УДК 681.3

ПРИМЕНЕНИЕ МУЛЬТИМНОЖЕСТВ ДЛЯ ВЫДЕЛЕНИЯ РЕГИОНОВ ИЗОБРАЖЕНИЙ

О.Л. Вовк
Донецкий национальный технический университет

У роботі розглядаються мультимножини для класифікації об'єктів, заданих суперечливими різнорідними ознаками (зокрема кількісними і якісними одночасно). Пропонується метод виділення регіонів зображень за допомогою теорії мультимножин.

При решении задач распознавания образов, классификации объектов, многокритериального принятия решений часто возникает проблема группировки, упорядочивания объектов, заданных разнородными признаками (которые могут быть как качественными, так и количественными). Кроме того, возможны ситуации, когда один объект может существовать в нескольких экземплярах с отличными значениями признаков, свертка которых невозможна или математически некорректна. В качестве примеров таких задач можно отметить: классификацию и ранжирование объектов, оцененных несколькими экспертами, распознавание изображений, обработку текстовых документов [1].

Среди актуальных задач обработки изображений можно выделить задачу выделения регионов изображений по цветовому подобию пикселей (кластеризация изображений) [2, 3]. При анализе методов разнесения пикселей по кластерам возможна противоречивая ситуация, так как согласно различным способам расчета близости пикселя к кластерам, один пиксель может входить в разные кластеры. В условиях автоматического выделения кластеров изображений выбор соответствующего пикселю кластера затруднен.

Мультимножества (множества с повторяющимися элементами) [1, 4] служит удобной математической моделью для задания объектов, которые характеризуются разнородными противоречивыми признаками.

Цель данной работы – дать общее определения мультимножества; рассмотреть применение теории мультимножеств для усовершенствования методов кластеризации изображений.

Перейдем к краткому обзору основных понятий и определений теории мультимножеств [1, 4].

Мультимножеством A, порожденным обычным множеством $U=\{x_1,x_2,\ldots\}$, все элементы которого различны, называется совокупность групп элементов вида $A=\{k_A(x)\bullet x|x\in U,\ k_A(x)\in Z_+\}$. Здесь $k_A:U\to Z_+=\{0,1,2,\ldots\}$ называется функцией числа экземпляров мультимножества, определяющей кратность вхождения элемента $x_i\in U$ в мультимножество A, что обозначено символом •.

Если $k_A(x)=\chi_A(x)$, где $\chi_A(x)=1$ при $x\in A$ и $\chi_A(x)=0$ при $x\notin A$, то мультимножество A становится обычным множеством.

Если все мультимножества семейства $A=\{A_1,A_2,\ldots\}$ образуются из элементов множества G, то G называется доменом для семейства A, а множество $\mathrm{Supp}A=\{x|x\in G,\ \chi_{\mathrm{Supp}A}(x)=\chi_A(x)\}$ – опорным множеством или носителем мультимножества A.

Мощность мультимножества $|A|=\Sigma_x k_A(x)$ определяется как общее число экземпляров всех его элементов; размерность мультимножества $/A/=\Sigma_x\chi_A(x)=|\mathrm{Supp}A|$ – как общее число различных элементов. Максимальное значение функции кратности $\mathrm{hgt}A=\max\limits_{x\in G} k_A(x)$ называется высотой, а элемент $x_{A*}=\arg\max\limits_{x\in G} k_A(x)$ – пиком мультимножества A. Мультимножество называется пустым $\varnothing$, если $k_\varnothing(x)=0$, и максимальным Z, если $k_Z(x)=\max\limits_{A\in\mathrm{A}} k_A(x)$, $\forall x\in U$.

