

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ ИНСТИТУТ

**М. Н. Чальцев, Т. И. Алтухова, К. Р. Губа**

## **Строительная механика. Часть 1**

Учебное пособие  
для обучающихся образовательных учреждений  
высшего профессионального образования направлений подготовки  
08.03.01 «Строительство» и 08.05.02 «Строительство, эксплуатация и  
техническое прикрытие автомобильных дорог, мостов и тоннелей»

Донецк  
2020

УДК 624.04(075)

ББК Н112я7

Ч169

Рекомендовано Ученым советом

ГОУВПО «Донецкий национальный технический университет»

в качестве учебного пособия для обучающихся образовательных учреждений  
высшего профессионального образования

(Протокол № 4 от 30.10.2020)

**Рецензенты:**

Вовк Леонид Петрович – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Математическое моделирование» АДИ ГОУВПО «ДОННТУ»;

Моисеенко Игорь Алексеевич – доктор физико-математических наук, доцент, декан факультета математики и информационных технологий ГОУВПО «ДОННУ».

**Авторы:**

Чальцев Михаил Николаевич – доктор технических наук, профессор, директор, заведующий кафедрой «Общеинженерные дисциплины» АДИ ГОУВПО «ДОННТУ»;

Алтухова Татьяна Ивановна – старший преподаватель кафедры «Общеинженерные дисциплины» АДИ ГОУВПО «ДОННТУ»;

Губа Константин Романович – ассистент кафедры «Общеинженерные дисциплины» АДИ ГОУВПО «ДОННТУ».

**Чальцев М. Н.**

Ч 169

Строительная механика. Часть 1 : учебное пособие для обучающихся образовательных учреждений высшего профессионального образования направлений подготовки 08.03.01 «Строительство» и 08.05.02 «Строительство, эксплуатация и техническое прикрытие автомобильных дорог, мостов и тоннелей» / М. Н. Чальцев, Т. И. Алтухова, К. Р. Губа ; АДИ ГОУВПО «ДОННТУ». – Донецк : АДИ ГОУВПО «ДОННТУ», 2020. – 125 с. : 130 ил.

В учебном пособии приведены классические определения предмета и задач строительной механики, рассмотрен расчет плоских многопролетных статически определимых балок при действии неподвижной и подвижной нагрузок. Изложены статический и кинематический способы построения линий влияния опорных реакций, изгибающих моментов и поперечных сил. Рассмотрены вопросы классификации, конструкции и расчета плоских ферм. Изложен аналитический метод определения усилий в стержнях. Материал пособия иллюстрируется решением большого количества задач.

Рекомендовано для студентов очной и заочной форм обучения строительных специальностей.

УДК 624.04 (075)

ББК Н112я7

© Чальцев М. Н., Алтухова Т. И., Губа К. Р., 2020

© Автомобильно-дорожный институт ГОУВПО «Донецкий национальный технический университет», 2020

## СОДЕРЖАНИЕ

1. ПРЕДМЕТ И ЗАДАЧИ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ .....	5
1.1. Расчетная схема .....	5
1.2. Классификация сооружений .....	7
1.3. Кинематический анализ сооружений .....	8
1.4. Способ нулевой нагрузки .....	14
2. МНОГОПРОЛЕТНЫЕ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛКИ .....	16
2.1. Правила размещения промежуточных шарниров в балках .....	17
2.2. Расчет балок на неподвижную нагрузку .....	18
3. РАСЧЕТ ПЛОСКИХ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ НА ПОДВИЖНУЮ НАГРУЗКУ .....	24
3.1. Статический способ построения линий влияния .....	24
3.1.1. Линии влияния в простых балках .....	24
3.1.2. Линии влияния опорных реакций для двухконсольной балки .....	25
3.1.3. Линии влияния изгибающих моментов и поперечных сил в простых балках .....	26
3.1.4. Линии влияния изгибающих моментов и поперечных сил в консольных балках .....	28
3.1.5. Линии влияния усилий в балке, защемленной одним концом .....	30
3.1.6. Линии влияния усилий для многопролетных шарнирных балок .....	31
3.1.7. Линии влияния поперечной силы и изгибающего момента в сечении $K$ .....	33
4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ С ПОМОЩЬЮ ЛИНИЙ ВЛИЯНИЯ .....	35
4.1. Линии влияния при узловой передаче нагрузки .....	37
4.2. Свойство прямолинейного участка линии влияния .....	39
4.3. Определение наиболее невыгодного положения нагрузки на сооружение .....	40
4.4. Расчетное положение нагрузки на линии влияния треугольной формы .....	42
4.5. Огибающие эпюры изгибающих моментов и поперечных сил .....	44
5. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ПОСТРОЕНИЯ ЛИНИЙ ВЛИЯНИЯ .....	45
6. ТРЕХШАРНИРНЫЕ АРКИ И РАМЫ .....	51

6.1. Аналитический способ определения опорных реакций трехшарнирной арки .....	53
6.2. Аналитический способ определения внутренних усилий в арке при произвольной нагрузке .....	57
6.2.1. Определение внутренних усилий в арке при вертикальной нагрузке .....	59
7. ГРАФИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТРЕХШАРНИРНЫХ АРОК.....	62
7.1. Определение реакций опор в трехшарнирной арке .....	64
7.2. Определение внутренних усилий. Многоугольник давления....	65
8. РАСЧЕТ ТРЕХШАРНИРНЫХ АРОК НА ПОДВИЖНУЮ НАГРУЗКУ .....	67
8.1. Линии влияния опорных реакций.....	67
8.2. Линии влияния внутренних усилий .....	69
8.3. Построение линий влияния продольной, поперечной сил и изгибающего момента в сечении $K$ способом нулевых точек .....	71
8.4. Уравнение рациональной оси трехшарнирной арки.....	74
9. РАСЧЕТ ПЛОСКИХ ФЕРМ. КЛАССИФИКАЦИЯ ФЕРМ .....	75
9.1. Порядок образования простейших ферм. Условия геометрической неизменяемости и статической определимости.....	78
9.2. Аналитическое определение усилий. ....	79
10. ЛИНИИ ВЛИЯНИЙ УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ ФЕРМ С ПРОСТОЙ РЕШЕТКОЙ.....	86
11. РАСЧЕТ ШПРЕНГЕЛЬНЫХ СОСТАВНЫХ ФЕРМ .....	91
11.1. Линии влияния усилий в шпренгельных фермах.....	98
12. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ ПЛОСКИЕ РАМЫ .....	104
12.1. Общие сведения.....	104
12.2. Построение эпюр изгибающих моментов поперечных и продольных сил в статически определимых рамах .....	105
13. РАБОТА ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ СИЛ .....	111
13.1. Элементарная работа продольной силы .....	113
13.2. Элементарная работа изгибающего момента .....	113
13.3. Элементарная работа поперечной силы.....	114
13.4. Теорема взаимности работ (теорема Бетти) .....	115
13.4. Теорема взаимности перемещений (теорема Максвелла).....	117
13.5. Вычисление перемещений по формуле Мора .....	118
13.6. Правило Верещагина .....	120
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	125

## 1. ПРЕДМЕТ И ЗАДАЧИ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ

*Строительной механикой* в широком смысле называется наука о методах расчета сооружений на прочность, жесткость и устойчивость. К ней относятся следующие дисциплины: сопротивление материалов, строительная механика стержневых систем, строительная механика пластин и оболочек, теория упругости, теория пластичности, теория ползучести.

Строительная механика стержневых систем занимается преимущественно расчетом систем стержней, из которых состоит сооружение, расчетом балок на подвижную нагрузку, расчетом стержней (или брусьев) с криволинейной осью (арок) и т. д.

Брусья, образующие ферму или раму, деформируются от приходящихся на них воздействий так же, как и изолированные стержни (т. е. не связанные между собой). Это позволяет все результаты, полученные в сопротивлении материалов для отдельных брусьев, использовать и для брусьев в сложных стержневых системах. Именно поэтому строительная механика стержневых систем не рассматривает напряжения в отдельных точках поперечных сечений брусьев, а ограничивается лишь определением внутренних силовых факторов (т. е. изгибающих моментов, продольных и поперечных сил), перемещений, которые возникают при нагружении сложной стержневой системы.

Так как строительная механика стержневых систем рассматривает работу сооружений в целом, то иногда она называется *теорией сооружений*.

Задачи строительной механики состоят в разработке рациональных методов определения усилий в сооружениях и их перемещений, методов расчета сооружений на прочность, жесткость и устойчивость, а также в определении наивыгоднейших форм сооружений, удовлетворяющих требованиям экономичности.

### 1.1. Расчетная схема

Инженерные сооружения представляют собой совокупность различных конструктивных элементов (стержней, балок, пластин, брусьев, оболочек и массивных тел), соединенных между собой связями в единое целое.

Расчет сооружений с точным учетом всех геометрических размеров и форм его элементов, а также с учетом строгого их взаимодействия между собой является теоретически недоступным, или практически сложным, следовательно, неприемлемым. Поэтому строительная механика использует метод научной абстракции, заменяя сооружения их схемами. В расчетной схеме сооружения стержни заменяются их центральными линиями, называемыми осями; пластины заменяются их срединными поверхностями; реальные опорные устройства и связи между элементами сооружения заменяются идеальными связями; нагрузки на поверхности элементов переносятся на оси или срединные поверхности и т. д.

Если сооружение состоит в основном из стержней, то схема сооружения представляет собой как бы его скелет (рис. 1, а; 2, а). Если полная схема сооружения проста и доступна для практического расчета, то она используется и как расчетная схема (рис. 1, б; 2, б). Если полная схема сложна, она упрощается путем игнорирования некоторых свойств, играющих второстепенную роль в работе сооружения. Следовательно расчетная схема сооружения есть *упрощенная* полная схема (рис. 1, в).

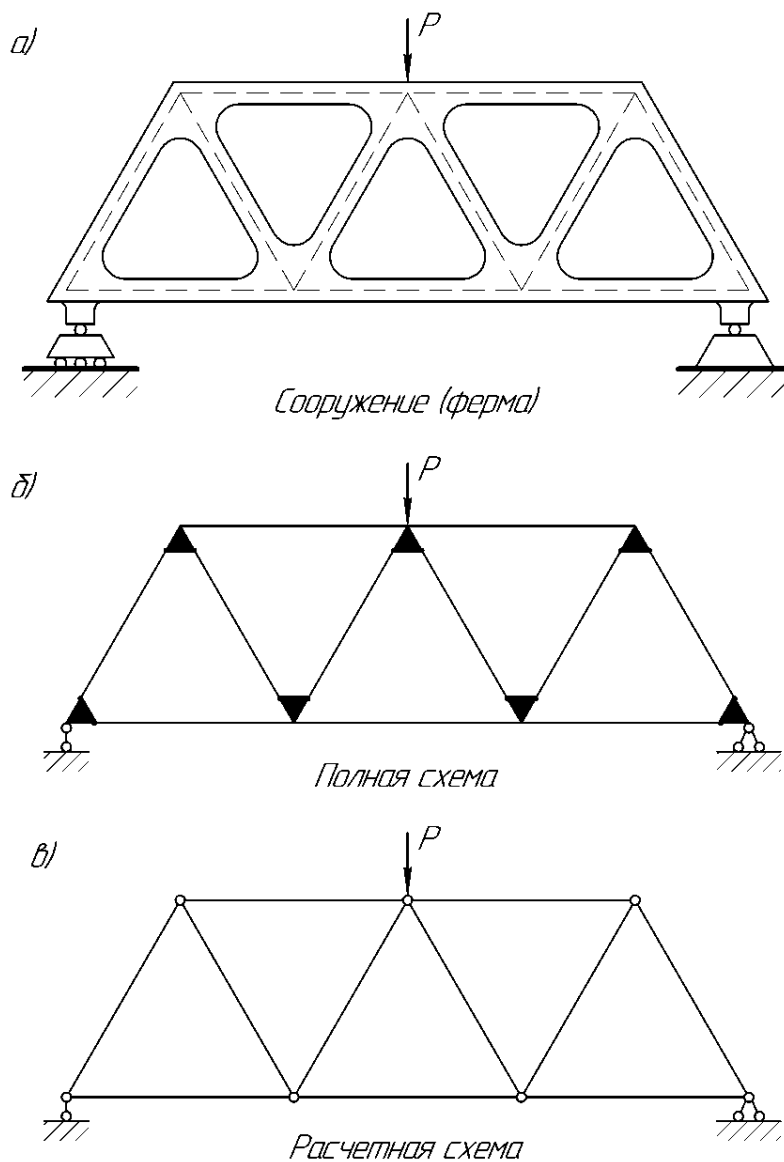


Рисунок 1

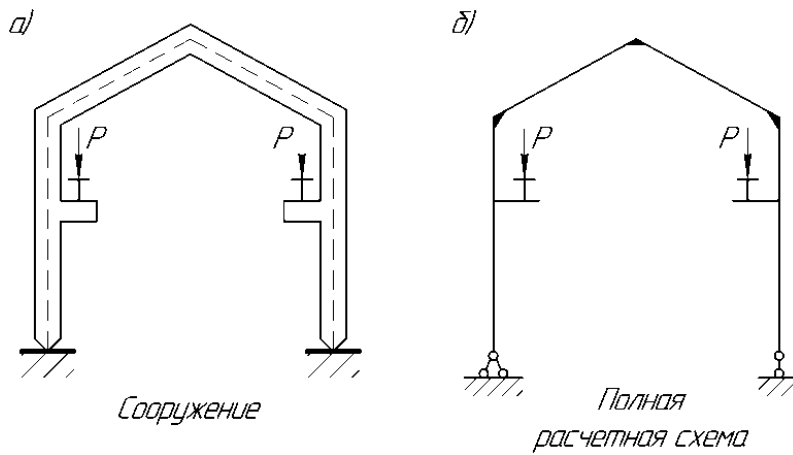


Рисунок 2

## 1.2. Классификация сооружений

Классификация сооружений осуществляется по различным признакам:

I. **По геометрическим признакам** различаются следующие типы сооружений:

- стержневые сооружения (состоящие из стержней);
- складчатые тонкостенные системы (состоящие из пластинок и оболочек);
- массивные системы (состоящие из тел, примерно одинаковых в трех измерениях), например плотина, подпорные стенки (рис. 3).

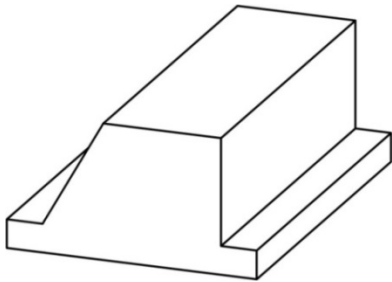


Рисунок 3

II. **По расположению отдельных элементов** системы подразделяются на плоские и пространственные.

Плоские – это системы, у которых оси всех стержней лежат в одной плоскости. В зависимости от типа соединения стержней между собой различают:

- системы с жесткими соединениями элементов – рамы;
- системы с шарнирными соединениями – фермы;
- комбинированные системы – рамы с шарнирами и шпренгельные балки (рис. 4).

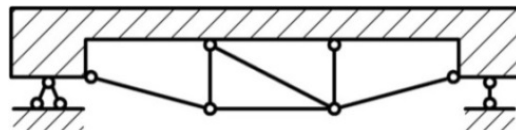


Рисунок 4

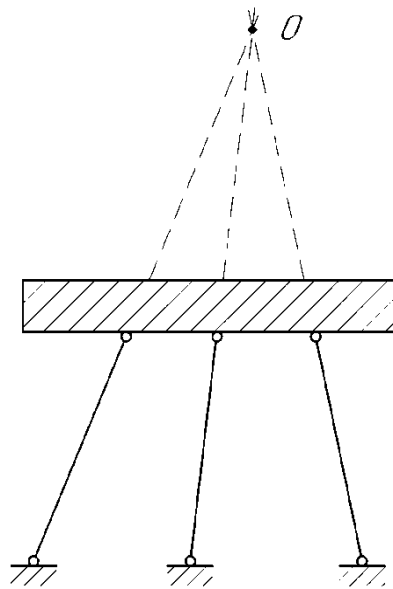


Рисунок 5

III. По кинематическим признакам системы подразделяются на:

- геометрически неизменяемые системы (ГНС), в которых изменение формы обуславливается лишь деформацией материала;
- геометрически изменяемые системы (ГИС), допускающие конечные относительные перемещения тел без деформации материала;
- мгновенно изменяемые системы – конструкции, допускающие бесконечно малые относительные перемещения тел без деформации материала (рис. 5).

### 1.3. Кинематический анализ сооружений

Сооружение может воспринимать нагрузку только в том случае, если оно постоянно сохраняет геометрическую форму и положение, которые заданы ему при возведении.

Простейшим примером геометрически неизменяемой системы может служить система, составленная из трех стержней, соединенных между собой шарнирами (идеальными шарнирами) (рис. 6, а).

Система, состоящая из четырех стержней, соединенных между собой шарнирами, является геометрически изменяемой системой (рис. 6, б).

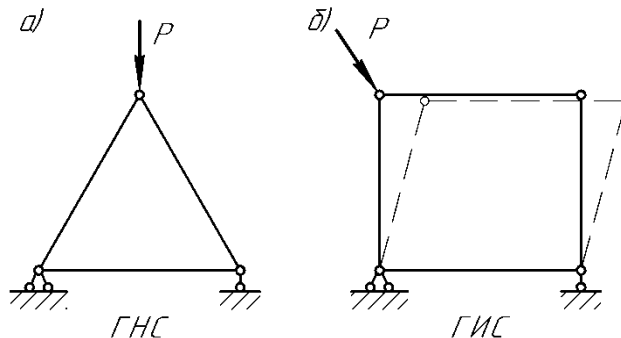


Рисунок 6

Является ли система геометрически неизменяемой, устанавливаем при помощи кинематического анализа.

Как известно, **степень свободы** какого-нибудь тела или системы



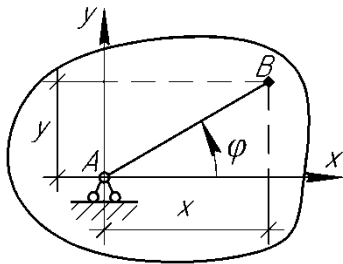
тел называется количество независимых геометрических параметров, определяющих положение тела или системы.

Ограничимся рассмотрением *плоской системы* (рис. 7).

Точка обладает в плоскости двумя степенями свободы. Ее положение в неподвижной системе характеризуется координатами  $x$  и  $y$ .

Положение плоской фигуры на плоскости определяется тремя независимыми переменными  $x$ ,  $y$ ,  $\angle \varphi$ . Отсюда следует, что плоская фигура имеет в плоскости три степени свободы. Степень свободы может быть ограничена различными устройствами (связями), которые уменьшают количество независимых параметров движения.

Всякое устройство, уничтожающее одну степень свободы, рассматривается как одна кинематическая связь. Цилиндрический шарнир  $A$  с неподвижной геометрической осью налагает на тело две связи (рис. 7).



$A$  – неподвижный шарнир

Рисунок 7

Подвижный шарнир не препятствует ни взаимному повороту элементов, ни поступательному перемещению, поэтому он эквивалентен одной связи.

*Стержневая система* – это совокупность определенного числа геометрически неизменяемых плоских звеньев (в том числе и стержней) именуемых дисками, соединенных между собой шарнирами, а с неподвижным звеном (с землей) – опорными стержнями (рис. 8).

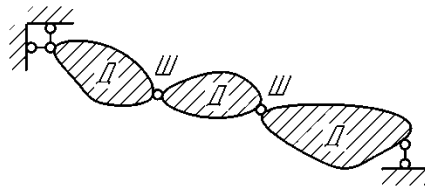


Рисунок 8

Степень свободы такой фигуры определяем по формуле:

$$W = 3D - 2Ш - C_{on}, \quad (1.1)$$

где  $W$  – степень свободы дисковой системы;

$D$  – количество дисков;

$Ш$  – количество простых шарниров;

$C_{on}$  – количество опорных стержней.

В данном случае возможны три качественно различных результата:

1.  $W > 0$  – система изменяемая, т. к. не имеет достаточного количества связей. Она обладает подвижностью.

2.  $W = 0$  – система имеет необходимое количество связей для обеспечения неизменяемости и неподвижности.

3.  $W < 0$  – система неизменяемая, число связей превышает необходимый минимум.

Обозначим число лишних связей через  $L$ .

Очевидно, что  $L = -W$ , и тогда

$$L = 2Ш + C_{on} - 3Д. \quad (1.2)$$

Чтобы правильно применять эту формулу, следует различать шарниры:

**простые** – соединяющие два диска (рис. 9, а);

**кратные** – соединяющие больше двух дисков (могут быть полные и неполные) (рис. 9, б, в).

Шарнир, соединяющий  $n$  дисков, следует рассматривать как  $(n - 1)$  простых шарниров.

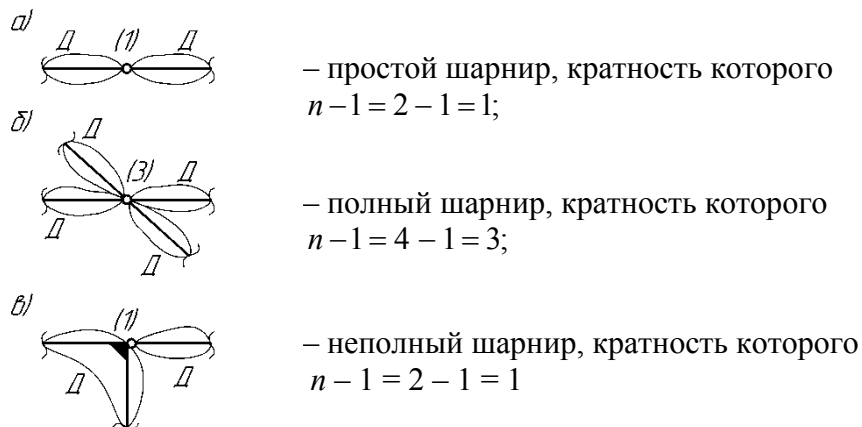


Рисунок 9

Система, не прикрепленная к основанию, имеет три степени подвижности относительно основания.

Обозначим изменяемость системы, отделенной от своих опор через  $V$ , тогда

$$V = W - 3;$$

при  $C_0 = 0$  получим:  $V = 3Д - 2Ш - 3. \quad (1.3)$

Для определения степени свободы **шарнирно-стержневых систем** обозначим количество узлов (шарниров, соединяющих стержни) системы через  $У$ , количество стержней –  $С$ , опорных стержней –  $C_{on}$ .

Узел шарнирно-стержневой системы, как геометрическая точка, имеет две степени свободы. Каждый стержень системы, объединяя узлы, лишает систему одной степени свободы. Это же можно сказать и о каждом

опорном стержне, если рассматривать его как отдельную связь. Тогда

$$W = 2Y - C - C_{on}. \quad (1.4)$$

Для системы, отделенной от своих опор,

$$V = W - 3; \quad W = 2Y - C - 3. \quad (1.5)$$

Например, рассмотрим балку, прикрепленную к основанию (рис. 10).

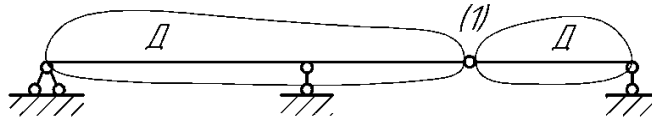


Рисунок 10

При  $D = 2$ ;  $Ш = 1$ ;  $C_{on} = 4$ .

Получим  $W = 3D - 2Ш - C_{on} = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 4 = 0$ .

Система является геометрически неизменяемой.

Если рассмотрим балку, прикрепленную к основанию с незакрепленным последним диском (рис. 11), при тех же данных получим:

$$W = 3D - 2Ш - C_{on} = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 4 = 0.$$

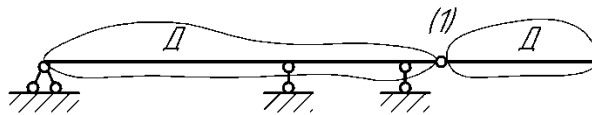


Рисунок 11

Система является изменяемой.

Для окончательного суждения о неизменяемости системы проведем анализ геометрической структуры системы.

Наиболее целесообразным является применение геометрического метода исследования, основанного на изучении и использовании свойств геометрических фигур.

Простейшей геометрически неизменяемой системой является шарнирно-стержневой треугольник (рис. 12).



Рисунок 12

Рассмотрим пять способов образования геометрически неизменяемых систем:

**I способ** – к диску присоединяется новый узел при помощи двух

стержней, не лежащих на одной прямой (рис. 13).

