I. Невизначений інтеграл

1. а) $\int x^7 (x-2)^2 dx$; б) $\int \left(2\cos x - 5x + e^{4x}\right) dx$.

2. а) $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$; б) $\int \frac{e^{\arcsin 2x}}{\sqrt{1-4x^2}} dx$.

3. а) $\int (12x-6)\sin 2x dx$; б) $\int arctg 12x dx$.

4. а) $\int \frac{14-x}{\sqrt{6-x^2+7x}} dx$; б) $\int \frac{x+13}{x^2+8x+11} dx$.

5. а) $\int \cos^5 (x-4) dx$; б) $\int \sin^2 6x \cos^2 6x dx$.

II. Визначений інтеграл

1. а) $\int_1^3 \frac{1+\sqrt{x}}{x} dx$; б) $\int_1^2 3x(1-x)^{17} dx$; в) $\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$.

2. $\int_0^2 \ln(x^2+4) dx$.

3. а) $\int_{-\infty}^{\infty} (x^2+15) dx$; б) $\int_1^{\infty} x 5^{-2x^2} dx$.

4. $y = \cos x, y = 0, x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{6}$.

5. $y = x^3, y = 8, x = 0$.

III. Функції багатьох змінних

1. $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} + \ln x$.

2. $z = \sqrt{tg(3x-2y)}$; $2\frac{\partial z}{\partial x} + 3\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

3. $z = 2x^2 + y^2 - 2y + 1$.

4. $z = e^{xy} + y^2 - x + x^2$; $M(2;0)$.

5. $z = y \cdot tgx + x^2 y - 3x^2 - 5y$; $M(0;5)$; $\overline{a} = \overline{i} + 2\overline{j}$.

Частина 2

IV. Диференціальні рівняння

1. $y' = (2y-3)tgx$, $y(2\pi) = 6$;

2. $xy' - y = (x+y)\ln\frac{x+y}{x}$;

3. $y' - \frac{y}{x} = x^3 + 2$, $y(1) = \frac{1}{3}$;

4. а) $y'' - 4y' + 13y = 0$; б) $y'' + 3y' - 28y = 0$;

   в) $36y'' - 60y' + 25y = 0$, $y(0) = \frac{5}{6}$, $y'(0) = \frac{25}{36}$;

5. $y'' + 3y' + 2y = 4x + 12$.

V. Диференціальні рівняння другого порядку

1. $x^2 y'' = (y')^2$, $y(1) = \frac{1}{2}$, $y'(1) = 1$;

2. $y'' = \frac{1}{(y')^2}$;

3. $4y'' - y = x^3 - 24x$;

4. $y'' + 2y' + 5y = 4\sin x$;

5. $y'' + 6y' + 9y = 9xe^{-3x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.

VI. Числові і функціональні ряди

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{3^n(n+1)!}$.

2. а) $1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \ldots$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$.

3. а) $(x-2) - \frac{(x-2)^2}{2} + \frac{(x-2)^3}{3} + \ldots$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+3}$.

4. $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, $x_0 = 0$.

5. $f(x) = x\sin 2x$.

ВАРІАНТ №9
Частина 1

I. Невизначений інтеграл

1. а) $\int\left(\sqrt[9]{x}+4\sin x\right)dx$; б) $\int\left(\frac{16}{\sin^2 x}-(x+5)^8\right)dx$.

2. а) $\int\frac{x^7}{19+x^8}dx$; б) $\int\frac{arctg^6 8x}{1+64x^2}dx$.

3. а) $\int(6x+1)e^{4x}xdx$; б) $\int\frac{\ln 2x}{x^2}dx$.

4. а) $\int\frac{18+x}{x^2-16x+9}dx$; б) $\int\frac{x+5}{\sqrt{x^2+7x+20}}dx$.

5. а) $\int\sin^5(3+x)dx$; б) $\int\sin^4\frac{x}{5}dx$.

II. Визначений інтеграл

1. а) $\int\limits_0^{\pi/10}\cos 5xdx$; б) $\int\limits_{\pi/3}^{\pi}\frac{\sin xdx}{5-3\cos x}$; в) $\int\limits_0^{16}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}dx$.

2. $\int\limits_1^{e}(x+1)\ln xdx$.

3. а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}2x^3dx$; б) $\int\limits_2^{\infty}x3^{-x^2}dx$.

4. $y=4-x^2, y=0$.

5. $y=e^x, y=e^{3x}, x=1$.

III. Функції багатьох змінних

1. $z=\sqrt{x^2+y^2-9}+\sqrt{y-x}$.

2. $z=\frac{x}{2x-3y}$; $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

3. $z=3x^2+3xy+y^2-15x-8y$.

4. $z=y\cdot\sin x+x^2y-3y+7x$; $M(0;-3)$.

5. $z=\ln xy+x^2-y^2-2$; $M(1;1)$; $\bar{a}=4\bar{i}-3\bar{j}$.

Частина 2

IV. Диференціальні рівняння

1. $y' = 2^{x-y}$, $y(1) = 1$;

2. $(x^2 + xy) \cdot y' = x\sqrt{x^2 - y^2} + xy + y^2$;

3. $y' - \frac{y}{x} = x \cdot tgx$, $y(\pi) = \pi$;

4. а) $4y'' - 8y' + 5y = 0$; б) $6y'' + 7y' - 20y = 0$;

   в) $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$;

5. $y'' + y = \sin 2x$.

V. Диференціальні рівняння другого порядку

1. $x^3 y'' + x^2 y' = 1$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$;

2. $y'' = \sqrt{1 + (y')^2}$;

3. $y'' - 5y' - 14y = e^{2x}(2x^2 - 3x + 1)$;

4. $y'' + 4y = \sin x$;

5. $y'' - y' = 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

VI. Числові і функціональні ряди

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{3n+1}}{5^{2n-1}}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n+1)!}$.

2. а) $-\frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} + \frac{1}{17} - \ldots$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$.

3. а) $1 - 4x + 16x^2 - 64x^3 + \ldots$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{3^{n+1}}$.

4. $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

5. $f(x) = 1 - \cos 3x$.

ВАРІАНТ №10
Частина 1

I. Невизначений інтеграл

1. а) $\int\left(\frac{15}{49-x^2}+\frac{7}{x}\right)dx$; б) $\int\left(\sqrt{x}-\frac{84}{1+x^2}\right)dx$.
2. а) $\int x^9 e^{x^{10}}dx$; б) $\int\frac{x^5}{\sqrt{4-x^{12}}}dx$.
3. а) $\int(x+8)e^{x/4}dx$; б) $\int x^3\ln 16x dx$.
4. а) $\int\frac{x+6}{x^2+9x-8}dx$; б) $\int\frac{x-4}{\sqrt{x^2+6x+25}}dx$.
5. а) $\int\cos^3(x+1)\sin^3(x+1)dx$; б) $\int\cos^4 16x dx$.

II. Визначений інтеграл

1.) $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{dx}{\sin^2 x}$; б) $\int\limits_1^e\frac{1+\ln x}{x}dx$; в) $\int\limits_0^4\frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.
2. $\int\limits_0^{\pi/4}x\cdot\cos^2 x dx$.
3. а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}(2x+3)dx$; б) $\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$.
4. $y=\sqrt{x}, y=0, x=1, x=9$.
5. $y=2\sin x, x=0, x=\pi$.

III. Функції багатьох змінних

1. $z=\arcsin\frac{x}{2}+\sqrt{9-x^2-y^2}$.
2. $z=y\cdot\ln(x^2-y^2)$; $y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=xz$.
3. $z=x^2+xy+y^2-x-2y+5$.
4. $z=e^{xy}(x-y)$; $M(0;2)$.
5. $z=y\cdot\sin x+xy-3x^2-2y$; $M(0;3)$; $\bar{a}=\bar{i}-3\bar{j}$.

Частина 2

IV. Диференціальні рівняння

1. $y' = xy + e^x y$, $y(0) = 3$;

2. $xy' = y\cos\left(\ln\dfrac{y}{x}\right)$;

3. $y' - \dfrac{y}{x} = 2x^2\sqrt{x^2+5}$, $y(2) = 36$;

4. а) $6y'' + 11y' - 35y = 0$; б) $y'' - 4y' + 53y = 0$;

   в) $y'' + 18y' + 81y = 0$, $y(0) = -9$, $y'(0) = 81$;

5. $y'' + 2y' + y = e^{-x}$.

V. Диференціальні рівняння другого порядку

1. $(1+x^2)y'' + 2xy' + 2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

2. $yy'' = (y')^2 + 1$;

3. $y'' - y' = 6x^2 + 3x$;

4. $y'' + y = 2\cos 4x$;

5. $y'' + 4y' - 12y = 8\sin 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

VI. Числові і функціональні ряди

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n^2+2}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5}{(2n+1)!}$.

2. а) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{2^2} + \dfrac{3}{2^3} - \dfrac{4}{2^4} + \ldots$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n-1)}{3n}$.

3. а) $\dfrac{1}{2}x + \dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{3}{4}x^3 + \ldots$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{(2n)^2}$.

4. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 4$.

5. $f(x) = 1 - e^{3x}$.

ВАРІАНТ №11
Частина 1

I. Невизначений інтеграл

1. а) $\int\left(\frac{4}{16-x^2}+\sqrt[5]{x}\right)dx$; б) $\int\left(3\cos x+7x^6-4^x\right)dx$.

2. а) $\int\frac{e^{tg3x}}{\cos^2 3x}dx$; б) $\int\frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 4x-12}}$.

3. а) $\int(4-5x)e^{7x}dx$; б) $\int(6-x)\cos 13x dx$.

4. а) $\int\frac{4+x}{8-10x-x^2}dx$; б) $\int\frac{x+11}{\sqrt{x^2+4x+13}}dx$.

5. а) $\int\cos^9 3x\sin^3 3x dx$; б) $\int\cos^5(7+x)dx$.

II. Визначений інтеграл

1. а) $\int\limits_0^{1/4}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; б) $\int\limits_0^1\frac{dx}{x^2+6x+16}$; в) $\int\limits_1^4\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}dx$.

2. $\int\limits_1^2\frac{\ln x}{x^3}dx$.

3. а) $\int\limits_0^{\infty}(x^2-5)dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^x(e^{-3x}+2)dx$.

4. $y=x^2-2x, y=0, x=4$.

5. $xy=3, x=2, x=3, y=0$.

III. Функції багатьох змінних

1. $z=\sqrt{1-x^2+y}+\sqrt{1-x^2-y}$.

2. $z=x\cdot\sin\frac{y}{x}-x^2-y^2$; $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-x^2-y^2$.

3. $z=x^2+xy+y^2-2x-y$.

4. $z=e^{x^2y}+x^3-2y^2+x-3y$; $M(0;-2)$.

5. $z=x^3-y\cdot\sin x+2x-3y$; $M(0;-1)$; $\bar{a}=2\bar{i}-\bar{j}$.

Частина 2

IV. Диференціальні рівняння

1. $y' \cos x = y \sin x$, $y(\pi) = 3$;

2. $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y$;

3. $y' - \frac{y}{x} = e^{x^2} x^2$, $y(1) = e$;

4. а) $y'' - 6y' + 34y = 0$; б) $42y'' - 23y' - 5y = 0$;

   в) $49y'' - 56y' + 16y = 0$, $y(0) = \frac{4}{7}$, $y'(0) = \frac{16}{49}$;

5. $y'' + 4y = 2\cos 2x$.

V. Диференціальні рівняння другого порядку

1. $xy'' + y' - x^2 = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$;

2. $yy'' + (y')^2 = 0$;

3. $y'' - y' - y = (3x + 7)e^{2x}$;

4. $y'' + 5y' + 6y = 12\cos 2x$;

5. $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

VI. Числові і функціональні ряди

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{(n+4)n!}$.

2. а) $1 - \frac{1}{8} + \frac{1}{27} - \frac{1}{64} + \ldots$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!}$.

3. а) $\frac{x+1}{1 \cdot 2} + \frac{(x+1)^2}{2 \cdot 3} + \frac{(x+1)^3}{3 \cdot 4} + \ldots$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n tg \frac{x}{3^n}$.

