

УДК 004.942

ИНТЕРВАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В РАМКАХ ТРАДИЦИОННЫХ И ПОСТБИНАРНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

*Иваница С.В., Аль Рабаба Хамза, Аноприенко А.Я.
Донецкий национальный технический университет
anoprien@cs.dgtu.donetsk.ua, isv@cs.dgtu.donetsk.ua*

Выполнен обзор работ посвященных интервальному анализу и прослежены основные тенденции европейского и советского путей развития интервального анализа и интервальных вычислений. Намечены основные тенденции развития интервальных вычислений в ДонНТУ, а также их реализация в контексте кодо-логической эволюции. Выявлена погрешность при кодировании «высокоточного» числа (на примере константы e) в вещественные форматы чисел с плавающей запятой и продемонстрировано сохранение точности при переходах к интервальным традиционным и интервальным постбинарным типам данных.

Современное состояние интервальных вычислений

Наряду со многими достижениями в области науки и техники, в середине XX века началось внедрение более широкой парадигмы понимания природы неопределенности, ранее сформированной в различных областях прикладной математики. Она базировалась на трактовке неопределенности в более широком контексте, расширяющем понятие случайности: неединственность возможных исходов, семантическая вариабельность, многокритериальность для задач оптимизации. Новые подходы к описанию неопределенности вызвали появление концепций многозначных логик и недоопределенных моделей, теорию нечетких множеств и чисел [1, 2], а также **интервальный анализ**, предметом которого является решение задач с интервальными неопределенностями и неоднозначностями в данных, возникающими как при постановке задачи, так и на промежуточных стадиях вычислений [3, 4].

В настоящее время к интервальному представлению факторов неопределенности обращено пристальное внимание инженеров и конструкторов, как к наименее ограничительному и наиболее адекватному описанию начальных условий при практической постановке инженерных задач. Такая неопределенность называется интервальной, поскольку указывает только границы возможных значений некоторой величины (либо пределы ее изменения), знания о которой являются неполными (или частичными). Интервальная неопределенность величины, выраженная своими крайними значениями, может рассматриваться как интервальный параметр, имеющий следующие особенности:

- любая величина, имеющая интервальную неопределенность, может быть представлена только своими крайними значениями — границами возможных значений (либо пределами изменения) этой величины;
- ширина интервала, которым выражена такая величина, является естественной мерой ее неопределенности (неоднозначности);
- результатом арифметических операций над величинами, имеющими интервальную неопределенность, также является интервальная неопределенность.

В отличие от интервальной неопределенности некоторой величины интервальный параметр (называемый также интервалом) представляет числовые промежутки в качестве основного объекта данных и не содержит никакой дополнительной информации о самой величине. Иными словами, в контексте интервального анализа отрезок x трактуется как множество возможных значений неизвестной истинной величины, т. е. как ограниченный **интервал** ее неопределенности:

$$x = [x \mid x_- \leq x \leq x_+], \quad (1)$$

задаваемый нижней (левой) и верхней (правой) границами x_- и x_+ .

Предполагается, что неизвестное истинное значение переменной достоверно лежит внутри интервала x , который принадлежит множеству IR всех интервалов действительных чисел. При этом для $x \in IR$ все значения $x \in R$ считаются равновероятными, следовательно интервал x не определен никакой вероятностной мерой.

Использование таких интервалов в качестве числовых аргументов составляют главную идею интервальных вычислений.

«Интервальная идея» начала интенсивно развиваться в конце XX века в тесной связи с развитием и распространением практических инженерных вычислений. Увеличение темпов развития интервальных вычислений, прежде всего, связано с широким распространением ЭВМ, с чем также связано оформление интервального анализа в самостоятельную научную дисциплину [5]. Основы интервального анализа как научной дисциплины были изначально заложены теорией измерений в **метрологии**, где предполагается, что значение неизвестной величины x характеризуется полученной неточным измерительным прибором недостоверной величины x_0 и известной абсолютной Δ (или относительной δ) ошибкой измерения. Тогда, аналогично (1), границы интервала неопределенности x измеряемой величины x_0 выражаются условием

$$x = [x_-; x_+] = [x_0 - \Delta; x_0 + \Delta] = [x_0 \cdot (1 - \delta); x_0(1 + \delta)]. \quad (2)$$

Необходимость решения прикладных задач с интервальными параметрами в других областях науки требовала дополнительных подходов и методов. По этой причине в 70–80-х годах прошлого века наблюдается появление как многочисленных работ по интервальным арифметике и анализу, так и большого интереса специалистов к интервальному представлению значений величин. Развитие методов вычислений с интервальными значениями проходило по двум направлениям.