Рассмотрим возможные способы сопоставления мультимножеств, обусловленные особенностями их различных характеристик. Мультимножества A и B называются равными ($A=B$), если $k_A(x)=k_B(x)$ для всех элементов $x\in G$, и неравными ($A\neq B$), если $k_A(x)\neq k_B(x)$ хотя бы для одного $x\in G$. Для равных мультимножеств имеем $|A|=|B|$, $/A/=/B/$, $\mathrm{hgt}A=\mathrm{hgt}B$, $x_{A*}=x_{B*}$, $\mathrm{Supp}A=\mathrm{Supp}B$. Мультимножества A и B будем называть равномощными, если $|A|=|B|$; равноразмерными, если $/A/=/B/$; равновеликими, если они равномощны и равноразмерны. Равные мультимножества равновелики, обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Будем говорить, что мультимножество B содержится или включено в мультимножество A ($B\subseteq A$), если $k_B(x)\leq k_A(x)$, для каждого элемента $x\in G$. Мультимножество B называется тогда подмультимножеством мультимножества A, а мультимножество A – надмультимножеством мультимножества B. В этом случае $|B|\leq|A|$, $/B/\leq/A/$, $\mathrm{hgt}B\leq\mathrm{hgt}A$, $\mathrm{Supp}B\subseteq\mathrm{Supp}A$, а $x_{A*}=x_{B*}$, либо $x_{A*}\neq x_{B*}$. Как и в случае обычных множеств, одновременное выполнение условий $B\subseteq A$ и $A\subseteq B$ влечет равенство мультимножеств $A=B$. Включение мультимножества обладает свойствами рефлексивности ($A\subseteq A$) и транзитивности ($A\subseteq B$, $B\subseteq C \Rightarrow A\subseteq C$), а значит, является отношением предпорядка.

Мультимножества A и B будем называть одноименно или S-эквивалентными ($A\cong B$), если их носители совпадают ($\mathrm{Supp}A=\mathrm{Supp}B$) и существует взаимно однозначное соответствие f между одноименными компонентами: $k_B(x)=f(k_A(x))$, $\forall x \in G$; разноименно или D-эквива-лентными ($A\approx B$), если их носители эквивалентны ($\mathrm{Supp}A\sim\mathrm{Supp}B$) и существует взаимно однозначное соответствие f между разноименными компонентами: $k_B(x_i)=f(k_A(x_j))$, $x_i,x_j\in G$, где f – целочисленная функция с областью значений Z_+.

Введем следующие основные операции над мультимножествами:

- объединение $A\cup B = \{k_{A\cup B}(x)\bullet x \mid k_{A\cup B}(x)=\max(k_A(x), k_B(x))\}$;
- пересечение $A\cap B = \{k_{A\cap B}(x)\bullet x \mid k_{A\cap B}(x)=\min(k_A(x), k_B(x))\}$;
- арифметическое сложение $A+B = \{k_{A+B}(x)\bullet x \mid k_{A+B}(x)=k_A(x)+k_B(x)\}$;
- арифметическое вычитание $A-B = \{k_{A-B}(x)\bullet x \mid k_{A-B}(x)=k_A(x)-k_{A\cap B}(x)\}$;
- симметрическая разность $A\Delta B = \{k_{A\Delta B}(x)\bullet x \mid k_{A\Delta B}(x)=|k_A(x)-k_B(x)|\}$;
- дополнение $\overline{A} = Z-A = \{k_{\overline{A}}(x)\bullet x \mid k_{\overline{A}}(x)=k_Z(x)-k_A(x)\}$.

Другие операции, а также способы определения носителей операций над мультимножествами рассмотрены подробно в [4].

Действительная неотрицательная функция $m(A)$, определенная на алгебре L (Z) и удовлетворяющая условию коаддитивности: $m(A)+m(B)=m(A+B)$, называется мерой мультимножества. Мера мультимножества $m(A)$ обладает следующим свойствами: $m(\varnothing)=0$; монотонность $m(A)\le m(B)\Leftrightarrow A\subseteq B$; непрерывность $\lim\limits_{i\to\infty} m(A_i)=m(\lim\limits_{i\to\infty} A_i)$; симметричность $m(A)+m(\overline{A})=m(Z)$; эластичность $m(h\bullet A)=hm(A)$. Меру мультимножества можно определить различными способами, например, как линейную комбинацию функций кратности: $m(A)=\sum_j w_j k_A(x_j)$, $w_j>0$. Заметим, что мощность мультимножества $|A|$ также будет мерой мультимножества

Метрические пространства мультимножеств (A ,d) введены в [4], где определены следующие виды расстояний между мультимножествами:

$$d_1(A,B) = m(A\Delta B);\quad d_2(A,B) = m(A\Delta B)/m(Z);\qquad d_3(A,B) = m(A\Delta B)/m(A\cup B). \tag{1}$$

Функции $d_2(A,B)$ и $d_3(A,B)$ удовлетворяют условию нормировки $0\le d(A,B)\le 1$. По определению принимается $d_3(\varnothing,\varnothing)=0$. Основное расстояние $d_1(A,B)$ является метрикой типа Хемминга, традиционно используемым во многих приложениях. Полностью усредненное расстояние $d_2(A,B)$ характеризует различие между двумя мультимножествами A и B, отнесенное к расстоянию, максимально возможному в исходном пространстве. Локально усредненное расстояние $d_3(A,B)$ задает различие, отнесенное к максимально возможной «общей части» только этих двух мультимножеств в исходном пространстве.