4. $f(x) = -\frac{1}{x}$, $x_0 = -2$.

5. $f(x) = (1 - 3x)^{-3}$.

ВАРІАНТ №12
Частина 1

I. Невизначений інтеграл

1. а) $\int\left(3\cos x-\frac{12}{\sqrt{1+16x^2}}\right)dx$; б) $\int\frac{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3}{x}dx$.

2. а) $\int\frac{x^3dx}{x^8-25}$; б) $\int e^x\sin e^x dx$.

3. а) $\int(3x-1)2^x dx$; б) $\int\arccos 5x dx$.

4. а) $\int\frac{x+6}{\sqrt{2-x^2-7x}}dx$; б) $\int\frac{12-x}{x^2+16x-7}dx$.

5. а) $\int\cos^5(x+12)dx$; б) $\int\sin^2 12x\cos^2 12x dx$.

II. Визначений інтеграл

1. а) $\int\limits_{-2}^{-1}\frac{dx}{(11+5x)^3}$; б) $\int\limits_{1}^{e^3}\frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; в) $\int\limits_{2}^{3}\frac{dx}{2x^2+3x-2}$.

2. $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx$.

3. а) $\int\limits_0^{\infty}\cos x dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

4. $y=\sqrt{x-3}, y=0, x=7$.

5. $y=x^4, y=x$.

III. Функції багатьох змінних

1. $z=\sqrt{2x-y}+\ln x$.

2. $z=\frac{y^2}{3x}+\arcsin(xy)$; $x^2\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}+y^2=0$.

3. $z=x^2+xy+y^2-6x-1$.

4. $z=x\cdot\cos y+xy+5y-3x$; $M(0;0)$.

5. $z=\frac{x^2}{y}-xy^3+\ln x$; $M(-1;1)$; $\bar{a}=-2\bar{i}+\bar{j}$.

Частина 2

IV. Диференціальні рівняння

1. $\cos^2 x \cdot (1+tgx)\cdot y' = y$, $\quad y(0)=3$;

2. $xy' = \sqrt{2x^2+y^2}+y$;

3. $y' - \dfrac{y}{x} = x^2 e^x$, $\quad y(1)=2$;

4. а) $y'' + 3y = 0$; $\quad$ б) $21y'' - 32y' - 5y = 0$;

   в) $64y'' - 80y' + 25y = 0$, $\quad y(0)=\dfrac{5}{8}$, $\quad y'(0)=\dfrac{25}{64}$;

5. $y'' + 2y' + y = 3e^{-x}$.

V. Диференціальні рівняння другого порядку

1. $x^4 y'' + x^3 y' = 1$, $\quad y(1)=\dfrac{1}{4}$, $\quad y'(1) = -\dfrac{1}{2}$;

2. $y'' y^2 = (y')^3$;

3. $5y'' - 6y' + 5y = 13e^{2x}$;

4. $y'' - 3y' - 10y = \sin x$;

5. $y'' - 4y = 6x^2 + 1$, $\quad y(0)=2$, $\quad y'(0)=3$.

VI. Числові і функціональні ряди

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)n!}{3^n}$, $\qquad$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n+1}}{\sqrt[3]{n+1}}$.

2. а) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{8} - \dfrac{1}{11} + \ldots$, $\qquad$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n!}$.

3. а) $\dfrac{x^2}{1} + \dfrac{x^3}{4} + \dfrac{x^4}{9} + \dfrac{x^5}{16} + \ldots$, $\qquad$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-3)^n}{(n+1)5^n}$.

4. $f(x) = \arcsin x$, $\quad x_0 = 0$

5. $f(x) = \dfrac{1}{x}(1-\cos 3x)$.

ВАРІАНТ №13
Частина 1

I. Невизначений інтеграл

1. а) $\int\left(\frac{7}{6-x^2}-3e^{4x}\right)dx$; б) $\int\left(4^{5x}-2\cos 4x\right)dx$.

2. а) $\int 2x^5\left(9-x^6\right)^3 dx$; б) $\int \frac{7^{ctg\,2x}\,dx}{\sin^2 2x}$.

3. а) $\int (6-5x)\sin 14x dx$; б) $\int x^3 \ln 7x dx$.

4. а) $\int \frac{21-x}{x^2+5x-12}dx$; б) $\int \frac{x+18}{\sqrt{x^2+4x+19}}dx$.

5. а) $\int \sin^5(6-x)dx$; б) $\int \cos^4 \frac{x}{17}dx$.

II. Визначений інтеграл

1. а) $\int_1^2\left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)dx$; б) $\int_0^{\pi/2}\cos^5 x\sin 2x dx$; в) $\int_3^{3\sqrt{3}}\frac{dx}{9+x^2}$.

2. $\int_0^{\pi/2} x\cos x dx$.

3. а) $\int_0^{\infty}\sqrt{x}dx$; б) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+6x+12}$.

4. $y=\sin 2x, y=0, x=\frac{\pi}{8}, x=\frac{3\pi}{8}$.

5. $y=\sqrt{x}, y=\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}, y=0$.

III. Функції багатьох змінних

1. $z=\frac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2}}+\sqrt{x-y}$.

2. $z=\sin^2(3x-4y)$; $4\frac{\partial z}{\partial x}+3\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

3. $z=x^2+3y^2-x+6y-4$.

4. $z=\ln y-\frac{y^2}{x}+x+\frac{y}{2}$; $M(2;2)$.

5. $z=x^2+3y^3-xy$; $M(1;1)$; $\overline{a}=12\overline{i}-5\overline{j}$.

Частина 2

IV. Диференціальні рівняння

1. $y' ctgx + y = 2$, $y(\pi) = 0$;

2. $(2x - y)y' = x + 2y$;

3. $y' - \dfrac{y}{x} = x\ln x$, $y(2) = 2$;

4. а) $y'' - 49y' = 0$; б) $y'' - 8y' + 65y = 0$;

   в) $81y'' + 36y' + 4y = 0$, $y(0) = -\dfrac{2}{9}$, $y'(0) = \dfrac{4}{81}$;

5. $y'' + y = 5 - 13x$.

V. Диференціальні рівняння другого порядку

1. $xy'' + y' + x = 0$, $y(1) = \dfrac{1}{2}$, $y'(0) = 0$;

2. $yy' = y'(y' - 1)$;

3. $y'' + 4y' + 4y = 8e^{-2x}$;

4. $y'' + 2y' + 2y = 2\cos x$;

5. $y'' + 3y' = 3(2 - x^2)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

VI. Числові і функціональні ряди

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{(3n-1)2^n}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2+3}{5^n}$.

2. а) $\dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{5} + \dfrac{6}{7} - \dfrac{8}{9} + \ldots$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^3(n+1)}$.

3. а) $\dfrac{3(x+2)}{1} + \dfrac{3^2(x+2)^2}{1\cdot 2} + \dfrac{3^3(x+2)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n\cdot 3^n}$.

4. $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$.

5. $f(x) = x^{-1}\sin 3x$.

ВАРІАНТ №14
Частина 1

I. Невизначений інтеграл

1. а) $\int\left(\frac{9}{x}+16\cos^{-2}x\right)dx$; б) $\int\left(5tg3x-\sqrt[7]{x}\right)dx$.

2. а) $\int\frac{\ln^{27}4x}{x}dx$; б) $\int\frac{e^x dx}{\sqrt[9]{3+e^x}}$.

3. а) $\int(3x+7)e^{0.2x}dx$; б) $\int\arccos 6x dx$.

4. а) $\int\frac{5+x}{48-9x-x^2}dx$; б) $\int\frac{6-x}{\sqrt{x^2+5x+39}}dx$.

5. а) $\int\cos^7 6x\sin^3 6x dx$; б) $\int\cos^4 17x dx$.

II. Визначений інтеграл

1. а) $\int_0^1\sqrt{1+x}dx$; б) $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{3+2\cos x}$; в) $\int_0^1(e^x-1)^4e^x dx$.

2. $\int_0^{\pi}x^2\sin x dx$.

3. а) $\int_{-\infty}^0(x^2+x-1)dx$; б) $\int_0^{\infty}\frac{xdx}{x^2+1}$.

4. $y=x^2, y=0, x=2, x=3$.

5. $y=\sqrt{x}, x=9, y=0$.

III. Функції багатьох змінних

1. $z=\sqrt{x}+\arcsin y$.

2. $z=e^{xy}$; $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2xyz$.

3. $z=xy-3x^2-2y^2+10$.

4. $z=x^2y-\sqrt{x}-3y^2$; $M(1;2)$.

5. $z=5x+10x^2y+y^5$; $M(1;-1)$; $\bar{a}=3\bar{i}+4\bar{j}$.

Частина 2

IV. Диференціальні рівняння

1. $xy' = \frac{x-1}{y}e^{2x} + y'$, $\quad y(1) = e$;

2. $3x^2 y' = y^2 + 10xy + 10x^2$;

3. $y' - \frac{y}{x} = e^x$, $\quad y(1) = 2$;

4. а) $3y'' - 5y' + 2y = 0$; $\quad$ б) $y'' - 8y' + 41y = 0$;

   в) $16y'' - 40y' + 25y = 0$, $\quad y(0) = \frac{5}{4}$, $\quad y'(0) = \frac{25}{16}$;

5. $y'' + y = 2\cos 3x$.

V. Диференціальні рівняння другого порядку

1. $xy'' - y' = x^2$, $\quad y(1) = 2$, $\quad y'(1) = 0$;

2. $2yy'' = (y')^2$;

3. $y'' + 5y' + 6y = 10e^{-2x}$;

4. $y'' + 121y = 11\sin x$;

5. $y'' - 4y' = 32 - 384x^2$, $\quad y(1) = 2$, $\quad y'(1) = 0$.

VI. Числові і функціональні ряди

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^2}$, $\quad$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^{n+1}}$.

2. а) $\frac{1}{102} - \frac{2}{104} + \frac{3}{106} - \frac{4}{108} + \ldots$, $\quad$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$.

3. а) $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$, $\quad$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n \cdot 7^n}$.

4. $f(x) = \cos x$, $\quad x_0 = \frac{\pi}{4}$.

5. $f(x) = \frac{4}{5 - x^2}$.

ВАРІАНТ №15
Частина 1

I. Невизначений інтеграл

1. а) $\int\left(\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}+16x^{15}\right)dx$; б) $\int x^{-3}\left(x^3e^{2x}-x^2\right)dx$.

2. а) $\int\frac{3x^8}{\sqrt[6]{x^9+15}}dx$; б) $\int\cos x\cdot e^{\sin x}dx$.

3. а) $\int(4x+27)e^{19x}dx$; б) $\int\arccos 0.5xdx$.

4. а) $\int\frac{12+x}{x^2+3x+7}dx$; б) $\int\frac{64-x}{\sqrt{2x-x^2+9}}dx$.

5. а) $\int\cos^5 3x\sin^3 3xdx$; б) $\int\sin^4 9xdx$.

II. Визначений інтеграл

1. а) $\int\limits_0^4\left(1+e^{\frac{x}{4}}\right)dx$; б) $\int\limits_1^3\frac{dx}{x^2+x}$; в) $\int\limits_{-1}^0\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

2. $\int\limits_0^{e-1}\ln(x+1)dx$.

3. а) $\int\limits_0^{\infty}(2x^2+5)dx$; б) $\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}$.

4. $y=4x-x^2, y=-x+4$.

5. $y=\cos x, x=0, x=\frac{\pi}{6}$.

III. Функції багатьох змінних

1. $z=\sqrt{x-y+2}\cdot\ln(x+y)$.

2. $z=e^{-x-3y}\cdot\sin(x+3y)$; $\frac{\partial z}{\partial y}-3\frac{\partial z}{\partial x}=0$.

3. $z=1+6x-x^2-xy-y^2$.

4. $z=x^3y-\sin x+y^3$; $M(0;-1)$.

5. $z=tgx^2+x^2y-\frac{3}{y}$; $M(0;1)$; $\overline{a}=\overline{i}+2\overline{j}$.