Первое направление — **интервальные вычисления** (reliable/validated/scientific computing), теоретической базой которых выступала **интервальная арифметика**. Интервальные вычисления получили развитие на Западе (прежде всего в Германии) в качестве средства автоматического учета ошибок округления при проведении численного решения задач на ЭВМ. В рамках интервальных вычислений решаются задачи направленные, во-первых, на анализ интервальной сходимости, устойчивости и точности существующих алгоритмов, и, во-вторых, на разработку новых алгоритмов решения задач, обеспечивающих минимальную ошибку результирующего интервала [6]. На сегодняшний день основным международным информационным порталом по интервальным вычислениям, является портал Interval Computations [7], поддерживаемый В.Я. Крейновичем в Университете Техаса в Эль-Пасо, США.

Второе направление — **интервальный анализ** или **интервальная математика**, развиваемое учеными СССР как теоретическая основа для решения практических задач с неопределенностью в исходных данных и параметрах моделей [8–10]. В отличие от западного направления, где применение интервальных вычислений было, прежде всего, направлено на алгоритмизацию и автоматизацию вычислений, главная цель применения интервального анализа состояла в нахождении области возможных значений результата с учетом структуры данных и функций, заданных в символьном виде. Информационным порталом, посвященным интервальному анализу, является портал «Интервальный анализ и его приложения» [4], куратором которого выступает С.П. Шарый в институте вычислительных технологий Сибирского отделения Российской академии наук, г. Новосибирск.

Общность двух направлений выражена одинаковыми взглядами на представление описания неопределенности, которая «упакована» в интервальной форме. Однако отличительной чертой данных направлений является использование различных базовых гипотез и подходов к определению результирующего интервала неопределенности. Нечеткие отличительные границы и близость «интервальной» терминологии обоих направлений привели к появлению в последнее время ряда исследований, в которых методология интервальных вычислений «по умолчанию» применяется к решению задач интервального анализа. В последующем изложении термин «интервальный анализ» будет использоваться как собирательный, включающий в себя представление «интервальных исчислений» обоих направлений.

Развитие интервального анализа

Первым человеком, который косвенно применял методы интервального анализа, можно назвать Архимеда, поскольку в своих расчетах он широко использовал двусторонние приближения, в частности для определения числа π . Такое предположение было высказано Р.Е. Муром в 1966 г. в монографии [11] — первой монографии, полностью посвященной интервальному анализу. Однако «интервальные» подходы к вычислениям высказывались и ранее. В 1931 году в Великобритании Р. Янг была предложена арифметика для вычислений с множествами чисел [12]. Спустя 20 лет американским ученым П. Двайером был рассмотрен случай замкнутых интервалов в связи с необходимостью учета погрешностей в численном анализе [13]. Также можно отметить работы польского и японского ученых М. Вармуса [14, с. 253-259] и Т. Сунаги [15], в которых были предложены методы вычислений, позднее нашедшие место в классической интервальной арифметике. При этом в работе Сунаги [15, с. 547-564] впервые были использованы современные термины «интервал», «интервальный».

История развития интервального анализа в СССР началась с 20-х годов XX века и связана с именем математика В.М. Брадиса, который предложил «метод границ» [16] — способ организации вычислений, фактически аналогичный интервальной арифметике. И только в 1962 г. Л.В. Канторович обозначил интервальный анализ как вычислительную науку, одну из приоритетных и активно набирающую обороты [17, с.701-709]. В 80–90-х годах было издано множество работ, посвященных интервальному анализу, среди которых стоит отметить первое учебное пособие по интервальным методам [18] и монографию [19]. В этот же период были выпущены русскоязычные издания значимых зарубежных работ по интервальному анализу.

К настоящему времени разработаны различные приемы интервальных вычислений, множество пакетов прикладных программ и алгоритмических макроязыков, реализующих элементы интервального анализа практически на всех уровнях программирования. В конце 2008 года на заседании рабочей группы по стандартизации интервальных вычислений IEEE P1788 [20] в качестве основы для работы с интервальной документацией был принят неформальный международный стандарт [21, с. 106–113].

