УДК 681.3

ОБЕСПЕЧЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

О.А. Дмитриева, Л.П.Фельдман
Донецкий национальный технический университет

У роботі розглядаються проблеми стійкості багатокрокових паралельних блокових методів розв'язання задачі Коши для звичайних диференційних рівнянь, досліджується їх збіжність, виводяться оцінки погрішності.

При численном моделировании динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, очень часто возникают вопросы, связанные с обеспечением устойчивости решения. Дополнительные трудности появляются при численном решении жестких систем. Это обусловлено необходимостью использования специальных методов, позволяющих выбирать шаг интегрирования исходя лишь из требований точности, а не устойчивости, или из требований сходимости итерационного процесса решения неявных уравнений. К настоящему времени предложен и практически используется целый ряд последовательных методов решения жестких уравнений [1]. В то же время проблема разработки и обоснования параллельных методов и алгоритмов, ориентированных на эффективное использование в многопроцессорных системах, все еще остается открытой. Причем одним из вариантов решения этой проблемы является направление, определяющее разработку новых методов и алгоритмов.

В настоящей работе рассматривается устойчивость параллельных методов решения жестких систем. Для задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{1}$$

уравнения одношагового разностного метода [2] для блока *n*, содержащего *k* точек, можно записать в виде

$$\frac{u_{n,i} - u_{n,0}}{i\tau} = b_i F_{n,0} + \sum_{j=1}^{k} a_{i,j} F_{n,j}, \quad i = \overline{1,k},\ n = 1,2,... \tag{2}$$

где $F_{n,i} = f(t_{n,i}, u_{n,i})$, *i*- номер точки в блоке, τ - шаг интегрирования.

Условие устойчивости Далквиста [1] для разностных уравнений (2) выполняется, так как для каждого i характеристическое уравнение разностного метода имеет вид

$$\lambda^{i} = 1,\ i = \overline{1,k}\ , \qquad (3)$$

все i простых корней которого лежат на окружности единичного радиуса, и наивысший порядок аппроксимации (2) равен $p = k+1$ [2]. Таким образом выполнены условия сходимости решения разностной задачи при $\tau \to 0$ к решению исходной задачи (1) на конечном отрезке $0 \le nk\tau \le T$. Однако выполнение условий устойчивости разностных уравнений по Далквисту является недостаточным при проведении практических расчетов на больших интервалах t, так как не гарантирует абсолютную устойчивость разностного метода. Исследование устойчивости одношаговых блочных методов (2) в настоящей работе проводилось на модельном одномерном уравнении

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x,\ \ t > 0, \qquad (4)$$

Устойчивость двухточечного метода

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \mu*(5u_n + 8u_{n+1} - u_{n+2})/12 \\ u_{n+2} &= u_n + \mu*(u_n + 4u_{n+1} + u_{n+2})/12 \end{aligned} \qquad (5)$$

обеспечивало выполнение следующих условий

$$|q_1| = \left|\frac{6 - \mu^2}{2(3 - 3\mu + \mu^2)}\right| \le 1 \ и\ |q_2| = \left|\frac{3 + 3\mu + \mu^2}{3 - 3\mu + \mu^2}\right| \le 1\,, \qquad (6)$$

где $\mu = \lambda\,\tau$.

Можно показать, что двухточечный метод устойчив для $\mu \le 0$, т.е. он абсолютно устойчив, если устойчиво решение исходного дифференциального уравнения. Для доказательства необходимо определить множество точек комплексной плоскости, в которых выполняются условия $|q_1| \le 1$, $|q_2| \le 1$. Границей области является множество точек, для которых $|q_1| = 1$. Положив $q_1 = e^{i\varphi}$, получим границу устойчивости первого уравнения.