Частина 2

IV. Диференціальні рівняння

1. $y' + e^x = yy'$, $y(0) = 2$;

2. $(3x^2 - 2xy)y' = x^2 + 3xy - y^2$;

3. $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3$, $y(0) = 0$;

4. а) $y'' - 17y' + 16y = 0$; б) $y'' - 14y' + 130y = 0$;

   в) $25y'' - 90y' + 81y = 0$, $y(0) = \dfrac{9}{5}$, $y'(0) = \dfrac{81}{25}$;

5. $y'' + 9y = 4e^{3x}$.

V. Диференціальні рівняння другого порядку

1. $(1 + x^2)y'' + 2xy' + 2x = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$;

2. $yy'' - y'(1 + y') = 0$;

3. $y'' - 5y' = e^{2x}(2x^2 - 3x - 1)$;

4. $y'' + 225y = 2\sin 15x$;

5. $y'' - 10y' + 25y = 10e^{5x}$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 1$.

VI. Числові і функціональні ряди

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{3^n}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n-1}}{(n+2)!4^n}$.

2. а) $-\dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{6} - \dfrac{8}{9} + \dfrac{16}{12} - \ldots$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2(n+3)}$.

3. а) $1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \ldots$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+3)^n}{n^2}$.

4. $f(x) = e^{-x^2}$, $x_0 = 0$.

5. $f(x) = \sin 2x + \cos 3x$.

ВАРІАНТ №16
Частина 1

I. Невизначений інтеграл

1. а) $\int x^9\left(3x^5-24x^{-10}\right)dx$;   б) $\int\left(4\sin x+3^{4x}\right)dx$.

2. а) $\int x\left(x^2+29\right)^7 dx$;   б) $\int\frac{\ln^7 9xdx}{x}$.

3. а) $\int(6+11x)\cos 3xdx$;   б) $\int \arcsin 19xdx$.

4. а) $\int\frac{x+25}{x^2+5x-16}dx$;   б) $\int\frac{4-x}{\sqrt{x^2+6x-10}}dx$.

5. а) $\int\cos^2 4x\sin^2 4xdx$;   б) $\int\sin^5\frac{x}{25}dx$.

II. Визначений інтеграл

1. а) $\int\limits_2^3\frac{x^2-x+2}{x^4}dx$;   б) $\int\limits_{\pi/12}^{5\pi/12}\sin 3x\sin xdx$;   в) $\int\limits_0^{\pi/4}\frac{\sin xdx}{\cos^2 x}$.

2. $\int\limits_0^1 x\cdot arctgxdx$.

3. а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}xdx$;   б) $\int\limits_5^{\infty}\frac{dx}{x^2-8x+20}$.

4. $y=2x-x^2, y=1, x=0$.

5. $y=x^2, y=2x^2, x=1$.

III. Функції багатьох змінних

1. $z=\ln\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-1\right)+\sqrt{x}$.

2. $z=arctg\frac{x}{y}$; $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

3. $z=x^2+2xy+4y^2-x+2y+1$.

4. $z=\sin x^2+x^3y-3y+xy^3$; $M(0;-2)$.

5. $z=x^5+10xy^2+5y$; $M(-1;1)$; $\bar{a}=4\bar{i}+3\bar{j}$.

Частина 2

IV. Диференціальні рівняння

1. $y' - \dfrac{4xy}{x^2-1} = 0$, $y(\sqrt{2}) = 1$;

2. $xy' \sin\dfrac{y}{x} + x = y\sin\dfrac{y}{x}$;

3. $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y = 1$, $y(1) = 0$;

4. а) $3y'' + 6y' + 2y = 0$; б) $y'' - 18y' + 90y = 0$;

   в) $49y'' - 112y' + 64y = 0$, $y(0) = \dfrac{8}{7}$, $y'(0) = \dfrac{64}{49}$;

5. $y'' + 9y = 5\sin 3x$.

V. Диференціальні рівняння другого порядку

1. $y'' - \dfrac{y'}{x} = xe^x$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$;

2. $y'' + 2y(y')^3 = 0$;

3. $y'' + y' - 2y = x^2 e^{4x}$;

4. $y'' - y = \sin x$;

5. $y'' + 9y = e^{-3x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

VI. Числові і функціональні ряди

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+4}{3^n}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{3n+1}$.

2. а) $-1 + \dfrac{2}{3} - \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{7} - \ldots$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)3^n}$.

3. а) $\dfrac{x}{4} + \left(\dfrac{x}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{4}\right)^3 + \ldots$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+2)^n}{n}$.

4. $f(x) = \cos x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

5. $f(x) = e^{-3x} - \cos 3x$

ВАРІАНТ №17
Частина 1

I. Невизначений інтеграл

1. а) $\int\left(\frac{3}{\sin^2 4x}+\sqrt[5]{x}\right)dx$; б) $\int\left(\frac{5}{\sqrt{x^2+7}}-tg2x\right)dx$.

2. а) $\int e^{2x}\left(3-e^{2x}\right)^6 dx$; б) $\int\frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}$.

3. а) $\int x^5\ln 4xdx$; б) $\int arctg6xdx$.

4. а) $\int\frac{6-x}{\sqrt{4-x^2+9x}}dx$; б) $\int\frac{x+1}{x^2+17x-9}dx$.

5. а) $\int\cos^2 24x\sin^2 24xdx$; б) $\int\cos^5(6-7x)dx$.

II. Визначений інтеграл

1. а) $\int\limits_{-1}^{2}\left(16x^3+9x^2-12x+1\right)dx$; б) $\int\limits_{\pi/12}^{3\pi}\cos\frac{x}{3}dx$; в) $\int\limits_{0}^{e}\frac{1}{e^x+1}dx$.

2. $\int\limits_{1}^{e}\ln^2 xdx$.

3. а) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+10}$.

4. $y=x^2+2x+1, y=x+3$.

5. $y=\cos x, y=0, x=0, x=\frac{\pi}{4}$.

III. Функції багатьох змінних

1. $z=\arcsin 2x+\sqrt{x-y}$.

2. $z=tg^3(2x-3y)$; $3\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

3. $z=5x^2+2y^2+2x+3y-1$.

4. $z=\sin(x^2-y)-x^3+3y^2$; $M(-1;1)$.

5. $z=\ln(x^2+x+y^2+xy)$; $M(0;1)$; $\bar{a}=3\bar{i}-4\bar{j}$.

Частина 2

IV. Диференціальні рівняння

1. $(y' + 1)e^{2y} = 4$, $y(1) = 0$;

2. $(xy' - y)ctg\dfrac{y}{x} = x$;

3. $y' + y\cos x = \cos x$, $y(0) = 3$;

4. а) $3y'' - 5y' - 2y = 0$; б) $y'' - 4y' + 5y = 0$;

   в) $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$;

5. $y'' + y = 12 - 7x$.

V. Диференціальні рівняння другого порядку

1. $y'' + \dfrac{y'}{x} - \dfrac{1}{x^3} = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$;

2. $y'\left(1 + (y')^2\right) = y''$;

3. $y'' + 2y' + y = (18x + 21)e^{-x}$;

4. $y'' + 49y = 14\sin 7x$;

5. $y'' - 13y' + 12y = 18x^2 - 39$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

VI. Числові і функціональні ряди

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{10^n}{n!}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3 + 1}{5^n}$.

2. а) $\dfrac{1}{\ln 2} - \dfrac{1}{\ln 3} + \dfrac{1}{\ln 4} - \dfrac{1}{\ln 5} + \ldots$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{3^n n!}$.

3. а) $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{1}{2^2}\dfrac{x^4}{4} + \ldots$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^n}{2^n}$.

4. $f(x) = \dfrac{x}{4 + x}$, $x_0 = 0$.

5. $f(x) = \sin 2x + \cos 2x$.

ВАРІАНТ №18
Частина 1

I. Невизначений інтеграл

1. а) $\int\left(\frac{5}{\sqrt{x}}+6\cos 3x\right)dx$; б) $\int\left(ctgx-\frac{16}{25+x^2}\right)dx$.

2. а) $\int x^5\cdot\sqrt[11]{3-5x^6}\,dx$; б) $\int\frac{dx}{x\sqrt{36-\ln^2 3x}}$.

3. а) $\int(2+3x)e^{x/7}dx$; б) $\int arctg\,0.4x\,dx$.

4. а) $\int\frac{x+8}{\sqrt{x^2+9x+6}}dx$; б) $\int\frac{7-x}{14-2x-x^2}dx$.

5. а) $\int\cos^5 21x\,dx$; б) $\int\sin^4\frac{x}{5}dx$.

II. Визначений інтеграл

1. а) $\int_2^3\frac{dx}{x^2}$; б) $\int_0^{\sqrt{3}}\frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}dx$; в) $\int_{\pi/8}^{\pi/6}\frac{dx}{\cos^2 2x}$.

2. $\int_0^2(2x+1)2^x dx$.

3. а) $\int_1^{\infty}(3x+4)dx$; б) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+8}$.

4. $y=\sqrt{x},\ y=\frac{x}{2}$.

5. $y=tgx,\ y=0,\ x=\frac{\pi}{3}$.

III. Функції багатьох змінних

1. $z=\sqrt{1-x^2-y^2}+\sqrt{x-y}$.

2. $z=y^2\cdot\sin(x^2-y^2)$; $y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz$.

3. $z=x^2+xy+y^2-3x-6y$.

4. $z=\cos(x-y^2)+3x^2-y^3$; $M(1;-1)$.

5. $z=\ln(x^2+y^2)$; $M(1;1)$; $\overline{a}=3\overline{i}-4\overline{j}$.

Частина 2

IV. Диференціальні рівняння

1. $xy^{/} - y^2 = y, \quad y(2) = 1;$
2. $xy^{/}(2y^2 + 6x^2) = 3y^3 + 12yx^2;$
3. $y^{/} + \dfrac{4xy}{x^2+1} = \dfrac{1}{x^2+1}, \quad y(0) = 1;$
4. а) $y^{//} - 5y^{/} + 6y = 0;$ б) $y^{//} + 4y^{/} + 13y = 0;$

   в) $9y^{//} + 30y^{/} + 25y = 0, \quad y(0) = -\dfrac{5}{3}, \quad y^{/}(0) = \dfrac{25}{9};$
5. $y^{//} + y = 4\cos 2x.$

V. Диференціальні рівняння другого порядку

1. $xy^{//} + y^{/} = x + 1, \quad y(1) = \dfrac{5}{4}, \quad y^{/}(1) = \dfrac{3}{2};$
2. $yy^{//} + y = (y^{/})^2;$
3. $y^{//} - y^{/} = 5(x+2)^2;$
4. $y^{//} + 2y^{/} + y = -2\sin x;$
5. $y^{//} + 4y^{/} + 4y = e^{-2x}(12x + 16), \quad y(0) = 0, \quad y^{/}(0) = 2.$

VI. Числові і функціональні ряди

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{(n+1)!},$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{6^n}{3n+2}.$
2. а) $\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{13} + \ldots,$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!2^n}.$
3. а) $\sin x + \dfrac{\sin 2x}{2^3} + \dfrac{\sin 3x}{3^3} + \ldots,$ б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{5n}.$
4. $f(x) = tgx, \quad x_0 = 0.$
5. $f(x) = \sin x - x\cos x.$

ВАРІАНТ №19
Частина 1

I. Невизначений інтеграл

1. а) $\int\left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}}-5^{4x}\right)dx$; б) $\int tg^2 13x dx$.

2. а) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int \frac{\sin 2x dx}{25+\cos^2 2x}$.

3. а) $\int(3x-19)\sin 2x dx$; б) $\int \arcsin 16x dx$.

4. а) $\int \frac{x+29}{x^2+10x+12}dx$; б) $\int \frac{7-x}{\sqrt{4-12x-x^2}}dx$.

5. а) $\int \sin^5 \frac{x}{9}dx$; б) $\int \cos^4(2x-7)dx$.