Научные мероприятия, посвященные интервальному анализу и его приложениям, проводятся в России и за рубежом ежегодно в течение последних 25 лет. В источниках [22, 23] представлены графики грядущих научных мероприятий. Там же можно ознакомиться с материалами прошедших «интервальных» конференций. Основным периодическим изданием, который позиционируется на интервальном анализе, является журнал «Reliable Computing» [24], который начинал свою историю еще в 1991-м году в Советском Союзе под именем «Interval Computations». Работы по интервальному анализу публикуют и другие международные журналы по прикладной и вычислительной математике, численному анализу и математическому моделированию.

В Украине, в частности в ДонНТУ, также проводятся исследовательские работы, связанные с интервальным анализом. Были опубликованы работы [5, 25, 26] в сборниках статей серии «Научные труды ДонНТУ». Доклады [27–30], посвященные интервальному анализу, были представлены на международных конференциях. Также на факультете компьютерных наук и технологий ДонНТУ ведутся работы по реализации интервальных вычислений в контексте постбинарного компьютинга. В частности, в работе [25] был предложен способ кодирования границ интервала одним «тетракодовым» значением, причем разряды множественности (M) являются определяющими для позиционирования значений границ интервала на числовой оси, а разряды неопределенности (A) — уточняющими позицию этих чисел. Варьируя количеством разрядов M и A можно добиться представления границ интервала с необходимой точностью. В докладе [29] рассмотрены способы решения интервальных полиномиальных функций с контролем точности результирующего интервала. Предложены методы замены и дифференцирования, при использовании которых отбрасываются все «побочные» значения, вызванные чрезмерным расширением интервального результата при вычислениях полиномов с интервальными коэффициентами. В докладе [30] предложен специальный формат вещественных чисел от одинарной до четвертичной точности, способный хранить в одном поле числа обе границы интервала. Данный формат является одним из способов хранения данных, которые в дальнейшем

планируется использовать при моделировании кардинально новых вычислительных алгоритмов и архитектур на базе существующей компьютерных систем.

Особенности представления вещественных чисел в традиционном и интервальном представлениях

В качестве исходного числа рассмотрим трансцендентное число e , которое является основанием натурального логарифма. Числовое значение этой математической константы возьмем с точностью до 18-го знака после запятой:

$$e = +2,718281828459045235.$$

Естественно, такое значение невозможно точно представить в традиционных, используемых современными процессорами, форматах чисел с плавающей запятой. Так, для формата single (32 бит IEEE 754) заданное число e представляется следующими двоичными полями (S — знак, E — смещенная экспонента, M — мантисса):

$$S = 0; E = 10000000_2; M = 0101101111100001010100_2.$$

Точное десятичное значение, полученное из данных полей равно $e_{32b} = +2,71828174591064453125$ (число отображается в окне Windows с еще большим округлением: $F_{32b} = 2,718282$) и имеет значимую погрешность представления для заданной точности: $\Delta_1 = e - e_{32b} = +8,254840070375 \cdot 10^{-8}$.

Заданное число e также невозможно точно представить и в формате double (64 бит IEEE 754):

$$S = 0; E = 10000000000_2;$$

$$M = 010110111110000101010001011000101000101011101101001_2.$$

$$e_{64b} = +2,718281828459045090795598298427648842334747314453125;$$

$$F_{64b} = 2,71828182845905;$$

$$\Delta_2 = e - e_{64b} = +1,44204401701572351157665252685546875 \cdot 10^{-16}.$$

Рассмотрим интервалы e_1 и e_2 , границы которых соответствуют записи (1), а их численное значение получено из (2):

$$\begin{aligned} e_1 &= [e - \Delta_1; e + \Delta_1] = \\ &= [+2,718281755910644531; +2,718281911007445939]. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} e_2 &= [e - \Delta_2; e + \Delta_2] = \\ &= [+2,718281828459045091; +2,718281828459045379]. \end{aligned} \quad (4)$$

В (3) и (4) соблюдены соотношения $e \in e_1$ и $e \in e_2$. Представим e_1 и e_2 в форматах single и double с последующим извлечением точных десятичных значений (выделены и подчеркнуты первые отличающиеся разряды дробной части числа):

$$e_{32b} = [+2,71828174591064453125; +2,7182819843292236328125];$$

$$e_{64b} = [+2,718281828459045090795598298427648842334747314453125; \\ +2,71828182845904553488480814849026501178741455078125].$$

Полученные интервалы также содержат заданное значение e : $e \in e_{32b}$ и $e \in e_{64b}$.

