Міністерство Освіти і Науки України
Державний вищий навчальний заклад
Донецький національний технічний університет

Методичні вказівки до курсу "Алгебра логіки" для студентів спеціальності (6.050802 Електронні системи)

затверджено
на засіданні кафедри ЕТ
протокол №11
від 22 червня 2010

затверджено
на засіданні
навчально-видавничої Ради
ДВНЗ ДонНТУ

Донецьк
ДонНТУ 2010р

УДК 658.5.011.56(071)

Методичні вказівки до курсу “Цифрові автомати” / Укладачі доц. к.т.н. М.Г. Винниченко, ас. В.П.Тарасюк -Донецьк: ДонНТУ, 2010р – 23с.

В методичних вказівках викладені основи математичної логіки, які використовуються для аналізу і синтезу логічних елементів та цифрових автоматів. Теоретичний матеріал ілюстрований численними прикладами, що спрямовані на практичне застосування теорії, приведені завдання для домашніх та практичних аудиторних робіт.

Укладачі: М.Г. Винниченко, доц., к.т.н.
В.П. Тарасюк, доц., к.т.н.

Відповідальний за випуск: А.А. Зорі, д.т.н., професор

Рецензент: Г.В. Мокрий, к.т.н., доцент

1. МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИВЧЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ ЛОГІКИ

1.1 Алгебра суджень (висловлень).

Логіка (наука про форми і закони мислення) зародилаѣь майже 2,5 тис. років тому в Індії, Китаї, Греції. Особливо вплинуло на формування логіки як науки древньогрецька формальна логіка, засновником якої був великий філософ і мислитель Аристотель. У своїх працях він показав що правильні міркування підпорядковані невеликій кількості законів, які не залежать від змісту суджень (висловлень), а тільки від їх форми. Тому Аристотелеву логіку називають формальною логікою.

У XVII ст. німецький вчений Лейбніц сформулював ідею нової логіки, в якій кожному поняттю відповідає певний символ, а міркування мали форму обчислень, що стало основою так званої символьної логіки. І лише в середині 19 ст. англійський математик Буль створив алгебру логіки, де діють закони, подібні до законів звичайної алгебри. Алгебра Буля, в якій буквами позначаються не числа, а судження, стала зародком нової науки – математичної логіки. Судження (висловлення) – це форма мислення в якій стверджується, або заперечується щось про предмет, про певні зв’язки між предметами та явищами. Матеріальною формою суджень є речення. Судження надає людській думці закінчену форму. Воно виражає істинність чи хибність нашого висловлення. Тобто про судження можна зробити один із двох висновків: - “судження істинне” і приписати йому символ (літеру) “І”, або “судження хибне” і приписати йому символ “Х”.

Істинним буде судження, в якому зазначено ознаку, котра належить предмету, або заперечується ознака, яка не належить предмету.

Хибним буде судження в якому стверджується ознака, яка не належить предмету, або заперечується та, що належить йому.

Наприклад: 25 ділиться на 5 – це істинне судження, і 25 ділиться на 2 – хибне судження.

Судження може бути простим – де мова йде про один якийсь факт і позначається літерами будь-якого алфавіту наприклад А,Б,В або X,Y,Z. Складним називається судження, яке містить два або більше суджень, зв’язаних між собою логічними сполучниками (зв’язками). Основними логічними сполучниками являються - кон’юнкція, диз’юнкція, імплікація і еквіваленція. Логічним сполучникам ставлять у відповідність граматичні сполучники і сполучні слова “І”, “АБО”, “АБО – АБО”, “Якщо…, то”, “Тоді і тільки тоді, коли”. Частку “НЕ” або “НІ” також вважають логічним сполучником для утворення нових суджень.

Зв’язування у нове судження істинних або хибних суджень за допомогою логічних сполучників називається логічною операцією над судженнями. Для складних суджень утворених за допомогою логічних сполучників можна записати таблицю істинності.

Якщо маємо два простих судження А і В, то для кожної операції можна скласти таблиці, прийнявши символи – “І” – коли судження істинне і “Х” – судження хибне.
Операція заперечення – читається не А, позначається $\overline{A}$ або $\neg A$.

Таблиця 1.1

A	$\overline{A}$
І	Х
Х	І

Кон’юнкція позначається символами Λ,•, & АΛВ=С читається А і В. АΛВ=С судження С істине тільки тоді коли А і В істині таблиця 1.2.

Таблиця 1.2

А	В	С
Х	Х	Х
Х	І	Х
І	Х	Х
І	І	І

Таблиця 1.3

А	В	С
Х	Х	Х
Х	І	І
І	Х	І
І	І	І

Таблиця 1.4

А	В	С
Х	Х	І
Х	І	Х
І	Х	Х
І	І	І

Диз’юнкція позначається символом “V” або “+” С=АVВ =А+В читається цей вираз А або В. Судження хибне тоді, коли обидва судження хибні таблиця 1.3.

Еквівалентністю (еквіваленцією) двох суджень називається складне судження, яке істинне тоді, коли значення складових суджень однакові, і хибне – в противному разі. Позначається еквівалентність А~В = А↔В=А→В=А≡В і читається “А еквівалентне В”, таблиця 1.4.

Імплікацією двох суджень називається таке складне судження, яке хибне в тому і тільки в тому випадку, коли А істинне, а В хибне. Позначається імплікація А→В, що читається: “якщо А, то В”. Задається таблицею 1.5 істинності.

Таблиця 1.5

А	В	С
Х	Х	І
Х	І	І
І	Х	Х
І	І	І

1.2. Бульова алгебра. Функції алгебри логіки.

Функціями алгебри логіки (ФАЛ) називають такі функції y_0, y_1, y_2 скінченого числа деяких суджень, значення яких дорівнюють нулю (хибність) або 1 (істинність) залежно від значення аргументів, визначених для всіх можливих наборів аргументів, кожний з яких також дорівнює нулю або одиниці.

ФАЛ (або бульова функція) яка залежить від двох аргументів називається двохмісною. ФАЛ можна задати різною формою. Так, якщо маємо множину векторів $x=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ і їх можливе значення $\forall\ x_i \in \{0,1\}$, то загальна кількість різних наборів векторів буде 2^n де n - число змінних. Таким чином ФАЛ можна задати таблицею в якій буде 2^n рядків двійкових чисел в двійковій системі обчислення. Кожне двійкове число можна записати в десятковій системі. Якщо функція $y=\{0,1\}$ залежить від n - змінних, а їм відповідає 2^n - наборів, то кількість функцій, яка залежить від змінних буде скінчена і дорівнює 2^{2^n}.

Для n=1 маємо ФАЛ однієї змінної, їх чотири табл. 1.6.