II. Визначений інтеграл

6. а) $\int_2^3 \frac{dx}{x^2}$; б) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}dx$; в) $\int_{\pi/8}^{\pi/6} \frac{dx}{\cos^2 2x}$.

7. $\int_0^2 (2x+1)2^x dx$.

8. а) $\int_1^{\infty}(3x+4)dx$; б) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+4x+8}$.

9. $y=\sqrt{x}, y=\frac{x}{2}$.

10. $y=tgx, y=0, x=\frac{\pi}{3}$.

III. Функції багатьох змінних

6. $z=\sqrt{1-x^2-y^2}+\sqrt{x-y}$.

7. $z=y^2\cdot\sin(x^2-y^2)$; $y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz$.

8. $z=x^2+xy+y^2-3x-6y$.

9. $z=\cos(x-y^2)+3x^2-y^3$; $M(1;-1)$.

10. $z=\ln(x^2+y^2)$; $M(1;1)$; $\overline{a}=3\overline{i}-4\overline{j}$.

Частина 2

IV. Диференціальні рівняння

1. $y' = 2\sqrt{y}\ln x$, $y(e)=1$;
2. $(2x+y)dx+(x+2y)dy=0$;
3. $y' + \dfrac{y}{x+1} + x^2 = 0$, $y(0)=2$;
4. а) $4y'' - 17y' + 4y = 0$; б) $y'' - 2y' + 82y = 0$;

   в) $49y'' + 84y' + 36y = 0$, $y(0) = -\dfrac{6}{7}$, $y'(0) = \dfrac{36}{49}$;
5. $y'' - y' = 3x + 11$.

V. Диференціальні рівняння другого порядку

1. $xy'' = y'\left(\ln(y') - \ln x\right)$, $y(1)=0$, $y'(1)=1$;
2. $y'' = -\dfrac{1}{2y^3}$;
3. $y'' + y' = 49 - 24x^3$;
4. $y'' + 2y' + 5y = -17\sin 2x$;
5. $y'' - 6y' + 9y = 4xe^x$, $y(1)=3$, $y'(1)=0$.

VI. Числові і функціональні ряди

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{3n+1}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{3^{n+1}}$.
2. а) $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\cdot 2^2} + \dfrac{1}{3\cdot 2^3} - \dfrac{1}{4\cdot 2^4} + \ldots$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n n}{2^n}$.
3. а) $(x-1) + \dfrac{(x-1)^2}{2^2} + \dfrac{(x-1)^3}{3^2} + \ldots$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n\cdot 5^n}$.
4. $f(x) = \ln x$, $x_0 = 2$
5. $f(x) = e^x - \cos x$.

ВАРІАНТ №20
Частина 1

I. Невизначений інтеграл

1. а) $\int\left(\frac{8}{3x}-\sqrt[7]{5+2x}\right)dx$; б) $\int x^{-1}(x+4)^3\,dx$.

2. а) $\int x^5\left(4-2x^6\right)^9 dx$; б) $\int\frac{ctg^3 6x dx}{\sin^2 6x}$.

3. а) $\int(2x-1)\cos\frac{x}{6}dx$; б) $\int x^5\ln 8x dx$.

4. а) $\int\frac{x-8}{x^2+24x-3}dx$; б) $\int\frac{6-x}{\sqrt{x^2+6x+15}}dx$.

5. а) $\int\cos^4(x-2)dx$; б) $\int\cos^5 28x\sin^3 28x dx$.

II. Визначений інтеграл

1. а) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\sin^2\frac{x}{4}dx$; б) $\int\limits_1^4\frac{2x^2+\frac{x}{2}+3}{\sqrt{x}}dx$; в) $\int\limits_2^7\frac{dx}{\sqrt{x+2}}$.

2. $\int\limits_0^1 xe^{-x}dx$.

3. а) $\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{1}{4}x^4dx$; б) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^x}dx$.

4. $y=x^2+2x+2, y=6-x^2$.

5. $y=-x^2+2, y=0$.

III. Функції багатьох змінних

1. $z=\arccos x+\sqrt{4-x^2-y^2}$.

2. $z=\sqrt{x^2-3y^2}$; $3y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

3. $z=3x^2+5y^2+3x+2y+1$.

4. $z=2x-5xy+\ln y^3$; $M(1;3)$.

5. $z=\ln(x+y^2)+xy$; $M(0;1)$; $\bar{a}=3\bar{i}+2\bar{j}$.

Частина 2

IV. Диференціальні рівняння

1. $(1+y^2)dx = xydy$, $y(2)=1$;

2. $x^2y' = y^2+6xy+6x^2$;

3. $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{x}{x-3}$, $y(4)=2$;

4. а) $y'' - 13y' + 22y = 0$; б) $y'' - 10y' + 89y = 0$;

   в) $9y'' + 48y' + 64y = 0$, $y(0) = -\dfrac{8}{3}$, $y'(0) = \dfrac{64}{9}$;

5. $y'' + 2y' + y = 9e^x$.

V. Диференціальні рівняння другого порядку

1. $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'}$, $y(2)=0$, $y'(2)=4$;

2. $yy'' - 2(y')^2 = 0$;

3. $y'' + 2y' - 3y = (8x+6)e^x$;

4. $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$;

5. $y'' - 13y' + 12y = x-1$, $y(1)=3$, $y'(1)=2$.

VI. Числові і функціональні ряди

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{3^n(n+1)}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{n! \cdot 2^{n+1}}$.

2. а) $\dfrac{1}{3} - \dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{7} - \dfrac{4}{9} + \ldots$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^3(n+1)}$.

3. а) $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^6}{6} + \ldots$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (x+1)^{2n} 4^n}{n}$.

4. $f(x) = \cos\dfrac{x}{2}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$

5. $f(x) = e^{2x} - \cos 2x$.

ВАРІАНТ №21
Частина 1

I. Невизначений інтеграл

1. а) $\int\left(\frac{4}{x}+3x\right)^3 dx$; б) $\int\left(\frac{16}{25-x^2}+4e^{-x}\right)dx$.

2. а) $\int\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$; б) $\int\frac{\cos 5xdx}{\sqrt{9-\sin^2 5x}}$.

3. а) $\int(14-5x)e^{8x}dx$; б) $\int arctg\frac{x}{8}dx$.

4. а) $\int\frac{x+3}{26-8x-x^2}dx$; б) $\int\frac{4-x}{\sqrt{x^2+18x-5}}dx$.

5. а) $\int\cos^2\frac{x}{12}\sin^2\frac{x}{12}dx$; б) $\int\cos^5(19x-2)dx$.

II. Визначений інтеграл

1. а) $\int\limits_{\pi/8}^{\pi/4} ctg2xdx$; б) $\int\limits_1^{13}\frac{dx}{\sqrt{6x+3}}$; в) $\int\limits_0^1\frac{xdx}{8+2x-x^2}$.

2. $\int\limits_0^{\pi}(2x+1)\sin xdx$.

3. а) $\int\limits_{-\infty}^0 3^x dx$; б) $\int\limits_1^{\infty}\frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

4. $y=\sqrt{x+4}, y=\frac{x}{3}+\frac{4}{3}$.

5. $y=x, y=3x, x=1$.

III. Функції багатьох змінних

1. $z=\ln(y-x^2)+\sqrt{x-y}$.

2. $z=xy+arctg\frac{y}{x}$; $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2xy$.

3. $z=x^2-xy+y^2-2x+3y+1$.

4. $z=x^2y^3-3y+\ln xy$; $M(1;-1)$.

5. $z=2\sin 2x+4x-y^2$; $M(0;1)$; $\bar{a}=4\bar{i}-3\bar{j}$.

Частина 2

IV. Диференціальні рівняння

1. $(1+x^2)y' + xy = 0$, $\quad y(\sqrt{2}) = 2$;

2. $2xy'(x^2+y^2) = y(y^2+2x^2)$;

3. $y' - \dfrac{y}{x} = x\sin^3 x$, $\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$;

4. а) $y'' - 12y' + 32y = 0$; б) $y'' - 2y' + 5y = 0$;

   в) $16y'' - 40y' + 25y = 0$, $\quad y(0) = \dfrac{5}{4}$, $\quad y'(0) = \dfrac{25}{16}$;

5. $y'' + 2y' + y = 3e^{4x}$.

V. Диференціальні рівняння другого порядку

1. $y''tgx - y' + \dfrac{1}{\sin x} = 0$, $\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, $\quad y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$;

2. $y''tgy = 2(y')^2$;

3. $y'' - y' = 3x^2 - 2x + 1$;

4. $y'' + 2y' + 5y = -\cos x$;

5. $y'' - 3y' + 2y = -4e^x$, $\quad y(0) = 1$, $\quad y'(0) = 2$.

VI. Числові і функціональні ряди

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n+1)5^n}{3n-1}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{n!}$.

2. а) $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{10} + \dfrac{1}{17} - \ldots$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 2n}{2n-1}$.

3. а) $\dfrac{x^2}{1\cdot 2} + \dfrac{x^3}{2\cdot 3} + \dfrac{x^4}{3\cdot 4} + \ldots$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (n^2+1)x^n}{5^n}$.

4. $f(x) = \sqrt{x}$, $\quad x_0 = 4$.

5. $f(x) = x\ln(10+x)$.

ВАРІАНТ №22
Частина 1

I. Невизначений інтеграл

1. а) $\int\left(\frac{27}{4x^2-64}-tg2x\right)dx$; б) $\int e^{-3x}\left(xe^{3x}+e^{6x}\right)dx$.
2. а) $\int\frac{\ln^{24}(x-5)}{x-5}dx$; б) $\int\frac{\cos 3xdx}{16-\sin^2 3x}$.
3. а) $\int(14-3x)e^{6x}dx$; б) $\int arcctg5xdx$.
4. а) $\int\frac{x+11}{14-6x-x^2}dx$; б) $\int\frac{27-x}{\sqrt{x^2+10x-5}}dx$.
5. а) $\int\cos^2 4x\sin^2 4xdx$; б) $\int\sin^5(6-3x)dx$.

II. Визначений інтеграл

1. а) $\int_0^1(x^3+\sqrt{x})dx$; б) $\int_0^{\pi}\cos^4 xdx$; в) $\int_4^5\frac{\ln^3 x}{x}dx$.
2. $\int_0^1\ln(x^2+1)dx$.
3. а) $\int_0^{\infty}(\sqrt{x}+1)dx$; б) $\int_{-\infty}^1\frac{e^{2x}+1}{e^x}dx$.
4. $y=4-x^2, y=-\frac{3x}{2}+\frac{3}{2}$.
5. $y=e^x, y=0, x=0, x=2$.

III. Функції багатьох змінних

1. $z=\arccos(x+1)+\sqrt{4-x^2-y^2}$.
2. $z=\ln(x^2-y^2)$; $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{2}{x+y}=0$.
3. $z=3x^2+3xy+y^2-15x-8y$.
4. $z=x^2\sin y+e^y-3x$; $M(2;0)$.
5. $z=\frac{x}{y}+xy$; $M(5;1)$; $\bar{a}=-3\bar{i}+4\bar{j}$.

Частина 2

IV. Диференціальні рівняння

1. $(x+1)y' - x = 0$, $y(-2) = 0$;

2. $xy' = 2y\ln\left(\frac{2y}{x}\right)$;

3. $y' - \frac{y}{x} = x\frac{\sin^3 x}{\cos x}$, $y(\pi) = \frac{\pi}{2}$;

4. а) $y'' - 8y' + 15y = 0$; б) $y'' - 10y' + 106y = 0$;

   в) $64y'' + 144y' + 81y = 0$, $y(0) = -\frac{9}{8}$, $y'(0) = \frac{81}{64}$;

5. $y'' + 2y' + y = 3\cos x$.

V. Диференціальні рівняння другого порядку

1. $y'' x\ln x - y' = 2$, $y(e) = 0$, $y'(e) = 0$;

2. $yy'' = y^2 y' + (y')^2$;

3. $y'' + y' - 6y = (20x+14)e^{2x}$;

4. $y'' - 25y = 25\sin 5x$;

5. $y'' + 4y = e^{4x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

VI. Числові і функціональні ряди

1. а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)!}{10n+1}$.

