УДК 519.688

МЕТОДЫ КОНТРОЛЯ СТАБИЛЬНОСТИ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНОВ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Меркулов А.В., Иваница С.В., Аноприенко А.Я.
Донецкий национальный технический университет, Украина

Предложены методы контроля достоверности корней интервальной функции, разработан математический аппарат для данных меиодов, приведено его доказательство.
Ключевые слова: интервал, интервальная математика, полином

Введение

В последние годы наблюдается повышение интереса к интервальному анализу, как средству для реализации точных вычислений при проведении расчетов на ЭВМ. Интервальный анализ как научное направление сформировался относительно недавно, в основном как метод автоматического контроля ошибок округления на ЭВМ, обусловленный тем, что во многих вычислительных задачах возникла потребность не только вычисления приближенных решений, но и гарантированных оценок их близости к точным решениям [1].

5

Однако для сложных задач применение интервального анализа часто дает неудовлетворительные результаты из-за чрезмерной длины получаемых интервалов, поскольку в ряде случаев оценки точности оказываются на порядок хуже, чем реально достигаемая точность результатов [2, 3].

Чтобы проиллюстрировать данную ситуацию, приведем простой пример. Рассмотрим следующую функцию

$$f(x) = x - x, \tag{1}$$

которая для любого значения x в пределах множества действительных чисел R принимает нулевое значение. Однако число можно представить в виде множества числовых значений, которое задается его крайними границами. В таком случае данное число — интервальное (определенное на множестве интервалов действительных чисел IR), а его крайние границы — левая (меньшая) и правая (большая) границы интервала. Все арифметические операции над такими числами образуют класс интервальных арифметических операций, которые оперируют границами интервалов-операндов [4]. При переходе к интервальным вычислениям функция (1) примет вид интервальной функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, где аргумент $\boldsymbol{x} = [x_1, x_2]$ — интервальное число с границами x_1 (левая) и x_2 (правая), причем $x_1 \le x_2$. Тогда

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} = [x_1, x_2] - [x_1, x_2] = [-|x_2 - x_1|, |x_1 - x_2|]. \tag{2}$$

Таким образом, результирующий интервал $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ имеет ненулевую длину при $x_1 \neq x_2$, и, следовательно, $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x} \neq 0$. Однако, исходя из (1) $f(x) = x - x = 0$. Потеря точности произошла из-за того, что в выражении $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}$ оба операнда не являются независимыми друг от друга, так как они равны. Аналогично, если $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \blacklozenge \boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})$, где $\blacklozenge$ — некоторая арифметическая операция, реальный выходной интервал будет заведомо уже, чем при $[g_1, g_2] \blacklozenge [h_1, h_2]$, т. к. $\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{h}$ — функции от одной и той же интервальной переменной.

Одной из целей данной работы является разработка методов оптимизации при вычислении значения полиномиальной интервальной функции от интервального аргумента. В статье приводится обоснование неизбежности расширения результирующих интервалов и предлагается качественно новый подход к устранению данного явления.

Другой проблеммой данной работы является решение уравнений с интервкальными коэффициентами. Основная теорема алгебры говорит о том, что любой многочлен степени n с произвольными коэффициентами имеет ровно n корней с учетом кратности, среди которых могут как действительные, так и комплексные. Например, известно, что все нули многочленов Чебышева, применяемых в теории аппроксимации, являются вещественными. Однако для полиномов с интервальными коэффициентами количество вещественных корней может быть непостоянно. Один и тот же корень может принимать как вещественные так и комплексные значения.Простейший пример – полином

$$f(x) = x^2 - a, \text{ где } a = [-1,1].$$

$$x = [0,1], \text{для } a = [0,1], \quad x = [0 * i, i] \text{ для } a = [-1,0].$$

Однако, одной из особенностей интервального анализа является требование к стабильности корней. Т.к. интервальные вычисления являются расширением традиционных и необходимы для контроля точности, переход корня из действительной области в комплексную, как правило, говорит о нестабильности решений для заданных условий, и в реальных проектах, например при проектировании, может говорить о серьёзных дефектах проекта, которые невозможно определить точечными вычислениями.

Поэтому, для нахождения подобных ситуаций необязательно решать исходное уравнение в интервальных числах(это может привести к значительному расширению результирующих интервалов), а достаточно произвести анализ комплексных корней, что и будет сделано в данной работе.