Для границ интервалов (3) и (4) также возможен способ кодирования с помощью одного «тетракодового» слова, как это было предложено в работе [25]. Так, интервалы (3) и (4) можно представить соответствующими наборами тетракодов:

$$e_{T1} = 0 \ 10000000 \ 010110111110000101010M;$$

$$e_{T2} = 0 \ 10000000000 \ 0101101111100001010100010110001010001010111011010MA.$$

Такого набора достаточно для получения соответствующей пары двоичных полей при всех $M = 0$ для левой границы и $M = 1$ для правой границы (для обеих границ разряд A принимает случайное значение из набора $\{0; 1\}$) интервалов, точные десятичные значения которых включают в себя все значения интервалов e_{32b} и e_{64b} : $e_{T1} \supseteq e_{32b}$ и $e_{T2} \supseteq e_{64b}$ (строгое равенство достигается при отсутствии значений неопределенности A в тетракоде).

Однако точные десятичные значения могут быть получены из форматов single и double только с помощью «ручного» просчета. Для машинных вычислений нужно ориентироваться на

относительную точность форматов чисел с плавающей запятой, которая составляет 7–8 десятичных цифр для формата `single` и 15–16 десятичных цифр для формата `double`. В данном случае значение (или несколько значений) множественности переходит в старшие разряды, а младшие разряды заполняются значениями неопределенности. Например, границы интервалов (3) и (4) можно выразить следующим образом

$$e_{T1} = 0\ 10000000\ 0101101111\text{ММААААААААААА};$$

$$e_{T2} = 0\ 10000000000\ 0101101111100001010\text{ММММААААААААА...А}.$$

Таким образом, с помощью тетракода можно закодировать границы интервала произвольной точности в одном поле данных. Однако следует учесть, что данный способ эффективен при незначительной ширине интервала $\text{wid}(x) = x_+ - x_-$.

Выводы

В данном докладе выполнен обзор работ посвященных интервальному анализу и прослежены основные тенденции его развития. Выделены предпосылки развития интервальных вычислений в ДонНТУ и указаны ссылки на основные работы в данном направлении. Для постбинарного представления интервалов предложен тетракод, содержащий значения левой и правой границ интервала. В качестве недостатка такого подхода можно выделить способ представления тетракода на современных двоичных компьютерах: каждый разряд тетракода необходимо представлять в памяти компьютера двумя двоичными разрядами. Следовательно, для постбинарного представления интервала одинарной точности необходимо 64 двоичных разрядов, а для двойной точности — 128 двоичных разрядов. В таком случае, для хранения значений границ интервалов одинарной и двойной точности оправдан переход к постбинарным интервальным форматам `rbinary64/32i` и `rbinary128/64i` соответственно [26]. В дальнейшем планируется использование постбинарных форматов в качестве основы для построения постбинарного процессора.

Литература

- [1] Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к понятию приближенного решения, М.: Мир, 1976.
- [2] Нариньяни А.С., Недоопределенность в системе представления и обработки знаний, Изв. АН СССР, «Техническая Кибернетика», №5, 1986.
- [3] Hyvonen E. Constraint reasoning based on interval Arithmetic: the tolerance propagation approach, *Artificial Intelligence*, v.58, 1992.
- [4] Интервальный анализ и его приложения. Краткий неформальный очерк. Электронный ресурс. Страница доступа: <http://www.nsc.ru/interval/index.php>.
- [5] Аноприенко А.Я., Иваница С.В. Интервальные вычисления и перспективы их развития в контексте кодо-логической эволюции // Научные труды Донецкого национального технического университета. Серия «Проблемы моделирования и автоматизации проектирования динамических систем» (МАП-2010). Выпуск 8 (168): Донецк: ДонНТУ, 2010. С. 150–160.
- [6] Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение и интервальные вычисления. М.: Мир, 1987. — 360 с.
- [7] Interval Computations. Электронный ресурс. Страница доступа: <http://www.cs.utep.edu/interval-comp/main.html>.
- [8] Вошинин А.П., Бочков А.Ф., Сотиров Г.Р. Интервальный анализ данных как альтернатива регрессионному анализу. Заводская лаборатория, 1990, № 7, С. 76–81.
- [9] Gorsky V., Shvetzova-Shilovskaya T., Voschnin A. Risk assessment of accident involving environmental high-toxicity substances, *Journal of Hazardous Materials*, № 78, 2000.