2. а) $2 - \frac{3}{4} + \frac{4}{9} - \frac{5}{16} + \ldots$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+1}$.

3. а) $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots$, б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n(n-1)}$.

4. $f(x) = e^x$, $x_0 = -2$.

5. $f(x) = e^{3x} - \cos 3x$.

ВАРІАНТ №23
Частина 1

I. Невизначений інтеграл

1. а) $\int\left(\frac{6}{\cos^2 3x}+e^{17x}\right)dx$; б) $\int\left(3\sqrt[3]{x}-\frac{4}{\sqrt[3]{x}}\right)^3 dx$

2. а) $\int\frac{\cos\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}dx$; б) $\int\frac{ctg^5 9xdx}{\sin^2 9x}$.

3. а) $\int\left(6-\frac{x}{3}\right)\sin 3xdx$; б) $\int x^9\ln 16xdx$.

4. а) $\int\frac{18-x}{x^2+12x+17}dx$; б) $\int\frac{x+4}{\sqrt{x^2+18x-9}}dx$.

5. а) $\int\sin^4(3-5x)dx$; б) $\int\sin^{17}2x\cos^3 2xdx$.

II. Визначений інтеграл

1. а) $\int\limits_{\pi/16}^{\pi/4}\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)dx$; б) $\int\limits_{-2}^{1}(x^2+x)^2dx$; в) $\int\limits_{-2}^{2}\frac{e^{2x}dx}{e^{2x}+1}$.

2. $\int\limits_0^1 2x\cdot 5^{3x}dx$.

3. а) $\int\limits_{-\infty}^{0}2^{3x}dx$; б) $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

4. $y=3-x, y=\frac{2}{x}$.

5. $y=2x-x^2, y=0$.

III. Функції багатьох змінних

1. $z=\arccos 2x+\sqrt{y-x}$.

2. $z=\frac{x^3+y^3}{3}+\frac{x^2y+xy^2}{2}$; $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=2(x+y)^2$.

3. $z=x^2+xy+y^2-6y-1$.

4. $z=e^{x^2y}+y^3-2x^2+y-3x$; $M(0;2)$.

5. $z=\ln(3x^2+y^2)$; $M(1;3)$; $\bar{a}=2\bar{i}-\bar{j}$.

Частина 2

IV. Диференціальні рівняння

1. $3y' - x^2 y' + x = 0$, $y(5) = 0$;

2. $xy' - y = \dfrac{x}{arctg\,\dfrac{2y}{x}}$;

3. $y' - \dfrac{y}{x} = x\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$, $y(5) = \dfrac{\pi}{2}$;

4. а) $y'' - 27y' + 50y = 0$; б) $y'' - 8y' + 52y = 0$;

   в) $y'' + 16y' + 64y = 0$, $y(0) = -8$, $y'(0) = 64$;

5. $y'' - y' = 7e^{2x}$.

V. Диференціальні рівняння другого порядку

1. $y'' + \dfrac{y'}{x} - x^2 = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$;

2. $2(y')^2 = (y-1)y''$;

3. $4y'' - y = x^3 - 24x$;

4. $y'' + 324y = 18\sin 18x$;

5. $y'' + 6y' + 9y = e^x(16x + 24)$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$.

VI. Числові і функціональні ряди

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{7^n}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!2^n}{n+5}$.

2. а) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{2}{\sqrt{5}} - \dfrac{3}{\sqrt{10}} + \dfrac{4}{\sqrt{17}} - \ldots$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)}$.

3. а) $(x+1) + \dfrac{(x+1)^2}{3} + \dfrac{(x+1)^3}{5} + \ldots$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2x)^n}{\sqrt[3]{n}}$.

4. $f(x) = \cos x$, $x_0 = -\dfrac{\pi}{3}$

5. $f(x) = \sqrt{1 + x^7}$.

ВАРІАНТ №24
Частина 1

I. Невизначений інтеграл

1. а) $\int\left(\frac{7}{3x}-2x\right)^2 dx$; б) $\int\left(\frac{4}{x^2+9}-3(x+2)^5\right)dx$.

2. а) $\int\frac{2^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$; б) $\int\frac{e^{4x}dx}{\sqrt{1+e^{8x}}}$.

3. а) $\int(4-3x)\cos 4x dx$; б) $\int\arccos 60x dx$.

4. а) $\int\frac{x+6}{x^2-4x+19}dx$; б) $\int\frac{16-x}{\sqrt{5-8x-x^2}}dx$.

5. а) $\int\cos^5(9-7x)dx$; б) $\int\sin^4\frac{x}{19}dx$.

II. Визначений інтеграл

1. а) $\int_1^2\frac{2x^3+1}{x^2}dx$; б) $\int_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{2}}\frac{xdx}{\sqrt{3x^2+1}}$; в) $\int_0^{\pi/6}e^{\sin x}\cos x dx$.

2. $\int_0^{\pi/4}x^2\cos x dx$.

3. а) $\int_1^{\infty}x\sqrt{x^3}dx$; б) $\int_{-\infty}^{0}xe^{2x}dx$.

4. $y=\cos x, y=1-\cos x$.

5. $y=2^x, y=0, x=0, x=1$.

III. Функції багатьох змінних

1. $z=\sqrt{9-x^2-y^2}+\ln(2x-y)$.

2. $z=\cos y+(y-x)\sin y$; $(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}$.

3. $z=3x^2+y^2+6x-y-4$.

4. $z=xy+y\cos x+3x-5y$; $M(0;0)$.

5. $z=arctg(xy^2)$; $M(2;1)$; $\bar{a}=4\bar{i}-3\bar{j}$.

Частина 2

IV. Диференціальні рівняння

1. $(2x^2y-3y)y' = 6x^2-2x^2y$, $\quad y(1)=0$;

2. $xy+y^2=(2x^2+xy)y'$;

3. $y'-\dfrac{y}{x}=x\sin^2 x\cos^2 x$, $\quad y(\pi)=1$;

4. а) $y''+y'-6y=0$; $\quad$ б) $y''-4y'+53y=0$;

   в) $16y''+72y'+81y=0$, $\quad y(0)=-\dfrac{9}{4}$, $\quad y'(0)=\dfrac{81}{16}$;

5. $y''+y=2\sin x$.

V. Диференціальні рівняння другого порядку

1. $x^2y''+xy'=1$, $\quad y(1)=0$, $\quad y'(1)=1$;

2. $2y''y+y^2-(y')^2=0$;

3. $y''-4y=(x^2+x)e^{2x}$;

4. $y''+2y'+5y=-\sin 2x$;

5. $y''+4y=x$, $\quad y(0)=1$, $\quad y'(0)=1$.

VI. Числові і функціональні ряди

1. а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n}$, $\qquad$ б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3n+1}$.

2. а) $\dfrac{1}{1\cdot 2}-\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}-\dfrac{1}{4\cdot 5}+\dots$, $\qquad$ б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{(n+1)!}$.

3. а) $3x^2+6x^5+9x^8+12x^{11}+\dots$, $\qquad$ б) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n+2}$.

4. $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $\quad x_0=2$.

5. $f(x)=e^x-x\sin x$.

ВАРІАНТ №25
Частина 1

I. Невизначений інтеграл

1. а) $\int\left(\frac{9}{\sqrt[4]{x}}-5\sin 18x\right)dx$; б) $\int\left(6(2x-5)^4+\frac{13}{9x^2+25}\right)dx$.
2. а) $\int\frac{\sin 5x dx}{\cos^4 5x}$; б) $\int\frac{e^{ctg 4x}dx}{\sin^2 4x}$.
3. а) $\int(4-x)5^x dx$; б) $\int x^{-3}\ln 16x dx$.
4. а) $\int\frac{5-x}{x^2-6x+7}dx$; б) $\int\frac{x+3}{\sqrt{x^2+10x-4}}dx$.
5. а) $\int\sin^5(39+2x)dx$; б) $\int\cos^4\frac{3x}{4}dx$.

II. Визначений інтеграл

1. а) $\int\limits_2^4\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$; б) $\int\limits_0^{\pi/2}9\sqrt{3\sin x+1}\cos x dx$; в) $\int\limits_0^1\frac{dx}{3x+1}$.
2. $\int\limits_0^{\pi/2}x\sin x dx$.
3. а) $\int\limits_4^{\infty}\frac{dx}{x^2-4}$; б) $\int\limits_1^{\infty}x^{-4}dx$.
4. $y=-x^2+6x-5, y=0$.
5. $y=\sin x, y=0, x=0, x=\frac{\pi}{2}$.

III. Функції багатьох змінних

1. $z=\ln(4-x^2-y^2)+\sqrt{y-3x}$.
2. $z=\frac{x}{y}$; $x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}=0$.
3. $z=xy-2x^2-3y^2+10$.
4. $z=xy^3+\sin y^2-3x+x^3y$; $M(-2;0)$.
5. $z=\ln(5x^2+3y^2)$; $M(1;1)$; $\bar{a}=-4\bar{i}+3\bar{j}$.

Частина 2

IV. Диференціальні рівняння

1. $y' \cos x = y \ln y$, $y(0) = e$;

2. $xy' = \sqrt{4x^2 + y^2} + y$;

3. $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{x}{(x-2)^2}$, $y(1) = 0$;

4. а) $y'' - 8y' + 7y = 0$; б) $y'' - 8y' + 17y = 0$;

   в) $36y'' - 12y' + y = 0$, $y(0) = \dfrac{1}{6}$, $y'(0) = \dfrac{1}{36}$;

5. $y'' + 2y' + y = 14 - 5x^2$.

V. Диференціальні рівняння другого порядку

1. $x^2 y'' + xy' = 1$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$;

2. $(y')^2 - yy'' = 0$;

3. $y'' + 2y' + y = 2 - 3x^2$;

4. $y'' + 100y = 20 \sin 10x$;

5. $y'' + 11y' = 11xe^{-11x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 11$.

VI. Числові і функціональні ряди

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{5^n}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^{n+1}}{3^n n^2}$.

2. а) $1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} - \dfrac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)n!}$.

3. а) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3x + 3 \cdot 4x^2 + \ldots$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+1)^n}{2^{n-1} \cdot n^2}$.

4. $f(x) = e^{2x}$, $x_0 = -3$.

5. $f(x) = \dfrac{1}{x} \sin x$.

Довідкові матеріали.

Частина 1.

І. Невизначений інтеграл.

Задача 1.

1. Функція $F(x)$ називається первісною від функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, якщо в усіх точках відрізку виконується рівність $F'(x) = f(x)$.

2. Множина усіх первісних $F(x) + C$ для функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ називається невизначеним інтегралом від $f(x)$ і позначається $\int f(x)dx$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C .$$

Функція $f(x)$ називається підінтегральною функцією, вираз $f(x)dx$ – підінтегральним виразом, x – змінною інтегрування, $\int$ – знаком невизначеного інтеграла.

3. Таблиця основних невизначених інтегралів.

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$.
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
3. $\int e^x dx = e^x + C$.
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$.
7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.
8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.
9. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$.
10. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$.
11. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| + C$.
12. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C$.
13. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$.
14. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$.
15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$.
16. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

4. *Властивості невизначеного інтеграла*.

1. Похідна невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2. Постійний множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx.$$

3. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченого числа функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від функцій, що додаються:

$$\int \left(f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)\right)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + \ldots + \int f_n(x)dx.$$

4. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$,то $\int f(u)du = F(u) + C$, де u=u(x) – довільна функція, яка має неперервну похідну.

Задача 2.

1. Якщо при знаходженні інтеграла $\int f(x)dx$ зробити підстановку (заміну змінної) $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – це функція, яка має неперервну похідну, то $dx = \varphi'(t)dt$ і виконується рівність:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

2. Підстановку $x = \varphi(t)$ необхідно підбирати так, щоб інтеграл в правій частині формули був табличним або легко зводився до табличного.

3. Після знаходження інтеграла $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ треба обов’язково повернутися до старої змінної інтегрування (підставивши замість t функцію обернену до $\varphi(x)$).