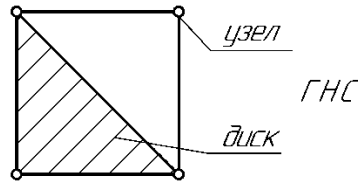


Рисунок 13

**II способ** – два диска соединяются шарниром и стержнем, не проходящим через этот шарнир (рис. 14, а). Если же стержень проходит через шарнир, тогда система геометрически изменяемая (рис. 14, б).

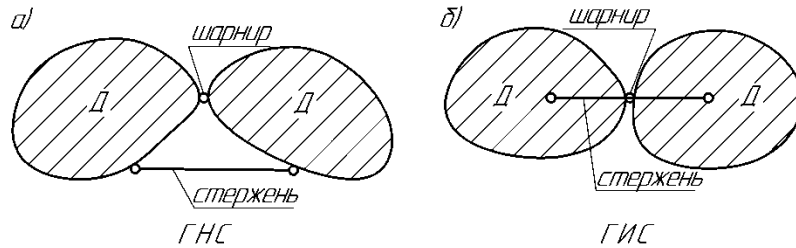


Рисунок 14

**III способ** – два диска соединяются при помощи трех стержней, которые не параллельны и не пересекаются в одной точке (рис. 15, а).

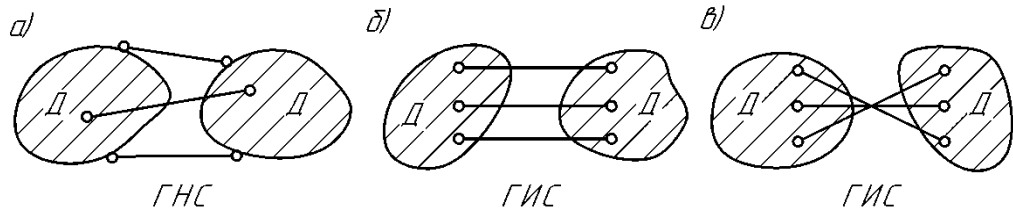


Рисунок 15

Если же стержни, соединяющие диски, параллельны друг другу или пересекаются в одной точке – система геометрически изменяемая (рис. 15, б, в).

**IV способ** – три диска соединяются тремя шарнирами, не лежащими на одной прямой. Шарниры образуют жесткий треугольник (рис. 16, а).

Если же шарниры, соединяющие три диска, лежат на одной прямой (рис. 16, б) – система геометрически изменяемая.

**V способ** – три диска соединяются шестью стержнями, которые не параллельны и не пересекаются в одной точке (рис. 17, а).

Если же точки пересечения стержней лежат на одной прямой – система геометрически изменяемая (рис. 17, б).

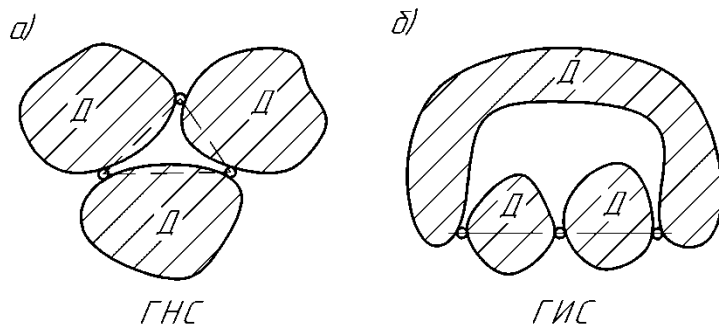


Рисунок 16

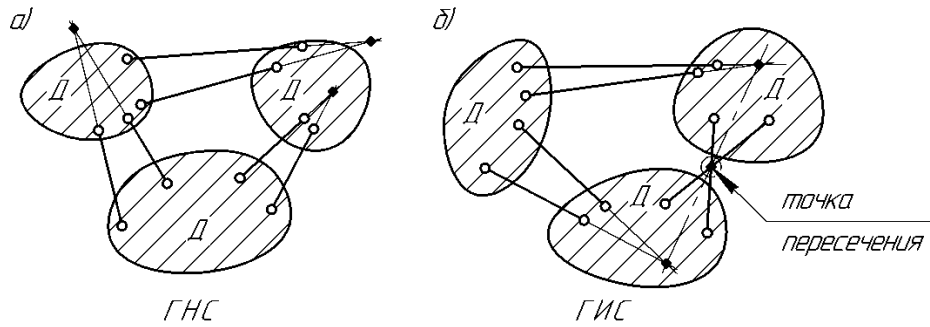


Рисунок 17

Неизменяемые системы, образование которых можно проследить в соответствии со способами соединения двух или трех дисков, называются **простыми**.

Часто при достаточном количестве стержней система может быть **мгновенно изменяемой** из-за неудачного их расположения. Существуют способы исследования систем на мгновенную изменяемость.

Статический признак мгновенно изменяемой системы состоит в том, что в элементах системы при действии нагрузок могут возникнуть бесконечно большие усилия или усилия неограниченной величины. Предположим, что стержни  $AC$  и  $AB$  (рис. 18) не лежат на одной прямой.

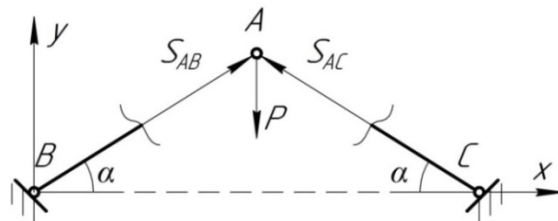


Рисунок 18

Из суммы проекций всех сил узла  $A$  на горизонтальную ось определяем усилие  $S$  ( $S = S_{AB} = S_{AC}$ ).

Проецируя все силы узла  $A$  на вертикальную ось, находим:

$$S \sin \alpha + S \sin \alpha - P = 0;$$

$$2S \sin \alpha = P;$$

$$S = S_{AB} = S_{AC} = \frac{P}{2 \sin \alpha}.$$

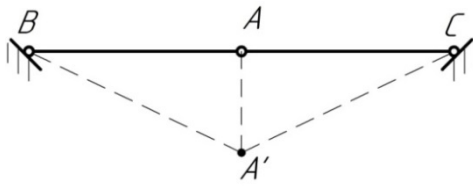


Рисунок 19

Если  $\alpha = 0$ , шарниры  $A, B, C$  расположены на одной прямой (рис. 19), в стержнях  $AB$  и  $AC$  возникают бесконечно большие усилия и система становится мгновенно изменяемая. Если шарнир  $A$  переместится под действием силы  $P$  в положение  $A'$ , система снова станет неизменяемой (рис. 19). Следова-

тельно, мгновенно изменяемые системы нельзя использовать в качестве инженерных сооружений. Следует избегать систем, близких к мгновенно изменяемым.

Справедливо и обратное положение: если при любой заданной нагрузке усилие в каждом элементе системы имеет вполне определенное конечное значение, и без нагрузки (так называемая нулевая нагрузка) усилия во всех элементах равны нулю, и такое (нулевое) решение является единственно возможным, то система геометрически неизменяемая. Основанный на этом признаке способ исследования мгновенной изменяемости называется способом нулевой нагрузки.

#### 1.4. Способ нулевой нагрузки

Определим усилия при действии нулевой нагрузки для системы, изображенной на рисунке 20.

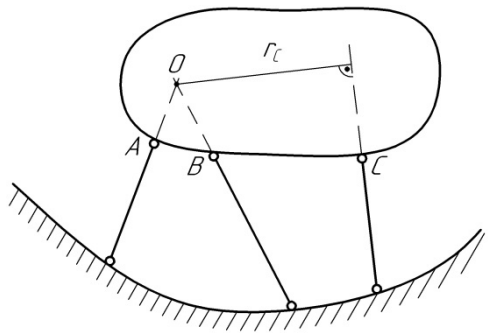


Рисунок 20

Составим уравнение равновесия:

$$\sum M_O = 0,$$

$$R_C r_C = 0; \quad r_C \neq 0,$$

следовательно,  $R_C = 0$ . Аналогично получаем:  $R_A = 0; \quad R_B = 0$ . В случае мгновенно изменяемой системы реакции имеют неопределенные значения.

Если два диска соединены тремя стержнями, линии действия реакций которых пересекаются в одной точке (рис. 21), система будет

мгновенно изменяемая, т. к. возможно бесконечно малое смещение диска путем вращения его вокруг мгновенного центра вращения (точка  $O$ ).

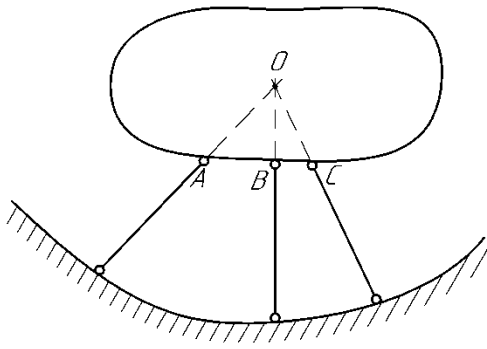


Рисунок 21

Рассмотрим еще один способ исследования мгновенно изменяемой системы.

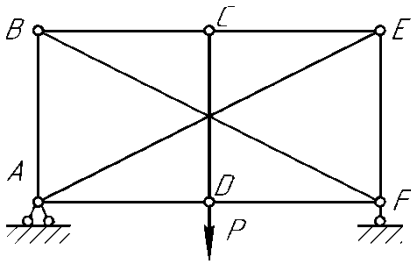


Рисунок 22

Мгновенную изменяемость системы можно показать с помощью статического способа исследования, составив уравнение моментов относительно точки  $O$ :

$$\sum M_C = 0,$$

$$R_A r_A + R_B r_B + R_C r_C = 0;$$

т. к.  $r_A = r_B = r_C = 0$ , реакции  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$  имеют неопределенные значения.

Статическим признаком такой системы является противоречивость результатов, полученных при определении усилий в одном и том же стержне из условия равновесия узлов системы. Например, при рассмотрении равновесия узла  $C$  (рис. 22) усилие в стержне  $CD$  равняется нулю, а при рассмотрении равновесия узла  $D$  в том же стержне равно  $+P$ . Это указывает на то, что система является мгновенно изменяемой.

Произведем кинематический анализ следующих систем (рис. 23, 24).

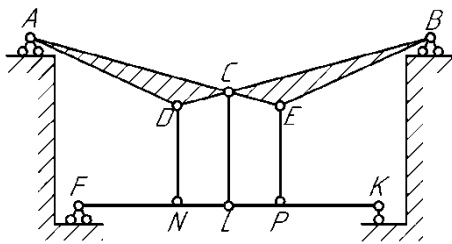


Рисунок 23

Система (рис. 23) состоит из 11 дисков, в точках  $A, B, N, P$  – простые шарниры, в точке  $C$  – шарнир четырехкратный, в точке  $D, E$  и  $L$  – шарниры двукратные.

Следовательно, используя формулу (1.1), определим:

$$Ш = 4 + 4 + 2 \cdot 3 = 14,$$

$$W = 3 \cdot 11 - 2 \cdot 14 - 7 = -2. C_{on} = 7;$$

Для исследования геометрической структуры представим, что два диска  $ADC$  и  $CEB$  соединены между собой шарниром  $C$  и присоединены к земле двумя шарнирами  $A$  и  $B$ . К этой неподвижной системе при помощи стержня  $CL$  прикреплена балка  $FK$ , которая также геометрически неизменяемая. Шарнир  $F$  в конце балки можно рассматривать, как ее шарнирно-неподвижную опору. Другая опора балки в точке  $K$  – шарнирно-подвижная, стержни  $DN$  и  $PE$  – лишние.

Следующая конструкция (ферма) (рис. 24) состоит из 12-ти узлов,

19-ти стержней и 5-ти опорных связей. Значит

$$W = 2Y - C - C_{on} = 12 \cdot 2 - 19 - 5 = 0.$$

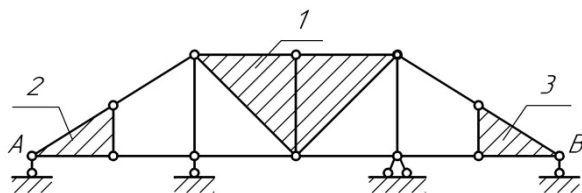


Рисунок 24

Данная система является мгновенно изменяемой.

Ферма имеет достаточное количество связей. Заштрихованные части фермы представляют собой диски. Средний диск 1 прикреплен к земле тремя стержнями, не пересекающимися в одной точке. Диски 2 и 3 прикреплены к земле и неподвижному диску 1 тремя стержнями, пересекающимися в одной точке. Точки A и B являются мгновенными центрами вращения.

## 2. МНОГОПРОЛЕТНЫЕ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ БАЛКИ

Статически определимая, неизменяемая система, состоящая из ряда однопролетных балок, соединенных между собой шарнирами, называется многопролетной статически определимой или многопролетной шарнирной балкой, или шарнирной балкой.

Теория расчета таких балок была разработана русским инженером Гавриилом Семиколеновым в 1871 году.

Шарнирная балка может быть получена из неразрезной путем введения шарниров в пролеты балки.

Количество шарниров ( $III$ ), обеспечивающее статическую определимость при геометрической неизменяемости, можно вычислить по формуле

$$III = C_{on} - 3, \quad (2.1)$$

где  $C_{on}$  – количество опорных связей.

Статическая определимость шарнирной балки обусловлена наличием в ее пролетах промежуточных шарниров, число которых должно быть на три меньше числа опорных стержней.

В рассматриваемой неразрезной балке  $C_{on} = 6$ , тогда  $III = C_{on} - 3 = 6 - 3 = 3$  (рис. 25, а).

Балка в пролетах должна иметь три шарнира (рис. 25, б).

Шарниры в балке располагаем таким образом, чтобы система во всех своих частях была статически определимой, неизменяемой. Учитывая это, получаем следующие правила размещения промежуточных шарниров в пролетах.



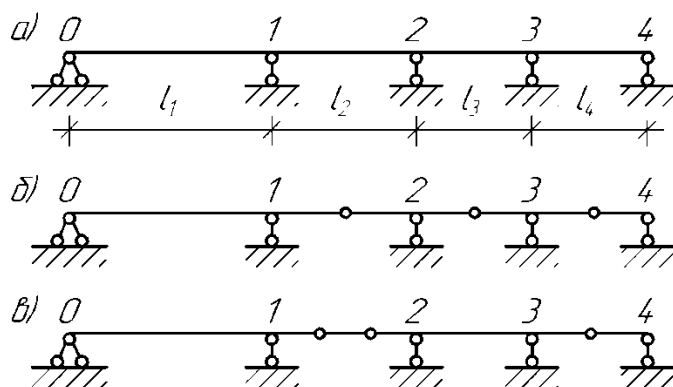


Рисунок 25

## 2.1. Правила размещения промежуточных шарниров в балках

Для размещения промежуточных шарниров применимы следующие правила:

1. В пределах одного пролета может быть установлено не более двух промежуточных шарниров (рис. 25, в).

2. Пролеты с двумя шарнирами должны чередоваться с пролетами без шарниров при условии, что первый пролет и последний – без шарниров (рис. 26).



Рисунок 26

3. Пролеты с одним шарниром могут следовать друг за другом при условии, что один любой пролет без шарниров (рис. 25, б; рис. 27).

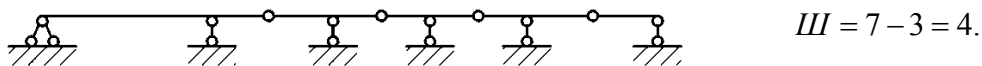


Рисунок 27

4. За пролетом с двумя шарнирами могут следовать пролеты с одним шарниром при условии, что оба крайние пролеты без шарниров (рис. 28).

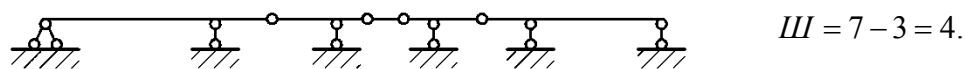


Рисунок 28

5. Для балки с жесткой заделкой (рис. 29, а) применимы вышеуказанные правила, если жесткую заделку заменить фиктивным пролетом бесконечно малой длины (рис. 29, б).

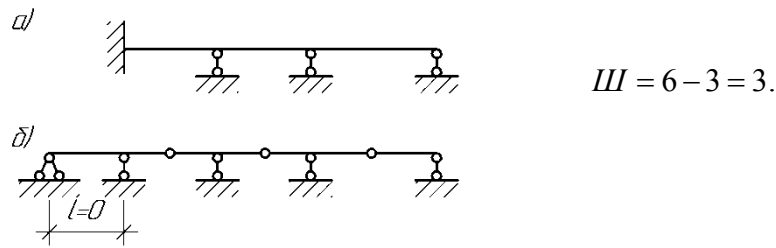


Рисунок 29

Для решения вопроса о неизменяемости многопролетной шарнирной балки, а также для более наглядного представления о ее работе, изобразим схемы взаимодействия отдельных элементов балки (поэтажные схемы) (рис. 30, а, б).

Наибольшее распространение получили многопролетные шарнирные балки двух типов:

а) первый тип характеризуется чередованием пролетов, имеющих по два шарнира, с бесшарнирными пролетами; при этом на консоли соседних балок опираются короткие балки (рис. 26, а);

б) второй тип характеризуется тем, что во всех пролетах, кроме одного, располагается по одному шарниру – это однопролетные балки, каждая из которых опирается на консоль предыдущей (рис. 27; 29; 30, а).

## 2.2. Расчет балок на неподвижную нагрузку

Расчет балок на неподвижную нагрузку заключается в определении внутренних усилий ( $Q$  и  $M$ ) и построении эпюр. Для удобства расчета многопролетная балка расчленяется на простые балки и составляется схема взаимодействия (поэтажная схема) этих элементов. При этом важно выявить какая балка является **основной** и какая на нее опирается.

Различают основную, передаточную и подвесную балки.

Под **основной** понимают балку, которая передает давление от всех действующих на нее нагрузок, через опоры, полностью на основание (имеет две опоры с основанием или жесткую заделку).

Под **передаточной** – балку, передающую давление частично через опору на основание, а частично – на консоль смежной балки (имеет одну опору с основанием).

**Подвесная** балка шарнирно опирается на концы консолей смежных балок (не имеет опор на основании).

Расчет начинаем с верхней балки (подвесной или передаточной), т. к. эта балка оказывает давление на нижележащие.

**Силу давления** определяем, как реакцию опоры вышележащей балки, взятой с противоположным знаком.

Аналитический способ расчета балки не отличается от расчета однопролетных статически определимых балок.

В многопролетной шарнирной балке эпюры, полученные для каждого отдельного элемента, располагаются на одной оси под расчетной схемой многопролетной шарнирной балки.

Например, построим схемы взаимодействия (рис. 30, а, б).

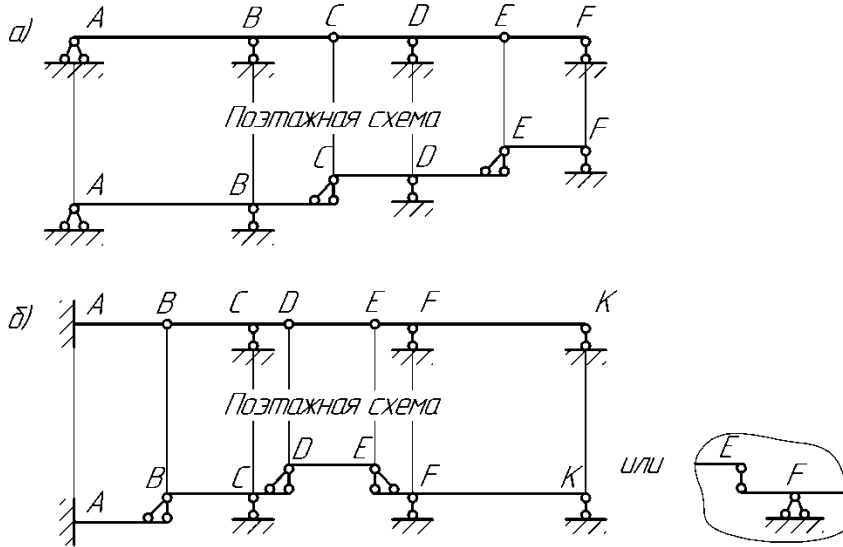


Рисунок 30

### Пример

Построить эпюры внутренних усилий многопролетной шарнирной балки, если  $q = 10 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ ;  $P = 20 \text{ кН}$  (рис. 35, а).

### Решение

Вначале определим количество шарниров по формуле

$$Ш = C_{on} - 3 = 6 - 3 = 3.$$

Затем построим поэтажную схему (рис. 35, б).

Многопролетная шарнирная балка (рис. 35, а) имеет две основные балки –  $AB$  и  $EFK$ , одну подвесную балку  $DE$  и одну передаточную  $BCD$ . На поэтажной схеме показаны силы давления и порядок расчета балок (рис. 35, б).

### Расчет подвесной балки

Рассмотрим подвесную балку  $DE$  (рис. 31). Она загружена распределенной нагрузкой  $q = 10 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ . Определим для данной балки опорные реакции:

$$\sum M_D = 0, R_E \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot 1 = 0; \quad R_E = \frac{q \cdot 2 \cdot 1}{2} = 10 \text{ кН}. \quad (2.2)$$

$$\sum M_E = 0, -R_D \cdot 2 + q \cdot 2 \cdot 1 = 0; \quad R_D = \frac{q \cdot 2 \cdot 1}{2} = q \cdot 1 = 10 \text{ кН}. \quad (2.3)$$

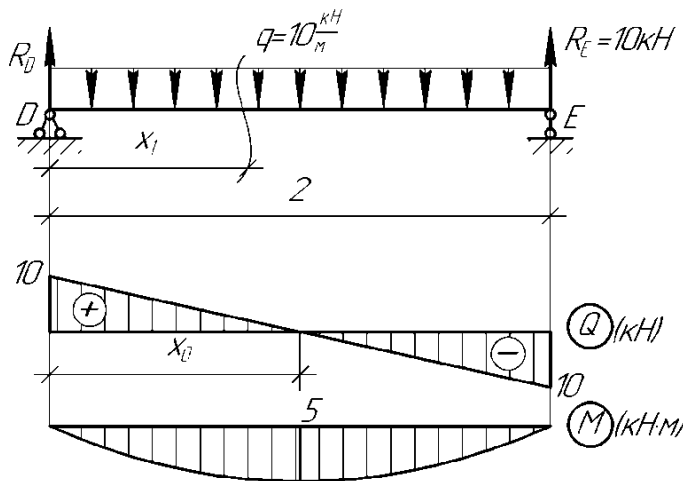


Рисунок 31

Произведем проверку:

$$\begin{aligned} \sum P(y) &= 0, \\ R_D - q \cdot 2 + R_E &= 0; \\ 10 - 10 \cdot 2 + 10 &= 0; \\ 20 - 20 &= 0. \end{aligned}$$

Построим эпюры внутренних усилий (рис. 31):

$$0 \leq x_1 \leq 2 \text{ м};$$

$$Q_1 = R_D - qx_1;$$

$$\text{при } x_1 = 0$$

$$Q_1 = R_D = 10 \text{ кН};$$

при  $x_1 = 2 \text{ м}$   $Q_1 = R_D - q \cdot 2 = 10 - 10 \cdot 2 = -10 \text{ кН}$ .

Определим расстояние до нулевой точки на эпюре поперечных сил. Приравняем к нулю выражение поперечной силы:

$$R_D - qx_0 = 0; \quad x_0 = \frac{R_D}{q} = \frac{10}{10} = 1 \text{ м}.$$

$$M_1 = R_D x_1 - qx_1 \frac{x_1}{2}; \quad \text{при } x_1 = 0 \quad M_1 = 0;$$

$$\text{при } x_1 = 2 \text{ м} \quad M_1 = 10 \cdot 2 - 10 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = 20 - 20 = 0;$$

$$\text{при } x_0 = 1 \text{ м} \quad M_1^{\max} = 10 \cdot 1 - 10 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 10 - 5 = 5 \text{ кНм}.$$

### Расчет основной балки EFK

В точке E балки EFK прикладываем силу давления от балки DE (рис. 31). Определим опорные реакции:

$$\sum M_F = 0, \quad -R_k \cdot 2 + R'_E \cdot 1 = 0; \quad R_k = \frac{R'_E \cdot 1}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ кН}.$$

$$\sum M_K = 0, \quad R'_E \cdot 3 - R_F \cdot 2 = 0; \quad R_F = \frac{R'_E \cdot 3}{2} = \frac{10 \cdot 3}{2} = 15 \text{ кН}.$$

Произведем проверку:

$$\sum P(y) = 0, \quad -R'_E + R_F - R_K = 0;$$

$$-10 + 15 - 5 = 0; \quad 15 - 15 = 0.$$

Построим эпюры внутренних усилий (рис. 32).