Таблиця 1.6

Змінна	ФАЛ			
X	F_0	F_1	F_2	F_3
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Функції $F_0(x)$ та $F_3(x)$ константи відповідно 0 та 1, оскільки їх значення не залежать від значення змінної. Функція $F_1(x)$ – повторює змінну x. Функція $F_2(x)$ – називається запереченням x (або функцією "НЕ"; в багатьох випадках позначають "НІ"), тобто $F_2(x)= \bar{x}$.

В бульовій алгебрі особливе значення мають функції двох змінних. Якщо n=2, то число функцій двох змінних буде 16 (табл. 1.7.).

Таблиця 1.7

Змінні		ФАЛ															
X_1	X_2	F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Таблиця 1.8

Функція	Назва функції	Позначення

F_0	Константа нуль	0
F_1	Кон'юнкція, логічне множення, добуток, збіг, І	x_1x_2, $x_1\Lambda x_2$, $x_1\&x_2$
F_2	Заборона за x_1, заборона	$\overline{x}_1x_2$, $\overline{x}_1\Lambda x_2$
F_3	Змінна x_2	x_2
F_4	Заборона за x_2; заборона	$x_1\overline{x}_2$, $x_1\Lambda\overline{x}_2$
F_5	Змінна x_1	x_1
F_6	Сума за модулем 2, нерівнозначність, розділяючи АБО	$x_1 \oplus x_2$
F_7	Диз'юнкція, логічне додавання, сума АБО	x_1 V x_2
F_8	Заперечення диз'юнкції, стрілка Пірса	$\overline{x_1\mathrm{V}x_2}$, $x_1\downarrow x_2$
F_9	Еквівалентність, рівнозначність	$x_2\sim x_1$, $x_1\equiv x_2$
F_{10}	Заперечення x_1	$\overline{x}_1$
F_{11}	Імплікація за x_1	$x_1\rightarrow x_2$, $\overline{x}_1$V x_2
F_{12}	Заперечення x_2	x_2
F_{13}	Імплікація за x_2	$x_2 \rightarrow x_1$, x_1 V $\overline{x}_2$
F_{14}	Заперечення кон'юнкції, штрих Шеффера	$\overline{x_1x_2}$, x_1/x_2
F_{15}	Константа одиниця	1

Розглядаючи ці функції, можна зробити висновок, що інші функції утворюються двома основними шляхами:

1. Шляхом переномерації аргументів
2. Шляхом підстановки в функцію нових функцій замість аргументів.

Тобто любу функцію алгебри логіки, можна замінити суперпозицією інших функцій, які будуть співпадати з початковою на всіх наборах.

<u>Приклад</u>

$x_1\rightarrow x_2=\overline{x}_1\mathrm{V}x_2$ Складемо таблицю істинності.

x_1	x_2	$x_1\rightarrow x_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

x_1	x_2	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_1\mathrm{V}x_2$	$\overline{x}_2$	$x_1\overline{x}_2$	$\overline{x_1\overline{x}_2}$
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0
1	1	0	1	0	0	1

Якщо зрівняти значення функцій $f(x_1\ x_2)= x_1\rightarrow x_2$ і $f(x_1\ x_2)= \overline{x}_1\mathrm{V}x_2$, то видно що на всіх відповідних наборах для них виконується рівність.

Тобто $x_1\rightarrow x_2 = \overline{x}_1\mathrm{V}x_2= \overline{x_1\overline{x}_2}$. Аналогічно можна доказати тотожність

$$x_1 \sim x_2 = \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_1x_2 = (\overline{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \overline{x}_2)$$

Метод суперпозиції має велике значення особливо при синтезі скінчених автоматів.

1.3. Способи завдання функцій алгебри логіки.

Серед способів завдання ФАЛ крім словесного та табличного велике значення мають геометричний та аналітичний способи. При геометричному способі завдання ФАЛ, кожному значенню аргументу ставиться у відповідність точка n – мірного простору. В цьому випадку множині наборів 2^n відповідає така ж кількість вершин геометричного зображення. Множину вершин геометричного зображення можна розбити на дві підмножини, які прийнято позначати T_1 і T_0. До підмножини T_1 належать всі вершини (набори) на яких функція алгебри логіки має значення “1”, а до T_0 належать вершини на яких ФАЛ має значення “0”. З’єднуючи сусідні вершини одержимо геометричне зображення ФАЛ. Сусідніми вершинами називаються вершини двійкові набори яких відрізняються тільки значенням однієї змінної X_i.

Наприклад: Нехай ФАЛ для трьох змінних задана таблицею 1.9. Потрібно побудувати геометричну фігуру, яка відповідає цій ФАЛ.

Таблиця 1.9

M	X_3	X_2	X_1	$f(X_1X_2X_3)$
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	1
4	1	0	0	0
5	1	0	1	0
6	1	1	0	1
7	1	1	1	1

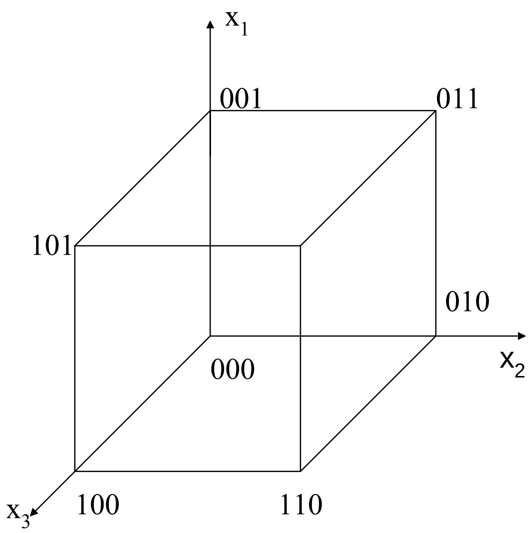
Порядок побудови геометричної фігури наступний:

Вибирається система координат для n змінних (у нашому випадку 3 для X_1,X_2,X_3).

На осях відмічаються відрізки любої довжини які відповідають значенню “1”.

Будується геометрична фігура (для 3^x-змінних куб).

Відмічаються вершини, які відповідають наборам на яких ФАЛ має значення “1” і з’єднують, утворюють ребра, грані, куби.



Таким чином ФАЛ, яка залежить від 3^x змінних відповідає куб. Якщо змінних більше 3^x, то побудову продовжують, взявши за основу ФАЛ для трьох змінних. Так для побудови геометричної фігури для ФАЛ, яка залежить від 4^x змінних $f(X_1X_2X_3X_4)$, вибирають в любому напрямі 4 вісь і відмічають точку, яка відповідає "1" на цій осі. Так як число двійкових наборів $N=2^4=16$, то очевидно, що це повинно відповідати двом кубам. В вибраній точці проводять осі паралельно відповідним осям на першому кубі і відмічають усі вершини з'єднуючи їх між собою. Так можна побудувати геометричну фігуру для любого числа змінних, але це буде складна фігура. Тому будують такі фігури не більше як для ФАЛ від п'яти змінних.