4. В багатьох інтегралах підстановку більш зручно зробити у вигляді $t = \varphi(x)$; тоді $dt = \varphi'(x)dx$.

Задача 3.

1. Якщо підінтегральний вираз можна записати у вигляді добутку udv, де $u(x)$

і *v(x)* – функції, які мають неперервні похідні, то має місце формула інтегрування частинами:

$$\int u dv = uv - \int v du \,.$$

2. Записати підінтегральний вираз у вигляді добутку udv можна декількома способами. Причому, множник dv обов'язково містить диференціал змінної інтегрування. Після вибору множників u і dv треба диференціюванням знайти du та інтегруванням – v. При обчисленні $v = \int dv$ довільну сталу опускають. Отримані значення u, v та du підставляють в праву частину формули. Множники u і dv будуть вибрані вірно, якщо інтеграл $\int v du$ є простішим за інтеграл $\int u dv$. Розглянемо основні типи інтегралів, які легко обчислити інтегруванням частинами.

3. В інтегралах вигляду $\int P_n(x)e^{kx}dx$, $\int P_n(x)a^{kx}dx$, $\int P_n(x)\cos kxdx$, $\int P_n(x)\sin kxdx$, де $P_n(x)$ – многочлен n-го степеня, k – число, зручно вибрати множник $u = P_n(x)$, dv – всі інші множники.

4. В інтегралах вигляду $\int P_n(x)\ln(ax+b)dx$ зручно взяти $dv=P_n(x)dx$, а $u=\ln(ax+b)$.

5. В інтегралах вигляду $\int P_n(x)\arcsin kxdx$, $\int P_n(x)\arccos kxdx$, $\int P_n(x)\operatorname{arctg} kxdx$, $\int P_n(x)\operatorname{arcctg} kxdx$, де $P_n(x)$ – многочлен, k – число, вибирають $dv = P_n(x)dx$, за u – функцію, що є множником при $P_n(x)$.

6. Метод інтегрування частинами можна, у разі необхідності, застосовувати декілька разів поспіль або комбінуючи з іншими методами інтегрування.

Задача 4.

1. Інтеграли вигляду $\int \frac{(mx+n)dx}{ax^2+bx+c}$ і $\int \frac{(mx+n)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ можна спростити, виділивши повний квадрат в знаменнику:

$$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right).$$

2. Підстановка $t=x+\frac{b}{2a}$ зводить даний інтеграл до табличного.

Задача 5.

1. Позначимо R ($\sin x$, $\cos x$) функцію зі змінними $\sin x$ та $\cos x$, над якими виконані дії додавання, віднімання, множення або ділення (R – знак раціональної функції).

2. Будь-який інтеграл виду $\int R(\sin x, \cos x)dx$ можна за допомогою підстановки $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ привести до інтеграла від функції, раціональної відносно t. В цьому випадку $\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, а

$$\int R(\sin x, \cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Така підстановка називається універсальною тригонометричною підстановкою.

В ряді випадків при інтегруванні тригонометричних функцій можна скористатися більш простими підстановками. Зокрема, однією з наступних, в залежності від вигляду підінтегральної функції.

3. В інтегралах $\int R(\sin x)\cos x dx$, де R – раціональна функція, можна застосувати підстановку $t = \sin x$; в інтегралах вигляду $\int R(\cos x)\sin x dx$ – підстановку $t = \cos x$.

4. Коли інтеграл має вигляд $\int R(\operatorname{tg} x)dx$, де R – раціональна функція, то він спрощується за допомогою підстановки $\operatorname{tg} x = t$.

5. Інтеграл вигляду $\int \sin^m x \cos^n x dx$ спрощується заміною змінних, яку зручно обрати в залежності від значень m і n, а саме:

5.1. коли n – ціле додатне непарне число, такий інтеграл можна спростити підстановкою $t = \sin x$;

5.2. підстановку $t = \cos x$ використовують, коли m – ціле додатне непарне число;

5.3. якщо m і n – цілі невід'ємні парні числа, то для спрощення інтеграла можна застосувати формули зниження степеня тригонометричних функцій :

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2};$$

5.4. коли $(m + n)$ – ціле від'ємне парне число, то використовують підстановку $\mathrm{tg}\, x = t$.

6. Інтеграли вигляду $\int \sin mx \sin nx dx$, $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$ обчислюються за допомогою формул:

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right],$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\sin(m-n)x + \sin(m+n)x\right],$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right].$$

II. Визначений інтеграл.

Задача 1.

1. Найпростішим методом обчислення визначеного інтеграла є формула Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)dx = \mathrm{F}(x)\Big|_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

де $F(x)$ – будь-яка первісна від функції $f(x)$.

2. Метод заміни змінної використовують тоді, коли можна вибрати таку функцію $x = g(t)$, що після підстановки підінтегральна функція стане простішою. Якщо при обчисленні інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ робиться підстановка $x = g(t)$, то формула заміни змінної має вигляд:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt,$$

де α, β – нові межі інтегрування, що знаходять із рівностей $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$.

3. При обчисленні визначеного інтеграла необхідно обов'язково перерахувати межі інтегрування. Повертатися до старої змінної не треба.

Задача 2.

1. Формула інтегрування частинами для визначеного інтеграла має вигляд:

$$\int_a^b udv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

2. Множники $u(x)$ і dv обираються так само, як в невизначеному інтегралі.

Задача 3.

1. Нехай функція $f(x)$ інтегрована на будь-якому відрізку $[a; b]$, тоді інтеграли

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)dx, \text{ де } c - \text{довільне число,}$$

називаються невласними інтегралами першого роду.

2. Якщо границі в правих частинах формул скінчені, то інтеграли називаються збіжними. Якщо ці границі не існують або дорівнюють нескінченості, то інтеграли є розбіжними.

Задача 4.

1. Площа криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x) \ge 0$, віссю Оx і прямими $x = a$, $x = b$ (рис. 1 а), обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b f(x)dx .$$

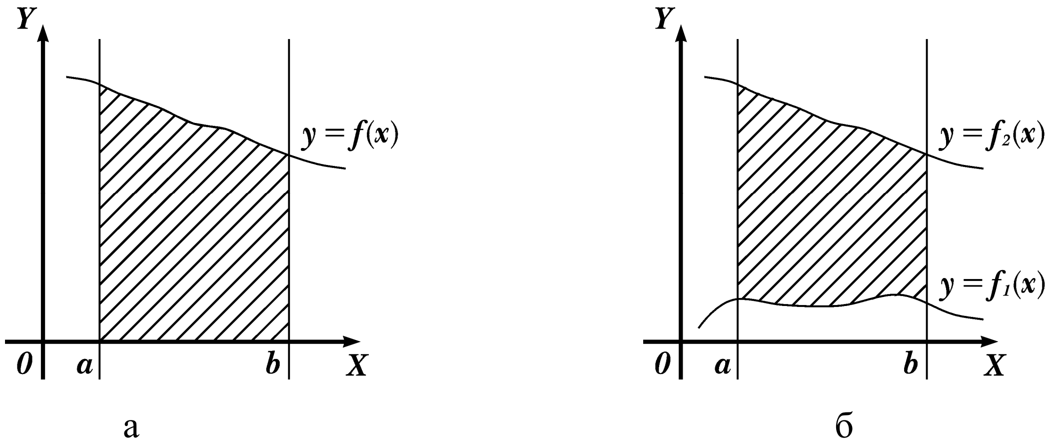

Рис. 1.

2. Якщо $f(x) < 0$ на $[a; b]$, то $S = -\int_a^b f(x)dx$.

3. Якщо фігура обмежена зверху графіком функції $y = f_2(x)$, знизу – $y = f_1(x)$, зліва і справа прямими $x = a$, $x = b$ відповідно (рис. 1 б), то її площа обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx .$$

4. Якщо фігура обмежена зверху лінією, що задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t) > 0$, $t \in [t_1; t_2]$, знизу – віссю Оx, зліва і справа – прямими $x=a$, $x = b$, то її площа дорівнює:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt ,$$

причому $x(t_1) = a$, $x(t_2) = b$.

Задача 5.

1. Нехай криволінійна трапеція (рис. 1 а) обертається навколо осі Оx. Тоді об'єм тіла обертання дорівнює:

$$V_{OX} = \pi\int_a^b f^2(x)dx .$$

2. Об'єм тіла, що утворене обертанням навколо осі Оy фігури, яка обмежена лініями $y = c$, $y = d$, $x = 0$, $x = g(y)$, обчислюється за формулою:

$$V_{OY} = \pi\int_c^d g^2(y)dy .$$

3. Якщо лінія, що обмежує криволінійну трапецію, задана параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_1; t_2]$, то об'єм тіла обертання навколо осі Оx обчислюється за формулою:

$$V_{OX} = \pi\int_{t_1}^{t_2} y^2(t)x'(t)dt$$

ІІІ. Функції багатьох змінних.

Задача 1.

1. Величина z називається функцією двох змінних x і y, якщо кожній впорядкованій парі (x, y) значень двох незалежних одна від одної змінних x і y з деякої області D площини Oxy відповідає єдине значення величини z.
Позначається функція двох змінних $z = f(x,y)$, або $z = F(x,y)$, або $z = z(x,y)$.

2. Множина D всіх точок (x, y), при яких $z = f(x, y)$ має сенс, називається областю визначення функції, а множина значень z, що приймає функція при $(x,y)\in D$, називається множиною значень функції.

Задача 2.

1. Розглянемо функцію двох змінних $z = f(x, y)$. Позначимо приріст функції по змінній x при фіксованому значенні y, як $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$, де Δx – приріст x. Аналогічно, $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$, де Δy – приріст y.

2. Частинною похідною по x від функції $z = f(x, y)$ називається границя відношення приросту функції по x $\Delta_x z$ до приросту змінної x, якщо останній прямує до нуля:

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

3. Частинна похідна від функції $z = f(x, y)$ по y визначається аналогічно:

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

4. Частинну похідну по x позначають: z'_x, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial x} f$, $\frac{\partial z(x, y)}{\partial x}$. Частинну похідну по y можна позначити z'_y, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial y} f$, $\frac{\partial z(x, y)}{\partial y}$.

5. При обчисленні похідної по змінній y постійною вважається x. Саме обчислення здійснюється за тими ж правилами і формулами, що і у функції однієї змінної (див. частину 1 даних вказівок).

6. Щоб довести дану в задачі рівність треба обчислити частинні похідні від функції $z = f(x, y)$. Потім підставити знайдені похідні в рівняння і виконати всі можливі тотожні перетворення. В результаті маємо отримати вірну рівність.

Задача 3.

1. Точка $M_0(x_0; y_0)$ називається точкою екстремуму (максимуму чи мінімуму) функції $z = f(x; y)$, якщо $f(x_0; y_0)$ є відповідно найбільше чи найменше значення функції $f(x; y)$ в деякому околі точки $M_0(x_0; y_0)$: $f(x_0; y_0) > f(x; y)$ чи $f(x_0; y_0) < f(x; y)$ в усіх точках $M(x; y) \neq M_0(x_0; y_0)$ з деякого околу точки M_0.

2. Значення $f(x_0; y_0)$ називається максимальним (або мінімальним) значенням функції.

3. *Необхідна умова екстремуму.* Якщо в точці $M_0(x_0; y_0)$ диференційована функція $z = f(x; y)$ має екстремум, то її частинні похідні в цій точці дорівнюють нулю:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\Big\|_{M_0}=0 \text{ і } \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\Big\|_{M_0}=0.$$

Точка M_0 (x_0; y_0), в якій обидві частинні похідні дорівнюють нулю, називається *стаціонарною*.

4. Якщо функція $z = f(x, y)$ має частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, то вони в загальному випадку також є функціями двох змінних. Частинні похідні від цих функцій називаються *другими частинними похідними* від функції $z = f(x, y)$ і позначаються так:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx},\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=z''_{xy},\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=z''_{yx},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}.$$

Похідні z''_{xy} та z''_{yx} називаються *мішаними*.