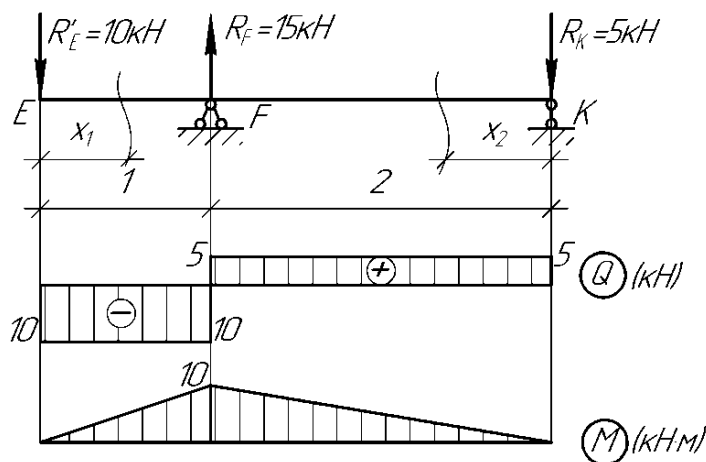


Рисунок 32

$$0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м};$$

$$Q_1 = -R'_E = -10 \text{ кН.}$$

$$M_1 = -R'_E x_1 \text{ при } x_1 = 0 \quad M_1 = 0;$$

при  $x_1 = 1 \text{ м}$   $M_1 = -10 \cdot 1 = -10 \text{ кНм.}$

$$0 \leq x_2 \leq 2 \text{ м};$$

$$Q_2 = R_K = 5 \text{ кН.}$$

$$M_1 = -R_K x_2 \text{ при } x_2 = 0; \quad M_2 = 0;$$

при  $x_2 = 2 \text{ м}$   $M_2 = -5 \cdot 2 = -10 \text{ кНм.}$

### Расчет передаточной балки BCD

В точке D балки BCD прикладываем реакцию давления  $R'_D = 10 \text{ кН}$  (рис. 32). Определяем опорные реакции:

$$\sum M_B = 0, \quad R_C - R'_D \cdot 2 = 0; \quad R_C = R'_D \cdot 2 = 10 \cdot 2 = 20 \text{ кН.}$$

$$\sum M_C = 0, \quad -R_B \cdot 1 - R'_D \cdot 1 = 0; \quad R_B = -R'_D = -10 \text{ кН.}$$

Производим проверку:

$$\sum P(y) = 0, \quad R_B + R_C - R'_D = 0;$$

$$-10 + 20 - 10 = 0; \quad 20 - 20 = 0.$$

Построим эпюры внутренних усилий (рис. 33).

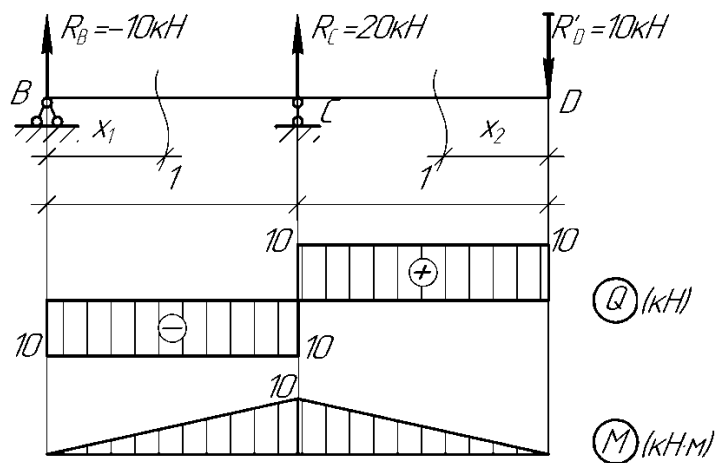


Рисунок 33

$$0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м;}$$

$$Q_1 = -R_B = -10 \text{ кН.}$$

$$M_1 = -R_B x_1;$$

при  $x_1 = 0$   $M_1 = 0$ ;

при  $x_1 = 1$  м  $M_1 = -R_B \cdot 1 = -10$  кНм.

$$0 \leq x_2 \leq 1 \text{ м;}$$

$$Q_2 = R'_D = 10 \text{ кН.}$$

$$M_2 = -R'_D x_2;$$

при  $x_2 = 0$   $M_2 = 0$ ;

при  $x_2 = 1$  м  $M_2 = -R'_D \cdot 1 = -10$  кНм.

### Расчет основной балки AD

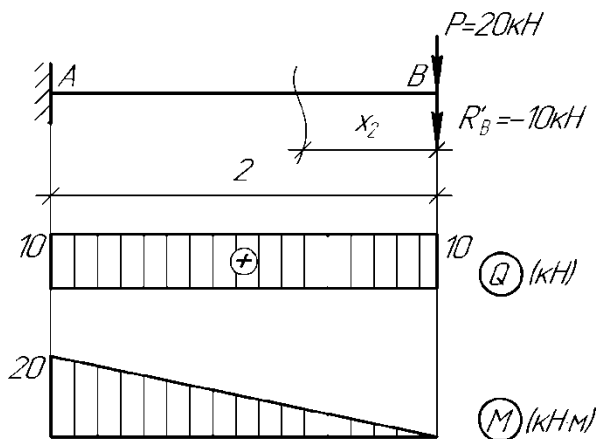


Рисунок 34

В точке B балки AB прикладываем силу давления  $R'_B = 10$  кН. Строим эпюры внутренних усилий (рис. 34).

$$0 \leq x_1 \leq 2 \text{ м;}$$

$$Q_1 = P + R'_B = 20 + (-10) = 10 \text{ кН.}$$

$$M_1 = -P x_1 - R'_B x_1;$$

при  $x_1 = 0$   $M_1 = 0$ ;

при  $x_1 = 2$  м

$$M_1 = -20 \cdot 2 - (-10) \cdot 2 = -40 + 20 = -20 \text{ кНм.}$$

Эпюры, полученные для каждой отдельной балки (рис. 35, в, г, д, е), располагаем на одной оси, вычертив их в одном масштабе (рис. 35, ж, з).

Следует обратить внимание, что на эпюре изгибающих моментов нулевые значения моментов будут под шарнирами  $B, D, E$  (рис. 35, з).

Сила  $P$ , приложенная в шарнире  $B$ , прикладывается только один раз либо к балке  $AB$ , либо к балке  $BCD$ .

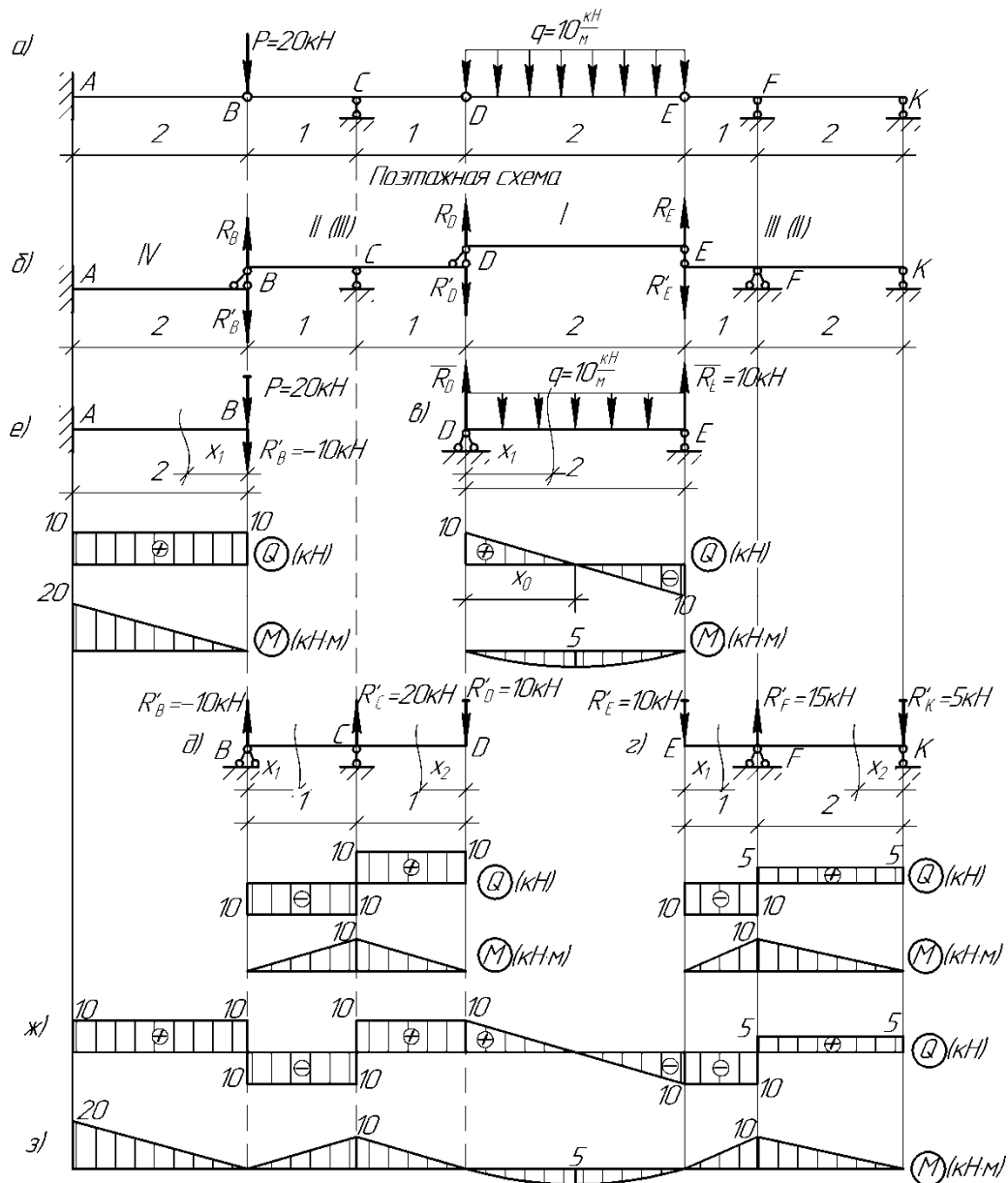


Рисунок 35

### 3. РАСЧЕТ ПЛОСКИХ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ НА ПОДВИЖНУЮ НАГРУЗКУ

Подвижной нагрузкой называется такая нагрузка, которая непрерывно меняет свое положение на сооружении, т. е. перемещается по нему с некоторой скоростью (например: поезд, перемещающийся по мосту; кран, движущийся по подкрановой балке).

Усилия и деформации в том или ином элементе сооружения зависят от положения подвижной нагрузки. Если предполагаемая скорость движения достаточно мала (время  $t$  в уравнение не вводим) – считаем задачу статической. Расчет таких систем значительно облегчается возможностью применения принципа независимости действия сил.

Исследование действия на сооружение подвижной нагрузки начнем с рассмотрения более простого случая, когда по сооружению движется только один вертикальный груз  $P$ , равный единице, ( $P = 1$ ). Исследуем как меняется тот или иной фактор (например: опорная реакция, изгибающий момент в определенном сечении и т. д.) при перемещении груза  $P = 1$  по сооружению.

График, показывающий закон изменения какого-либо фактора при передвижении по сооружению силы  $P = 1$ , называется линией влияния (л. в.) этого фактора. Линию влияния необходимо отличать от эпюры. Эпюры характеризуют распределение изучаемого фактора (например:  $Q$  и  $M$ ) по различным сечениям балки при неподвижной нагрузке; ординаты же линии влияния характеризуют изменение фактора ( $Q$  и  $M$ ), возникающего в одном определенном сечении при силе  $P = 1$ , перемещающейся по длине балки.

#### 3.1. Статический способ построения линий влияния

##### 3.1.1. Линии влияния в простых балках

Пусть по простой (однопролетной) балке  $AB$  перемещается груз  $P = 1$ . Построим линии влияния опорных реакций  $R_A$  и  $R_B$ .

Для построения линии влияния  $R_A$  и линии влияния  $R_B$  установим груз  $P = 1$  на расстоянии  $x$  от левой опоры и составим уравнение равновесия (рис. 36, а):

$$\sum M_B = 0, -R_A l + P(l - x) = 0;$$

$$R_A = \frac{P(l - x)}{l}.$$

Учитывая, что  $P = 1$ , получим  $R_A = \frac{(l - x)}{l}$ .



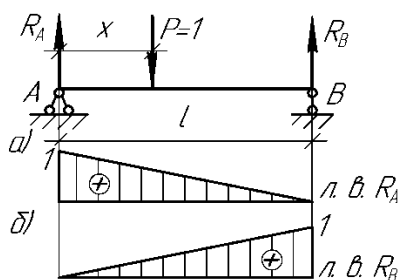


Рисунок 36

Реакция  $R_A$  является функцией положения единичной силы на балке, определяемой абсциссой  $x$ . Причем  $x$  изменяется в пределах  $0 \leq x \leq l$ .

При  $x = 0$   $R_A = \frac{l-0}{l} = 1$ ; при  $x = l$   $R_A = 0$ .

Так как полученное уравнение содержит  $x$  в первой степени, следовательно, график этого закона представляет собой прямую линию (рис. 36, а).

Из уравнения  $\sum M_A = 0$  при  $R_B l - Px = 0$  получим  $R_B = \frac{Px}{l}$ .

При  $P=1$  закон изменения реакции  $R_B$  примет вид:  $R_B = \frac{x}{l}$ . (3.1)

При  $x = 0$   $R_B = 0$ ; при  $x = l$   $R_B = 1$ .

По полученным значениям строим линию влияния  $R_B$  (рис. 36, б).

Каждая линия влияния дает представление об изменении только того фактора, для которого она построена.

### 3.1.2. Линии влияния опорных реакций для двухконсольной балки

Для построения линии влияния двухконсольной балки используем уравнения равновесия (рис. 37):

$$\sum M_B = 0, \quad R_A = \frac{l-x}{l}; \quad \sum M_A = 0, \quad R_B = \frac{x}{l},$$

т. е. получаем такие же уравнения, как и для простой балки, но  $x$  изменяется от  $(-c_1)$  до  $(l+c_2)$ .

При  $x = -c_1$   $R_A = \frac{l-(-c_1)}{l} = \frac{l+c_1}{l}$ ;  $R_B = \frac{-c_1}{l}$ ;

при  $x = 0$   $R_A = \frac{l-0}{l} = 1$ ;  $R_B = \frac{0}{l} = 0$ ;

при  $x = l$   $R_A = \frac{l-l}{l} = 0$ ;  $R_B = \frac{l}{l} = 1$ ;

при  $x = l+c_2$   $R_A = \frac{l-(l+c_2)}{l} = \frac{l-l-c_2}{l} = \frac{-c_2}{l}$ ;  $R_B = \frac{l+c_2}{l}$ .

Сравнивая линии влияния для первой (рис. 36) и второй балок (рис. 37), видим, что линия влияния любой из реакций опор консольной балки может быть получена из линии влияния для балки без консоли путем продолжения ее до пересечения с вертикалью, проходящей через конец

консоли (рис. 37). Линию влияния для одноконсольной балки строим таким же образом.

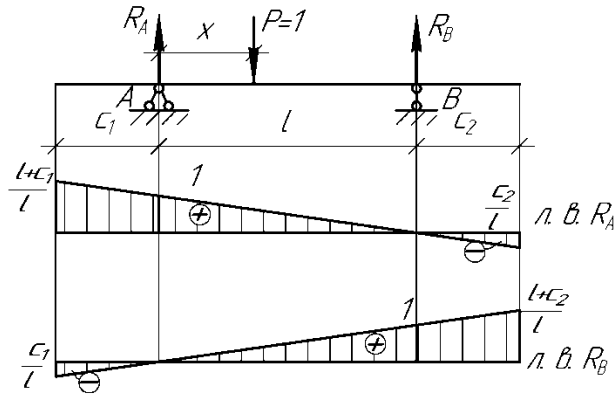


Рисунок 37

### 3.1.3. Линии влияния изгибающих моментов и поперечных сил в простых балках

Построим линию влияния поперечной силы в сечении  $C$  (рис. 38, а).

Величина и знак поперечной силы в сечении балки зависят от положения груза относительно сечения, поэтому строим линию влияния при двух положениях единичной силы.

$P=1$  движется левее сечения  $C$ , при этом  $0 \leq x \leq a$ . В равновесии рассмотрим правую часть:

$$Q_C = -R_B = -\frac{x}{l}; \quad (3.2)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } x=0 \quad Q_C = 0; \\ \text{при } x=a \quad Q_C = -\frac{a}{l} \end{array} \right\} \text{ левая ветвь л. в. } Q_C \text{ (рис. 38, б).}$$

Расположим  $P=1$  правее сечения  $C$ ,  $a \leq x \leq l$ . В равновесии рассмотрим левую часть:

$$Q_C = R_A = \frac{l-x}{l};$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } x=a \quad Q_C = \frac{l-a}{l} = \frac{b}{l}; \\ \text{при } x=l \quad Q_C = \frac{l-l}{l} = 0 \end{array} \right\} \text{ правая ветвь л. в. } Q_C \text{ (рис. 38, б).}$$

По линии влияния  $Q_C$  видим, что обе ветви параллельны друг другу

и сдвинуты одна относительно другой по вертикали на величину, равную единице. Заметим, что в точке  $C$  линия влияния  $Q_C$  имеет разрыв, причем его величина равна единице. Сумма ординат в сечении  $C$  по абсолютной величине равна:  $\frac{a}{l} + \frac{b}{l} = \frac{a+b}{l} = \frac{l}{l} = 1$ .

Пусть требуется построить линию влияния изгибающего момента в сечении  $C$  простой балки. Сечение  $C$  находится на расстоянии  $a$  от левой опоры и  $b$  – от правой (рис. 38, а).

Расположим груз  $P=1$  слева от сечения  $C$ , в равновесии рассмотрим правую часть. Изгибающий момент выразится очередным законом изменения, зависящим от координаты  $x$ , при этом  $0 \leq x \leq a$ .

$$M_C = R_B b = \frac{x}{l} b; \quad (3.3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } x=0 \quad M_C = 0; \\ \text{при } x=a \quad M_C = \frac{ab}{l} \end{array} \right\} \text{получим левую ветвь л. в. } M_C \text{ (рис. 38, в).}$$

Располагаем  $P=1$  правее сечения  $C$ , при этом  $a \leq x \leq l$ . В равновесии рассмотрим левую часть, записав изменения изгибающего момента в сечении  $C$ , получим

$$M_C = R_A a = \frac{l-x}{l} a. \quad (3.4)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } x=a \quad M_C = \frac{l-a}{l} a = \frac{ba}{l}, \\ \text{где } l-a=b; \\ \text{при } x=l \quad M_C = \frac{l-l}{l} a = 0 \end{array} \right\} \text{правая ветвь л. в. } M_C \text{ (рис. 38, в).}$$

Левая и правая ветви пересекаются под сечением  $C$ , что следует из условия единственности значения изгибающего момента при положении единичного груза над сечением:

$$M_C = \frac{x}{l} b = \frac{ab}{l} \text{ и } M_C = \frac{l-x}{l} a = \frac{l-a}{l} a = \frac{ba}{l}. \quad (3.5)$$

Линия влияния изгибающего момента в сечении  $C$  характеризует изменение этого силового фактора при движении силы по балке. Ординаты линии влияния изгибающего момента имеют размерность длины (рис. 38, в).

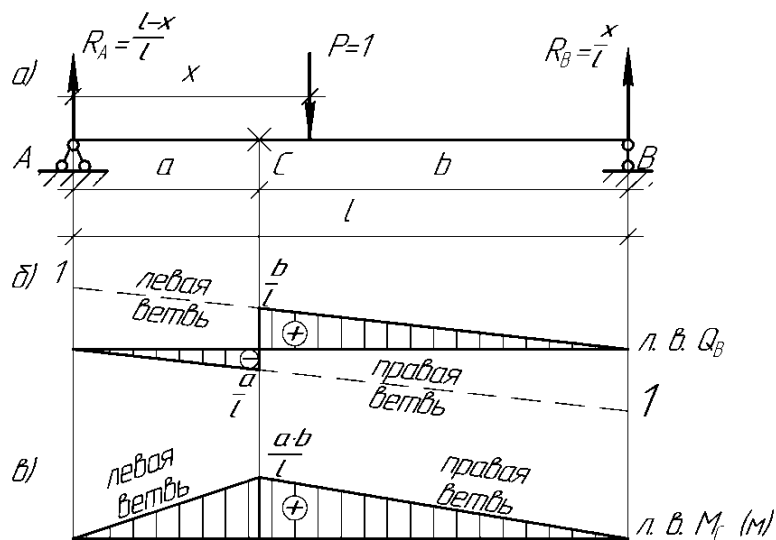


Рисунок 38

### 3.1.4. Линии влияния изгибающих моментов и поперечных сил в консольных балках

Строим линию влияния изгибающего момента и поперечной силы в сечении C двухконсольной балки (рис. 39, б, в).

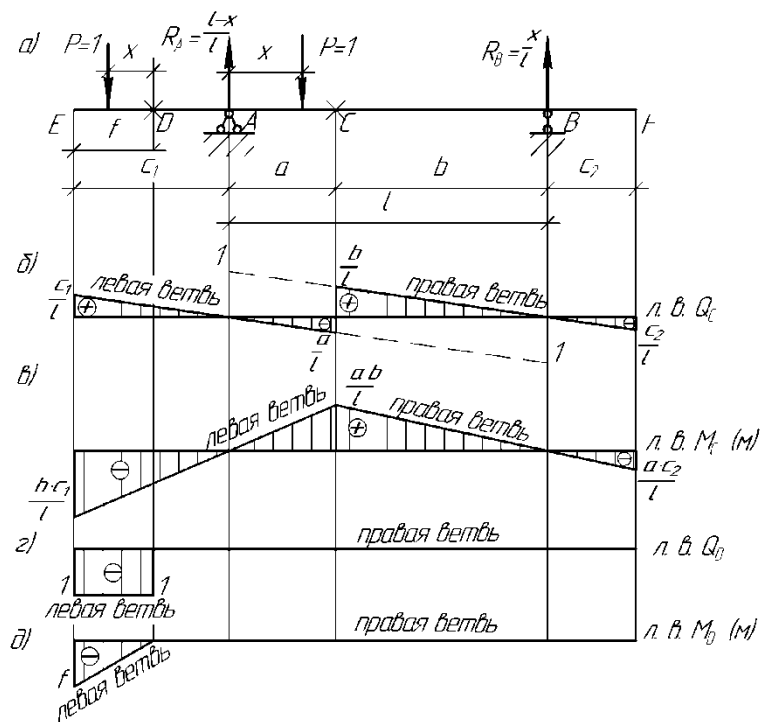


Рисунок 39

Для сечения  $C$ , расположенного между опорами, порядок построения линии влияния поперечной силы  $Q_C$  и линии влияния изгибающего момента  $M_C$  остается тот же, что и для балки без консолей, только изменяются пределы для  $x$ .

Пусть  $P=1$  движется левее сечения  $C$ ,  $-c_1 \leq x \leq a$  (рис. 39, а). В равновесии рассмотрим правую часть:

$$M_C = R_B b = \frac{x}{l} b; \quad (3.6)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } x = -c_1 \quad M_C = \frac{-c_1 b}{l}; \\ \text{при } x = 0 \quad M_C = 0; \\ \text{при } x = a \quad M_C = \frac{ab}{l} \end{array} \right\} \text{ левая ветвь л. в. } M_C.$$

$$Q_C = R_B = \frac{x}{l}; \quad (3.7)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } x = -c \quad Q_C = \frac{-c_1}{l}; \\ \text{при } x = 0 \quad Q_C = 0; \\ \text{при } x = a \quad Q_C = \frac{a}{l} \end{array} \right\} \text{ левая ветвь л. в. } Q_C.$$

Пусть  $P=1$  движется правее сечения  $C$ ,  $a \leq x \leq l + c_2$ . В равновесии рассмотрим левую часть:

$$M_C = R_A a = \frac{l-x}{l} a;$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } x = a \quad M_C = \frac{l-a}{l} a = \frac{ba}{l}; \\ \text{при } x = l \quad M_C = \frac{l-l}{l} a = 0; \\ \text{при } x = l + c_2 \quad M_C = \frac{l-(l+c_2)}{l} a = \\ = \frac{l-l-c_2}{l} a = \frac{-c_2}{l} a \end{array} \right\} \text{ правая ветвь л. в. } M_C.$$

$$Q_C = R_A = \frac{l-x}{l}; \quad (3.8)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{при } x=a \quad Q_C &= \frac{l-a}{l} = \frac{b}{l}; \\ \text{при } x=l \quad Q_C &= \frac{l-l}{l} = 0; \\ \text{при } x=l+c_2 \quad Q_C &= \frac{l-(l+c_2)}{l} = \\ &= \frac{l-l-c_2}{l} = \frac{-c_2}{l} \end{aligned} \right\} \text{ правая ветвь л. в. } Q_C.$$

Рассмотрим построение линии влияния изгибающего момента и поперечной силы в сечении  $D$ , на расстоянии  $f$  от левого конца балки (рис. 39, з, д).