1. Основная теорема алгебры

Известно, что существуют многочлены с действительными коэффициентами, не имеющие действительных корней; $x^2 + 1$ – один из таких многочленов. Можно было бы ожидать, что существуют многочлены, не имеющие корней даже среди комплексных чисел, особенно если рассматриваются многочлены с любыми комплексными коэффициентами. Если бы это было так, то система комплексных чисел нуждались бы в дальнейшем расширении. На самом деле, однако, справедлива следующая основная теорема алгебры комплексных чисел:

Всякий многочлен с любыми числовыми коэффициентами, степень которого не меньше единицы, имеет хотя бы один корень, в общем случае комплексный [7].

Эта теорема является одним из крупнейших достижений всей математики и находит применения в самых различных областях науки. На ней основана, в частности, вся дальнейшая теория многочленов с числовыми коэффициентами, и потому эту теорему называли раньше (а иногда называют и теперь) «основной теоремой высшей алгебры». Н действительности, однако, основная теорема не является чисто алгебраической. Все ее доказательства, – а их, после Гаусса, впервые доказавшего эту теорему в самом конце XVIII века, было найдено весьма много, – принуждены в большей или меньшей мере использовать так называемые топологические свойства действительных и комплексных чисел, т. е. свойства, связанные с непрерывностью.

2 Условия существования комплексных корней многочлена

2.1 Случай квадратного уравнения

Известное условие отсутствия вещественных корней (или, что то же самое, наличия вещественных корней) уравнения

$$x^2 + px + q = 0, \tag{3}$$

где p и q – вещественные числа, состоят в том, что

$$p^2 - 4q < 0, \tag{4}$$

При $q < 0$ неравенство (4) невозможно и, таким образом, в этом случае уравнение (3) не может иметь невещественных корней.

Неравенство (4) устанавливается в процессе решения уравнения (3), причем соответствующий метод обоснования применим в случае многочленов более высокого порядка.

Однако неравенство (4) может быть установлено и другим способом. Действительно, если x_1 и x_2 – вещественные корни уравнения (3), то

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{2} \geq \sqrt{x_1^2 x_2^2}\ . \qquad (5)$$

А так как $x_1 + x_2 = -p, x_1x_2 = q$ и $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - 2q$, то неравенство (5) запишем так $p^2 - 2q \geq 2|q|$. Таким образом, если справедливо неравенство

$$p^2 < 2(q + |q|), \qquad (6)$$

то корни уравнения (3) не могут быть вещественными.

Следовательно, неравенство (6) является достаточным условием существования невещественных корней уравнения (3). При $q < 0$ неравенство (6) невозможно. Если же $q > 0$, то неравенство (6) запишем в виде (4).

Таким образом, условие существования невещественных корней уравнения (3) (т.е. неравенство (4)) можно установить другим способом, который, как оказывается, применим и в случае многочленов произвольной степени. Для многочлена степени n формула будет выглядеть так[5]:

$$a_1^2 - 2a_2 < n\sqrt[n]{a_n^2}\ , \qquad (7)$$

$$a_{n-1}^2 - 2a_{n-2}a_n < n\sqrt[n]{a_n^{2n-2}}\ , \qquad (8)$$

Однако, данное неравенство является лишь достаточным условием существования невещественного корня, необходимым оно является только для квадратного уравнения.

5

Случай нестабильности корней достигается в том случае, если для интервальных p и q одновременно выполняется и условие существование комплексного корня и условие его отсутствия.

Например, для многочлена $f(x) = x^2 + [-10,10]$,

$p^2 - 4q = 0 - 4[-10,10] = -[40,40]$. Данная функция не имеет стабильных корней.

