УДК 681.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ БОЛЬШОЙ РАЗМЕРНОСТИ С РАЗРЕЖЕННЫМИ МАТРИЦАМИ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Григорьева О.Н., Дмитриева О.А
Донецкий национальный технический университет, Украина

В работе рассматриваются проблемы моделирования динамических объектов, которые представляются системами линейных дифференциальных уравнений с разреженными матрицами коэффициентов. Возникновение таких систем обусловлено либо непосредственно процессом математического моделирования тех или иных явлений, либо дискретизацией задач математической физики методом прямых. Предлагаются подходы, позволяющие сократить временную и емкостную сложность реализации, основанные на использовании свойств разреженности исходной матрицы коэффициентов.

Введение

Под динамической системой понимают любой объект или процесс, для которого однозначно определено понятие состояния как совокупности некоторых величин в данный момент времени и задан закон, который описывает изменение начального состояния с течением времени. Этот закон позволяет по начальному состоянию прогнозировать будущее состояние динамической системы. Описание динамических систем крайне разнообразно: оно может осуществляться с помощью дифференциальных уравнений, дискретных отображений, теории графов, теории марковских цепей и т.д. Выбор одного из способов описания задает конкретный вид математической модели соответствующей динамической системы [1]. В работе предполагается, что модель описана с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которые представляют собой неотъемлемую часть математического моделирования динамических объектов. Причем размер и сложность современных моделей делает аппарат аналитических вычислений практически неприемлемым в данной ситуации. Данная проблема является актуальной для многих научных сфер: физики, химии, вычислительных процессов, экономики и т.д. Именно в этих отраслях науки модели характеризуются большой размерностью и требуют огромных ресурсных затрат на свою реализацию.

Целью работы является определение оптимального способа реализации динамической модели большой размерности, представленной с помощью системы линейных дифференциальных уравнений.

Следует отметить, что такие задачи возникают как непосредственно в процессе математического моделирования тех или иных явлений, так и при решении более сложных систем уравнений, например, при дискретизации задач математической физики методом прямых. В работе предлагаются подходы, позволяющие сократить затраты времени и памяти, необходимые для реализации моделей на практике. При этом выигрыш по времени зависит от степени разреженности матрицы коэффициентов исходной системы, способа компрессии элементов и метода реализации модели. Исходя из неоднозначного определения разреженности [2-4], матрицу будем считать таковой, если есть смысл воспользоваться множественным наличием нулевых элементов.

1 Общий вид модели

Построение и реализация системы дифференциальных уравнений стало одним из наиболее эффективных инструментов моделирования динамических систем большой размерности. Благодаря развитию численных методов и росту вычислительной мощности современной техники появилась возможность учитывать в моделях не только наиболее значимые характеристики, но и второстепенные факторы, что, в свою очередь, привело к росту точности моделей [2].

В работе для моделирования динамических процессов используется частный случай системы дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t)), \quad x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

с особенной правой частью, которая представляет собой линейную зависимость от *x(t)*. При этом модель (1) представляется в следующем виде:

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + f(t), \quad x(t_0) = x_0, \tag{2}$$

В работе рассматривались модели, которые соответствуют (2) и имеют матрицу коэффициентов *A*, характеризующуюся большой размерностью и обладающую свойством разреженности [3-4]. В таких случаях временные затраты на получение численного решения стадийными методами являются неоправданно высокими. Для их снижения были использованы различные упаковочные форматы хранения матрицы коэффициентов. Исследование эффективности использования данных форматов проводилось на линейной модели вида (2) со случайно сгенерированными коэффициентами матрицы *A* с различной степенью разреженности, векторов *B* и *Tt*:

$$\frac{dx}{dt} = A * x(t) + Sin[Tt * t] + B, \tag{3}$$

Поскольку цель хранения разреженной матрицы в упаковочном формате - не только сокращение объемов используемой памяти, но и повышение скорости выполнения вычислительных операций, то главным критерием эффективности использования форматов будем считать экономию затрат времени на реализацию явных и неявных стадийных методов, при помощи которых в работе осуществлялся поиск решения данной системы уравнений.

5

Базовыми для сравнения эффективности упаковочных форматов хранения считались временные затраты, необходимые для реализации стадийных методов без использования специальных алгоритмов.

2 Сокращение ресурсных затрат при реализации явных стадийных методов

Для реализации модели вида (3) на практике был применен явный трехстадийный метод

$$\begin{array}{c|ccc}
0 & 0 & & \\
1/2 & 1/2 & 0 & \\
1 & 1/256 & 255/256 & 0 \\
\hline
 & 1/256 & 255/256 & 0
\end{array}$$

Исследования проводились для системы размерностью 1000 уравнений. При этом матрица системы *A* генерировалась случайным образом с установлением различных пороговых значений коэффициентов разреженности. Поиск решения велся на интервале от 0 до *T* с фиксированным шагом. Время и объем занимаемой памяти, потребовавшиеся для получения решения на заданном интервале, считались базовыми для сравнения.