Пусть  $P=1$  движется правее сечения  $D$  (от точки  $D$  до точки  $F$ ) – в равновесии левая часть:  $Q_D = 0$ ;  $M_D = 0$ . Правая ветвь линии влияния  $Q_D$  и линия влияния  $M_D$  совпадают с осью абсцисс.

$P=1$  движется левее сечения  $D$  – в равновесии левая часть. Тогда  $Q_D = -P = -1$ , а  $x$  изменяется в пределах  $0 \leq x \leq f$ .

$$M_D = -P \cdot x;$$

$$\text{при } x=0 \quad M_D = -1 \cdot x = -x = 0;$$

$$\text{при } x=f \quad M_D = -f \text{ (м)}.$$

### 3.1.5. Линии влияния усилий в балке, защемленной одним концом

Для построения линий влияния опорных реакций в защемлении предполагаем  $P=1$  на расстоянии  $x$  от опоры  $A$  (рис. 40 а), тогда

$$\sum P(y) = 0 \quad R_A - P = 0; \quad R_A = P = 1; \quad M_A = -P \cdot x = -x. \quad (3.9)$$

При этом  $0 \leq x \leq l$  (рис. 40, б, в).

$$\text{Если } x=0 \quad M_A = 0;$$

$$\text{при } x=l \quad M_A = -l \text{ (м)}.$$

Рассмотрим построение линий влияния  $Q$  и  $M$  в сечении  $C$  (рис. 40, а).

Пусть  $P=1$  движется левее сечения  $C$  – в равновесии правая часть:

$$Q_C = 0, \quad M_C = 0.$$

Левые ветви линии влияния  $Q_C$  и линии влияния  $M_C$  совпадают с осью абсцисс.

$P=1$  движется правее сечения  $C$  – в равновесии правая часть. Те-

кущая координата  $x$  изменяется от сечения  $C$  до конца консоли, т. е.  $0 \leq x \leq a$  (рис. 40,  $z$ ,  $d$ ).

$$Q_C = P=1, \quad M_C = -Px = -x; \quad (3.10)$$

при  $x = 0 \quad M_C = 0$ ;

при  $x = a \quad M_C = -a$  (м).

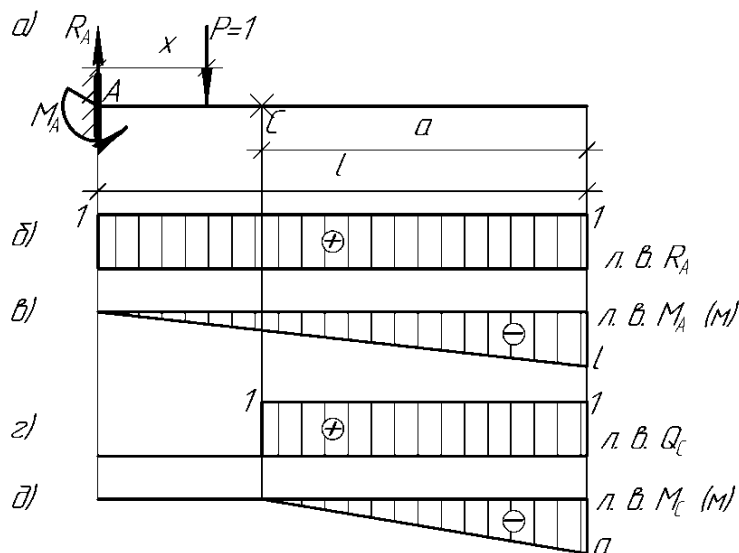


Рисунок 40

### 3.1.6. Линия влияния усилий для многопролетных шарнирных балок

Исследовав многопролетную балку (рис. 41,  $a$ ) на геометрическую неизменяемость и построив поэтажную схему (рис. 41,  $b$ ), приступаем к построению линий влияния усилий (л. в.  $R_C$ ).

Рассмотрим движение единичной силы  $P=1$  в пролете балки  $BCDE$ , тогда закон изменения левой опорной реакции определим из суммы моментов относительно правой опоры:

$$\sum M_D = 0, \quad -R_C l_2 + P(l_2 - x) = 0;$$

$$R_C = \frac{P(l_2 - x)}{l_2} = \frac{(l_2 - x)}{l_2}; \quad (3.11)$$

при этом  $x$  изменяется в пределах  $-b \leq x \leq (l_2 + c)$ .

При  $x = -b$  
$$R_C = \frac{l_2 - (-b)}{l_2} = \frac{l_2 + b}{l_2};$$

при  $x = l_2$   $R_C = 0$ ;

при  $x = l_2 + c$   $R_C = \frac{l_2 - (l_2 + c)}{l_2} = \frac{l_2 - l_2 - c}{l_2} = -\frac{c}{l_2}$ .

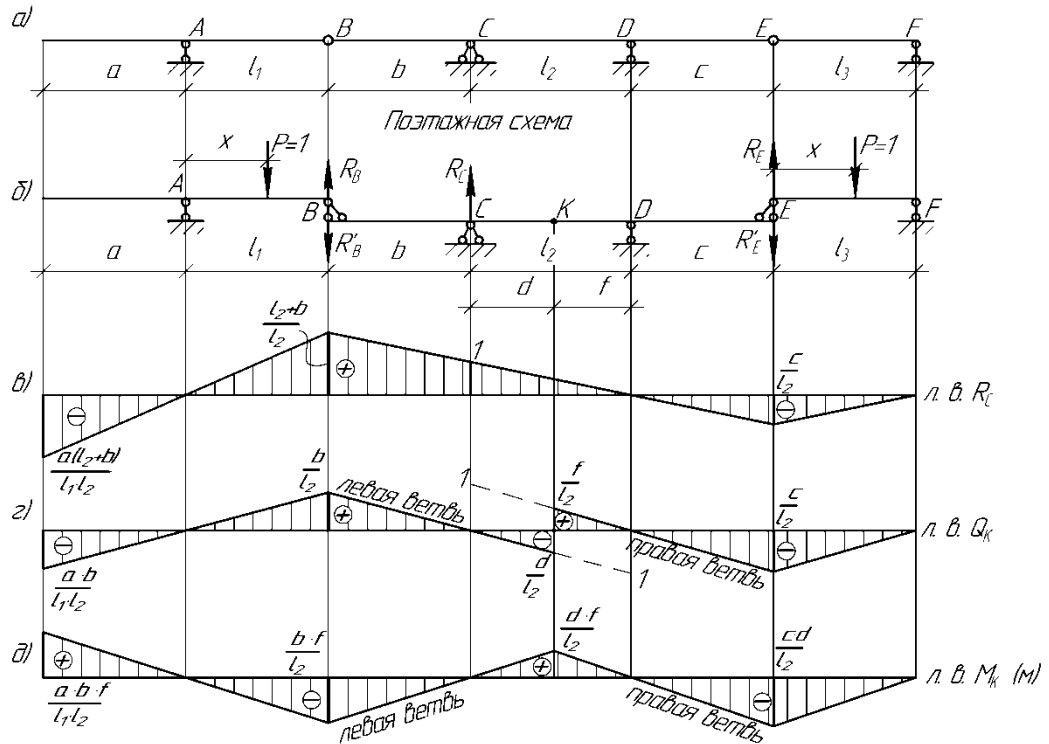


Рисунок 41

Располагаем единичную силу  $P=1$  на балке  $EF$ ,  $0 \leq x \leq l_3$ . Возникает реакция  $R_E = \frac{l_3 - x}{l_3}$ , которая передается в виде реакции давления на балку  $BCDE$ . Запишем закон изменения реакции  $R_C$  от действия  $R'_E$ :

$$\sum M_D = 0, \quad -R'_E c - R_C l_2 = 0; \quad R_C = -\frac{R'_E c}{l_2} = -\frac{(l_3 - x)c}{l_3 l_2}.$$

При  $x = 0$   $R_C = -\frac{(l_3 - 0)c}{l_3 l_2} = -\frac{c}{l_2}$ ; при  $x = l_3$   $R_C = 0$ .

Располагаем  $P=1$  на балке  $AB$ ;  $-a \leq x \leq l$ . При этом возникает реакция  $R_B = \frac{x}{l_1}$ , которая передается в виде реакции давления на балку  $BCDE$ .

Запишем закон изменения реакции  $R_C$  при движении  $P=1$  по балке  $AB$ , составив уравнение равновесия:



$$\sum M_D = 0, \quad -R_C l_2 + R'_B (l_2 + b) = 0.$$

$$R_C = \frac{R'_B (l_2 + b)}{l_2} = \frac{x(l_2 + b)}{l_1 + l_2};$$

$$\text{при } x = -a \quad R_C = \frac{-a(l_2 + b)}{l_1 l_2};$$

$$\text{при } x = 0 \quad R_C = \frac{0(l_2 + b)}{l_1 l_2} = 0;$$

$$\text{при } x = l_1 \quad R_C = \frac{l_1(l_2 + b)}{l_1 l_2} = \frac{l_2 + b}{l_2}.$$

### 3.1.7. Линии влияния поперечной силы и изгибающего момента в сечении $K$

Поскольку сечение  $K$  принадлежит балке  $BCDE$ , рассматриваем ее первой. Располагаем  $P=1$  левее сечения  $K$ ,  $-b \leq x \leq d$ ; в равновесии правая часть:

$$Q_K = -R_D = -\frac{x}{l_2}; \quad M_K = R_D f = \frac{x}{l_2} f;$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } x = -b \quad Q_K = \frac{b}{l_2}; \\ \text{при } x = 0 \quad Q_K = 0; \\ \text{при } x = d \quad Q_K = \frac{-d}{l_2} \end{array} \right\} \text{ левая ветвь л. в. } Q_K \text{ (рис. 41, з).}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } x = -b \quad M_K = \frac{-bf}{l_2}; \\ \text{при } x = 0 \quad M_K = 0; \\ \text{при } x = d \quad M_K = \frac{df}{l_2} \end{array} \right\} \text{ левая ветвь л. в. } M_K \text{ (рис. 41, д).}$$

$P=1$  движется правее сечения  $K$ ,  $d \leq x \leq (l_2 + c)$ . В равновесии левая часть:

$$Q_K = R_C = \frac{l_2 - x}{l_2}; \quad M_K = R_C d = \frac{(l_2 - x)}{l_2} d;$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } x = d \quad Q_K = \frac{l_2 - d}{l_2} = \frac{f}{l_2}; \\ \text{при } x = l_2 \quad Q_K = 0; \\ \text{при } x = l_2 + c \quad Q_K = \frac{l_2 - (l_2 + c)}{l_2} = \frac{l_2 - l_2 - c}{l_2} = -\frac{c}{l_2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{правая ветвь} \\ \text{л. в. } Q_K. \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } x = d \quad M_K = \frac{(l_2 - d)}{l_2} d = \frac{fd}{l_2}; \\ \text{при } x = l_2 \quad M_K = 0; \\ \text{при } x = l_2 + c \quad M_K = \frac{l_2 - (l_2 + c)}{l_2} d = \frac{l_2 - l_2 - c}{l_2} d = -\frac{cd}{l_2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{правая ветвь} \\ \text{л. в. } M_K. \end{array}$$

Располагаем силу  $P=1$  на балке  $AB$ ,  $-a \leq x \leq l_1$ ; возникает реакция  $R_B = \frac{x}{l_1}$ , которая передается в виде реакции давления  $R'_B$  на балку  $BCDE$ .

Запишем закон изменения реакции  $R_D$  при движении  $P=1$  по балке  $AB$ . Составим уравнение равновесия:

$$\sum M_C = 0, \quad R'_B b + R_D l_2 = 0; \quad R_D = -\frac{R'_B b}{l_2} = -\frac{xb}{l_1 l_2},$$

$$\text{тогда } Q_K = -R_D = \frac{xb}{l_1 l_2}; \quad M_K = R_D f = -\frac{xb}{l_1 l_2} f;$$

$$\text{при } x = -a \quad Q_K = \frac{-ab}{l_1 l_2} = -\frac{ab}{l_1 l_2}; \quad M_K = -\frac{-ab}{l_1 l_2} f = \frac{abf}{l_1 l_2};$$

$$\text{при } x = l_1 \quad Q_K = \frac{l_1 b}{l_1 l_2} = \frac{b}{l_2}; \quad M_K = -\frac{l_1 b}{l_1 l_2} f = -\frac{bf}{l_2}.$$

Рассмотрим движение  $P=1$  по балке  $EF$ ,  $0 \leq x \leq l_3$ . Запишем закон изменения реакции  $R_C$ , составим уравнение равновесия:

$$\sum M_D = 0, \quad R_C l_2 - R'_E c = 0;$$

$$R_C = -\frac{R'_E c}{l_2} = -\frac{(l_3 - x)c}{l_3 l_2};$$

$$\text{тогда } Q_K = R_C = -\frac{(l_3 - x)c}{l_2 l_3};$$

$$M_K = R_C d = -\frac{(l_3 - x)cd}{l_2 l_3};$$

$$\text{при } x=0 \quad Q_K = -\frac{(l_3-0)c}{l_2l_3} = -\frac{c}{l_2};$$

$$\text{при } x=l_3 \quad Q_K = 0;$$

$$\text{при } x=0 \quad M_K = -\frac{(l_3-0)cd}{l_2l_3} = -\frac{cd}{l_2};$$

$$\text{при } x=l_3 \quad M_K = 0.$$

Построения линии влияния  $R_C$ , линии влияния  $Q_K$ , линии влияния  $M_K$  показаны на рисунке 41 (в, з, д).

#### 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ С ПОМОЩЬЮ ЛИНИЙ ВЛИЯНИЯ

Ранее рассматривались вопросы, связанные с построением линий влияния. Теперь вычислим усилия (или перемещения) при помощи линий влияния.

Каждая ордината линии влияния выражает искомое влияние от груза  $P=1$ . Если на сооружение будет действовать подвижная нагрузка  $P=1$ , то ее влияние в рассматриваемом сечении, для которого построена линия влияния,  $S = Py$ . Если на сооружении стоит несколько грузов (рис 42, а), то искомое усилие в рассматриваемом сечении в соответствии с принципом независимости действия сил равно алгебраической сумме произведений величин грузов на соответствующие им ординаты линии влияния (рис. 42, б).

$$S = P_1y_1 + P_2y_2 + \dots + P_ny_n = \sum_{i=1}^{i=n} P_iy_i.$$

Значения ординат принимаем с учетом знаков.

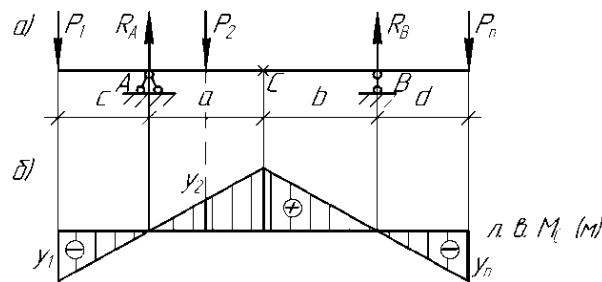


Рисунок 42

Влияние распределенной нагрузки интенсивностью  $q_{(x)} = f(x)$  можно определить, если представить распределенную нагрузку как систему бесконечного множества бесконечно малых сосредоточенных сил  $q_{(x)}dx$  (элементарное влияние) (рис. 43), как и в случае сосредоточенных сил

$$dS_{(x)} = [q_{(x)} dx] y_x.$$

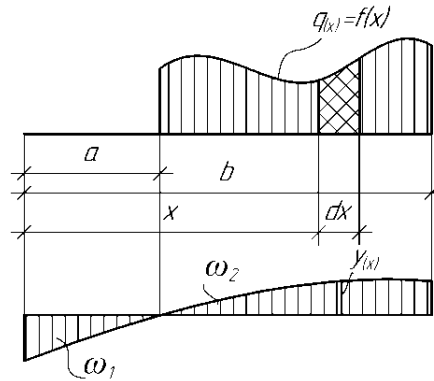


Рисунок 43

Интегрируя это выражение в пределах расположения нагрузки, получим

$$S = \int_a^b q_{(x)} y_x dx.$$

Если распределенная нагрузка действует равномерно, интенсивностью  $q_{(x)} = q = \text{const}$ , последнее выражение упрощается:

$$S = q \int_a^b y_x dx = q \omega_{ab},$$

где  $\omega_{ab}$  – площадь линии влияния на участке действия нагрузки.

Итак, для определения величины усилия от равномерно распределенной нагрузки надо найти площадь соответствующей части линии влияния этого усилия и умножить ее на интенсивность нагрузки. Если линия влияния состоит из участков разных знаков (в пределах действия нагрузки), то площадь линии влияния равна алгебраической сумме площадей отдельных участков разных знаков.

### Пример

Определить усилие  $M_C$  и  $Q_C$  по линиям влияния (рис. 44).

### Решение

$$M_C = q \omega_1 = q \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{4} \right) = \frac{ql^2}{8}.$$

$$Q_C = q \omega_2 + q \omega_3 = q (\omega_2 + \omega_3) = q \left( -\frac{l}{8} + \frac{l}{8} \right) = 0,$$

где  $\omega_2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} = -\frac{l}{8}$ ;  $\omega_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{l}{8}$ .

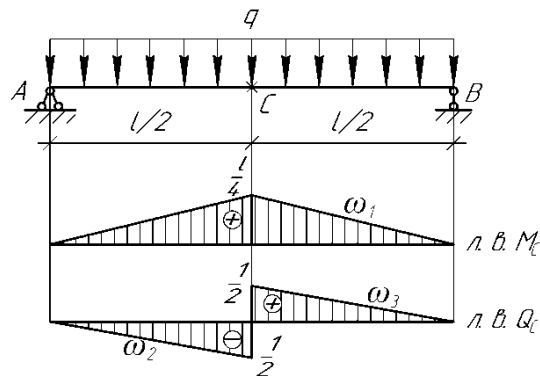


Рисунок 44

#### 4.1. Линии влияния при узловой передаче нагрузки

На практике нагрузки часто передаются на балку не непосредственно, а лишь в определенных местах посредством других балок (рис. 45, а). Это узловой способ передачи нагрузки. Участок балки между двумя соседними узлами называется панелью ( $d$ ). На величину реакций опор главной балки узловая передача нагрузки не оказывает влияние. Поэтому линия влияния  $R_A$  и линия влияния  $R_B$  те же, что и при нагрузке, приложенной непосредственно к балке (рис. 45, а, в).

Линия влияния  $M_C$  остается прежней, пока груз находится на участках  $Am$  и  $nB$ , т. е. в любом сечении за исключением панели  $mn$ , в которой расположено сечение  $C$ .

Если груз в точке  $m$ ,  $M_C = R_B(l - a)$ , если груз в точке  $n$ ,  $M_C = R_A a$ .

Если груз расположен на панели  $mn$  – линия влияния имеет другой вид. Распределяя действующую нагрузку между передаточными узлами, определим реакции в узлах (рис. 46, а):

$$P_m = P \frac{d-x}{d}; \quad P_n = P \frac{x}{d}.$$

Таким образом, вместо движущейся силы постоянной величины получаем две неподвижные силы переменной величины.

Имея линию влияния искомого усилия для главной расчетной балки, определим влияние (усилие) движущейся силы через ее составляющие:

$$S_C = P_m y_m + P_n y_n.$$

Подставим значение  $P_m$  и  $P_n$  при  $P=1$  в уравнение

$$S_C = \frac{d-x}{d} y_m + \frac{x}{d} y_n.$$

Таким образом, величина  $S_C$  при движении нагрузки между узлами  $m$  и  $n$  выражается линейной функцией  $x$ :

$$\text{при } x=0 \quad S_C = y_m; \quad \text{при } x=d \quad S_C = y_n.$$

Следовательно, искомая линия влияния – это прямая, соединяющая вершины узловых ординат  $y_m$  и  $y_n$  (рис. 46, б).

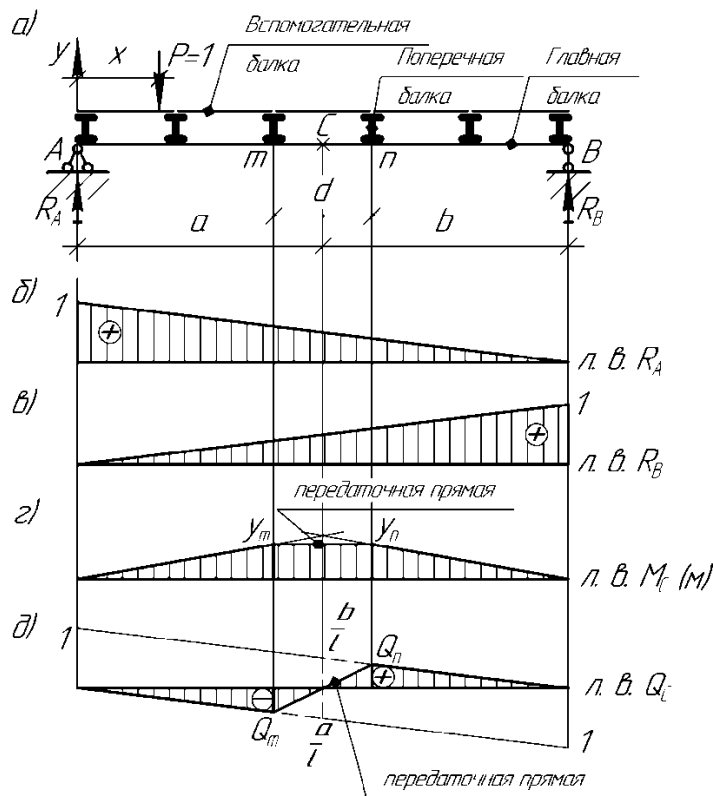


Рисунок 45

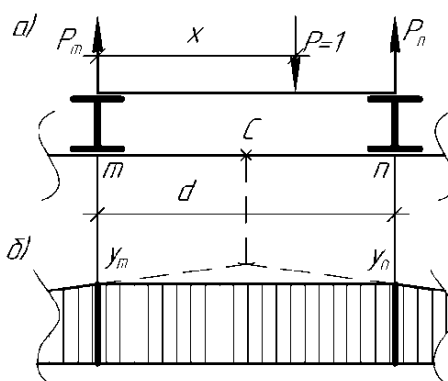


Рисунок 46

Для построения линии влияния при узловой передаче нагрузки достаточно в начальной линии влияния, построенной в предположении непосредственного действия нагрузки, найти узловые ординаты и соединить концевые точки этих ординат прямыми. Их называют передаточными прямыми (рис. 45, з, д).

#### 4.2. Свойство прямолинейного участка линии влияния

Если нагрузка расположена на прямолинейном участке линии влияния, то от замены нагрузки ее равнодействующей суммарное влияние не изменится, т. е. усилие  $S$  может быть определено, как произведение равнодействующей силы  $R$  и ординаты  $y_0$  линии влияния  $S$  под этой силой (рис. 47). Для доказательства рассмотрим загрузку балки системой сил над прямолинейным участком линии влияния.