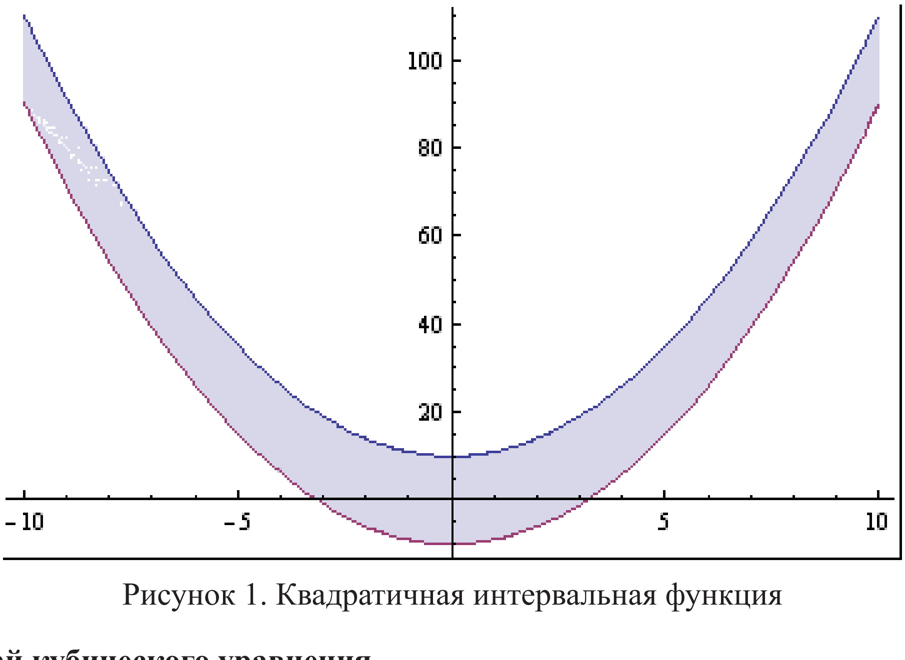

Рисунок 1. Квадратичная интервальная функция

2.2. Случай кубического уравнения

Кубическим называется уравнение

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (9)$$

с комплексными коэффициентами a, b, c, d. Предполагается, что $a \neq 0$ и поэтому уравнение (7) эквивалентно уравнению

$$x^3 + ex^2 + fx + g = 0, \qquad (10)$$

где $e = b/a, f = c/a, g = d/a$. Подстановка $x = y - e/3$ приводит к эквивалентному уравнению

$$y^3 + py + q = 0,$$

где $p = f - e^2/3,\ q = 2e^3/3^3 - fe/3 + g$.

$$y = (-q/2 - \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}\,)^{1/3} + (-q/2 + \sqrt{(q/2)^2 + (p/3)^3}\,)^{1/3}.$$

Эта формула для решения канонического кубического уравнения $y^3 + py + q = 0$ называется формулой Кардано.

Формулы Кардано для решений кубического уравнения дают возможность выяснить, какие корни этого уравнения вещественные, а какие – нет. При этом оказывается, что все зависит от знака числа $D = q^2/4 + p^3/27$. А именно, имеют место следующие утверждения.

1. Если $D > 0$, то уравнение имеет один вещественный корень и два невещественных корня.
2. Если $D < 0$, то все три корня уравнения – вещественные.
3. Если $D = 0$, то все корни уравнения – вещественные, причем два из них совпадают (кратный корень).

В случае же, если p и q – интервалы, об нестабильности интервальной функции будет говорить одновременное выполнение условий $D > 0$ и $D \le 0$.

Для функции $f(x) = [-1,2]x^3 + [1,3]x^2 + [-2,-1]x + [1,1.5]$ $D=[-\infty,\infty]$. Функция не имеет стабильных решений.

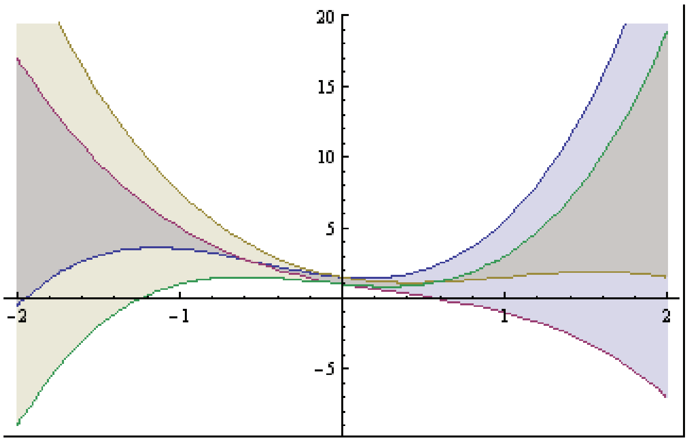

Рисунок 2. Кубическая интервальная функция

2.3. Общий случай

Рассмотрим теперь уравнение

$$x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0, \tag{11}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – вещественные числа, и пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – вещественные корни уравнения (11) (выписаны с учетом кратности).

Найдем все последовательности $a_0, a_1, \ldots, a_n$ действительных чисел, где $n > 1$ и $a_n \neq 0$, для которых следующее утверждение верно:

если $f : R \to R$ n раз дифференцируемая функция и $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ действительные числа такие, что $f(x_1) = f(x_2) = \ldots = f(x_n) = 0$, тогда существует $h \in (x_1, x_n)$, для которой

$$a_0 f(h) + a_1 f'(h) + \ldots + a_n f^{(n)}(h) = 0.$$

Пусть $A(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$. Докажем, что последовательность $a_0, a_1, \ldots, a_n$, удовлетворяет требуемым условиям тогда и только тогда, когда все нули полинома $A(x)$ действительны.