5. *Достатня умова екстремуму*. Нехай точка M_0 (x_0; y_0) є стаціонарною точкою функції $z = f(x; y)$. Позначимо

$$A=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\Big\|_{M_0}, \qquad B=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)\Big\|_{M_0}, \qquad C=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\Big\|_{M_0}.$$

Якщо $AC - B^2 > 0$ і $A < 0$, то M_0 (x_0; y_0) – точка максимуму.

Якщо $AC - B^2 > 0$ і $A > 0$, то M_0 (x_0; y_0) – точка мінімуму.

Якщо $AC - B^2 < 0$, то M_0 (x_0; y_0) не є точкою екстремуму.

Якщо $AC - B^2 = 0$, то необхідне додаткове дослідження.

6. Щоб знайти екстремум функції двох змінних $z = f(x; y)$ треба:

– знайти область визначення функції;

– знайти частинні похідні і прирівняти їх до нуля;

– скласти з отриманих рівнянь систему і розв’язати її; знайдені точки є стаціонарними;

– обчислити частинні похідні другого порядку від функції $z = f(x; y)$;

– знайти значення A, B, C в кожній із стаціонарних точок;

– знайти величину $AC - B^2$ і зробити висновок;

– якщо в досліджуваній стаціонарній точці є екстремум, то підставити координати точки в функцію $z = f(x; y)$. Знайдене значення буде максимальним (або мінімальним) значенням функції.

Задача 4.

1. Градієнтом функції $z = f(x; y)$ називається вектор, координатами якого є частинні похідні цієї функції

$$\overline{\mathrm{grad} z} = \frac{\partial f}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\bar{j} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

2. Градієнт функції вказує напрямок, в якому функція зростає скоріше за всі інші напрямки.

3. Щоб знайти градієнт функції в точці М треба її координати підставити замість x та y відповідно у вираз для градієнта.

Задача 5.

1. Якщо задана функція $z = f(x; y)$ і напрямок $\bar{l}$, то границя відношення приросту функції Δf до $\Delta\rho$ при $\Delta\rho \to 0$ називається похідною функції за напрямком $\bar{l}$ і позначається

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{\Delta\rho \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta\rho} = \lim_{\Delta\rho \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)}{\Delta\rho},$$

де $\Delta\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, $\Delta x, \Delta y$ – приріст аргументів x та y відповідно вздовж напрямку $\bar{l}$.

2. Величина похідної за напрямком $\bar{l}$ визначає швидкість зміни функції в цьому напрямку. Знак похідної – характер зміни. Якщо $\frac{\partial f}{\partial l} > 0$, то функція зростає у напрямку $\bar{l}$, якщо $\frac{\partial f}{\partial l} < 0$, то функція спадає за цим напрямком.

3. Якщо функція $f(x;y)$ диференційована, то її похідна за довільним напрямком $\bar{l}$ існує і дорівнює

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta\,,$$

де $\bar{e}=(\cos\alpha,\cos\beta)$ – орт напрямку $\bar{l}$.

4. Щоб знайти похідну функції $z=f(x;y)$ за напрямком вектора $\bar{a}$ треба:

– знайти частинні похідні функції;

– знайти напрямні косинуси вектора $\bar{a}$;

– скористатися формулою для обчислення похідної $\frac{\partial f}{\partial l}$ за напрямом.

5. Щоб знайти похідну функції $z=f(x;y)$ в точці М за напрямом даного вектора $\bar{a}$, треба підставити координати точки у вираз, що одержано в п. 4.

Частина 2.

IV. Диференціальні рівняння.

Задача 1.

1. Рівняння, які зв'язують невідому функцію, її диференціали або похідні та аргумент, називаються диференціальними (ДР). Коли невідома функція залежить лише від одного аргументу, тоді ДР називається звичайним.

2. Найвищий порядок похідної, що входить в ДР, називається порядком ДР.

3. Рівняння, яке пов'язує незалежну змінну x, невідому функцію $y(x)$ та її похідну y', називається ДР першого порядку:

$$F(x,y,y')=0 \text{ або } y'=f(x,y).$$

4. Розв'язком ДР першого порядку називається будь-яка функція $y=\varphi(x)$, яка при підстановці її разом з похідною в рівняння, перетворює його в тотожність. Графік функції $y=\varphi(x)$ називається інтегральною кривою.

5. Розв'язок ДР, який задовольняє *початковій умові* $y(x_0)=y_0$, називається частинним розв'язком.

7. Задачу пошуку розв'язку ДР першого порядку, який задовольняє даній початковій умові, називають задачею Коші:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \text{ – задача Коші.}$$

8. *Загальним* розв'язком ДР першого порядку називається така функція $y = \varphi(x, C)$, де C – довільна стала, що:

1. при будь-якому значенні C вона є розв'язком цього рівняння;

2. для будь-якої припустимої початкової умови $y(x_0) = y_0$ знайдеться таке значення сталої $C = C_0$, що $\varphi(x_0, C_0) = y_0$.

9. ДР вигляду $M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$ (або $y' = f_1(x)f_2(y)$) називається рівнянням з відокремлюваними змінними. Щоб розв'язати таке рівняння, необхідно поділити обидві його частини на множник $N_1(y)M_2(x) \neq 0$ (або на $f_2(y) \neq 0$), а потім проінтегрувати отримане рівняння. В результаті знайдемо загальний розв'язок рівняння.

10. Для знаходження частинного розв'язку слід замість x і y підставити в загальний розв'язок значення x_0 і y_0 відповідно. Отримаємо конкретне числове значення C_0 довільної сталої С. Підставивши це значення в загальний розв'язок рівняння, записуємо його частинний розв'язок.

Задача 2.

1. ДР першого порядку $y' = f(x, y)$ називається однорідним, якщо функцію $f(x,y)$ можна привести до вигляду $f(x, y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. В цьому випадку функція $f(x, y)$ називається однорідною відносно своїх аргументів.

2. Розв'язок однорідного ДР шукають у вигляді $y=z(x)x$, де $z(x)$ – нова невідома функція. В загальному випадку в однорідному ДР відокремити змінні неможливо.

3. Якщо $y=zx$, то $y' = z'x + z$. Підставивши y та y' в дане однорідне рівняння і виконавши тотожні перетворення, отримаємо ДР першого порядку з відокремлюваними змінними (див. задачу 1).

Задача 3.

1. ДР вигляду $y' + p(x)y = g(x)$, де $p(x)$, $g(x)$ – дані неперервні функції, називається лінійним.

2. Розв’язок рівняння шукають у вигляді $y = u(x)v(x)$. Одну з функцій u, v обирають довільно (як правило $v(x)$). Іншу – в залежності від першої так, щоб їх добуток був розв’язком рівняння.

3. Якщо $y = uv$, то $y' = u'v + uv'$, а рівняння приймає вигляд:

$$u'v + u(v' + p(x)v) = g(x).$$

4. Функцію $v(x)$ вибирають так, щоб вираз в дужках був рівним нулю: $v' + p(x)v = 0$. Тоді для знаходження $u(x)$ маємо рівняння $u'v = g(x)$. Отже, отримали систему рівнянь з відокремлюваними змінними для знаходження u, v:

$$\begin{cases} v' + p(x)v = 0, \\ u'v = g(x). \end{cases}$$

5. Розв’язавши цю систему, знайдемо функції $u(x)$ і $v(x)$. Загальний розв’язок лінійного рівняння отримаємо, як добуток знайдених функцій: $y = uv$.

6. Частинний розв’язок лінійного ДР знаходять так само, як і у випадку ДР з відокремлюваними змінними(див. задачу 1).

Задача 4.

1. Рівняння вигляду $y'' + a_1y' + a_2y = 0$, де a_1, a_2 – числа, $y(x)$ – невідома функція, називається лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами (ЛОДР ІІ).

2. Загальний розв’язок $y_{зо}$ ЛОДР ІІ має вигляд:

$$y_{зо} = C_1y_1 + C_2y_2\,,$$

де C_1, C_2 - довільні сталі,

y_1, y_2 - два будь-які лінійно незалежні розв'язки ЛОДР II. Ці розв'язки утворюють так звану фундаментальну систему розв'язків (ф. с. р.).

3. Розв'язок ЛОДР II шукають у вигляді $y = e^{kx}$. Тоді $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2e^{kx}$. Підставивши похідні в ЛОДР II і скоротивши на e^{kx}, отримаємо рівняння:

$$k^2 + a_1k + a_2 = 0.$$

Таке рівняння є характеристичним рівнянням для ЛОДР II. В залежності від його коренів ф.с.р. і загальний розв'язок ЛОДР II приймають один з наступних виглядів.

4. Нехай характеристичне рівняння має два різних дійсних кореня $k_1 \neq k_2$. Тоді $y_1 = e^{k_1x}$, $y_2 = e^{k_2x}$. Загальний розв'язок ЛОДР II:

$$y_{зо} = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x},\ C_1, C_2 \in R.$$

5. Нехай характеристичне рівняння має два однакових дійсних кореня $k_1=k_2=k$. Тоді $y_1 = e^{kx}$, а в якості другого розв'язку беремо $y_2 = xe^{kx}$. Загальний розв'язок ЛОДР II:

$$y_{зо} = e^{kx}(C_1 + C_2x),\ C_1, C_2 \in R.$$

6. Нехай характеристичне рівняння має два комплексних спряжених кореня $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. Тоді ф. с. р. утворюють функції $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ і $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$, а загальний розв'язок ЛОДР II має вигляд:

$$y_{зо} = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x),\ C_1, C_2 \in R.$$

Задача 5.

1. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (ЛНДР II) – це рівняння вигляду $y'' + a_1y' + a_2y = f(x)$, де $f(x)$ – довільна неперервна функція.

2. Загальний розв'язок $y_{зн}$ ЛНДР II має вигляд

$$y_{зн} = y_{зо} + y_ч,$$

де $y_{зо}$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння,

$y_ч$ – деякий частинний розв'язок даного неоднорідного рівняння.

3. Для розв'язання ЛНДР ІІ необхідно спочатку знайти загальний розв'язок $y_{зо}$ відповідного однорідного рівняння (див. задачу 4).

4. Якщо права частина рівняння *f(x)* має спеціальний вигляд, то частинний розв'язок $y_ч$ шукаємо методом невизначених коефіцієнтів.

5. Деякі спеціальні праві частини і відповідні їм частинні розв'язки рівняння наведені в наступній таблиці:

1	$f(x) = e^{ax}P_n(x)$	$y_ч = x^S e^{ax} Q_n(x)$, де $S = 0$, якщо $k_1 \neq a$ і $k_2 \neq a$, $S = 1$, якщо $k_1 = a$ або $k_2 = a$, $S = 2$, якщо $k_1 = k_2 = a$; $Q_n(x)$ – многочлен степеня n з невизначеними коефіцієнтами.
2	$f(x) = M\cos bx + N\sin bx$	$y_ч = x^S (A\cos bx + B\cos bx)$, де $S = 1$, якщо $k_{1,2} = \pm bi$, $S = 0$ в інших випадках; A, B – невизначені коефіцієнти.

6. Для знаходження розв'язку $y_ч$ треба вибрати відповідний вигляд розв'язку з таблиці, знайти похідні $y'_{\div}, y''_{\div}$ і підставити $y_ч$, $y'_{\div}, y''_{\div}$ в неоднорідне рівняння. Спростити отримане рівняння, скласти систему для знаходження невідомих коефіцієнтів і розв'язати її. Для складання системи необхідно прирівняти коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах рівняння (випадок 1) або при однакових тригонометричних функціях (випадок 2).

7. Визначені в п.6 коефіцієнти підставимо в частинний розв'язок $y_ч$. Загальний розв'язок $y_{çí}$ ЛНДР ІІ отримаємо склавши розв'язки $y_{зо}$ і $y_ч$.

Частина V.

Диференціальні рівняння другого порядку.

Задача 1.

1. Рівнянням 2-го порядку називається рівняння, що пов'язує незалежну змінну,невідому функцію і її перші дві похідні:

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

В багатьох випадках можна розв’язати це рівняння відносно старшої похідної:

$$y'' = f(x, y, y).$$

2. Задача знаходження такого розв’язку рівняння, що задовольняє початковим умовам $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ називається задачею Коші.