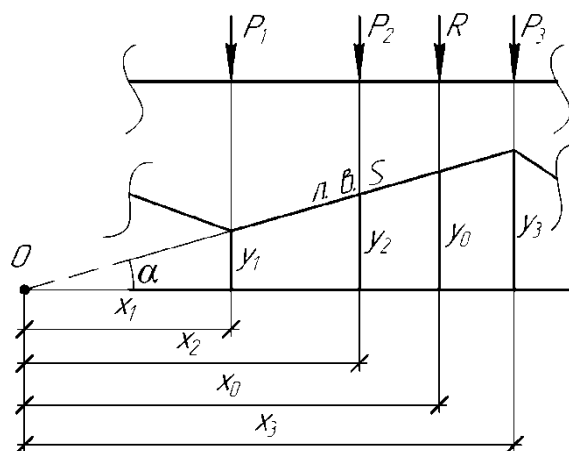


Рисунок 47

Продолжим эту прямую до пересечения ее с осью абсцисс. Расположив начало координат в точке  $O$ , можно записать:

$$S = \sum P_i y_i = P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 = P_1 x_1 \operatorname{tg} \alpha + P_2 x_2 \operatorname{tg} \alpha + P_3 x_3 \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \alpha \sum P_i x_i.$$

Как известно, сумма моментов нескольких сил равна моменту равнодействующей, таким образом:

$$\sum P_i x_i = R x_0, \text{ следовательно } S = \operatorname{tg} \alpha R x_0 = R y_0.$$

Итак, нагрузку можно заменить не только ее равнодействующей, но любой другой нагрузкой того же направления, имеющей ту же равнодействующую.

### 4.3. Определение наиболее невыгодного положения нагрузки на сооружение

Покажем, при каком расположении грузов на сооружении усилие в данном сечении принимает наибольшее значение по абсолютной величине. Такое положение является наиболее невыгодным.

При движении только одной силы усилие принимает наибольшее значение тогда, когда груз находится над наибольшей ординатой линии влияния.

При движении системы сил самое невыгодное положение грузов указать труднее, поскольку усилие изменяется по сложной зависимости. В этом случае наибольшее усилие следует искать среди тех положений системы грузов, наибольшие силы которых расположены над наибольшими ординатами. Однако это общее суждение.

Аналитический критерий для определения невыгодного положения системы сосредоточенных сил находим, используя линию влияния этого усилия. Рассмотрим полигональную линию влияния одного знака и по ней будем определять опасное положение нагрузки, состоящей из системы сил при неизменных между ними расстояниях. Рассмотрим случайное положение нагрузки, при котором ни один из грузов не расположен над какой-нибудь вершиной линии влияния (рис. 48).

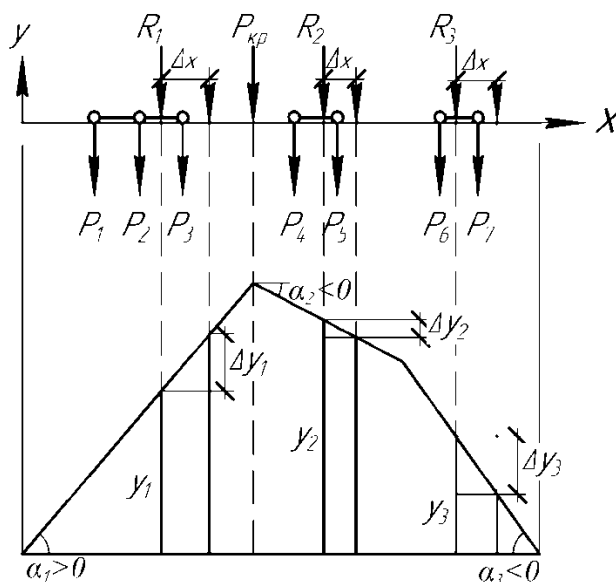


Рисунок 48

Заменим систему сосредоточенных сил над прямолинейными участками линии влияния равнодействующими  $R_1, R_2, R_3$ .

Полное усилие  $S$  можно определить по равнодействующим:

$$S = R_1 y_1 + R_2 y_2 + R_3 y_3 = \sum R_i y_i. \quad (4.1)$$



Сдвинем грузы вправо на величину  $\Delta x$ , но так, чтобы ни один из грузов не переместился на другой участок линии влияния.

В этом случае усилие получит приращение  $\Delta S$ , и величина полного усилия запишется:

$$S + \Delta S = R_1(y_1 + \Delta y_1) + R_2(y_2 - \Delta y_2) + R_3(y_3 - \Delta y_3). \quad (4.2)$$

Для второго и третьего участков имеем отрицательное приращение, т. к. ординаты линии влияния с увеличением  $x$  уменьшаются (рис. 48).

Вычитая из выражения (4.2) выражение (4.1), находим приращение полного усилия:

$$\Delta S = R_1 \Delta y_1 - R_2 \Delta y_2 - R_3 \Delta y_3. \quad (4.3)$$

Согласно рисунку 47 находим:

$$\Delta y_1 = \Delta x \operatorname{tg} \alpha_1; \quad \Delta y_2 = \Delta x \operatorname{tg} \alpha_2; \quad \Delta y_3 = \Delta x \operatorname{tg} \alpha_3.$$

Подставляем эти значения ( $\Delta y_1, \Delta y_2, \Delta y_3$ ) в выражение (4.3), получаем после вынесения  $\Delta x$  за скобки:

$$\Delta S = \Delta x (R_1 \operatorname{tg} \alpha_1 - R_2 \operatorname{tg} \alpha_2 - R_3 \operatorname{tg} \alpha_3). \quad (4.4)$$

При наличии  $n$  прямолинейных участков линии влияния будет иметь:

$$\Delta S = \Delta x \sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i. \quad (4.5)$$

Если система грузов сдвигается вправо при определении  $S_{\max}$ , ( $\Delta x$  – положительное), получаем:

$$\sum_{i=1}^n R_i \operatorname{tg} \alpha_i < 0,$$

а если влево – ( $\Delta x$  – отрицательное), следует:

$$\sum_{i=1}^n R_i \operatorname{tg} \alpha_i > 0.$$

Объединяя эти два выражения, получим критерий невыгодного положения нагрузки при определении  $S_{\max}$ .

$$\begin{cases} \Delta x > 0, \sum \vec{R}_i \operatorname{tg} \alpha_i < 0; \\ \Delta x > 0, \sum \overleftarrow{R}_i \operatorname{tg} \alpha_i > 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

При переходе через опасное сечение  $\sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i$  должна менять свой знак на обратный, что вполне соответствует условию максимума функции  $S$ , поскольку  $\sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i = \frac{\Delta S}{\Delta x}$  дает приближенное выражение первой производной от  $S$  по  $X$ .

Так как  $\operatorname{tg} \alpha_i$  – величины постоянные, то для того, чтобы, согласно формулам (4.6),  $\sum R_i \operatorname{tg} \alpha_i$  менялась по величине и знаку, необходимо, чтобы хотя бы одна из сосредоточенных сил переместилась из одного участка линии влияния на другой, побывав при этом над вершиной линии влияния.

Сосредоточенная сила, расположенная над вершиной линии влияния, которой соответствует наиболее невыгодное положение нагрузки, называется *критической силой* (рис. 48).

Задачу определения опасного положения системы грузов решают способом последовательных попыток: поставив систему грузов так, чтобы один из них находился над вершиной, смещаем влево и вправо, проверяем, выполняются ли условия максимума по формулам (4.6). Если условия выполняются, данный груз является критическим и можно определить величину максимального усилия  $S$  по формуле

$$S = \sum R_i y_i. \quad (4.7)$$

Аналогично определяем  $S_{\min}$ , используя следующие критерии невыгодного положения нагрузки:

$$\begin{cases} \Delta x > 0, \sum \vec{R}_i \operatorname{tg} \alpha_i > 0; \\ \Delta x > 0, \sum \overleftarrow{R}_i \operatorname{tg} \alpha_i < 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

Если линия влияния имеет несколько вершин, находим невыгодное положение системы грузов для каждой из них, соблюдая (4.6) и (4.8).

Из всех невыгодных положений нагрузки для расчета принимаем такое, при котором усилие будет наибольшим.

#### 4.4. Расчетное положение нагрузки на линии влияния треугольной формы

Очевидно, что в случае, когда один из грузов стоит над вершиной треугольной линии влияния, усилие  $S$  будет максимальным. Обозначим этот груз  $P_{кр}$ .

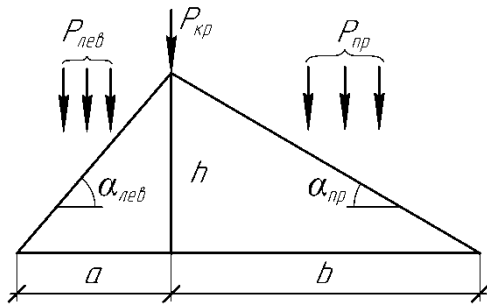


Рисунок 49

Сумма грузов, расположенных над левым участком линии влияния, —  $\sum P_{лев} = R_{лев}$ , над правым —  $\sum P_{пр} = R_{пр}$  (рис. 49).

Из приведенного выше следует, что при нагрузке, расположенной левее опасного положения сумма  $\sum P_i \operatorname{tg} \alpha_i$  положительна, а правее — отрицательна, следовательно:

$$\operatorname{tg} \alpha_{лев} (\sum P_{лев} + P_{кр}) + \operatorname{tg} \alpha_{пр} \sum P_{пр} > 0; \quad (4.9)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{лев} \sum P_{лев} + \operatorname{tg} \alpha_{пр} (\sum P_{пр} + P_{кр}) < 0. \quad (4.10)$$

Подставим в эти выражения значения  $\operatorname{tg} \alpha$ :

$$\operatorname{tg} \alpha_{лев} = \frac{h}{a}; \quad \operatorname{tg} \alpha_{пр} = -\frac{h}{b}; \quad \text{т. к. } \alpha_{пр} < 0,$$

сократим на  $h$  и получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sum P_{лев} + P_{кр}}{a} &> \frac{\sum P_{пр}}{b} \\ \frac{\sum P_{лев}}{a} &< \frac{\sum P_{пр} + P_{кр}}{b} \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

Неравенства (4.11) служат аналитическим признаком критического груза, который можно сформулировать следующим образом: от вершины, средняя погонная нагрузка левого участка превышает пиковую правого, при расположении справа от вершины — наоборот.

Эти неравенства можно представить в более простом виде, прибавив  $\frac{(\sum P_{лев} + P_{кр})}{b}$  к обеим частям первого выражения и  $\frac{\sum P_{лев}}{b}$  к обеим частям второго выражения. В этом случае получим

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\sum P_{лев} + P_{кр}}{a} + \frac{\sum P_{лев} + P_{кр}}{b} &> \frac{\sum P_{пр}}{b} + \frac{\sum P_{лев} + P_{кр}}{b}, \\ \frac{\sum P_{лев}}{a} + \frac{\sum P_{лев}}{b} &< \frac{\sum P_{пр} + P_{кр}}{b} + \frac{\sum P_{лев}}{b}. \end{aligned} \right.$$

Приводим выражение к общему знаменателю:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(\sum P_{лев} + P_{кр})b + (\sum P_{лев} + P_{кр})a}{ab} > \frac{\sum P_{пр} + \sum P_{лев} + P_{кр}}{b}, \\ \frac{(\sum P_{лев})b + (\sum P_{лев})a}{ab} < \frac{\sum P_{пр} + P_{кр} + \sum P_{лев}}{b} \end{array} \right.$$

ИЛИ

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(\sum P_{лев} + P_{кр})(a+b)}{ab} > \frac{\sum P_{пр} + \sum P_{лев} + P_{кр}}{b}, \\ \frac{\sum P_{лев}(a+b)}{ab} < \frac{\sum P_{пр} + \sum P_{лев} + P_{кр}}{b}. \end{array} \right.$$

Заменив в этих выражениях  $(a+b)$  на  $l$ , сократив на  $b$ , и обозначив сумму всех грузов  $\sum P$ , после простых преобразований получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum P_{лев} + P_{кр} > \frac{a}{l} \sum P; \\ \sum P_{лев} < \frac{a}{l} \sum P. \end{array} \right.$$

Решение, удовлетворяющее полученным неравенствам, имеет реальный смысл только в том случае, если при установке системы связанных грузов (поезда) в найденное расчетное положение ни один из его грузов не сойдет с сооружения. Если же это произойдет, то анализ необходимо провести снова, учитывая лишь те грузы, которые расположены на сооружении. В этом случае (длина поезда  $> a+b$ ) необходимо делать ряд попыток, при этом может быть найден не один  $P_{кр}$ , а несколько. Для расчета выбирается самое невыгодное положение.

#### 4.5. Огибающие эпюры изгибающих моментов и поперечных сил

При расчете балки необходимо учитывать самое опасное сечение. Для выяснения самого большого значения момента (поперечной силы) в балке строим огибающие эпюры или графики  $M_{\max}$  или  $Q_{\max}$  (рис. 50).

Порядок построения таков: строим линии влияния  $M$  и  $Q$  в ряде сечений балки, загружаем каждую линию влияния заданным поездом в его расчетном положении; вычисляем значение  $M_{\max}$  или  $Q_{\max}$  и откладываем их в масштабе. Соединив концы ординат плавной кривой, получаем огибающую эпюру  $Q_{\max}$  (рис. 50).

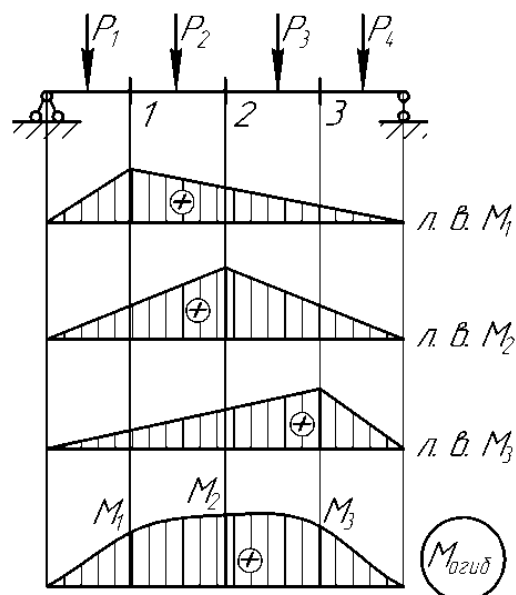


Рисунок 50

## 5. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ СПОСОБ ПОСТРОЕНИЯ ЛИНИЙ ВЛИЯНИЯ

Кинематический способ основан на применении принципа возможных перемещений. Согласно этому принципу сумма работ всех сил, действующих на находящуюся в равновесии систему, на возможно бесконечно малых перемещениях равно нулю.

Под возможными понимаем любые бесконечно малые перемещения, не нагружающие ее внутренние и внешние связи. Принцип возможных перемещений применим к кинематически изменяемой системе, которая получится, если отбросить связь, соответствующую искомой расчетной величине, и заменим ее силовым фактором.

Рассмотрим построение линии влияния опорной реакции  $R_A$  двухопорной балки (рис. 51, а).

Пренебрежем связью в точке А, т. е. опорным стержнем, и заменим его реакцией  $R_A$  (рис. 51, б).

Полученной подвижной системе зададим возможное перемещение вверх, рассматривая балку как абсолютно жесткую. Это перемещение возможно только при повороте вокруг точки В.

Согласно принципу возможных перемещений имеем:

$$R_A \delta - P y = 0, \text{ откуда } R_A = \frac{P y}{\delta}; \text{ т. к. } P=1, \text{ следовательно } R_A = \frac{y}{\delta}.$$

При других положениях груза  $P=1$  величина  $y$  изменяется, а значе-

ние  $\delta$  остается постоянным. Таким образом, реакция  $R_A$  изменяется пропорционально  $y$ , значения которого даны на эпюре перемещений, т. е. эпюра перемещений является моделью линии влияния. Для того, чтобы установить масштаб линии влияния, расположим груз  $P=1$  над опорой  $A$ . Тогда значение  $y$  будет равно  $\delta$  и, следовательно, ордината линии влияния опорной реакции в этом месте должна быть равна  $R_A = \frac{\delta}{\delta} = 1$  (рис. 51, в).

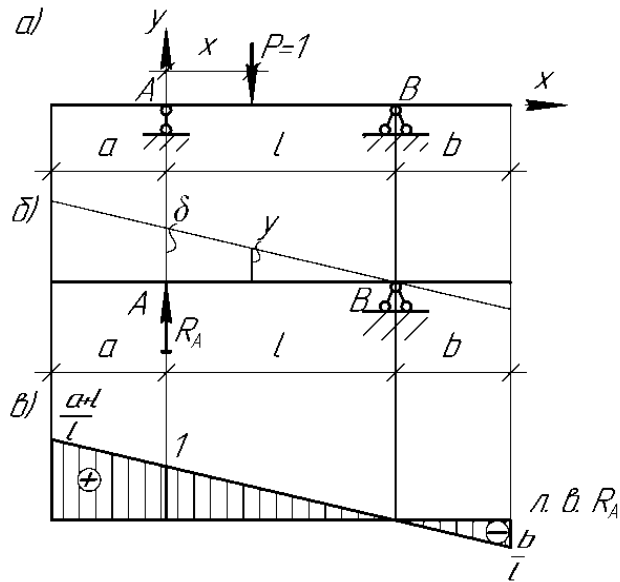


Рисунок 51

Этот способ построения линии влияния называется способом мгновенных полюсов и производится в следующем порядке:

- 1) в системе удаляется соответствующая связь и заменяется усилием;
- 2) для полученного механизма строится эпюра возможных перемещений;
- 3) определяется масштаб эпюры перемещений и знаки ординат линии влияния.

Если нужно построить линию влияния изгибающего момента  $M$  в каком-либо сечении бруса, то, чтобы нарушить связь, соответствующему моменту, в этом сечении нужно врезать шарнир, а действие нарушенной связи компенсировать приложением двух равных по величине и противоположных по направлению моментов (рис. 52, а).

При определении поперечной или осевой силы вводим ползун соответствующего типа с заменой нарушенных связей силами соответствующего направления (рис. 52, б, в).

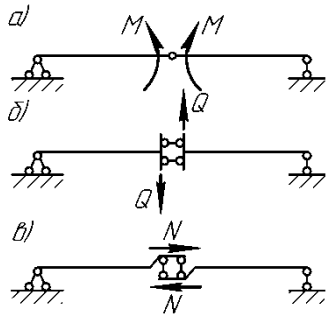


Рисунок 52

Заменяя силой действие нарушенной связи, целесообразно давать реакции положительное направление; тогда знак ответа из уравнения работ будет совпадать со знаком искомой величины.

На рисунке 52, изображены реакции положительного направления.

Рассмотрим построение линии влияния изгибающего момента в сечении  $C$ , находящемся в пролете (рис. 53, а).

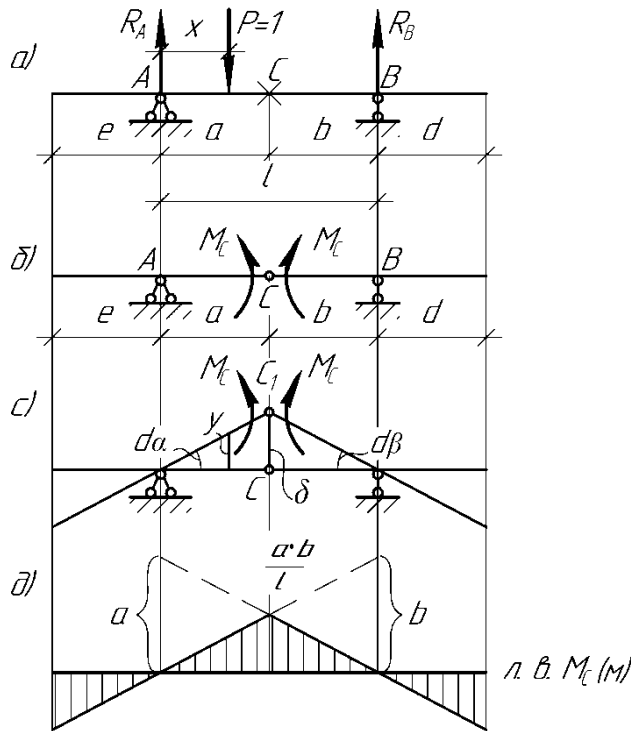


Рисунок 53

Врезаем в сечение  $C$  шарнир и заменяем нарушенную связь двумя моментами  $M_C$  (рис. 53, б). На рисунке 53, в показана эпюра возможных перемещений для полученной подвижной эквивалентной системы. Согласно такому возможному перемещению шарнир  $C$  переместится вверх на бесконечно малую величину  $\delta$ . Момент выполняет работу на угловом перемещении. Уравнение работ на возможном перемещении имеет вид:

$$M_C d\alpha + M_C d\beta - P y = 0.$$

При  $\operatorname{tg}(d\alpha) = d\alpha = \frac{\delta}{a}$  и  $d\beta = \frac{\delta}{b}$ ,

$$M_c \left( \frac{\delta}{a} + \frac{\delta}{b} \right) = y \text{ или } M_c \frac{\delta(a+b)}{ab} = y,$$

$$\text{отсюда } M_c = \frac{y}{\delta} \frac{ab}{(a+b)}.$$

Здесь  $y$  – текущая ордината эпюры перемещений, а величины  $a$ ,  $b$  и  $\delta$  остаются постоянными. Следовательно, ординаты линии влияния  $M_c$  пропорциональны ординатам эпюры перемещений. Расположим груз  $P=1$  над сечением  $C$ , тогда  $y = \delta$  и, следовательно, ордината линии влияния  $M_c$  под сечением  $C$  равна  $\frac{\delta}{\delta} \frac{ab}{(a+b)} = \frac{ab}{l}$ , т. е. получаем тот же результат, что и при построении линии влияния  $M_c$  статическим способом (рис. 53, д).

Построим линию влияния  $M_D$ , для точки, находящейся на консольной части балки, кинематическим способом (рис. 54, а).

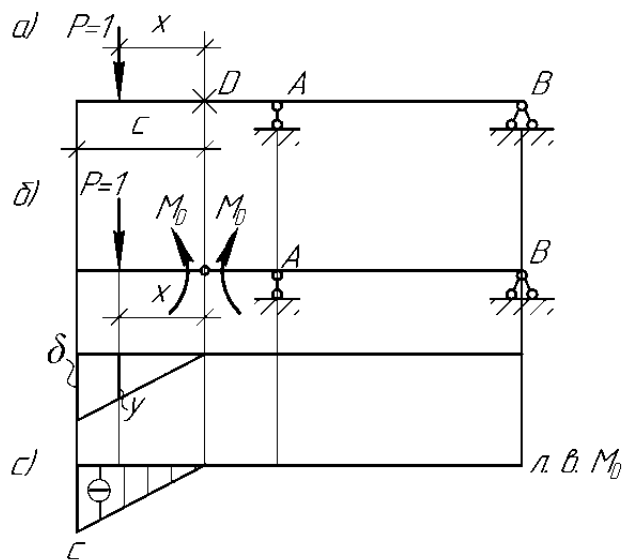


Рисунок 54

Врежем шарнир в точке  $D$  и заменим действие отброшенной связи моментом  $M_D$ . Построим эпюру возможных перемещений. Уравнение работы на возможном перемещении имеет вид:

$$M_D \frac{\delta}{c} + Py = 0; \quad M_D = -\frac{yPc}{\delta} = -\frac{cy}{\delta}.$$

Для определения масштаба линии влияния поместим груз  $P=1$  на конце консоли (рис. 54, б), тогда  $y = \delta$  и ордината линии влияния в этом



месте (рис. 54, *с*)  $M_D = -\frac{c\delta}{\delta} = -c$ .

Для построения линии влияния поперечной силы в сечении  $C$  (рис. 55, *а*), находящемся в пролете, ставим поперечный ползун и заменяем нарушенную связь двумя силами  $Q_C$  (рис. 55, *б*). Сообщим системе возможное перемещение, при котором конец одной части балки поступательно сдвигается относительно другой так, что оси обеих частей остаются параллельными друг другу и повернутыми на угол  $d\varphi$  по часовой стрелке. При этом точка  $C$  правой части балки переместится вверх на величину  $bd\varphi$ , а точка  $C$  левой части балки – на величину  $ad\varphi$  вниз.

Полное вертикальное расхождение концов точки  $C$  левой и правой частей балки равно их сумме:

$$ad\varphi + bd\varphi = d\varphi(a + b).$$

Уравнение возможных работ имеет вид (рис. 55, *с*):

$$Q_C d\varphi a + Q_C d\varphi b - Py = 0.$$

$$Q_C d\varphi(a + b) = Py.$$

$$Q_C = \frac{yP}{d\varphi(a + b)} = \frac{y}{d\varphi(a + b)}.$$

Ордината  $y$  – функция положения единичного груза, а значение  $d\varphi$ ,  $a$ ,  $b$  – постоянные величины. Поэтому ординаты  $Q_C$  пропорциональны текущей ординате эпюры перемещений. Располагая груз  $P=1$  поочередно в точке  $C$  на левой и правой частях разрезанной балки, получаем соответствующие ординаты линии влияния поперечной силы в точке  $C$  (рис. 55, *д*):

$$\text{на левой части: } \frac{d\varphi a}{d\varphi(a + b)} = \frac{a}{a + b} = \frac{a}{l};$$

$$\text{на правой части: } \frac{d\varphi b}{d\varphi(a + b)} = \frac{b}{l}.$$

Следовательно, скачок линии влияния под сечением  $C$  равен:

$$\frac{a}{l} + \frac{b}{l} = \frac{a + b}{l} = \frac{l}{l} = 1.$$

Для построения линии влияния поперечной силы в сечении  $D$  (рис. 56, *а*), находящемся на консоли, поступаем аналогично. В этом сечении ставим поперечный ползун (рис. 56, *б*) и строим эпюру возможных перемещений (рис. 56, *в*). Направляем усилия  $Q_D$ , заменяющие действие нарушенной связи, таким образом, чтобы они имели в сечении положительное направление.