Рассмотрим решение задачи кластеризации изображений с помощью теории мультимножеств.

В качестве метода кластеризации для усовершенствования выберем наиболее распространенный и используемый метод k-средних [5,6].

В основе анализируемого метода – отнесение пикселя к кластеру с минимальным расстоянием до центра тяжести кластера, проверка удовлетворения критерия оптимальности разбиения на заданное количество кластеров и критерия окончания кластеризации. Рассмотрим усовершенствования этапа разнесения пикселей по кластерам. Существует множество методов расчета расстояний между отдельными парами числовых характеристик объектов (к примеру, Евклидово расстояние, расстояние Хемминга, корреляционное расстояние и другие), кроме того, могут использоваться различные модификации перечисленных методов при расчете расстояний между объектами, заданными несколькими признаками (метод суммирования ошибки, метод минимизации ошибки и т.д.) [5]. При выборе того или иного из перечисленных методов, результаты кластеризации в большинстве случаев получаются различными. Обозначим набор всех возможных числовых значений расстояний между пикселем и кластером – (где m – количество всех рассматриваемых расстояний). Пусть для группировки пикселей по кластерам мы имеем m оценок $(Q_1, Q_2, \ldots, Q_m)$, каждая из которых рассчитывается s способами, т.е. $Q_i=\{q_i^s\}$.

Предположим, что у нас имеется k пикселей – $A=\{A_1,\ldots,A_k\}$, каждый из которых мы относим к одному из p кластеров (r_t, $t=\overline{1,p}$).

Тогда критерий выбора кластера для отдельного j-го пикселя ($j=\overline{1,k}$) можно записать в виде:

$$A_j=\{(k_{Aj}(q_i^s)\bullet q_i^s), k_{Aj}(r_t)\bullet r_t\}, \qquad (2)$$

где $k_j(x_i)$ – число анализируемых методов расчета расстояний между пикселем j и кластером t, согласно которым j-ый пиксель изображения относится к t-ому кластеру.

Таким образом, решение задачи аппроксимации решающих правил для отнесения каждого пикселя изображения к тому или иному кластеру можно представить в виде решения m оптимизационных задач:

$$d(Q_{jr1}, Q_{jr2}, \ldots, Q_{jrp}) \rightarrow \max d(Q_{jr1}, Q_{jr2}, \ldots, Q_{jrp}) = d(Q_{jr1}^{*}, Q_{jr2}^{*}, \ldots, Q_{jrp}^{*}). \quad (3)$$

Результирующее для классификации правило можно записать в виде:

ЕСЛИ $((q_{ju} \in Q_{ut}^{*})$ И $(q_{jv} \in Q_{vt}^{*}) \ldots$ И $(q_{jw} \in Q_{wt}^{*}))$
ТО (пиксель $A_j \in X_t$), (4)

где $u, v, \ldots w$ – некоторые анализируемые способы расчета расстояний.

В заключении хотелось бы отметить, что аппарат мультимножеств можно эффективно применять и при решении других задач обработки изображений. В качестве направлений дальнейших исследований хотелось бы выделить построение системы контекстного поиска изображений в базах данных, в основе механизма поиска которой упорядочивание изображений базы данных с использованием теории мультимножеств.

Литература

1. Петровский А.Б. Упорядочение и классификация объектов с противоречивыми признаками // Новости искусственного интеллекта. – 2003. – №4. – 17 с.
2. Башков Е.А., Вовк О.Л. Статистическая кластеризация для выделения регионов изображений // Збірник праць V Міжнародної наукової конференції “Інтелектуальний аналіз інформації”. – “Просвіта”, Київ. – 2005. – С. 50-59.
3. Li J., Wang J.Z., Wiederhold G. IRM: Integrated Region Matching For Image Retrieval // ACM Multimedia 2000. – 2000. – P. 147-156.
4. Петровский А.Б. Пространства множеств и мультимножесв. – Москва: Едиториал УРСС, 2003. – 248 с.
5. *Jain A.K., Murty M.N., Flynn P.J. Data Clustering: A Review // ACM Computing Surveys. – 1999. – vol. 31, №3. – P. 264-323.*
6. Kanungo T., Mount D., Netanyahu N., Piatko C., Silverman R., Wu A. An Efficient k-Means Clustering Algorithm: Analysis and Implementation // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 2002. – vol. 24, №7. – P. 881-892.

Поступление в редакцию 29.05.2007 г.