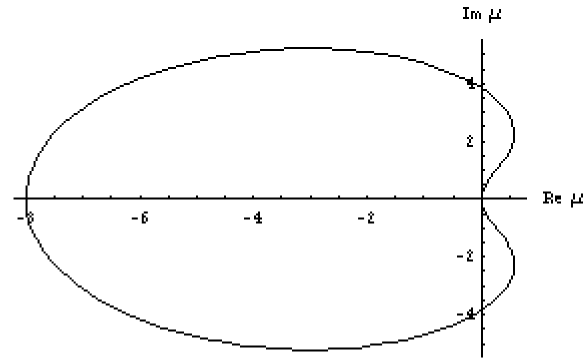

Рис. 1. Граница устойчивости первого уравнения метода

Для точек, расположенных внутри этой кривой, выполнено условие $|q_1|>1$, поэтому область устойчивости первого уравнения метода представляет собой внешность кривой. Областью устойчивости второго уравнения метода является левая полуплоскость Re(μ)<0, так как для действительных отрицательных μ имеет место $|q_2|<1$. Поскольку области устойчивости обоих уравнений содержат левую полуплоскость (μ <0), то метод является А-устойчивым.

В работе доказана $A(\alpha)$- устойчивость четырехточечного метода

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= u_n + \mu*(251u_n + 646u_{n+1} - 264u_{n+2} + 106u_{n+3} - 19u_{n+4})/720 \\
u_{n+2} &= u_n + \mu*(29u_n + 124u_{n+1} + 24u_{n+2} + 4u_{n+3} - u_{n+4})/90 \\
u_{n+3} &= u_n + 3\mu*(9u_n + 34u_{n+1} + 24u_{n+2} + 14u_{n+3} - u_{n+4})/80 \\
u_{n+4} &= u_n + 2\mu*(7u_n + 32u_{n+1} + 12u_{n+2} + 32u_{n+3} + 7u_{n+4})/45
\end{aligned} \quad (7),$$

которая обеспечивается выполнением следующих условий

$$\begin{aligned}
|q_1| &= \left|\frac{60 - 60\mu + 15\mu^2 + 5\mu^3 - 3\mu^4}{60 - 120\mu + 105\mu^2 - 50\mu^3 + 12\mu^4}\right| \le 1, \\
|q_2| &= \left|\frac{60 - 15\mu^2 + 2\mu^4}{60 - 120\mu + 105\mu^2 - 50\mu^3 + 12\mu^4}\right| \le 1, \\
|q_3| &= \left|\frac{60 + 60\mu + 15\mu^2 - 5\mu^3 - 3\mu^4}{60 - 120\mu + 105\mu^2 - 50\mu^3 + 12\mu^4}\right| \le 1, \\
|q_4| &= \left|\frac{60 + 120\mu + 105\mu^2 + 50\mu^3 + 12\mu^4}{60 - 120\mu + 105\mu^2 - 50\mu^3 + 12\mu^4}\right| \le 1
\end{aligned} \quad (8).$$

Границей области устойчивости 1-го уравнения является множество точек, для которых $\left|q_1\right|=1$. Положив $q_1 = e^{\mathrm{i}\varphi}$, получим границу устойчивости.