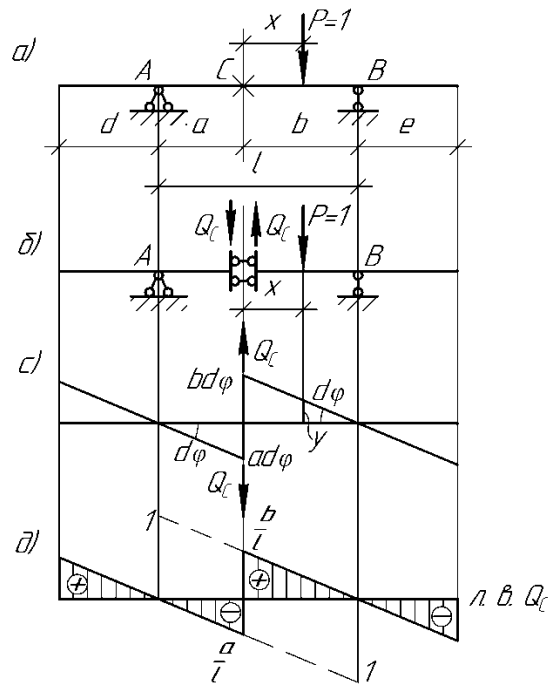


Рисунок 55

Составляем уравнение возможных работ для случая, когда груз находится слева от сечения  $D$ .

$$P\delta + Q_D\delta = 0; \quad Q_D = -\frac{P\delta}{\delta} = -\frac{\delta}{\delta} = -1.$$

При перемещении груза по остальной части балки  $Q_D = 0$  (рис. 56, з).

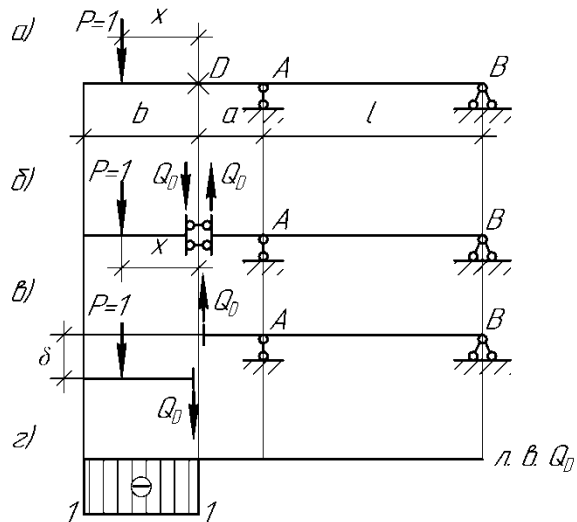


Рисунок 56

## 6. ТРЕХШАРНИРНЫЕ АРКИ И РАМЫ

Аркой называется распорная система, имеющая вид кривого бруса.

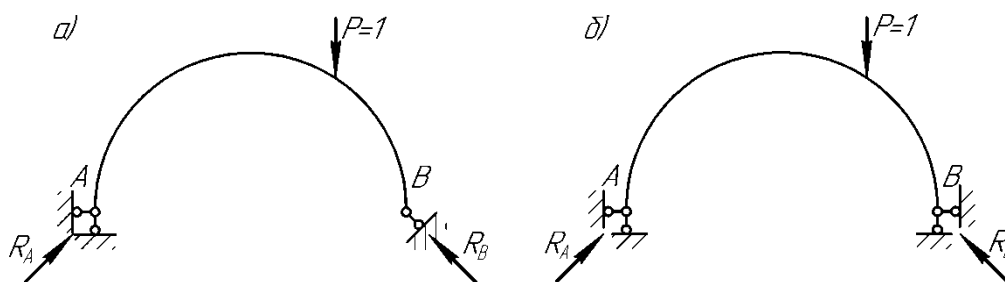


Рисунок 57

**Распорной называют систему**, у которой вертикальная нагрузка вызывает наклонные опорные реакции. В приведенных схемах арки (рис. 57, а, б) наклонность реакций обусловлена в а) конструкцией правой опоры – статически определимая система; б) статически неопределимая система. Наклонность ее реакций вызывает стремление бруса  $AB$  распрямиться под действием нагрузки: концы  $A$  и  $B$  стремятся разойтись, чему препятствуют горизонтальные слагающие опорных реакций.

На рисунке 58 представлена безраспорная система, поэтому ее необходимо рассматривать как криволинейную балку.

На (рис. 59) представлена распорная система рамного типа. Наличие распора роднит эти системы, поэтому арочные и распорно-рамные сооружения могут рассматриваться совместно.

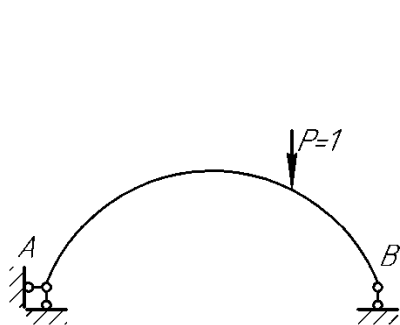


Рисунок 58

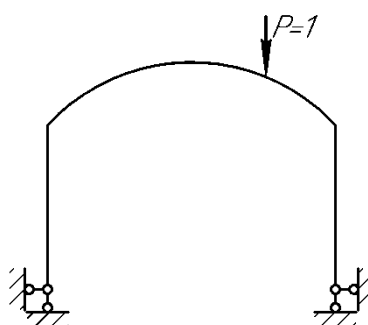


Рисунок 59

**Распорная арка и распорная рама** представляют собой статически неопределимые системы. При включении промежуточного шарнира они становятся статически определимыми.

Трехшарнирная арка или рама представляет собой геометрически неизменяемую, статически определимую систему, состоящую из двух полуарок (полурам), соединенных шарнирно с опорами и между собой. Опорные шарниры называются обычно пятовыми, а средний – ключевым (рис. 60).

Статическая определимость арки может быть доказана на основании известной формулы:

$$L = C_{on} + 2Ш - 3Д \quad \text{или} \\ W = 3Д - 2Ш - C_{on}, \quad (6.1)$$

где  $Ш = 1$  – количество простых шарниров;

$Д = 2$  – количество дисков;

$C_{on} = 4$  – количество опорных связей.

$$W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 4 = 0.$$

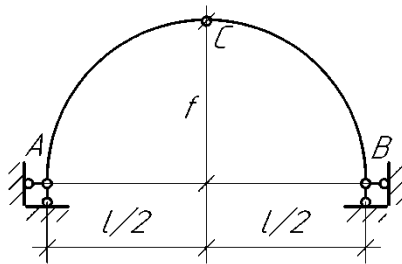


Рисунок 60

Расстояние между опорами арки называется пролетом. Расстояние  $f$  от ключевого шарнира до прямой, соединяющей опорные шарниры, – стрелой подъема арки.

Арка может быть симметричной (рис. 61) или несимметричной (рис. 62).

Несимметричная арка, опоры которой расположены на разных уровнях, иногда называется ползучей (рис. 62).

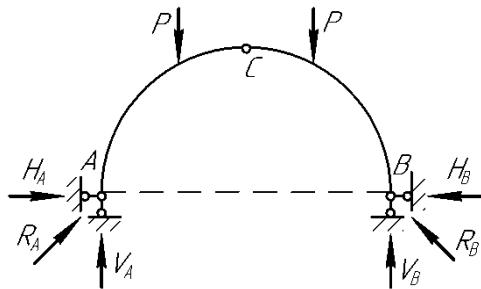


Рисунок 61

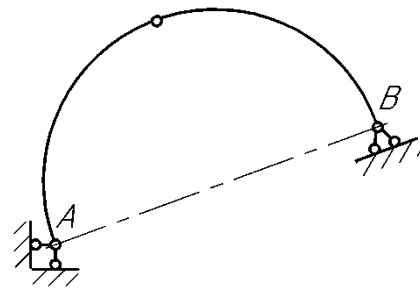


Рисунок 62

Опорные реакции трехшарнирной системы характеризуются величиной и направлением  $R_A$  и  $R_B$  или величинами горизонтальных и вертикальных составляющих:  $H_A$ ,  $V_A$ ,  $H_B$ ,  $V_B$ . Вертикальные составляющие  $V_A$  и  $V_B$  определяются из равенства нулю моментов всех сил относительно опор, а распоры  $H_A$  и  $H_B$  – относительно ключевого шарнира  $C$  для левой и правой частей полуарки.

Распор может быть устранен путем установки дополнительного стержня между опорными шарнирами. Такую систему называют арка (рама) с затяжкой (рис. 63, а, б).

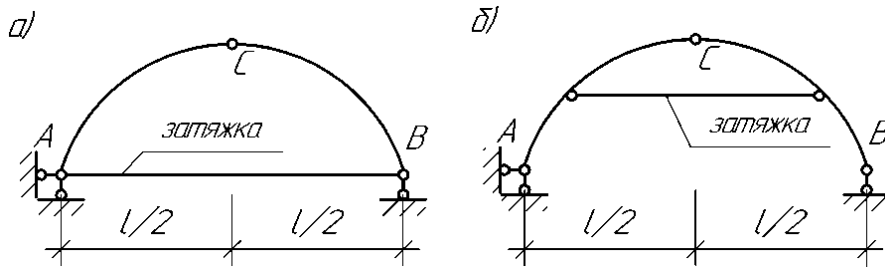


Рисунок 63

Для того, чтобы такая система осталась статически определимой, необходимо взамен добавленной затяжки удалить один из опорных стержней, т. е. точку  $B$ . Затяжка может быть расположена выше уровня опор (рис. 63, б), тогда она называется **повышенной**.

Следует отметить, что статический расчет арок состоит в определении внутренних усилий (изгибающего момента, поперечной и продольной сил), возникающих от действия заданной нагрузки при наиболее невыгодном ее расположении. По этим усилиям подбираются формы и размеры поперечных сечений арок.

Аналитический расчет арок (рам) можно выполнить аналитически и графически.

### 6.1. Аналитический способ определения опорных реакций трехшарнирной арки

Рассмотрим трехшарнирную арку с опорами на одном уровне при вертикальном расположении нагрузки (рис. 64, а).

При действии внешней нагрузки на трехшарнирную арку в каждой ее опоре возникают по две реакции; всего, таким образом, имеется четыре неизвестные реакции.

Вертикальные реакции обозначим через  $V_A$  и  $V_B$ , а горизонтальные – через  $H_A$  и  $H_B$ . Для определения этих реакций составим уравнения равновесия для всей арки в виде:

$$\sum P(x) = 0; \quad \sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0. \quad (6.2)$$

Четвертое уравнение получим, приравняв к нулю алгебраическую сумму моментов сил, действующих на левую или правую полуарку по отношению к шарниру  $C$ :

$$M_C^{лев} = 0 \quad \text{или} \quad M_C^{пр} = 0. \quad (6.3)$$

Составим уравнение равновесия:

$$\sum M_B = 0, \quad -V_A l + P_1 b_1 + P_2 b_2 + P_3 b_3 = 0; \quad (6.4)$$

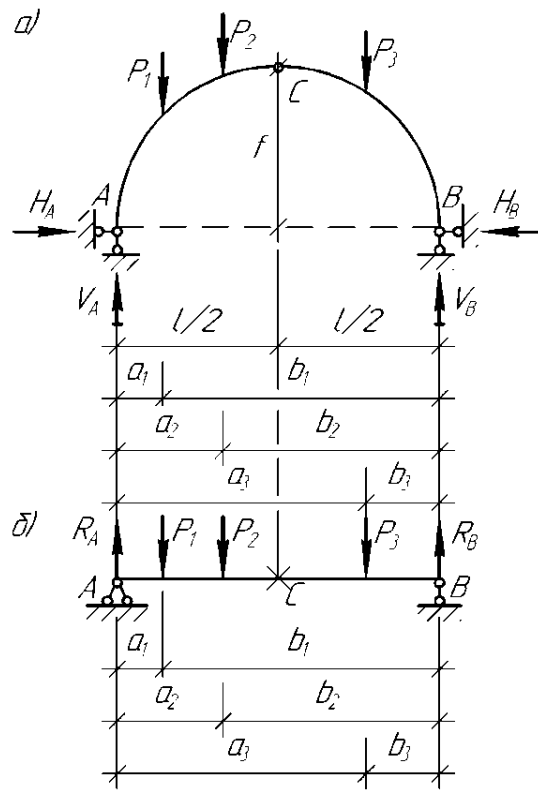


Рисунок 64

$$V_A = \frac{P_1 b_1 + P_2 b_2 + P_3 b_3}{l}; \quad (6.5)$$

$$\sum M_A = 0, \quad V_B l - P_1 a_1 - P_2 a_2 - P_3 a_3 = 0; \quad (6.6)$$

$$V_B = \frac{P_1 a_1 + P_2 a_2 + P_3 a_3}{l}. \quad (6.7)$$

Легко убедиться, что полученные значения реакций  $V_A$  и  $V_B$  ничем не отличаются от балочных опорных реакций  $R_A$  и  $R_B$ , если бы балка пролетом  $l$  была загружена той же системой сил. Кроме того значения вертикальных реакций не зависят от вида кривой, по которой очерчена ось арки, и от расположения ключевого шарнира. Из уравнения  $\sum P(x) = 0$  следует, что  $H_A - H_B = 0$ ;  $H_A = H_B = H$ , т. е. распор на обоих опорах одинаков. Направление распора внутрь арки будем считать положительным. Величины распора найдем из уравнения  $M_C^{лев} = 0$ , т. е. рассмотрим левую полуарку.

$$-V_A \frac{l}{2} + P_1 \left( \frac{l}{2} - a_1 \right) + P_2 \left( \frac{l}{2} - a_2 \right) + H_A f = 0. \quad (6.8)$$

$$H_A = \frac{V_A \frac{l}{2} - P_1 \left( \frac{l}{2} - a_1 \right) - P_2 \left( \frac{l}{2} - a_2 \right)}{f}. \quad (6.9)$$

Числитель полученного выражения представляет собой суммарный момент всех левых по отношению к шарниру  $C$  вертикальных сил.

Обозначив этот момент через  $M_C^0$ , запишем:

$$H = \frac{M_C^0}{f}. \quad (6.10)$$

Полученная формула позволяет сделать вывод, что при любой вертикальной нагрузке распор:

- а) при заданном расположении шарниров  $A$ ,  $B$ , и  $C$  зависит от формы оси арки;
- б) при заданной нагрузке зависит исключительно от расположения шарниров  $A$ ,  $B$  и  $C$ ;
- в) равняется изгибающему моменту  $M_C^0$  простой балки, разделенной на величину стрелы подъема  $f$ .

Из последнего пункта следует, что распор вырастает с увеличением момента  $M_C^0$ , а назначение распора состоит именно в уничтожении этого момента, присущего балке.

**Пример**

Определить опорные реакции в заданной арке (рис. 65), если  $P = 12$  кН;  $q = 2 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ ;  $l = 12$  м,  $f = 4$  м.

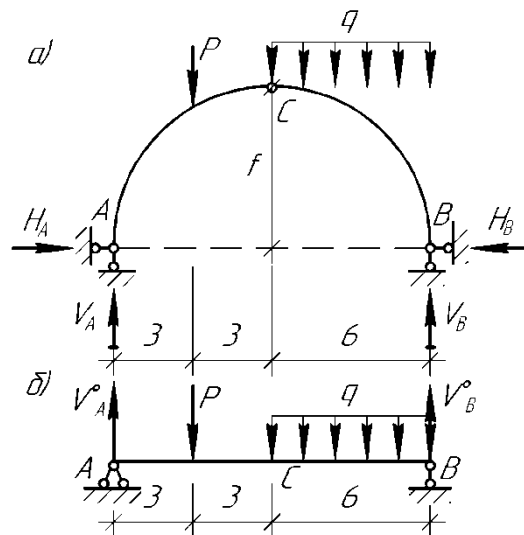


Рисунок 65

### Решение

Для определения опорных реакций  $V_A$  и  $V_B$  в арке от вертикальной нагрузки составим выражение суммы моментов относительно опор  $A$  и  $B$  в балке (рис. 65, б):

$$\begin{aligned}\sum M_A = 0; \quad V_B^0 \cdot 12 - q \cdot 6 \cdot 9 - P \cdot 3 &= 0, \\ V_B^0 &= \frac{q \cdot 6 \cdot 9 + P \cdot 3}{12} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 9 + 12 \cdot 3}{12} = 12 \text{ кН}; \\ \sum M_B = 0; \quad -V_A^0 \cdot 12 + P \cdot 9 + q \cdot 6 \cdot 3 &= 0, \\ V_A^0 &= \frac{P \cdot 9 + q \cdot 6 \cdot 3}{12} = \frac{12 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 3}{12} = 12 \text{ кН}.\end{aligned}$$

Проверка:  $\sum P(y) = 0,$

$$V_A^0 - P - q \cdot 6 + V_B^0 = 0, \quad 12 - 12 - 2 \cdot 6 + 12 = 0, \quad 24 - 24 = 0.$$

Таким образом, вертикальные реакции в арке будут равны:

$$V_A = V_A^0 = 12 \text{ кН}; \quad V_B = V_B^0 = 12 \text{ кН}.$$

Для определения числовой величины распора  $H$  приравняем к нулю сумму моментов всех сил, действующих на левую часть арки относительно шарнира  $C$ :

$$\begin{aligned}M_C^{лев} &= 0; \\ -V_A \cdot 6 + P \cdot 3 + H_A \cdot f &= 0, \\ H_A &= \frac{-P \cdot 3 + V_A \cdot 6}{f} = \frac{-12 \cdot 3 + 12 \cdot 6}{4} = \frac{36}{4} = 9 \text{ кН}.\end{aligned}$$
$$\sum P(x) = 0, \quad H_A - H_B = 0; \quad H_B = H_A = 9 \text{ кН}.$$

### Пример

Определить опорные реакции (рис. 66) от наклонной силы  $P = 10$  кН под углом  $\alpha = 30^\circ$ ,  $l = 12$  м;  $f = 4$  м;  $y_k = 3$  м;  $x_k = 3$  м.

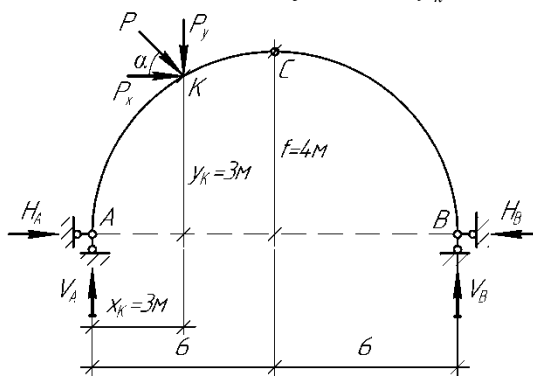


Рисунок 66



### Решение

Раскладываем силу на вертикальную и горизонтальную составляющие:

$$P_x = P \cos 30^\circ = 10 \cdot 0,866 = 8,66 \text{ кН};$$

$$P_y = P \sin 30^\circ = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ кН}.$$

Для определения вертикальной реакции  $V_A$  составим сумму моментов всех сил относительно точки  $B$ :

$$\begin{aligned} \sum M_B = 0, \quad -V_A 12 + P_y 9 - P_x 3 &= 0; \\ V_A &= \frac{P_y 9 - P_x 3}{12} = \frac{5 \cdot 9 - 8,66 \cdot 3}{12} = \frac{45 - 25,98}{12} = 1,585 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Для определения вертикальной реакции  $V_B$  составим сумму моментов всех сил относительно точки  $A$ :

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0, \quad V_B 12 - P_y 3 - P_x 3 &= 0. \\ V_B &= \frac{P_y 3 + P_x 3}{12} = \frac{5 \cdot 3 + 8,66 \cdot 3}{12} = 3,415 \text{ кН}. \end{aligned}$$

$$\text{Проверка: } \sum P(y) = 0;$$

$$V_A - P_y + V_B = 0; \quad 1,585 - 5 + 3,415 = 0; \quad 5 - 5 = 0.$$

Для определения горизонтальной реакции  $H_A$  составим выражение момента от всех сил, действующих на левую половину арки относительно шарнира  $C$ :

$$\begin{aligned} M_C^{\text{лев}} = 0; \quad P_y 3 + P_x 1 + H_A f - V_A 6 &= 0; \\ H_A &= \frac{V_A 6 - P_y 3 - P_x 1}{f} = \frac{1,585 \cdot 6 - 5 \cdot 3 - 8,66}{4} = \frac{9,51 - 15 - 8,66}{4} = -3,5375 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Знак минус указывает на то, что в данном случае сила  $H_A$  направлена влево. Для определения  $H_B$  составим сумму проекций всех сил на горизонтальную ось:

$$\begin{aligned} \sum P(x) = 0; \quad H_A + P_x - H_B &= 0; \\ H_B &= H_A + P_x = -3,5375 + 8,66 = 5,1225 \text{ кН}. \end{aligned}$$

## 6.2. Аналитический способ определения внутренних усилий в арке при произвольной нагрузке

Внутренними усилиями в арке являются: изгибающий момент  $M$ , поперечная сила  $Q$  и продольная сила  $N$ , которые определяются на осно-

вании общего метода определения внутренних усилий – метода сечений. При определении внутренних усилий и построения их эпюр используют балочное правило знаков. Исключением является сила  $N$  – она считается положительной, если вызывает сжатие арки.

Определим изгибающий момент ( $M_K$ ) рисунок 67 в произвольном сечении  $K$ , а также  $Q_K$  и  $N_K$ .

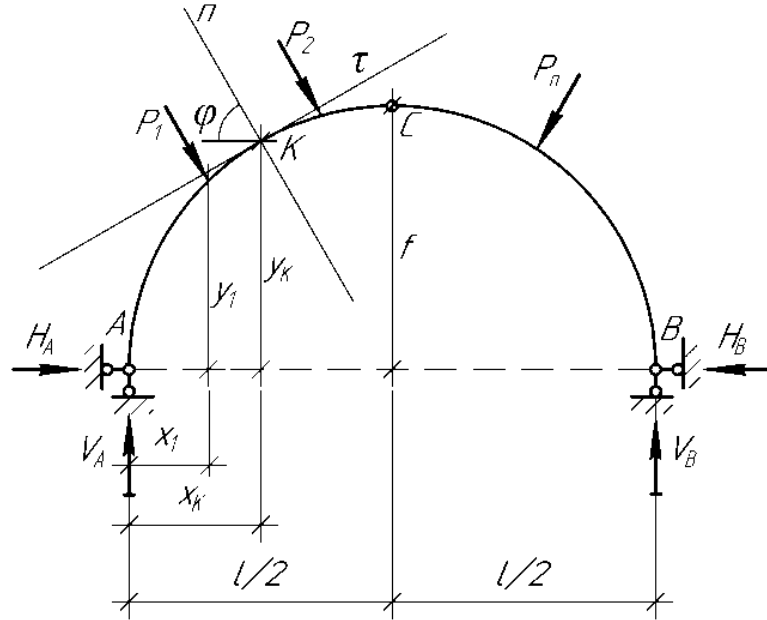


Рисунок 67

Проведем сечение, пренебрежем правой частью, рассмотрим в равновесии левую часть.

$$M_K = V_A x_k - H_A y_k - \sum P_y (x_k - x_p) - \sum P_x (y_k - y_p), \quad (6.11)$$

где  $P_x$  и  $P_y$  – горизонтальная и вертикальная составляющие сил  $P_1$ .

Под знак сумм входят лишь силы  $P$ , приложенные левее сечения  $K$ .

Поперечная сила, действующая в сечении, равна алгебраической сумме проекций всех внешних левых сил (или правых сил с обратным знаком) на нормаль к оси бруса в данном сечении.

Поперечная сила считается положительной, если сумма проекций левых сил направлена вверх от оси арки.