- [10] Шарый С.П. Интервальные алгебраические задачи и их численное решение, Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, 2000, 322 с.
- [11] Moore R.E. Interval analysis. Eiiglewood Cliffs / R.E. Moore — N.J.: Prentic-e-llall, 1966.
- [12] Young R.C. Algebra of many-valued quantities // *Mathematische Annalen*, 1931. P. 260–290.
- [13] Dwyer P.S. Linear Computations / P. S. Dwyer – New York: John Wiley & Sons, 1951. — 36 p.
- [14] Warmus M. Calculus of approximations // *Bull. Acad. Polon. Sci.* — 1956, Cl. III, vol. IV, № 5.
- [15] Sunaga T. Theory of an interval algebra and its application to numerical analysis // *RAAG Memoirs.* – Vol. 2, Misc. II, 1958.
- [16] Брадис В.М. Опыт обоснования некоторых практических правил действий над приближенными числами // *Известия Тверского педагогического института.* Вып. 3. — 1927.
- [17] Канторович Л.В. О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // *Сибирский Математический Журнал.* — 1962. — Т.3, № 5.
- [18] Назаренко Т.И., Марченко Л.В. Введение в интервальные методы вычислительной математики. — Иркутск: Изд. Иркутского университета. — 1982.
- [19] Калмыков С.Л., Шокин Ю.И., Юлдашев З.Х. Методы интервального анализа. — Новосибирск: Наука. 1986. — 224 с.
- [20] IEEE Interval Standard Working Group — P1788. Электронный ресурс. Страница доступа. <http://grouper.ieee.org/groups/1788/>.
- [21] Интервальный анализ: Труды XIII Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения», Иркутск, Байкал, 2–8 июля 2005 года. Том 4: Иркутск, ИСЭМ СО РАН. – 2005. — 119 с.
- [22] Конференции по интервальному анализу и его приложениям. Электронный ресурс. Страница доступа. <http://www.nsc.ru/interval/index.php?j=Conferences/index>.
- [23] Forthcoming Conferences On Interval Computations and Related Topics. Электронный ресурс. Страница доступа. <http://www.cs.utep.edu/interval-comp/conf.html>.
- [24] Reliable Computing. An International Journal devoted to Reliable Mathematical Computations based on Finite Representations and Guaranteed Accuracy. Электронный ресурс. Страница доступа. <http://interval.louisiana.edu/reliable-computing-journal/RC.html>.
- [25] Аноприенко А.Я., Иваница С.В. Особенности постбинарного кодирования на примере интервального представления результатов вычислений по формуле Бэйли-Боруэйна-Плаффа // *Научные труды Донецкого национального технического университета. Серия: «Информатика, кибернетика и вычислительная техника» (ИКВТ-2010).* Выпуск 11 (164). — Донецк: ДонНТУ, 2010. С. 19–23.
- [26] Аноприенко А.Я., Гранковский В.А., Иваница С.В. Пример Румпа в контексте традиционных, интервальных и постбинарных вычислений // *Научные труды Донецкого национального технического университета. Серия «Проблемы моделирования и автоматизации проектирования динамических систем» (МАП-2011).* Выпуск 9 (179): Донецк: ДонНТУ, 2011. С. 324–343.
- [27] Аноприенко А.Я., Иваница С.В. Реализация интервальных вычислений средствами математического пакета SciLab с использованием интервального расширения Int4Sci // «Донбасс-2020: перспективы развития глазами молодых ученых»: Материалы V научно-практической конференции. Донецк, 25–27 мая 2010 г. — Донецк, ДонНТУ Министерства образования и науки, 2010. С. 629–633.

- [28] Иваница С.В., Меркулов А.В., Аноприенко А.Я. Интервальные вычисления в математических пакетах Scilab и Mathematica // Информатика и компьютерные технологии / Материалы VI международной научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых — 23–25 ноября 2010 г. Т.1. Донецк, ДонНТУ. — 2010. С. 240–246.
- [29] Иваница С.В., Меркулов А.В. Особенности вычисления интервальных полиномов с контролем точности результирующих интервалов // Моделирование и компьютерная графика / Материалы IV международной научно-технической конференции — 5–8 октября 2011 г. Донецк, ДонНТУ. — 2011. С. 119–126.
- [30] Аноприенко А.Я., Иваница С.В., Кулибаба С.В. Особенности представления постбинарных вещественных чисел в контексте интервальных вычислений и развития аппаратного обеспечения средств компьютерного моделирования // Моделирование и компьютерная графика / Материалы IV международной научно-технической конференции — 5–8 октября 2011 г. Донецк, ДонНТУ. — 2011. С. 13–19.