Значення функцій можуть бути задані не на всіх можливих наборах аргументів. На деяких наборах значення функції може бути не визначеним. Такі ФАЛ називаються недовизначеними. При побудові геометричної фігури такі вершини позначають зірочкою, або іншими знаками. Якщо замість зірочки підставити "0" або "1", то функція стане повністю визначеною. Тому що ФАЛ може мати m наборів на яких вона не визначена, то всього повністю визначених ФАЛ буде 2^m.

Крім табличного та геометричного способів завдання ФАЛ застосовують різні аналітичні форми запису ФАЛ.

Аналітичний спосіб завдання ФАЛ полягає в тому, що логічна функція F задається у вигляді алгебраїчного рівняння, в якому змінні x_i зв'язані між собою знаками логічних операцій. Існує дві основні форми запису ФАЛ в алгебраїчному вигляді - диз'юнктивна досконала нормальна форма (ДДНФ) та кон'юнктивна досконала нормальна форма (КДНФ).

Для запису ФАЛ в диз'юнктивній досконалій нормальній формі вводять характеристичну функцію одиниці, які відповідає двійковому набору, на яких ФАЛ має значення "1". Одинична функція записується як кон'юнкція n змінних, від яких залежить функція. Така кон'юнкція називається мінітермом.

Алгоритм запису ФАЛ в диз'юнктивній формі полягає в наступному:

1. Вибираються набори на яких функція має значення "1"

2. Записуються мінітерми, які відповідають значенню функції “1”. При цьому якщо змінна x_i має значення “1”, то в кон’юнкцію вона записується без зміни, а якщо x_i має значення “0”, то вона записується як заперечення.
3. Всі елементарні кон’юнкції з’єднуються між собою знаками диз’юнкції.

Так функцію задану таблицею 1.9 можна записати в аналітичній формі

$$F(x_1\, x_2\, x_3) = x_1\, \bar{x}_2\, \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\, x_2\, \bar{x}_3 \vee x_1\, x_2\, x_3 \vee x_1\, x_2\, \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\, x_2\, x_3\,.$$

Для запису ФАЛ в кон’юнктивній доскональій нормальній формі (КДНФ) вводять характеристичну функцію нуля, яка відповідає набору, на якому ФАЛ має значення “0”. Функція нуля записується як диз’юнкція n змінних від яких залежить ФАЛ і називається макстермом. Алгоритм побудови КДНФ складається із декількох етапів:

1. В таблиці істинності відмічаються всі набори аргументів, на яких функція має значення “0”.
2. Записуються диз’юнкції які відповідають цим наборам. При цьому якщо змінна x_i входить до набору як “0”, то вони записується без зміни, а якщо як “1”, то записується з запереченням.
3. Всі записані диз’юнкції об’єднуються знаком кон’юнкції.

ДЛЯ НАШОГО ПРИКЛАДУ БУДЕМО МАТИ

$$F(x_1\, x_2\, x_3) = (\bar{x}_3 \vee x_2 \vee \bar{x}_1)(\bar{x}_3 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1)(\bar{x}_3 \vee x_1 \vee \bar{x}_2).$$

В зв’язку з тим що кожному двійковому набору відповідає номер в десятковій системі обчислення, то для зручності запису ФАЛ в КДНФ або ДДНФ застосовують тільки номера наборів в десятковій системі тобто:

$F(x_1\, x_2\, x_3) = \underset{ij \in T_1}{V} Fii$ =f(1,3,4,5)=$m_1 \vee m_3 \vee m_4 \vee m_5$, де ij є T_1, а T_1 – підмножина наборів на якій ФАЛ має значення “1”;

або $F(x_1\, x_2\, x_3) = \underset{ij \in T_0}{\&} Fii$ =f(2,6,7,0)=$m_2 \vee m_6 \vee m_7 \vee m_0$, де ij є T_0, а T_0 – підмножина наборів на якій ФАЛ має значення “0”;

Крім запису ФАЛ в бульовому базисі, застосовуються інші базиси.

Контрольні питання:

1. Назвіть основні функції бульової алгебри?
2. Назвіть елементарні функції алгебри логіки?
3. Якими методами можна задати функції алгебри логіки?
4. Як визначити число наборів функції n- змінних?
5. Як визначити число ФАЛ, залежних від n- змінних?
6. Дайте ознаку характеристичної функції одиниці та нуля.
7. Як функцію представити в КДНФ або ДДНФ?
8. Покажіть, як працює правило склеювання.
9. Що означає обчислити логічну функцію?
10. На які класи розбивається множина усіх двійкових наборів?

Домашнє завдання №1

1. Початкову ФАЛ, приведену в таблиці 1.10, перетворити в рівнозначну у заданому базисі. Перетворення виконати за допомогою таблиці істинності і аналітично. Задані базиси у таблиці 1.10 означають наступні:

   2. - F1 = {V,Λ, - }; 2.-F2 = {V,-}; 3.-F3 = {Λ,-}

2. Початкову ФАЛ, приведену в таблиці 1.11, задану аналітично, відобразити геометрично -1 , на картах Вейча -2, Карно -3(цифри у таблиці - коди відображення).

Таблиця 1.10.

№ п/п	Функція	Базис		
		а	б	в
1	$F= (x_1x_2\overline{x_3}V\overline{x_2})\sim(\overline{x_1}x_3\rightarrow x_4)$	1	2	3
2	$F=(x_1\overline{x_3}\downarrow x_2x_3) \rightarrow(\overline{x_1}x_4Vx_2\overline{x_3})$	2	3	1
3	$F=(x_1\downarrow x_2) \sim\overline{(x_3\rightarrow x_4)Vx_1x_3}$	3	1	2
4	$F=(x_3\sim x_1)\leftarrow(x_2/x_3)Vx_4$	1	3	2
5	$F=\overline{(x_2\downarrow x_1)} \sim(\overline{x_1}Vx_4) \rightarrow x_3$	2	1	3
6	$F=x_3/x_1x_2 \rightarrow x_3Vx_1x_2) \sim x_4$	3	1	2
7	$F=x_3\rightarrow\overline{(x_2Vx_3\rightarrow x_4})\ x_3x_4$	1	3	2
8	$F=x_1/x_2x_3 \sim\overline{x_3}x_1\rightarrow x_1x_4$	2	1	3
9	$F=x_3\rightarrow x_3\sim(x_1x_4/x_2x_1)$	3	2	1
10	$F= x_3/x_1x_2\rightarrow\overline{x_2x_4\sim x_3x_1}$	1	3	2
11	$F=\overline{x_1}x_2\sim x_3x_4\rightarrow(\overline{x_1}x_4/x_3\overline{x_4})$	2	1	3
12	$F=x_4\sim(x_3Vx_1) \rightarrow(x_1x_2/x_3)$	3	2	1
13	$F=(x_2Vx_3\overline{x_4})/x_2x_3Vx_1x_4$	1	3	2
14	$F=\overline{x_4x_3\rightarrow x_1x_2}\sim(x_3Vx_4)/x_3$	2	1	3
15	$F=x_3x_4Vx_3x_1\rightarrow\overline{x_1x_3Vx_2x_4}$	3	2	1
16	$F=x_1\rightarrow x_3(x_1/x_2) \sim x_3x_4$	1	3	2
17	$F=x_1\rightarrow x_2x_3x_4Vx_1x_2x_3\sim\overline{x_3}$	2	1	3
18	$F=\overline{x_1x_3\sim x_1x_2}\downarrow x_3x_4\rightarrow\overline{x_1x_2}$	3	2	1
19	$F=x_1x_3Vx_4\rightarrow x_3(x_2/\overline{x_1})$	1	3	2