Определим поперечную силу в сечении  $K$ , для этого спроецируем все силы, действующие левее сечения  $K$  на нормаль.

$$Q_K = V_A \cos \varphi_k - H_A \sin \varphi_k - \sum P_y \cos \varphi_k - \sum P_x \sin \varphi_k. \quad (6.12)$$

Продольная сила, действующая в сечении, равна алгебраической сумме проекций внешних сил (правых сил с обратным знаком) на касательную к оси бруса в данном сечении. Продольную силу считают положительной, если она в сечении арки вызывает сжатие.

Определим продольную силу в сечении  $K$  арки, для этого спроецируем все силы, действующие левее сечения  $K$  на касательную.

$$N_K = V_A \sin \varphi_k + H_A \cos \varphi_k + \sum P_x \cos \varphi_k - \sum P_y \sin \varphi_k . \quad (6.13)$$

Определив указанным способом значения  $M$ ,  $Q$  и  $N$  для ряда сечений, можно строить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.

### 6.2.1. Определение внутренних усилий в арке при вертикальной нагрузке

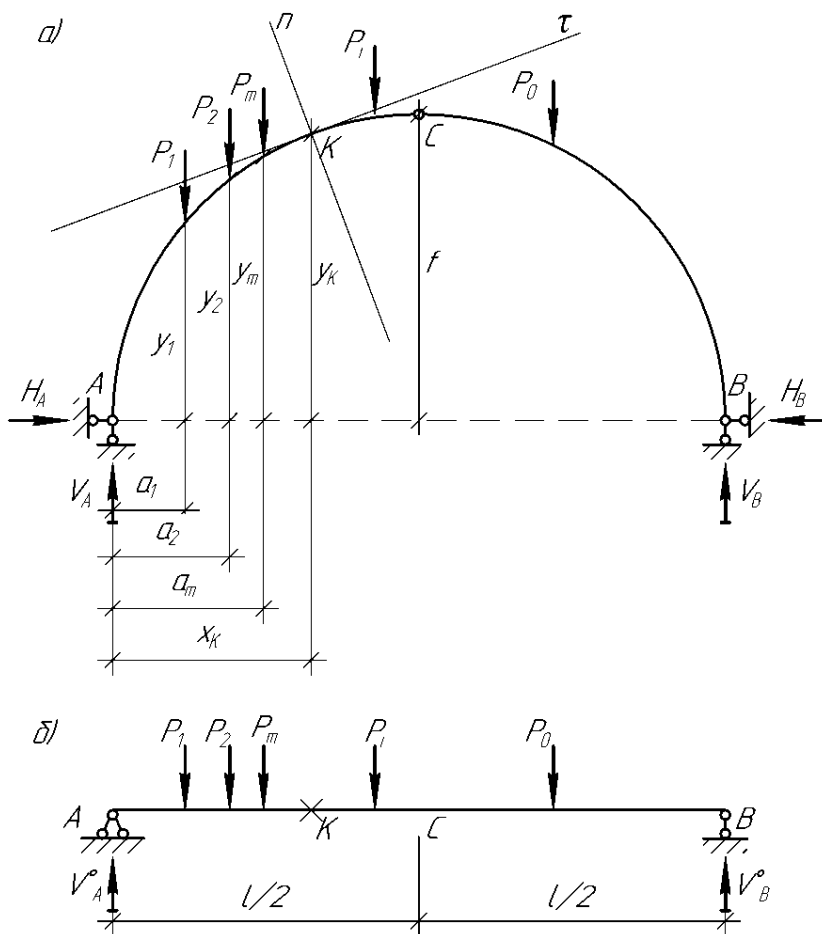


Рисунок 68

При действии на арку только вертикальной нагрузки (рис. 68, а) изгибающий момент в сечении  $K$  равен

$$M_K = V_A x_k - P_1(x_k - a_1) - P_2(x_k - a_2) - \dots - P_m(x_k - a_m) - H_A y_k$$

или

$$M_K = V_A x_k - \sum P(x_k - a) - H_A y_k. \quad (6.14)$$

Под знак суммы входят только силы  $P$ , которые приложены левее рассматриваемого сечения; следовательно, выражение  $V_A x_k - \sum P(x_k - a)$  равно изгибающему моменту  $M_K^0$  в простой двухопорной балке в том же сечении  $K$ . Таким образом,

$$M_K = M_K^0 - H_A y_k; \quad (6.15)$$

т. к.  $H_A = H$ , следовательно

$$M_K = M_K^0 - H y_k. \quad (6.16)$$

Этой формулой удобно пользоваться при построении эпюр моментов в арке, работающей на вертикальную нагрузку. Значения  $M_K^0$  берем из эпюры моментов, построенной для балки (рис. 68, б). Распор  $H$  находим предварительно по формуле

$$H = \frac{M_C^0}{f}.$$

Заметим, что приведенная формула для  $M_K$  наглядно показывает уменьшение изгибающего момента в арке по сравнению с балкой, что подтверждает экономичность арочной конструкции по сравнению с балочной.

Аналогичные формулы можно получить для  $Q_K$  и  $N_K$ . Для этой цели спроецируем все приложенные слева силы на нормаль к оси арки, а затем на касательную к ней в заданном сечении.

$$Q_K = (V_A - \sum P) \cos \varphi_k - H \sin \varphi_k; \quad (6.17)$$

$$N_K = (V_A - \sum P) \sin \varphi_k + H \cos \varphi_k. \quad (6.18)$$

В этих формулах  $\sum P$  – сумма всех сил, приложенных левее данного сечения. Величина  $(V_A - \sum P)$  представляет собой поперечную силу  $Q_K^0$  в сечении  $K$  балки (рис. 68, б). Поэтому формулы приобретают следующий вид:

$$Q_K = Q_K^0 \cos \varphi_k - H \sin \varphi_k; \quad (6.19)$$

$$N_K = Q_K^0 \sin \varphi_k + H \cos \varphi_k. \quad (6.20)$$

**Пример**

В сечении  $K$  арки определить значения  $M_K$ ,  $Q_K$ ,  $N_K$ , если  $q = 2 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ ,  
 $P = 12 \text{ кН}$ ,  $l = 12 \text{ м}$ ,  $f = 4 \text{ м}$ .

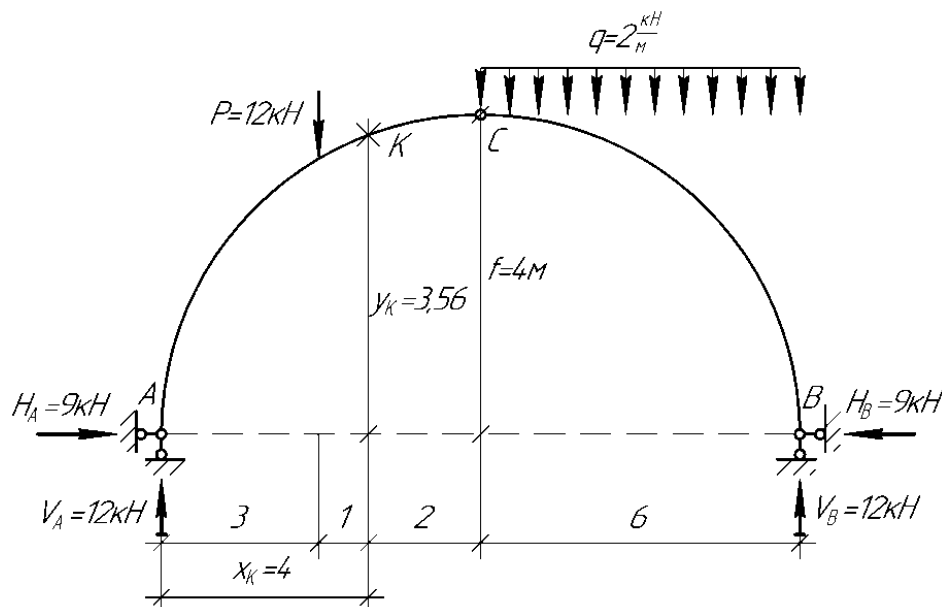


Рисунок 69

**Решение**

Ось арки очерчена по параболе (рис. 69), уравнение которой:

$$y = \frac{4f}{l^2}(l-x)x, \quad (6.21)$$

где  $x = 4 \text{ м}$ ;  $l = 12 \text{ м}$ ;  $y_k = \frac{4 \cdot 4}{12^2}(12-4) \cdot 4 = 3,56 \text{ м}$ .

Тангенс угла наклона касательной в точке  $K$  к горизонту определяем как первую производную от  $y$  по  $x$ :

$$y' = \text{tg } \varphi = \frac{4f}{l^2}(l-2x) = \frac{4 \cdot 4}{12^2}(12-2 \cdot 4) = 0,444, \quad (6.22)$$

Значения  $\sin \varphi_k$  и  $\cos \varphi_k$ , необходимые для вычисления  $Q_K$  и  $N_K$ , в сечении можно определить на основании известных тригонометрических зависимостей:

$$\cos \varphi_k = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{tg}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0,444^2}} = \frac{1}{1,094} = 0,9141; \quad (6.23)$$

$$\sin \varphi_k = \cos \varphi_k \text{tg } \varphi_k = 0,9141 \cdot 0,444 = 0,4059. \quad (6.24)$$

Изгибающий момент в сечении  $K$  определяем по формуле

$$M_K = M_K^0 - H y_k, \quad (6.25)$$

где  $M_K^0$  определяем, как момент в простой балке:

$$M_K^0 = V_A x_k - P(x_k - 3) = 12 \cdot 4 - 12(4 - 3) = 48 - 12 = 36 \text{ кНм}. \quad (6.26)$$

Следовательно:  $M_K = 36 - 9 \cdot 3,56 = 3,96 \text{ кНм}$ .

Поперечная сила равна

$$Q_K = Q_K^0 \cos \varphi_k - H \sin \varphi_k, \quad (6.27)$$

где  $Q_K^0 = V_A - P = 12 - 12 = 0$ ;

$$Q_K = -H \sin \varphi_k = -9 \cdot 0,4059 = -3,65 \text{ кН}. \quad (6.28)$$

Продольная сила:

$$N_K = Q_K^0 \sin \varphi_k + H \cos \varphi_k, \quad (6.29)$$

где  $Q_K^0 = V_A - P = 12 - 12 = 0$ , тогда

$$N_K = H \cos \varphi_k = 9 \cdot 0,9141 = 8,23 \text{ кН}. \quad (6.30)$$

Ответ:  $M_K = 3,96 \text{ кНм}$ ;  $Q_K = -3,65 \text{ кН}$ ;  $N_K = 8,23 \text{ кН}$ .

Определив по приведенным выше зависимостям  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  для различных сечений арки, можно построить эпюры внутренних усилий.

## 7. ГРАФИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ ТРЕХШАРНИРНЫХ АРОК

Усилия в арке при произвольном направлении внешней нагрузки и произвольном очертании оси удобно определять графическим способом.

Прежде чем приступить непосредственно к теме, необходимо вспомнить некоторые элементы графической статики.

Сложение двух сил (рис. 70) можно осуществлять по правилу параллелограмма (рис. 70, а) или построением силового многоугольника (рис. 70, б):

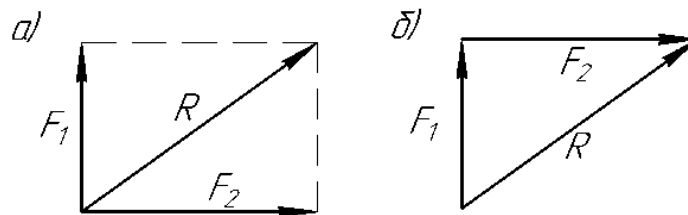


Рисунок 70

Сложение системы сил (рис. 71) можно осуществить путем построения силового многоугольника.

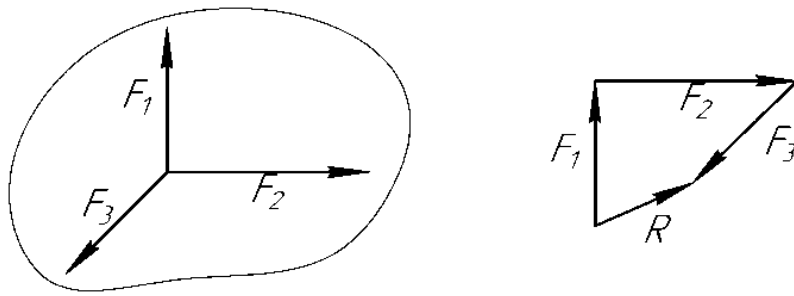


Рисунок 71

Любую систему сил можно заменить равнодействующей (рис. 72), величина (модуль) и направление которой определяются из силового многоугольника, а точка приложения – с помощью веревочного.

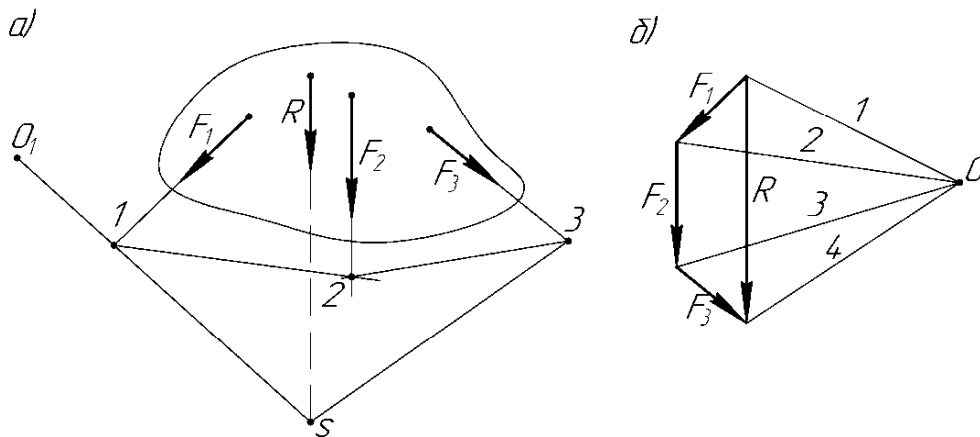


Рисунок 72

Построение силового многоугольника выполняется в следующей последовательности:

- а) откладываем в заданном масштабе силы  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ , не меняя направление, т. е. параллельно, из произвольной точки (рис. 72, б);
- б) соединив начало первой силы с концом последней, получаем величину и направление равнодействующей  $R$ ;
- в) выбираем произвольный полюс  $O$ , проведем из него к началу и концу каждой силы лучи 1, 2, 3, 4;
- г) строим веревочный многоугольник на линиях действия сил  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ . Для чего сторону 1 веревочного многоугольника проводим параллельно лучу 1 до пересечения с линией действия силы  $F_1$ . Из этой точки пересечения параллельно лучу 2 проводим сторону 2 веревочного многоугольника до пересечения с линией действия силы  $F_2$ . Через полученную точку пересечения проводим прямую, параллельную лучу 3, до пересече-

ния с линией действия силы  $F_3$  (точка 3). Через точку 3 проводим прямую, параллельную лучу 4. Продолжив до взаимного пересечения первую и последнюю стороны веревочного многоугольника, получим точку  $S$ , через которую проходит линия действия равнодействующей  $R$  (рис. 72, а).

### 7.1. Определение реакций опор в трехшарнирной арке

Пусть на одну полуарку действует сила  $F_1$  (рис. 73, а). Из условия равновесия незагруженной полуарки  $CB$ , находящейся под действием сил: реакции опоры  $B$  и силы, передаваемой через ключевой шарнир  $C$  от левой полуарки, следует, что эти силы равны между собой и направлены в противоположные стороны вдоль линии  $CB$ . Для равновесия трех сил необходимо, чтобы они пересекались в одной точке – этим определяется направление  $R_A$ .

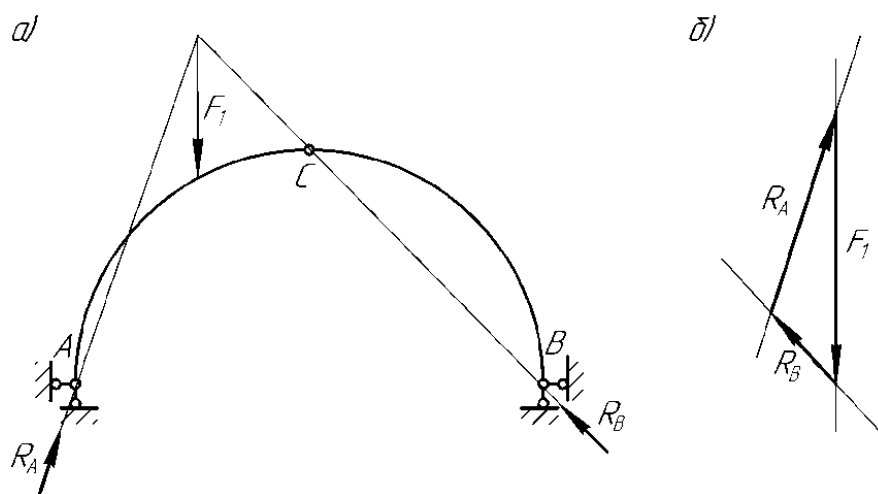


Рисунок 73

Величины обеих реакций находим из силового многоугольника (рис. 73, а). При этом построении предварительно определять распор не нужно.

Если полуарка загружена системой сил, то при помощи веревочного многоугольника находим точку приложения равнодействующей, после чего находим реакции опор этой равнодействующей, как от одной силы.

Если нагрузка расположена на обеих полуарках (рис. 74, а) то, применяя принцип независимости действия сил, определяем отдельно силы реакции, вызываемые загрузением одной полуарки, и реакции, вызываемые загрузением другой. После чего полученные составляющие геометрически складываем. Сила  $R_{л}$  вызывает реакции  $A_1$  и  $B_1$ , а сила  $R_{np}$  –  $A_2$  и  $B_2$ . В этом случае  $R_A$  – геометрическая сумма реакций  $A_1$  и  $A_2$ ;  $R_B$  – геометрическая сумма реакций  $B_1$  и  $B_2$  (рис. 74, б).



Спроецировав  $R_A$  на оси  $x$  и  $y$ , получим величины и направление  $V_A$  и  $H_A$ ; а спроецировав  $R_B - V_B$  и  $H_B$  (рис. 74, б).

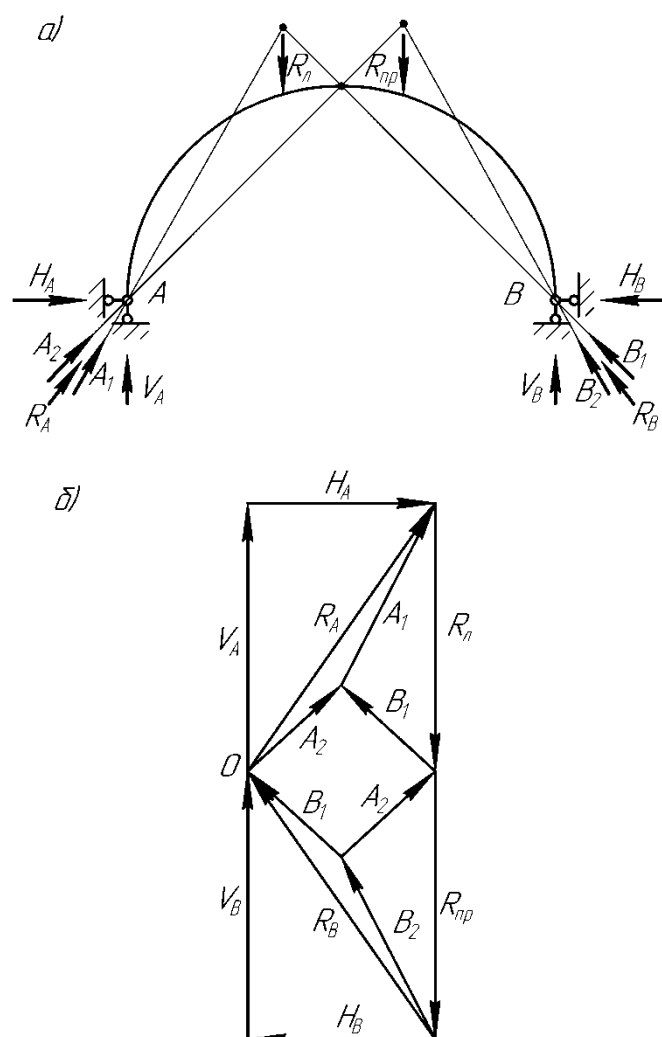


Рисунок 74

## 7.2. Определение внутренних усилий. Многоугольник давления

Графическое определение внутренних усилий  $Q$ ,  $M$ ,  $N$  в поперечных сечениях трехшарнирной арки производится путем построения многоугольника давления.

Рассмотрим трехшарнирную арку, нагруженную силами  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  (рис. 75, а). Решение начнем с определения опорных реакций. При определении реакций используем вышеуказанный способ с применением принципа независимости действия сил. Для этого силы, расположенные на каждой полуарке, сведем к их равнодействующей. Поочередно для каждой по-

луарки найдем  $A_1$  и  $B_1$  и  $A_2$  и  $B_2$ . Путем геометрического сложения  $A_1$  и  $A_2$  найдем  $R_A$ , а путем сложения  $B_1$  и  $B_2$  —  $R_B$ . Для наглядности вынесем силовой многоугольник, приняв точку  $O_1$  за полюс и проведем из нее лучи к началу и к концу каждой силы построим на арке веревочный многоугольник. Первую его сторону проводим параллельно лучу I через шарнир  $A$  до пересечения с линией действия силы  $P_1$ . Из полученной точки пересечения, параллельно лучу II, проводим вторую сторону веревочного многоугольника до пересечения с линией действия силы  $P_2$  и т. д.

Необходимо иметь в виду, что построенный таким образом веревочный многоугольник обязательно должен пройти через центры шарниров  $A, B, C$  (рис. 75, *a*).

Так как лучи I–IV силового многоугольника представляют собой равнодействующие всех сил, действующих по одну сторону от сечения, а одноименные стороны веревочного многоугольника являются линиями действия этих равнодействующих, то такой многоугольник принято называть многоугольником давления.

Известно, что алгебраическая сумма проекций плоской системы сил на какую-либо ось равна проекции равнодействующей этих сил на ту же ось. На основании этого при определении поперечной ( $Q_K$ ) и продольной ( $N$ ) сил в сечении арки графическим способом проецируем на соответствующие оси равнодействующую внешних сил, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения. Чтобы найти значение поперечной и продольной сил в сечении  $K$ , через точку  $O$  проводим касательную и нормаль под углом  $\varphi_k$  к горизонтали (рис. 75, *б*). Спроецируем луч I на эти оси, получим  $Q_K$  и  $N_K$ . Измерив найденные величины в масштабе сил, получим их числовые значения. Поперечная сила  $Q_K$  отрицательная, т. к. стремится вращать левую от сечения часть арки против часовой стрелки. Продольная сила  $N_K$  положительная, т. к. проекция равнодействующей на касательную направлена в сторону сечения (вызывает в сечении сжатие).

Для определения изгибающего момента в сечении  $K$  на линию действия равнодействующих опускаем перпендикуляр, получаем плечо этой силы. Произведение равнодействующей, взятой в масштабе сил из многоугольника давления, на ее плечо, измеренное в масштабе длин, дает значение изгибающего момента в сечении  $K$ . Изгибающий момент отрицательный, т. к. вызывает растяжение верхних волокон.