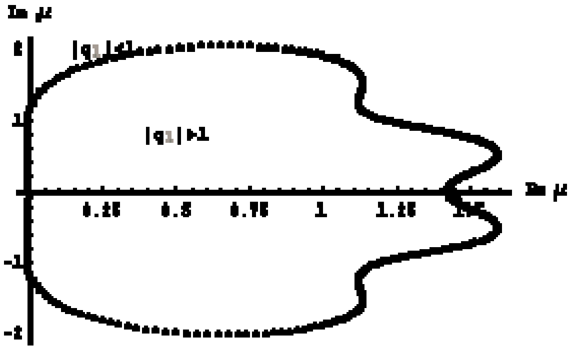

Рис. 2. Граница устойчивости первого уравнения метода

Повторив последовательность действий для оставшихся уравнений системы, получим

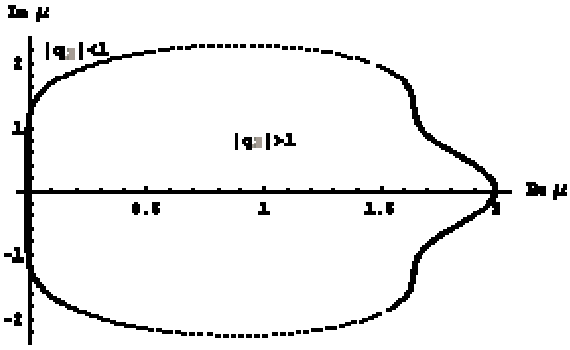

Рис. 3. Граница устойчивости второго уравнения метода

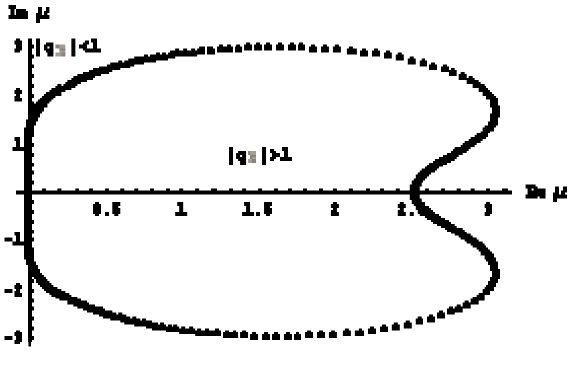

Рис. 4 . Граница устойчивости третьего уравнения метода

Областью устойчивости четвертого уравнения метода является мнимая ось, т.е. множество точек, для которых μ=*i*α, где α –

произвольное действительное число, тогда областью является левая полуплоскость $Re(\mu)<0$.

Таким образом можно утверждать, что одношаговый четырехточечный метод является $A(\alpha)$ устойчивым.

Решение нелинейной системы уравнений (1) может быть осуществлено либо с помощью итерационного процесса, который позволяет проводить вычисления параллельно для каждого узла блока, либо с помощью метода Ньютона. Полученные для обыкновенных дифференциальных уравнений результаты могут быть распространены и на системы.

Представленные в работе методы являются многошаговыми, т.е. новые значения выражаются через найденные ранее. Таким образом, для многошаговых методов необходимы решения в предшествующих точках, тогда как на первом шаге интегрирования известно лишь начальное значение для уравнения или вектор начальных значений для системы ДУ. При нахождении стартовых значений существенным является то, что они должны быть вычислены с той же степенью точности, с которой будет работать многошаговый метод. При осуществлении сближения одношаговым методом может возникнуть ситуация, когда число операций, затрачиваемых на разгонку, может превысить трудоемкость решения всей задачи. К тому же, такой алгоритм для общего случая является последовательным. В работе предлагаются 2 комбинированных алгоритма для определения начального отрезка. Первый основан на первоначальном использовании любого одношагового метода (например, Рунге-Кутты), но не на всем требуемом промежутке, а только в $2k-1$ точках. Выбрав из рассчитанных точек k и, удвоив шаг, можно начать счет многошаговым методом. Продвижение вдоль начального отрезка будет обеспечиваться постоянным удвоением шага. Еще один способ рекомендует однократное применение одношагового блочного метода, а затем продолжение вычислений многошаговым методом, удваивая шаг при переходе к расчету значений в новом блоке.

Коэффициент, связывающий размерности шагов используемых методов, должен быть пропорционален степени двойки, так как проще сделать лишнюю итерацию на этапе разгонки, чем потом выполнять расчеты с шагом, заведомо меньше допустимого. Комбинированные подходы позволяют сократить количество точек, в которых значения функции будут вычисляться последовательно, до величины $2(k-1)$, или же вовсе избавиться от последовательных вычислений. К тому же, поскольку значения функции в каждой точке блока вычисляются одновременно, это еще, примерно, в k раз ускоряет вычисление разгоночных значений.

Рассмотренные методы могут использоваться при численном решении жестких систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Предложенная методика позволяет также исследовать устойчивость параллельных многошаговых методов [2] с любым числом точек в блоке. Проведенные численные решения одношаговыми блочными методами тестовых жестких систем практически подтвердили их надежность и эффективность.

Литература

1. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Мир, 1979. – 312 с.
2. Фельдман Л.П., Дмитриева О.А. Эффективные методы распараллеливания численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.// Математическое моделирование, том 13, № 7, 2001. – С. 66-72.

Поступление в редакцию 15.05.2007 г.