20	$F=x_1/x_2x_3\sim\overline{x_1x_4 \vee x_1x_3}$	2	1	3
21	$F=x_1\to x_2/\overline{x_3 \vee x_1x_2\sim x_4}$	3	2	1
22	$F=\overline{x_1}/x_3\to\overline{x_2x_3}\vee\overline{x_4x_1}\vee x_3$	1	3	2
23	$F=\overline{x_1x_3\vee x_2x_3}/x_2x_1\to x_4$	2	1	3
24	$F=\overline{x_2x_3}/x_1x_2\vee\overline{x_1x_4}\sim\overline{x_1x_2}$	3	2	1
25	$F=\overline{x_1x_2\vee x_1}\to\overline{x_3x_4\sim x_4}$	1	3	2
26	$F=\overline{x_1x_2}/x_3\vee\overline{x_4x_3\vee x_1}$	2	1	3

Таблиця 1.11

№ п/п	Функція	Базис		
		а	б	в
1	$F=x_1x_2 \vee \bar{x}_3x_5 \vee \bar{x}_1x_4 \vee x_3$	2	3	1
2	$F=x_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1 \vee x_2\bar{x}_5 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$	3	1	2
3	$F=x_2\bar{x}_4 \vee \bar{x}_3x_4 \vee x_4 \vee \bar{x}_1x_2x_5 \vee x_3x_2$	1	2	3
4	$F=\bar{x}_1x_4x_2 \vee x_3\bar{x}_4x_5 \vee x_1\bar{x}_5 \vee x_3 \vee x_1x_2x_3\bar{x}_4$	3	2	1
5	$F=\bar{x}_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_3x_5 \vee \bar{x}_4 \vee x_1x_4\bar{x}_2$	1	3	2
6	$F=(x_1 \vee \bar{x}_5)(x_3 \vee \bar{x}_4)(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4)(x_1 \vee x_3 \vee x_4)$	1	2	3
7	$F=x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_3x_4 \vee \bar{x}_2x_1 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_5$	3	2	1
8	$F= x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_1x_2\bar{x}_5 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4$	1	3	2
9	$F=x_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3 \vee x_1x_3\bar{x}_4x_5$	2	1	3
10	$F=x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_4 \vee x_2x_3x_4 \vee x_2\bar{x}_3\bar{x}_4x_5$	3	2	1
11	$F=\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1x_2 \vee x_2\bar{x}_3x_4 \vee x_3x_4x_5$	1	3	2
12	$F=x_1\bar{x}_2 \vee x_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2x_5 \vee \bar{x}_3x_4$	2	1	3
13	$F=x_1\bar{x}_4 \vee x_1x_2\bar{x}_3 \vee x_3x_4 \vee x_2x_3x_5$	3	2	1
14	$F=x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_2x_3x_4x_5 \vee \bar{x}_1 \vee x_2x_3x_4$	1	3	2
15	$F=x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_5 \vee x_3x_4 \vee x_4\bar{x}_1$	2	1	3
16	$F=\bar{x}_2x_3x_4 \vee x_1x_2 \vee \bar{x}_5 \vee x_3x_4$	3	2	1
17	$F=x_1\bar{x}_4 \vee x_3x_4 \vee x_1 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_5$	1	3	2
18	$F= x_2x_3 \vee x_3x_4 \vee x_1x_2x_5 \vee x_4 \vee x_1x_2$	2	1	3

19	$F=x_1\bar{x}_2x_5 \vee \bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2 \vee x_5x_3$	3	2	1
20	$F=x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_4 \vee x_5 \vee x_1x_4$	1	3	2
21	$F=x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_3\bar{x}_4 \vee x_4 \vee x_2x_5$	2	1	3
22	$F=\bar{x}_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_5 \vee x_1 \vee x_3x_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_4$	3	2	1
23	$F=x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_5 \vee x_3\bar{x}_4 \vee x_3x_4x_1$	1	3	2
24	$F= x_1x_2x_5 \vee x_1\bar{x}_2 \vee x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_4x_2$	2	1	3
25	$F=x_1x_2x_3 \vee x_1\bar{x}_2x_4 \vee x_5 \vee \bar{x}_1x_4$	3	2	1
26	$F=x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_3x_4 \vee \bar{x}_4 \vee \bar{x}_2x_5$	1	3	2

2. МІНІМІЗАЦІЯ ФОРМУЛ АЛГЕБРИ ЛОГІКИ

У технічних задачах ФАЛ використовують, відшукуючи шляхи для реалізації конкретних логічних схем та різного роду пристроїв для переробки інформації-автоматів.

Мета мінімізації - отримати таку схему, яка містила б мінімальну кількість логічних елементів, кожний з яких мав би мінімальну кількість входів. Таким чином, мінімізація – це знаходження такої ДНФ/КНФ/ФАЛ, яка еквівалентна ФАЛ у ДДНФ/ДКНФ/, що має мінімальну кількість входжень змінних для побудови логічної схеми.

Якщо ФАЛ записана ДДНФ, то в цьому базисі часто застосовуються для мінімізації аналітичний, графічній, графоаналітичній та інші методи. Одержані форми ФАЛ називаються тупиковими, а ті що мають найменшу кількість букв мінімальними.

2.1 Аналітичний метод.

В основу алгебраїчного методу мінімізації покладені основні властивості операцій заперечення, диз'юнкції та кон'юнкції, аналогічно як і в звичайній алгебрі проводиться спрощення формул.