Поскольку главной задачей данной работы является сокращение данных затрат, то для реализации данной модели был использован упаковочный формат хранения (RR(C)O) матрицы коэффициентов и соответсвующие алгоритмы умножения разреженной матрицы на вектор-столбец.

Работа с матрицей в формате RR(C)O осуществлялось в три этапа:

– подсчет количества ненулевых элементов исходной матрицы коэффициентов;
– упаковка матрицы в формат RR(C)O;
– проведение вычислительных операций [4].

Ресурсные затраты для реализации каждого из трех этапов колебались в зависимости от степени разреженности исходной матрицы. Отметим, что использование разреженного формата имеет смысл только в том случае, если суммарные ресурсные затраты на реализацию всех трех этапов не превысят затраты на решение системы дифференциальных уравнений без использования специфического формата хранения матрицы коэффициентов. Исследования проводились для системы дифференциальных уравнений, матрица коэффициентов которой обладала степенью разреженности

128, 256 и 512. Экономия затрат времени представлена на рис 1.

Из данного рисунка видно, что с ростом степени разреженности матрицы увеличивается и экономия времени. Ее значение колебалось в интервале от 79 до 127 секунд. Если же проанализировать структуру временных затрат, необходимых на реализацию явного метода Рунге-Кутты с учетом разреженности матрицы, то она будет выглядеть так, как представлено на рис. 2.

Рисунок 1. Затраты времени на реализацию явного стадийного метода

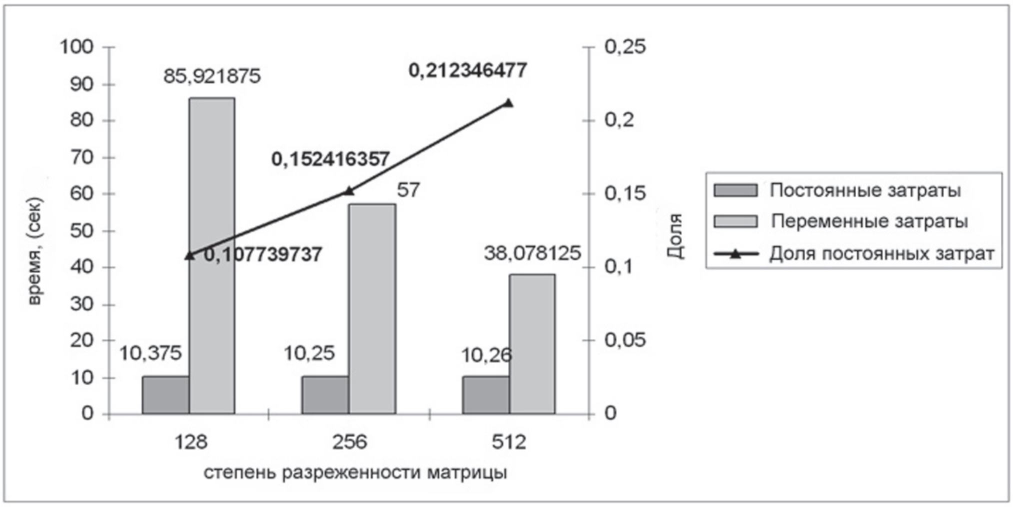

Рисунок 2. Структура затрат времени на реализацию явного стадийного метода с упакованной в формате RR(C)O матрицей коэффициентов

Как показано на рис. 2, с ростом степени разреженности матрицы увеличивается доля постоянных затрат на реализацию метода. К ним отнесены затраты на подсчет количества ненулевых элементов матрицы и затраты времени на упаковку матрицы. Вне зависимости от степени ее разреженности, постоянные затраты составили около 10секунд. Кроме того, поскольку с ростом степени разреженности матрицы снижается время вычислений (переменные затратам, поскольку прямо зависит от длины интервала поиска решения и шага, с которым осуществляется поиск), то доля постоянных затрат с ростом разреженности матрицы также растет.

3 Сокращение ресурсных затрат при реализации неявных стадийных методов

Если говорить о неявных стадийных методах и времени реализации динамической модели, представленной системой дифференциальных уравнений мерностью 1000 с его помощью, то поиск решения проводился в течение трех часов и завершен не был.

При этом для реализации метода использовался трехстадийный диагонально неявный метод со следующими коэффициентами [5].