3. Загальним розв’язком рівняння другого порядку називається функція $y=\varphi(x,C_1,C_2)$ така, що:

1. при будь-яких довільних сталих C_1, C_2 перетворює дане рівняння в тотожність;

2. при будь-яких початкових умовах знайдуться такі значення довільних сталих C_1^*, C_2^*, при яких $\varphi(x_0, C_1^*, C_2^*) = y_0$.

4. Будь-яка функція $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$, яка отримана із загального розв’язку при конкретних значеннях сталих C_1, C_2 називається частинним розв’язком.

5. Дане рівняння, не містить явно шукану функцію $y(x)$: $F(x,y',y)=0$. Можна знизити порядок рівняння підстановкою $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$, де $p(x)$ – нова невідома функція.

6. Підставивши вирази $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$ в дане рівняння, після спрощень отримаємо диференціальне рівняння першого порядку відносно функції $p(x)$ (див. частину IV).

7. Розв’язавши отримане рівняння, знайдемо функцію $p(x)$. Робимо зворотну підстановку $y' = p(x)$. Отримаємо диференціальне рівняння першого порядку відносно функції $y(x)$. Розв’язавши це рівняння, отримаємо загальний розв’язок даного диференціального рівняння другого порядку.

8. Для знаходження розв’язку задачі Коші знайдемо похідну y'. Потім підставимо в y і y' замість x, y і y' значення x_0, y_0 і y_1 відповідно. Виконавши обчислення, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів C_1, C_2.

9. Розв’язавши систему з п.8, підставимо знайдені значення коефіцієнтів C_1 і C_2 в $y(x)$. Отриманий розв’язок є частинним розв’язком даного диференціального рівняння.

Задача 2.

1. Рівняння другого порядку, що не містить явно незалежну змінну x: $F(y,y',y'')=0$. В такому рівнянні можна знизити порядок підстановкою $y' = p(y)$, $y'' = p'(y) \cdot p(y)$, де $p(y)$ – нова невідома функція.

2. Підставивши замість y', y'' їх вирази, отримаємо диференціальне рівняння першого порядку.

3. Розв'язуємо отримане рівняння, робимо зворотну підстановку і маємо ще одне диференціальне рівняння першого порядку. Розв'язавши його, знайдемо загальний розв'язок диференціального рівняння другого порядку.

Задачі 3, 4, 5.

1. Дані лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами (ЛНДР II) . Алгоритм їх розв'язання наведено в задачі 5 частини IV даного посібника.

2. Для знаходження розв'язку задачі Коші в рівнянні 5 знайдемо похідну $y'_{\text{çí}}$. Потім підставимо в $y_{зн}$ і $y'_{\text{çí}}$ замість x, y і $y'_{\text{çí}}$ значення x_0, y_0 і y'_0 відповідно. Виконавши обчислення, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів C_1, C_2.

3. Розв'язавши систему з п.2, підставимо знайдені значення коефіцієнтів C_1 і C_2 в $y_{\text{çí}}$. Отриманий розв'язок є частинним розв'язком ЛНДР II.

VI. Ряди.

Задача 1.

1. Числовим рядом називається символ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots ,$$

де числа a_1, a_2,a_3,… називаються членами ряду, член a_n – загальним членом ряда.

2. Сума n перших членів ряду називається n-ою частинною сумою ряду і позначається

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

3. Числовий ряд називається збіжним, якщо існує скінчена границя послідовності його частинних сум $\{S_n\}$:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n .$$

Число S називається сумою ряду. Якщо така границя не існує або дорівнює нескінченності, то ряд називається розбіжним.

4. *Необхідна умова збіжності ряду*. Якщо числовий ряд збігається, то загальний член ряду прямує до нуля при $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 .$$

Дана умова є тільки необхідною, але не достатньою для збіжності ряду. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд розбігається. Якщо ж $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд може як збігатися, так і розбігатися.

5. Якщо при всіх n виконується нерівність $a_n \geq 0$, то він називається рядом з невід'ємними членами. Якщо $a_n > 0$ при всіх n, то маємо ряд з додатними членами.

6. *Ознака Даламбера*.

Нехай ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ – ряд з додатними членами і існує скінчена границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\grave{a}_{n+1}}{a_n} = l .$$

Тоді, при $l > 1$ ряд розбігається, при $l < 1$ ряд збігається, при $l = 1$ треба досліджувати ряд за допомогою інших ознак.

7. Ознаку Даламбера зручно використовувати, коли загальний член ряду містить факторіали, показникові функції.

Задача 2.

1. Ряд, що містить і додатні і від'ємні члени називається знакозмінним.

2. Частинним випадком знакозмінних рядів є *знакопереміжні* ряди.

Ряд, в якому будь-які два сусідні члени мають різні знаки, називаються знакопереміжними:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^n a_n + \ldots$$

або $$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots$$

де a_1, a_2, …, a_n, … – додатні дійсні числа.

3. Знакопереміжні ряди досліджують на збіжність за *ознакою Лейбніца*.

Нехай даний знакопереміжний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ або $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$. Якщо:

1) абсолютні величини членів ряду монотонно спадають ($a_1 > a_2 > a_3 > \ldots$) і

2) загальний член ряду прямує до нуля при $n \to \infty$ ($\lim_{n\to\infty} a_n = 0$), то ряд збігається.

4. Якщо хоча б одна з умов не виконується, то ряд розбігається.

Задача 3.

1. Ряд, членами якого є функції, називається функціональним:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots,$$

причому, всі функції повинні бути визначені і неперервні в одному інтервалі.

2. Якщо в функціональний ряд замість x підставити конкретне значення $x = x_0$, то він стане числовим. Для одних значень x ряд може збігатися, для інших – розбігатися.

3. Значення $x = x_0$, при яких числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ збігається, називається точкою збіжності функціонального ряду. Множина всіх точок збіжності функціонального ряду називається областю його збіжності.

4. Частинним випадком функціонального ряду є *степеневий ряд*, тобто ряд вигляду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$,

де a_0, a_1, …, a_n, … числа, які називаються коефіцієнтами степеневого ряду.

5. При $x_0 = 0$ степеневий ряд має вигляд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$

6. Всі степеневі ряди збігаються при $x = x_0$.

7. Для дослідження степеневого ряду на збіжність треба знайти радіус та інтервал збіжності.

8. Радіусом збіжності степеневого ряду називається таке число R, що для всіх x таких, що $|x - x_0| < R$, ряд збігається абсолютно, а для всіх x таких, що $|x - x_0| > R$, ряд розбігається.

9. Радіус збіжності степеневого ряду знаходиться за формулою:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

10. Інтервалом збіжності степеневого ряду називається інтервал

$$(x_0 - R;\ x_0 + R).$$

11. Якщо степеневий ряд збігається при всіх x, то вважають, що $R = \infty$. Якщо ряд розбігається при всіх x, крім $x = 0$, то вважають $R = 0$.

12. На кінцях інтервалу збіжності (при $x = x_0 - R$ і $x = x_0 + R$) необхідно провести додаткове дослідження. Ряд може збігатися в обох точках, або тільки в одній з них, або розбігатися в обох. Для дослідження треба підставити значення $x = x_0 - R$ і $x = x_0 + R$ в степеневий ряд і дослідити отриманий числовий ряд (див. задачі 1,2).

Задача 4.

1. Якщо функція *f(x)* диференційована в околі деякої точки x_0 скільки завгодно разів, то її можна представити у вигляді суми степеневого ряду, який збігається в околі точки x_0:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots,$$

де a_0, a_1, a_2, a_3, …, a_n, …– коефіцієнти ряду.

2. Ряд вигляду

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

називається рядом Тейлора функції $f(x)$. Коефіцієнти $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ називаються коефіцієнтами Тейлора функції $f(x)$ в точці x_0.

3. Щоб розкласти функцію $f(x)$ в ряд Тейлора в околі даної точки треба знайти похідні функції до n-го порядку, обчислити значення похідних в точці x_0, обчислити коефіцієнти Тейлора і підставити їх в розвинення (див. п.2).

Задача 5.

1. Ряд, який отриманий з ряду Тейлора при $x_0 = 0$, називається рядом Маклорена і має вигляд:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

2. Ряд Тейлора при $x_0 = 0$ є розвиненням функції за степенями x.

3. Розвинення в ряд Тейлора при $x_0 = 0$ деяких елементарних функцій.

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$ $(x \in R)$

2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$ $(x \in R)$

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad (x \in R)$

4. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \ldots +$

$+ \frac{m(m-1)(m-2) \cdot \ldots \cdot \left(m-(n-1)\right)}{n!} x^n + \ldots \qquad (x \in (-1;\, 1))$

5. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots \qquad (x \in (-1;\, 1))$

6. $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots \qquad (x \in (-1;\, 1))$

Література.

1. Пак В.В, Носенко Ю.Л. Вища математика. – К.: Либідь,1996.
2. Улітін Г.М., Гончаров А.Н. Курс лекцій з вищої математики. – Донецьк: ДонНТУ, 2009.
3. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1975.
4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах (части 1,2). – М.: Высшая школа, 1999.
5. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. В 2-х ч. – М. Айрис пресс, 2004. – 590 с.

Зміст.

Вступ. …………………………………………………………………….. 4
Загальне формулювання задач. ……………………………………… 5
I. Невизначений інтеграл. ……………………………………………….. 5
II. Визначений інтеграл. ……………………………………………….. 5
III. Функції багатьох змінних. ……………………………………………… 5
IV. Диференціальні рівняння. ……………………………………………. 5
V. Диференціальні рівняння другого порядку. …………………………… 6
VI. Числові та функціональні ряди. ……………………………… 6
Варіанти домашніх індивідуальних завдань. ………………………… 7
Варіант 1. ………………………………………………………… 7
Варіант 2. ………………………………………………………… 9
Варіант 3. ………………………………………………………… 11
Варіант 4. ………………………………………………………… 13
Варіант 5. ………………………………………………………… 15
Варіант 6. ………………………………………………………… 17
Варіант 7. ………………………………………………………… 19
Варіант 8. ………………………………………………………… 21
Варіант 9. ………………………………………………………… 23
Варіант 10.……………………………………………………… 25
Варіант 11. ….. ……………………………………………………… 27
Варіант 12. ……………………………………………………… .. 29
Варіант 13. ……………………………………………………… .. 31
Варіант 14. ……………………………………………………… … 33
Варіант 15. ……………………………………………………… .. 35
Варіант 16. ……………………………………………………….. 37
Варіант 17. ……………………………………………………….. 39
Варіант 18. ……………………………………………………….. 41
Варіант 19. ……………………………………………………….. 43
Варіант 20. ……………………………………………………….. 45
Варіант 21. ……………………………………………………….. 47
Варіант 22. ……………………………………………………….. 49
Варіант 23. ……………………………………………………….. 51
Варіант 24. ……………………………………………………….. 53
Варіант 25. ……………………………………………………….. 55
Довідкові матеріали. ……………………………………………….. 57
I. Невизначений інтеграл. ……….………………………………… 57
II. Визначений інтеграл. ……………………………………………. 61
III. Функції багатьох змінних. …………………………………….. 64
IV. Диференціальні рівняння. ……………………………………… 68
V. Диференціальні рівняння другого порядку. ………………….……… 72
VI. Числові та функціональні ряди. ……………………… ..………… 74

Література. ………………………………………………………………………… 80
Зміст. ……………………………………………………………………………… 81

Домашні індивідуальні завдання з вищої математики:
методичний посібник для самостійної роботи студентів.
(для студентів всіх спеціальностей)
Частина II.

Укладачі Гребьонкіна Олександра Сергіївна
Євсеєва Олена Геннадіївна
Кьоміна Світлана Іванівна
Савін Олександр Іванович

Рекомендовано до видання навчально-методичною радою ДонНТУ. Протокол № 6 від 06.10.11
Ум. друк. с. 3,5.