Приклад: Нехай маємо ДДНФ

$F(x_1, x_2, x_3)=x_1 x_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \vee x_1 x_2 \bar{x}_3 \vee \bar{x}_1 x_2 x_3 = x_2x_3(x_1 \vee \bar{x}_2) \vee x_1 x_2(x_3 \vee \bar{x}_3) \vee x_2 \bar{x}_3(x_1 \vee \bar{x}_1)= x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \vee x_2 \bar{x}_3 = x_2(x_3 \vee x_1 \vee \bar{x}_3)$.

При мінімізації були використані асоціативний та комутативний закони поглинання та склеювання.

2.2 Графічний метод мінімізації.

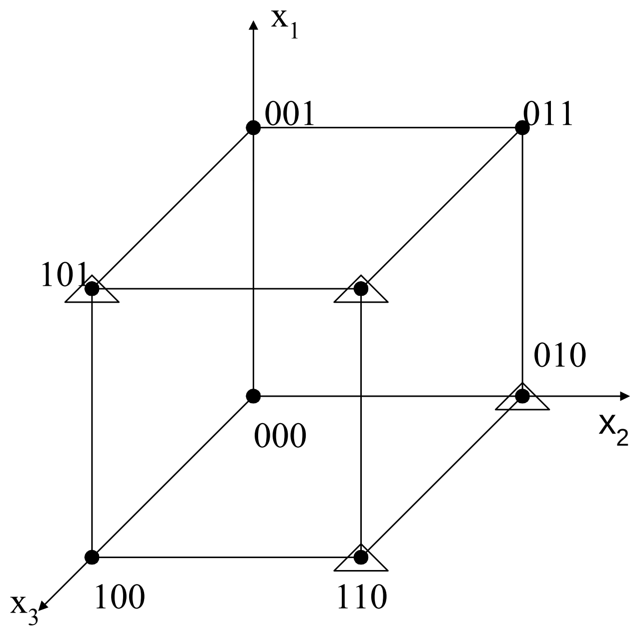
При графічному методі мінімізації застосовується графічне зображення функції. На цім зображенні вершині геометричної фігури відповідає кон’юнкція рангу n, ребру, яке з’єднує дві задані вершини, відповідає кон’юнкція n-1, грані - кон’юнкція n-2 і т.д. На геометричній фігурі знаходять відповідні інтервали і записують ФАЛ.

Приклад:

Мінімізувати ФАЛ $f(x_1\ x_2\ x_3)=\bar{x}_3\ x_2\ \bar{x}_1 \vee x_3\ x_2\ \bar{x}_1 \vee x_3\ \bar{x}_2\ x_1 \vee \bar{x}_3\ x_2\ x_1$.

Алгоритм мінімізації:

1). Будується геометрична фігура, яка відповідає заданій ФАЛ. В нашому випадку для функції 3^x змінних це куб.
2). На кубі відмічають вершини, на яких ФАЛ має значення “1”.
3). Знаходяться максимальні інтервали. В нашому випадку три ребра це $x_3\ x_1$; $x_3\ x_2$; $\bar{x}_3\ x_2$.



4) Записується скорочена диз’юнктивна нормальна форма.

$$f(x_1\ x_2\ x_3)=x_3\ x_3 \vee \bar{x}_1\ \bar{x}_1 \vee x_2\ x_2.$$

5) Із одержаної ДНФ викидаються деякі інтервали. В нашому випадку можна викинути інтервал $x_3\ x_2$. Тоді мінімальна форма буде

$$f(x_1\ x_2\ x_3)=x_3\ x_1 \vee \bar{x}_3\ x_2.$$

При виписуванні інтервалів в них залишаються ті змінні, які зберігають свої значення при переході з однієї вершини до іншої, тобто для сусідніх вершин виконується правило склеювання

$$x_1\ \bar{x}_2 \vee x_1\ x_2 = x_1(\bar{x}_2 \vee x_2) = x_1.$$

При знаходженні лишнього інтервалу необхідно мати на увазі, що при виключені інтервалу повинні залишитися всі вершини, які були спочатку. Якщо кількість змінних велика, то застосування аналітичного та графічного методів стає громіздким і затрати часу на мінімізацію збільшуються в декілька разів. Тому при кількості змінних більше трьох застосовуються інші засоби мінімізації, які потребують значно менше часу, або дають можливість застосувати обчислювальну техніку. До таких методів належать графоаналітичний метод (карти Карно-Вейча), метод Квайна-Мак-Класкі, метод невизначених коефіцієнтів та інші.

2.3 Графоаналітичний метод

При графоаналітичному методі мінімізації застосовують карти Карно або Вейча. Карти Карно або Вейча – це спеціально організовані таблиці відповідності. Карти Карно від карт Вейча відрізняються тільки способом нумерації рядків та стовпців таблиці. Так у картах Карно стовпці і рядки нумеруються комбінаціями не більше двох змінних, при цьому набори записуються в такім порядку, щоб кожний наступний відрізнявся від попереднього тільки значенням однієї змінної. Загальна кількість клітинок в таблиці буде 2^n при n – змінних. Клітинки які стоять в кінцях таблиці теж мають ці властивості, тобто являються сусідніми.

При мінімізації ФАЛ повинна бути записана в ДНФ або ДДНФ. Клітинки наборів, на яких функція має значення “1”, заповнюються одиницями, нулі не записуються. Кількість одиниць, які можна об’єднати в інтервал дорівнює 2^{n-m}, де m – ранг максимального рангу, який покриває площу. В мінітерм записуються ті змінні, які при обході площі по контуру зберігають своє значення. При цьому значенням “1” відповідають самі змінні, а значенню “0” – їх заперечення.

Для відображення функції 5 змінних використовуються дві карти 4 змінних, для 6 змінних 2 карти 5 змінних або 4 карти 4 змінних і т.д.

Приклад: Мінімізувати ФАЛ, яка задана мінітермами
$f(x_1x_2x_3x_4)=\{1,4,5,6,7,9,11,12,14\}$.

	$x_1 x_2$ / $x_3 x_4$			x_1	
		00	01	11	10
	00		1	1	
	01	1	1		1
x_4	11		1		1
	10		1	1	
			x_2		

Рішення:
1). Будуємо карту Карно для 4-х змінних.
2). Позначаємо набори на який ФАЛ має значення “1”.
3). Організовуємо інтервали по 4 змінних – два, по 2 змінні - два.
4). Виписуємо інтервали $j_1=\bar{x}_1 x_2$; $j_2=x_2 \bar{x}_4$; $j_3=x_1 \bar{x}_2 x_4$; $j_4=\bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4$

5). Записуємо рішення ,об’єднавши одержані інтервали знаком диз’юнкції.
$f(x_1 x_2 x_3 x_4)=\bar{x}_1 x_2 \vee x_2 \bar{x}_4 \vee x_1 \bar{x}_2 x_4 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_3 x_4$

Отримане рішення можна ще спростити, якщо застосувати властивості диз’юнкції та кон’юнкції, але при синтезі це може не надати переваг.