0.435876	0.435876		
0.717933	0.282067	0.435866	
1	1.208495	-0.6443612	0.435866
	1.208495	-0.6443612	0.435866

Благодаря использованию свойства разреженности исходной матрицы коэффициентов удалось получить решение достаточно быстро (рис. 3). Из представленного рисунка видно, что решение удалось получить достаточно быстро. При этом вновь с ростом разреженности матрицы время, необходимое на расчеты, сокращается. Отметим, что постоянные затраты для данного метода выше, чем для явного метода Рунге-Кутты. Это связано с тем, что в данном случае упаковывать пришлось не одну матрицу, а две.

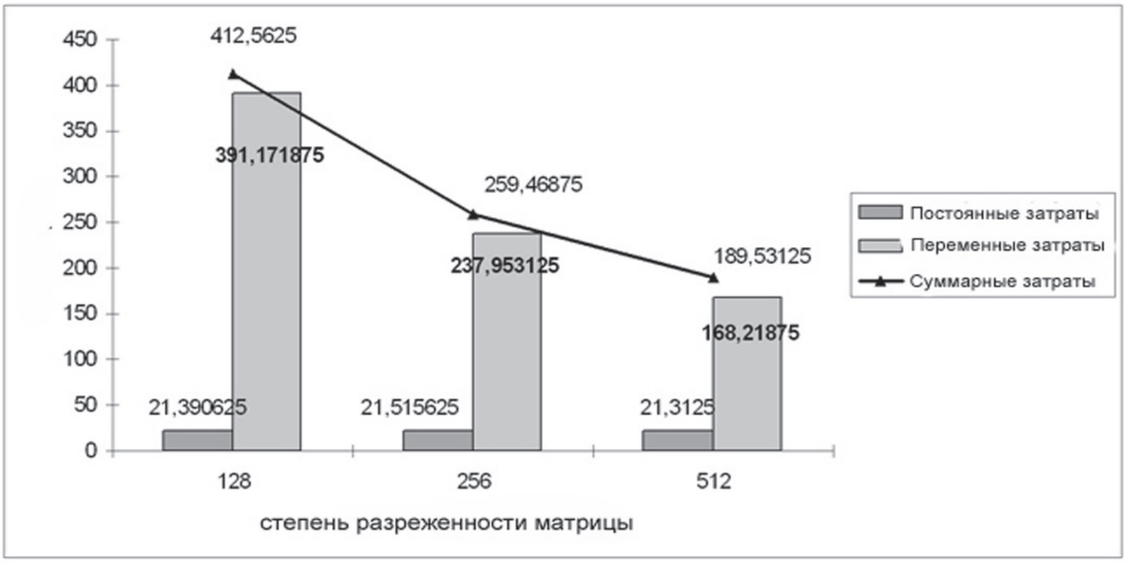

Рисунок 3. Временные затраты на реализацию неявного стадийного метода

Выводы

Исходя из того факта, что большие линейные системы дифференциальных уравнений, описывающие поведение динамических объектов, как правило, являются разреженными [6-7], для их описания целесообразно применять кодирующие форматы Использование упаковочных форматов хранения матриц позволяет существенно сократить время реализации динамических систем большой размерности. При этом выигрыш времени прямо зависит от степени разреженности матрицы коэффициентов исходной системы. Уменьшение количества выполняемых операций происходит за счет невыполнения операций с нулевыми элементами, а сокращение объема памяти за счет хранения только отличных от нуля элементов и информации об их расположении. Кроме того, преимущество данного подхода растет с увеличением интервала поиска решения и со снижением длины шага.

Литература

[1] Анищенко В.С. «Динамические системы» из литературного интернет-журнала «Русский переплет». Электронный ресурс. Режим доступа: http://www.pereplet.ru/obrazovanie/stsoros/437.html

[2] Дмитрієва О.А. Паралельні різницеві методи розв’язання задачі Коші – Донецьк: ДонНТУ, 2011. 265 с.

[3] Дмитриева О.А. Распределенная реализация моделирования линейных динамических систем // Материалы XIV международной конференции по вычислительной механике и

современным прикладным программным системам - М.: Вузовская книга, 2005.- С. 163-164

[4] С. Писсанецки Технология разреженных матриц, Пер. с англ., Москва:1988.

[5] Скворцов Л.М. Диагонально-неявные FSAL методы Рунге-Кутты для жестких и дифференциально-алгебраических систем// Материалы журнала «Математическое моделирование», 2002 г, том 14, номер 2, стр. 3-17.

[6] Yuster R., Zwick U. Fast sparse matrix multiplication. Электронный ресурс. Режим доступа: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.1.2485

[7] Buluc A., Gilbert J. Highly Parallel Sparse Matrix-Matrix Multiplication. Электронный ресурс. Режим доступа: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.180.5242.