а) Предположим, что все корни $A(x)$ действительны. Используем следующее понятие. Пусть I – тождественный оператор, а D – оператор дифференцирования. Для произвольного полинома $P_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ положим $P_n(D) = a_n D^n + \ldots + a_1 D + a_0 I$. Тогда утверждение может быть записано в виде $(A(D)f)(h) = 0$.

Сначала докажем утверждение для $n = 1$. Рассмотрим функцию

$$g(x) = exp\left(\frac{a_0}{a_1}x\right)f(x).$$

Поскольку $g(x_0) = g(x_1) = 0$, то по теореме Ролля существует $h \in (x_0, x_1)$, для которого

$$g'(h) = \frac{a_0}{a_1} exp\left(\frac{a_0}{a_1}h\right) f(h) + exp\left(\frac{a_0}{a_1}h\right) f'(h) = \frac{1}{a_1} exp\left(\frac{a_0}{a_1}h\right)\left(a_0 f(h) + a_1 f'(h)\right) = 0 .$$

Теперь предположим, что $n > 1$ и утверждение справедливо для $n – 1$. Пусть $A(x) = (x – c)B(x)$, где c – действительный корень полинома A. В случае $n = 1$, существуют $y_0 \in (x_0, x_1), y_1 \in (x_1, x_2), \ldots, y_{n-1} \in (x_{n-1}, x_n)$ такие, что $f'(y_j) – f(y_j) = 0$ для всех $j = 0, 1, \ldots, n – 1$. Применим гипотезу индукции для полинома $B(x)$, функции g = f′ – cf и точкам $y_0, y_1, \ldots, y_{n–1}$. Тогда существует $h \in (y_0, y_{n–1}) \subset (x_0, x_n)$ такое, что

$$(B(D)g)(h) = (B(D)(D\text{-}cI)f)(h) = (A(d)f)(h) = 0.$$

б) Предположим, что $u+iv$ – комплексный корень полинома $A(x)$ такой, что v ≠ 0 Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$a_n g^{(n)} + \ldots + a_1 g' + a_0 g = 0,$$

решение которого $g_1(x)=e^{ux}sin(vx)$ имеет бесконечно много нулей.

Пусть k – наименьший индекс, для которого $a_k \neq 0$. Возьмем малое $\varepsilon > 0$ и положим $f(x)=g_1(x)+\varepsilon x^k$. Если ε выбрать достаточно малым, то g имеет необходимое количество корней, но $a_0 f + a_1 f' + \ldots + a_n f^{(n)} = a_k \varepsilon \neq 0$ при всех x. Предложенный метод, в отличие от предыдущих, является и необходимым и достаточным, поэтому если для интервальных коэффициентов он одновременно говорит и о наличии и об отсутсвии комплексных корней, то функция не является стабильной.

5

Выводы

Многие системы компьютерной алгебры (например, Mathematica, SciLab, Mapple, и др.) обладают возможностью оперировать интервальными данными. Однако ни одна система не показала достаточного владения средствами интервального анализа, ограничившись базовым инструментарием интервальной математики. Допустим, они не позволяют решать уравнения с интервальными коэффициентами. В данной работе разработаны методы, которые позволяют определить, когда в пределах входных интервалов у функции меняется число действительных корней.

Литература

[1] Аноприенко А.Я., Иваница С.В. Интервальные вычисления и перспективы их развития в контексте кодо-логической эволюции. / А.Я. Аноприенко, С.В. Иваница // Научные труды ДонНТУ. Серия «Проблемы моделирования и автоматизации проектирования динамических систем» (МАП-2010). Выпуск 8 (168): Донецк: ДонНТУ, 2010. – С. 150–160.

[2] Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. / Г.И. Марчук – М.: Наука. 1977. – 456 с.

[3] Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971. – 552 с.

[4] Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. / С.П. Шарый – Новосибирск, Институт вычислительных технологий СО РАН, 2009. – 569 с.

[5] Меркулов А.В., Ковтонюк Д.О. Умови існування комплексних коренів многочленів./ Територіальне фізико-математичне відділення МАН, м. Донецьк, секція „Математика”,2006р.

[6] Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1975.

[7] Понтрягин Л.С. Основная теорема алгебры. - Квант, 1982, № 4, с. 3-9.

[8] Савельев Л.Я. Формулы Ньютона и Кардано. - Математика сегодня, вып. 11 (1997), с. 105-115.

[9] Кужель О.В. Математичні імпровізації – важливий крок до наукової творчості. - У світі математики, т. 1, вип. 1 (1995), с. 53-59.