Графоаналітичний метод зручний, якщо кількість змінних не перевищує шести, тому що побудова таблиць стає громіздкою.

2.4 ***Метод Квайна***

При великій кількості змінних більш зручним являється метод Квайна-Мак-Класкі. Цей метод вперше був запропонований Квайном, а удосконалений Мак-Класкі. Мак-Класкі запропонував записувати початкову функцію не мінітермами рангу n, а розбити по групах за кількістю одиниць в кожній групі.

При мінімізації по методу Квайна необхідно, щоб ФАЛ була записана на початку в ДДНФ, тобто елементарними кон'юнкціями рангу n. Метод Квайна полягає в послідовному виконанні слідуючих етапів:

1. Знаходження первинних імплікант. Всі мінітерми заданої функції попарно зрівнюються між собою. Якщо вони мають значення виду аx_i і а$\overline{x}_i$, то записується кон'юнкція а=а(x_i v $\overline{x}_i$), так як ці мінітерми склеюються між собою і вони утворюють мінітерми (n-1)-го рангу. Мінітерми n-го рангу, які склеїлись відмічуються. Потім склеюються мінітерми (n-1)-го рангу і т.д. до того часу поки не одержать мінітерм рангу L для якого склеювання не виконується. На цьому етап закінчується. Всі не відмічені мінітерми називаються первинними або простими.[1]

Приклад. Мінімізувати ФАЛ

f($x_1\,x_2\,x_3\,x_4$)=$\overline{x}_1\,\overline{x}_2\,x_3\,x_4$ v $\overline{x}_1\,x_2\,\overline{x}_3\,\overline{x}_4$ v $x_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_3\,x_4$ v $\overline{x}_1\,x_2\,\overline{x}_3\,x_4$ v $\overline{x}_1\,x_2\,x_3\,x_4$ v $x_1\,\overline{x}_2\,x_3\,x_4$ v $x_1\,x_2\,\overline{x}_3\,\overline{x}_4$ v $x_1\,x_2\,\overline{x}_3\,x_4$

Мінітерми 4-го рангу: $\overline{x}_1\,\overline{x}_2\,x_3\,x_4$*, $\overline{x}_1\,x_2\,\overline{x}_3\,\overline{x}_4$*, $\overline{x}_1\,x_2\,\overline{x}_3\,x_4$*, $\overline{x}_1\,x_2\,x_3\,x_4$*, $x_1\,\overline{x}_2\,\overline{x}_3\,x_4$*, $x_1\,\overline{x}_2\,x_3\,x_4$*, $x_1\,x_2\,\overline{x}_3\,\overline{x}_4$*, $x_1\,x_2\,\overline{x}_3\,x_4$*

Знаходимо мінітерми 3-го рангу: $\overline{x}_1\,x_3\,x_4$, $\overline{x}_2\,x_3\,x_4$, $\overline{x}_1\,x_2\,\overline{x}_3$*, $x_2\,\overline{x}_4\,\overline{x}_3$*, $\overline{x}_1\,x_2\,x_4$, $x_4\,x_2\,\overline{x}_3$*, $x_1\,x_4\,\overline{x}_3$, $x_1\,\overline{x}_2\,x_4$*, $x_1\,x_2\,\overline{x}_3$*

Тепер знаходимо мінітерми 2-го рангу $x_2\,\overline{x}_3$

Тому що подальше склеювання неможливе, то етап закінчується. Простими імплікантами будуть: $\overline{x}_1\,x_3\,x_4$, $\overline{x}_2\,x_3\,x_4$, $\overline{x}_1\,x_2\,x_4$, $x_1\,\overline{x}_2\,x_4$, $x_1\,\overline{x}_3\,x_4$, $x_2\,\overline{x}_3$.

2. Розстановлення міток. Якщо прості імпліканти об'єднати знаком диз'юнкції, то одержимо скорочену ДНФ. Для знаходження мінімального покриття, необхідно деякі імпліканти викинути. Щоб знайти ці імпліканти складають таблицю. В цій таблиці число рядків відповідає кількості первинних імплікант, а число стовпців кількості мінітермів ДДНФ. Якщо первинна імпліканта входить в початковий мінітерм, то на перетину рядка і стовпця ставиться позначка.

	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_1$	x_1	x_1	x_1	x_1

	$\bar{x}_2 x_3 x_4$	$x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	$x_2 \bar{x}_3 x_4$	$x_2 x_3 x_4$	$\bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$	$\bar{x}_2 x_3 x_4$	$x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	$x_2 \bar{x}_3 x_4$
$\bar{x}_1 x_3 x_4$	V			V				
$\bar{x}_2 x_3 x_4$	V					V		
$\bar{x}_1 x_2 x_4$			V	V				
$x_1 \bar{x}_2 x_4$					V	V		
$x_1 \bar{x}_3 x_4$					V			V
$x_2 \bar{x}_3$		V	V				V	V

1. Знаходження істотних (суттєвих) імплікант.

Якщо в деяких стовпцях знаходиться тільки одна позначка, то первинна імпліканта яка відповідає цьому рядкові називається істотною. Її не можна викинути із правої частини, тому що не буде покрита множина T_1, даної функції. Якщо це так, то із таблиці виключаються рядки відвідні істотним імплікантам і стовпці мінітермів, які покриваються ними. Для нашої ФАЛ істотною імплікантою буде $x_2 \bar{x}_3$, яка покриває 4 мінітерми. $\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$, $\bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$, $x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$, $x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4$

2. Викреслювання зайвих стовпців.

Досліджується одержана таблиця, яка залишилась після 3-го етапу. Якщо в ній єсть позначки в однакових рядках, то один із них викреслюється.

	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4$	$\bar{x}_1 x_2 x_3 x_4$	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$	$x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4$
$\bar{x}_1 x_3 x_4$	V	V		
$\bar{x}_2 x_3 x_4$	V			V
$\bar{x}_1 x_2 x_4$		V		
$x_1 \bar{x}_2 x_4$			V	V
$x_1 \bar{x}_3 x_4$			V	

В нашому випадку однакових рядків немає.

1. Викреслювання лишніх первинних імплікант.

Якщо після викидання деяких стовпців в таблиці появляються рядки, в яких немає жодної позначки, то відповідні імпліканти виключаються із подальшого розгляду, як такі що не покривають мінітерми, що залишилися.

2. Вибір мінімального покриття максимальними інтервалами.

Досліджується одержана таблиця. Вибирається така сукупність первинних імплікант, яка виключає позначки в усіх стовпцях, а число букв в покритті було б мінімальним. В нашому прикладі $\overline{x}_1 x_3 x_4$ і $x_1 \overline{x}_2 x_4$.

Таким чином для нашої функції одержимо мінімальну ДНФ, об'єднавши одержані мінітерми знаком диз'юнкції f($x_1 x_2 x_3 x_4$)=$\overline{x}_1 x_3 x_4 \vee x_1 \overline{x}_2 x_4 \vee x_2 \overline{x}_3$.

2.5 Метод Квайна-Мак-Класкі.

Недоліком методу Квайна є те, що необхідно попарно зрівнювати на етапі знаходження простих імплікант всі мінітерми, які задають початкову ФАЛ. Із збільшенням числа мінітермів, відповідно збільшується число порівнянь.

Ідея Мак-Класкі полягає в тому, що всі мінітерми записуються в двійковій системі обчислення. Потім всі номера наборів записуються по групах в залежності від кількості одиниць в номері набору. Таким чином розбиваються номери на не пересічні між собою групи, і зрівнюються тільки сусідні групи, тому що вони відрізняються зміною в однім розряді. При створенні мінітермів на місце виключеної змінної ставиться тире. Інші етапи мінімізації залишаються незмінними.

Приклад. Функція задана мінітермами з номерами 0, 1, 4, 5, 6, 9, 11, 15.

1. Запишемо мінітерми в двійковому коді і розіб'ємо на групи по кількості одиниць в групах:

нульова група - 0000*
перша група - 0001*; 0100*
друга група - 0101*; 1001*; 0110*
третя група - 1011*
четверта група - 1111*

Зрівнюючи сусідні групи, одержимо мінітерми третього рангу і помітимо ті, для яких відбулося склеювання

нульова група - 000-*;0-00*
перша група - 0-01*; 010-*; -001*; 01-0*
друга група - 10-1*
третя група - 1-11*

знаходимо мінітерми другого рангу.
нульова група - 0-0-; 0-0-.
Подальше склеювання неможливе і всі невідмічені імпліканти називаються первинними або простими.

2. Розстановка позначок

Складаємо таблицю, кількість рядків в якій дорівнює числу одержаних простих імплікант, а кількість стовпців співпадає з числом мінітермів в ДДНФ. Якщо проста імпліканта входить в початковий мінітерм, то на перетині відповідного стовпця і рядка ставиться позначка

	0000	0001	0100	0101	0110	1001	1011	1111
0-0-	X	x	x	x				
-001		x				x		
01-0			x		x			
10-1						x	x	
1-11							x	x

3. Знаходження суттєвих імплікант

При аналізі таблиці, знаходять стовпці, в яких є тільки одна позначка. Імпліканта, яка відповідає цьому рядкові, називається суттєвою, і не може бути виключена із покриття Т1. Із таблиці виключаються рядки, які відповідають цим імплікантам, і стовпці, в яких є позначка на перетині з цими рядками.

Для нашої таблиці знаходимо суттєві імпліканти: $\bar{x}_1\bar{x}_3$; $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$; $x_1x_2x_4$. Вони покривають мінітерми: $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$; $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$; $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$; $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$; $\bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4$; $x_1x_2x_3x_4$ При переході до наступного етапу ці мінітерми викреслюються.

4. Викреслювання зайвих стовпців.

Досліджується одержана таблиця після третього етапу. Якщо в ній є два стовпці, в яких є помітки в однакових рядках, то один із них викреслюється.

В одержаній таблиці таких стовпців немає.

5. Викреслювання лишніх первинних імплікант

Якщо після четвертого етапу в таблиці з’явилися рядки, в яких немає жодної позначки, то первинні імпліканти, яким відповідають ці рядки, виключаються з подальшого розгляду, як такі, що не покривають мінітерми, які залишилися в таблиці.

6. Вибір мінімального покриття максимальними інтервалами.

Досліджується одержана таблиця. Вибирається така сукупність первинних імплікант, які виключають всі помітки в стовпцях і мають мінімальну кількість букв.

	1001
-001	x
10-1	x

Для прикладу можна вибрати любу первинну імпліканту. Тоді ДНФ для нашої функції буде

$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=x_1x_3 \vee x_1x_2x_4 \vee x_1x_2x_4 \vee x_1x_3x_4$

Контрольні питання

1. Які методи мінімізації ФАЛ ви знаєте?
2. Що значить максимальний інтервал?
3. Як одержати МДНФ при геометричному методі мінімізації?
4. Що відображають карти Карно-Вейча?
5. Який недолік має метод Квайна?
6. Що таке ДНФ?
7. Що значить ранг мінітерма і макситерма?
8. Яку кількість мінітермів можна об'єднати при груповому склеюванні?
9. Чому дорівнює ранг мінітерма при груповому склеюванні одиниць?
10. Які змінні зберігаються в мінітермах при їх груповому склеюванні?

Домашнє завдання №2

1. Мінімізувати ФАЛ, задану номерами визначених наборів в табл. 2.1-2.2 У варіантах, позначених *, ФАЛ записати у вигляді сукупності макситермів, непозначених - мінітермів. Коди методів мінімізації, котрі використовуються у варіанті для мінімізації ФАЛ, наступні:

1 - геометричний.
2- карти Вейча.
3- карти Карно.
4- Квайна .
5- Квайна-Мак-Класкі.

2. Мінімізувати недовизначену ФАЛ. Заборонені набори початкової ФАЛ по п.1. приведені в стовпці 4 таблиць домашнього завдання.

Список рекомендованої літератури.

1. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. - Киев: Техника, 1975. - 766с.
2. Поспелов А.Д. Логические методы анализа и синтеза схем.- М.: Энергия, 1974. - 358с.
3. Основы кибернетики. Математические основы кибернетики / Под ред. Проф. К.А. Пупкова.- М.: Высш.шк., 1974.-400с.

Таблиця 2.1.

Номер варіанту	Набори завдання визначеної ФАЛ	Метод мінімізації	Заборонені комбінації
1.	1,2,3.4,5,6.7,8.9,11,13,16,17,19, 21,23,25,27,30,31	1;4	5,9,17,25
2.*	2,4,6,7,9,10,11,12,14,15,18,20,2 2,24,25.26,28,29,30	1;2	4,10,16,29
3.*	3,5,6,7,9,10,12,13,16,17,19,21,2 3,25,26,27,30	3;4	7,12,13,16,26

4.	1,3,5,6,9,11,13,15,17,18,19,20,21,22,24,25,26,27,29	2;5	3,5,18,21
5.	1,2,3,4,6,7,9,10,13,16,17,19,20,22,23,.24,25,26,27,29	1;3	2,10,22,23
6.*	3,4,5,6,7,9,11,12,13,14,16,18,19,20,21,24,28,30,31	1;4	6,9,14,20,21
7.	2,4,6,7,9,10,12,14,16,17,18,19,20,21,.22,23,24,25,26,27	2;5	6,7,9,21,22
8.*	1,3,4,5,7,8,9,10,12,13,14,16,17,18,19,20,22,23,26,30,31	1;4	1,3,12,23,30
9.	4,5,6,7,9,10,11,12,13,14,15,16,19,20,21,23,24,26,28,30	3;1	5,10,11,13,16,23,28
10.	7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,29,30,31	1;2	8,11,16
11.*	5,6,7,9,11,13,15,16,.17,18,19,20,22,24,26,28,30,31	2;4	5,16,20,26
12.	6,7,9,10,11,13,14,15,17,18,19,20,22,23,24,26,28,30	3;5	6,7,22,24,30
13.	8,9,11,12,13,14,15,16,18,20,21,22,23,24,26,28,29,30,32	1;4	8,20,24,30
14.*	1,3,5,7,9,10,13,15,16,18,20,22,24,26,28,31	2;5	1,7,13,24,28
15.	2,4,6,8,9,10,11,12,13,15,16,19,21,22,23,24,25,26,29,31	3;1	2,6,12,15,21,26
16.*	4,6,7,9,11,12,13,14,15,16,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28	1;2	9,11,15,21,26
17.	5,7,8,10,11,13,15,18,19,20,21,23,26,27,29	3;4	7,10,11,13,15,29
18.	3,4,6,7,9,10,12,14,16,18,20,21,23,24,26,27,29,30	2;1	4,6,7,12,24,30
19.*	2,4,6,7,9,10,12,14,16,18,20,21,23,24,25,26,27,29	2,4	2,5,18,25
20.	4,5,6,7,9,11,12,13,15,16,19,21,22,23,25,26,28,30,31	1;5	4,13,22,30
21*	7,9,11,12,13,14,16,18,21,22,23,24,26,27,28,31	1;2	7,21,24,28
22	1,3,5,7,8,10,12,13,15,16,17,19,21,23,25,26,27,29	2;5	1,7,13,21,26
23*	6,7,9,11,12,13,5,18,19,20,21,24,25,26,27,29,31	1;4	4,7,11,21,24, 29
24	3,5,7,8,9,10,11,13,14,15,16,17,18,19,21,13,25,26,31	3;1	5,7,13,23,27,
25	5,7,9,10,11,13,14,16,17,18,19,21	1;2	7,16,17,23,27

	,22,23,24,25,26,27		
26	1,2,3,4,5,6,7,8,9,12,13,16,19,20, 21,22,23,24,27,30,31	2;1	3,16,20,21,30

Таблиця 2.2.

Номер варіанту	Набори завдання визначеної ФАЛ	Метод мінімізації	Заборонені комбінації
1*	1,3,5,6,9,11,13,15,17,18,19,20,2 1,22,24,25,26,27,29	2;3	3,5,18,21
2	3,5,7,8,9,10,11,13,14,15,16,17,1 8,19,21,13,25,26,31	1;5	5,7,13,23,27,
3	5,7,9,10,11,13,14,16,17,18,19,21 ,22,23,24,25,26,27	2;4	7,16,17,23,27
4	1,2,3,4,5,6,7,8,9,12,13,16,19,20, 21,22,23,24,27,30,31	1;4	3,16,20,21,30
5*	1,2,3,4,6,7,9,10,13,16,17,19,20,2 2,23,.24,25,26,27,29	2;3	2,10,22,23
6	1,2,3.4,5,6.7,8.9,11,13,16,17,19, 21,23,25,27,30,31	1;4	5,9,17,25
7	2,4,6,7,9,10,11,12,14,15,18,20,2 2,24,25.26,28,29,30	3;4	4,10,16,29
8	3,5,6,7,9,10,12,13,16,17,19,21,2 3,25,26,27,30	4;3	7,12,13,16,26
9*	1,3,4,5,7,8,9,10,12,13,14,16,17,1 8,19,20,22,23,26,30,31	2;1	1,3,12,23,30
10*	4,5,6,7,9,10,11,12,13,14,15,16,1 9,20,21,23,24,26,28,30	5;2	5,10,11,13,16,2 3,28
11*	7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18 ,19,20,21,29,30,31	1;4	8,11,16
12*	5,6,7,9,11,13,15,16,.17,18,19,20, 22,24,26,28,30,31	3;2	5,16,20,26
13	6,7,9,10,11,13,14,15,17,18,19,20 ,22,23,24,26,28,30	1;2	6,7,22,24,30
14	3,4,5,6,7,9,11,12,13,14,16,18,19, 20,21,24,28,30,31	1;5	6,9,14,20,21
15	2,4,6,7,9,10,12,14,16,17,18,19,2 0,21,.22,23,24,25,26,27	1;2	6,7,9,21,22
16	5,7,8,10,11,13,15,18,19,20,21,23 ,26,27,29	1;3	7,10,11,13,15,2 9
17*	3,4,6,7,9,10,12,14,16,18,20,21,2 3,24,26,27,29,30	4;1	4,6,7,12,24,30
18*	2,4,6,7,9,10,12,14,16,18,20,21,2	5;2	2,5,18,25

	3,24,25,26,27,29		
19*	4,5,6,7,9,11,12,13,15,16,19,21,2 2,23,25,26,28,30,31	3;4	4,13,22,30
20	7,9,11,12,13,14,16,18,21,22,23,2 4,26,27,28,31	1;3	7,21,24,28
21	1,3,5,7,8,10,12,13,15,16,17,19,2 1,23,25,26,27,29	2;4	1,7,13,21,26
22	6,7,9,11,12,13,5,18,19,20,21,24, 25,26,27,29,31	1;3	4,7,11,21,24, 29
23*	8,9,11,12,13,14,15,16,18,20,21,2 2,23,24,26,28,29,30,32	2;1	8,20,24,30
24	1,3,5,7,9,10,13,15,16,18,20,22,2 4,26,28,31	5;1	1,7,13,24,28
25*	2,4,6,8,9,10,11,12,13,15,16,19,2 1,22,23,24,25,26,29,31	3;1	2,6,12,15,21,26
26*	4,6,7,9,11,12,13,14,15,16,18,19, 20,21,22,23,24,25,26,27,28	2;4	9,11,15,21,26

Методичні вказівки
до курсу "Алгебра логіки"
для студентів спеціальності
(6.050502 Електронні системи)

Укладачі: Микола Григорович Винниченко, доцент
Вікторія Павлівна Тарасюк, доцент