При вертикальных нагрузках, действующих на арку, изгибающий момент можно определить как произведение распора на отрезок ординаты, заключенной между осью арки и линией давления (отрезок  $y_c$ ) (рис. 75, *a*).

$$M_K = H y_c. \quad (7.1)$$

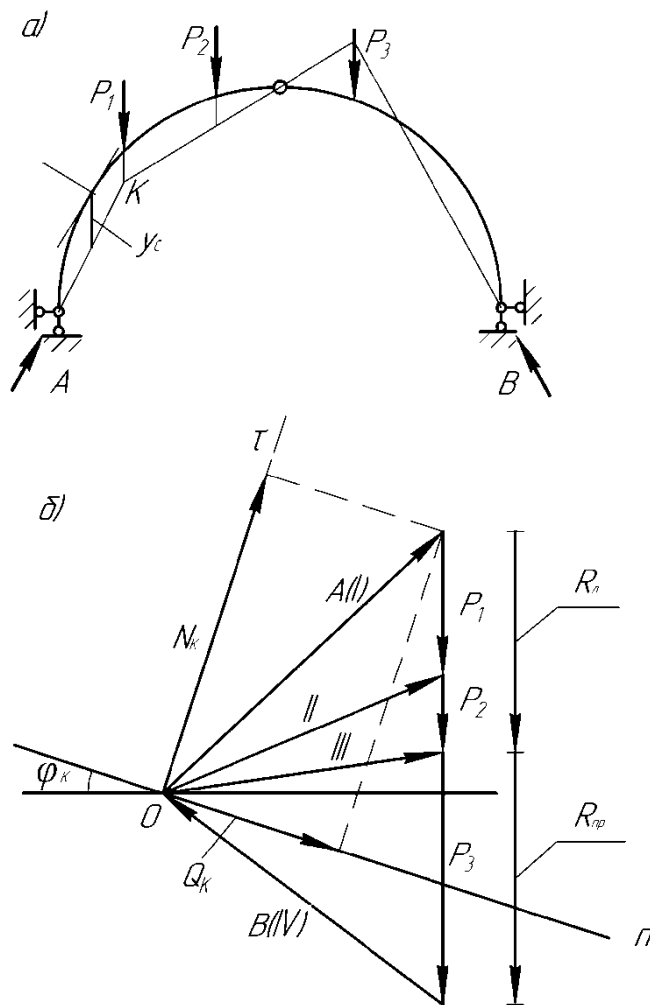


Рисунок 75

## 8. РАСЧЕТ ТРЕХШАРНИРНЫХ АРОК НА ПОДВИЖНУЮ НАГРУЗКУ

### 8.1. Линии влияния опорных реакций

Расположим на трехшарнирной арке вертикальную силу  $P=1$  на расстоянии  $x$  от левой опоры и составим уравнение моментов всех сил относительно опорных шарниров (рис. 76, а).

$$\sum M_A = 0; V_B l - Px = 0, V_B = \frac{Px}{l} = \frac{x}{l}; \quad (8.1)$$

$$\sum M_B = 0; -V_A l + P(l-x) = 0, V_A = \frac{P(l-x)}{l} = \frac{l-x}{l}.$$

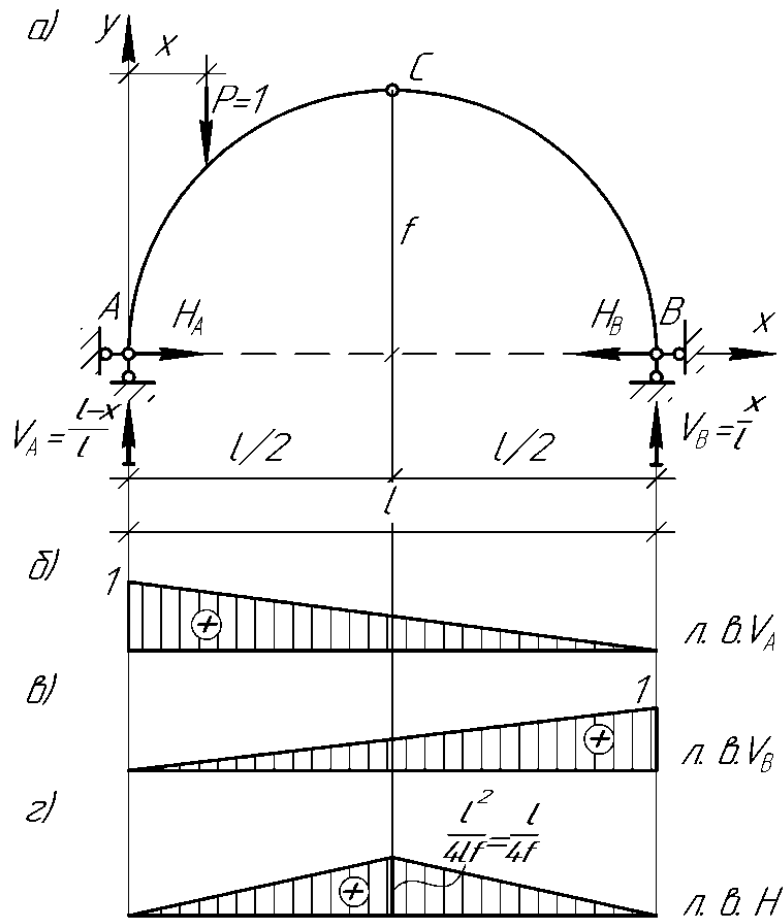


Рисунок 76

Эти выражения совпадают с выражениями для балочных реакций опор. Следовательно, линии влияния для них тоже будут такими же, как и линии влияния реакций простой балки (рис. 76, б, в). Для построения линии влияния распора воспользуемся выражением:

$$H = \frac{M_C^0}{f}. \quad (8.2)$$

Из этого выражения следует, что линия влияния распора имеет такой же характер, как и линия влияния в  $M_C^0$ , только все ординаты ее должны быть уменьшены в  $f$  раз. Получим линию влияния распора  $H$  в виде треугольника с вершиной под ключевым шарниром  $C$  и с координатой в

вершине  $\frac{\frac{l}{2} \frac{l}{2}}{lf} = \frac{l^2}{4lf} = \frac{l}{4f}$  (рис. 76, г).

## 8.2. Линии влияния внутренних усилий

В произвольном сечении  $K$  (рис. 77,  $\kappa$ ) с координатами  $x = x_k$ ;  $y = y_k$  при произвольном положении груза определим момент по формуле

$$M_K = M_K^0 - H y_k. \quad (8.3)$$

Первый член представляет собой линию влияния изгибающего момента в том же сечении простой балки пролета  $l$  (рис. 77,  $\delta$ ). Второй член уравнения выражает линию влияния  $H$ , перестроенную путем умножения всех ее ординат на постоянный множитель  $y_k$  (рис. 77,  $\epsilon$ ).

Из подобия треугольников определим ординаты линий влияния в характерных точках. Выполнив алгебраическое сложение ординат двух линий влияния, построим линию влияния  $M_K$ .

Ординаты линии влияния  $Q_K$  выражаются уравнением

$$Q_K = Q_K^0 \cos \varphi_k - H \sin \varphi_k, \quad (8.4)$$

где  $Q_K^0$  – поперечная сила в сечении  $K$  простой балки с пролетом  $l$ .

Уравнение показывает, что искомая линия влияния строится путем алгебраического сложения двух линий влияния:  $Q_K^0$  – все ординаты которой умножены на постоянный множитель  $\cos \varphi_k$  (рис. 77,  $\delta$ ) и  $H$  – все ординаты которой умножены на постоянное число  $\sin \varphi_k$  (рис. 77,  $\epsilon$ ).

Уравнение линии влияния продольной силы имеет вид:

$$N_K = Q_K^0 \sin \varphi_k + H \cos \varphi_k. \quad (8.5)$$

Эта линия влияния также строится путем алгебраического суммирования двух линий влияния:  $Q_K^0 \sin \varphi_k$  (рис. 77,  $\epsilon$ ) и  $H \cos \varphi_k$  (рис. 77,  $\delta$ ).

Приведенные на рисунке 77 линии влияния усилий трехшарнирной арки показывают существенное отличие ее работы от балки. Так, ординаты линии влияния  $M_K$  меньше ординат линии влияния  $M_K^0$ .

Линия влияния  $M_K$  (рис. 77,  $\epsilon$ ) двузначна и имеет между опорами нулевую точку. Линия влияния  $Q_K$  (рис. 77,  $\delta$ ) имеет также значительно меньшие ординаты, чем линия влияния  $Q_K^0$ . Кроме того, в отличие от балки появилась линия влияния  $N_K$  (рис. 77,  $\kappa$ ), причем ее ординаты значительны и в промежутке между опорами имеют постоянный знак сжатия.

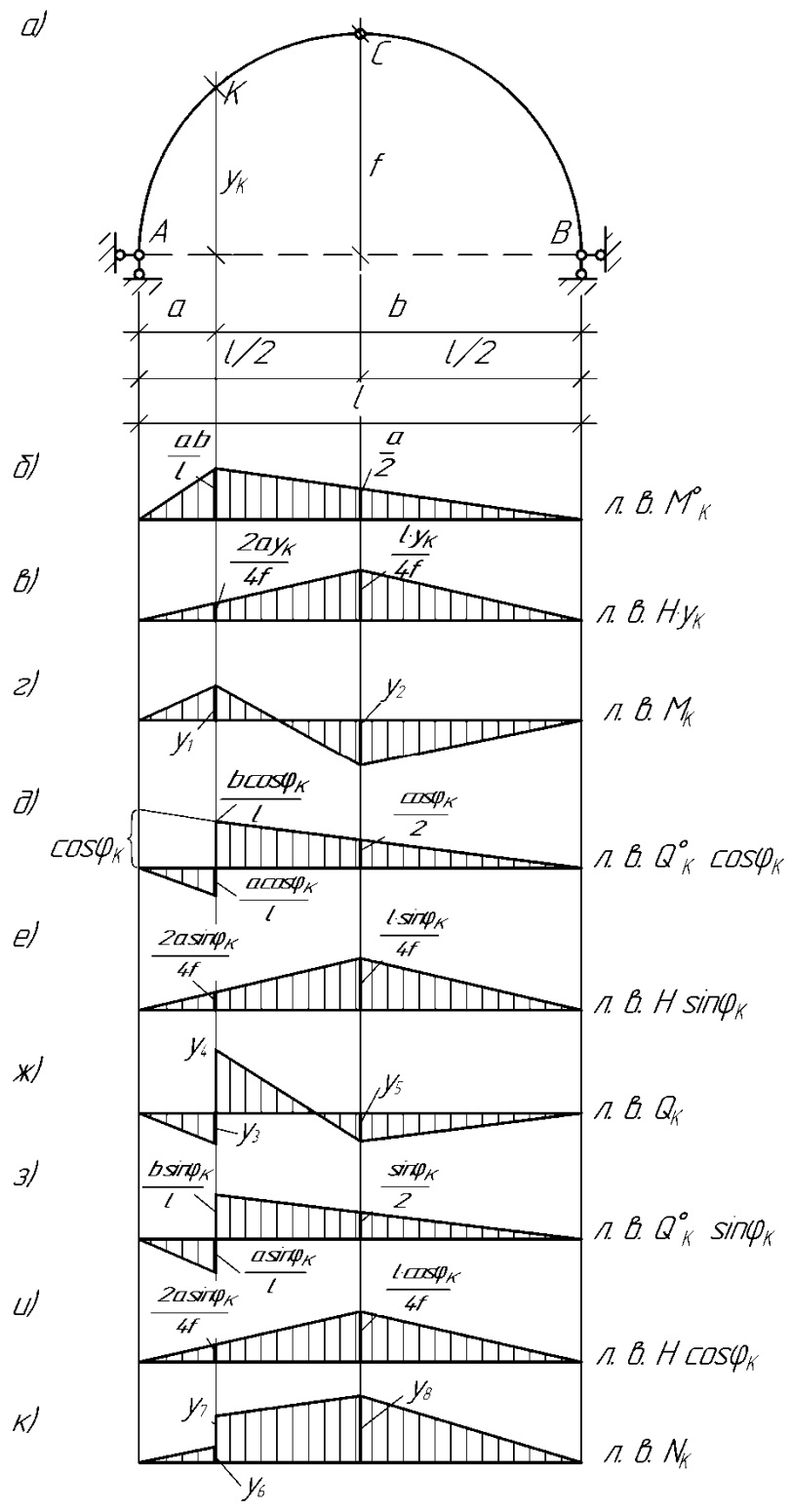


Рисунок 77

### 8.3. Построение линий влияния продольной, поперечной сил и изгибающего момента в сечении $K$ способом нулевых точек

Построение показывает, что каждая линия влияния –  $M_K$ ,  $Q_K$  и  $N_K$  состоит из трех прямых, крайние из которых пересекаются с осью абсцисс под опорами. Для построения линий влияния в произвольном масштабе необходимо найти точку пересечения средней прямой с осью абсцисс. Эти точки называются нулевыми, т. к. в них ординаты линий влияния равны нулю, обозначим их  $F_m$ ,  $F_q$ ,  $F_N$ . Чтобы определить положение этих точек, найдем такое положение силы  $P=1$ , при котором в сечении  $K$  линии влияния  $M_K$ ,  $N_K$  и  $Q_K$  будут равны нулю.

Определим графическое положение нулевой точки линии влияния для изгибающего момента  $M_K$  (рис. 78, а). Направление опорных реакций известно – одна проходит через ключевой шарнир, а другая – через заданное сечение (только в этом случае обеспечивается условие ( $M_C = 0$  и  $M_K = 0$ )). Если продолжить направление этих сил до пересечения, получим точку, определяющую положение силы, при которой момент в сечении  $K$  равен нулю. Отложим в произвольном масштабе под левой опорой значение  $x_k$ , проведем через точку  $O$  прямую до пересечения с вертикалями, опущенными из точек  $K$  и  $C$ . Точки пересечения соединим с нулевыми точками под опорами.

На (рис. 78, а) показано графическое определение положения нулевой точки. Координату этой точки легко определить аналитически.

$$\text{Рассмотрим } \Delta AF_mF_1; \quad \frac{F_m F_1}{U_m} = \operatorname{tg} \alpha; \quad F_m F_1 = U_m \operatorname{tg} \alpha = \frac{U_m y_k}{x_k},$$

$$\text{где } \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_k}{x_k}, \text{ а из } \Delta BF_mF_1; \quad \frac{F_m F_1}{(l - U_m)} = \operatorname{tg} \beta;$$

$$F_m F_1 = (l - U_m) \operatorname{tg} \beta, \quad (8.6)$$

$$\text{где } F_m F_1 = (l - U_m) \frac{f}{l_2}.$$

$$\text{Приравняем: } \frac{U_m y_k}{x_k} = (l - U_m) \frac{f}{l_2}.$$

Решив это уравнение относительно  $U_m$ , получим

$$U_m = \frac{lf x_k}{y_k l_2 + f x_k}. \quad (8.7)$$

Полученное выражение дает возможность аналитически найти абсциссу  $U_m$  нулевой точки линии влияния  $M_K$  (рис. 78, б).

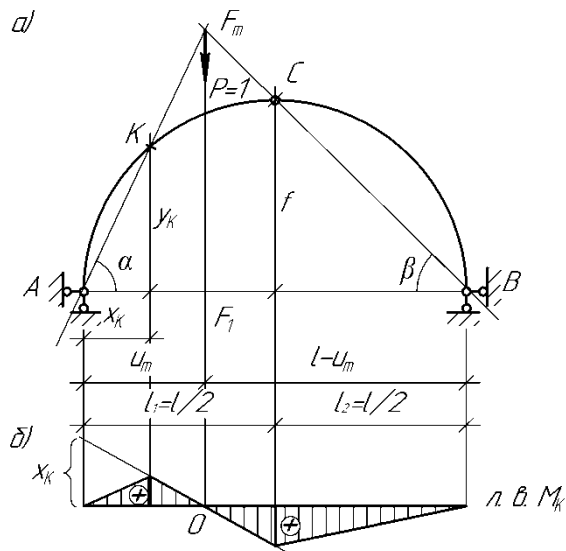


Рисунок 78

Определим графически положение нулевой точки линии влияния  $Q_K$ .

Для получения нулевой точки  $O_1$ , на линии влияния  $Q_K$  (рис. 79, б), нужно расположить груз  $P=1$  в такое положение, чтобы в сечении  $K$  поперечная сила обратилась в ноль (рис. 79, а).

Проведем из точки  $A$  прямую  $AF_q$  параллельную касательной к оси арки в сечении  $K$ , и найдем точку  $O_1$  пересечения с прямой  $BC$ . Проекция  $F_q$  на ось абсцисс и будет искомой нулевой точкой  $O_1$ . Пользуясь нулевой точкой можно непосредственно построить линию влияния  $Q_K$ .

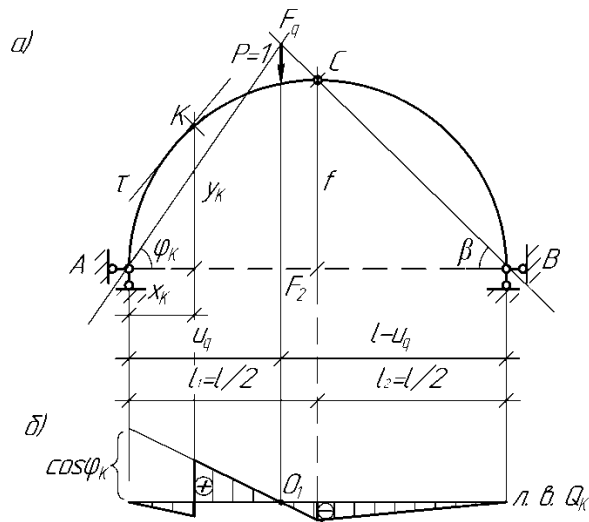


Рисунок 79



Откладываем на левой опоре вертикальную ординату  $\cos \varphi_k$  и соединяем ее с нулевой точкой  $O_1$ . Проводим через шарнир  $C$  и сечение  $K$  вертикальные прямые. Полученные точки пересечения соединяем с нулями на опорах (рис 79, б).

Координату нулевой точки  $O_1$  можно определить аналитически (рис. 79, а):

$$\text{из } \Delta AF_qF_2; \frac{F_qF_2}{U_q} = \operatorname{tg} \varphi_k; F_qF_2 = U_q \operatorname{tg} \varphi_k, \quad (8.8)$$

$$\text{из } \Delta BF_qF_2; \frac{F_qF_2}{l-U_q} = \operatorname{tg} \beta; F_qF_2 = (l-U_q) \operatorname{tg} \beta. \quad (8.9)$$

Приравняем полученные результаты:

$$U_q \operatorname{tg} \varphi_k = (l-U_q) \operatorname{tg} \beta. \quad (8.10)$$

Решая полученное уравнение относительно  $U_q$ , получим

$$U_q = \frac{l \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \varphi_k + \operatorname{tg} \beta}. \quad (8.11)$$

Определим графически положение нулевой точки линии влияния  $N_K$ . Найдем то положение груза  $P=1$ , при котором  $N_K = 0$  (рис. 80, а).

Для определения нулевой точки в линии влияния в  $N_K$  необходимо, чтобы реакция в опоре  $A$  была перпендикулярна касательной.

Откладываем под левой опорной вертикалью ординату  $\sin \varphi_k$  и соединяем ее с нулевой точкой  $F_3$ , продолжаем ее до пересечения с вертикалью, опущенной из шарнира  $C$ . Полученную точку пересечения соединим с нулевой точкой на правой опоре (рис. 80, б).

Координату нулевой точки  $O_2$  определяем аналитически. Рассмотрим два треугольника (рис. 80, а).

$$\text{Из } \Delta AF_3F_N; \frac{F_NF_3}{AF_3} = \operatorname{ctg} \varphi_k; \quad (8.12)$$

$$F_NF_3 = AF_3 \operatorname{ctg} \varphi_k \text{ или } F_NF_3 = U_N \operatorname{ctg} \varphi_k.$$

$$\text{Из } \Delta F_NF_3B; \frac{F_NF_3}{F_3B} = \operatorname{tg} \beta; \quad (8.13)$$

$$F_NF_3 = F_3B \operatorname{tg} \beta \text{ или } F_NF_3 = (U_N + l) \operatorname{tg} \beta.$$

Приравниваем

$$U_N + \operatorname{ctg} \varphi_k = (U_N + l) \operatorname{tg} \beta. \quad (8.14)$$

Решив полученное уравнение относительно  $U_N$ , получим:

$$U_N = \frac{\text{tg} \beta}{\text{tg} \beta - \text{ctg} \varphi_k}. \quad (8.15)$$

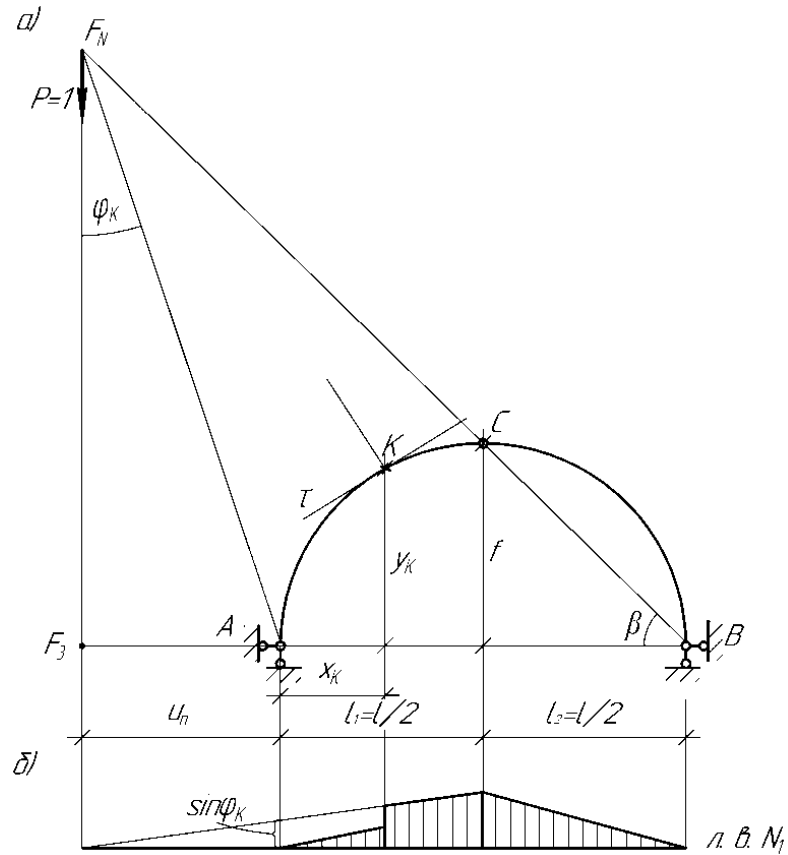


Рисунок 80

#### 8.4. Уравнение рациональной оси трехшарнирной арки

Рациональным очертанием оси арки называется такое ее очертание, при котором кривая давления от заданной нагрузки совпадает с осью арки. Следовательно, во всех сечениях такой арки изгибающий момент равен нулю. Приравниваем выражение для изгибающего момента к нулю:

$$M_x = M_x^0 - H y_x = 0. \quad (8.16)$$

Определим  $y_x = \frac{M_x^0}{H}$ .

Это и есть уравнение рациональной оси арки при вертикальной нагрузке. Найдем рациональное очертание оси арки при действии равно-

мерно распределенной нагрузки по пролету арки, если ее пролет  $l$ , стрела подъема  $f$  и координата шарнира  $C_x = \frac{l}{2}$ .

Найдем значение балочного момента  $M_C^0$ .

Опорная реакция в опоре  $A$  будет равна  $V_A = \frac{ql}{2}$ , тогда изгибающий момент в сечении на расстоянии  $x$  принимает вид:

$$M_x^0 = V_A x - \frac{qx^2}{2} = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2} = \frac{qx}{2}(l-x). \quad (8.17)$$

При  $x = \frac{l}{2}$  точка  $C$  – (ключевой шарнир).

$$M_C^0 = \frac{q}{2} \cdot \frac{l}{2} \left( l - \frac{l}{2} \right) = \frac{ql}{4} \cdot \frac{l}{2} = \frac{ql^2}{8}. \quad (8.18)$$

Следовательно,  $H = \frac{M_C^0}{f} = \frac{ql^2}{8f}$ .

Полученные значения  $M_x^0$  и  $H$  подставляем в уравнение:

$$y = \frac{M_x^0}{H}; \quad y = \frac{qx(l-x)8f}{2ql^2}; \quad (8.19)$$

$$y = \frac{4f}{l^2}(l-x)x. \quad (8.20)$$

Таким образом, рациональной в данном случае является арка с осью, очерченной по квадратной параболе.

## 9. РАСЧЕТ ПЛОСКИХ ФЕРМ. КЛАССИФИКАЦИЯ ФЕРМ

Фермой называется геометрически неизменяемая система, составленная из стержней, концы которых соединены между собой шарнирно в узлах.

Как указывалось в самом начале курса, соединения концов стержней в действительности жесткие, однако в расчетной схеме их заменяют шарнирами, что вносит в расчет незначительные погрешности.

Назначение ферм такое же как и балок сплошного сечения – перекрытие больших пролетов, когда использование балки становится экономически невыгодным вследствие неполного использования материала. Элементы фермы – стержни работают на растяжение и сжатие. Это дает возможность значительно лучше использовать материал фермы. Рассмотрим схему фермы (рис. 81).

Расстояние между опорами – пролет. Совокупность стержней, со-

ставляющих верхнюю часть контура, называется верхним поясом. Нижняя часть, по аналогии, – нижним поясом.

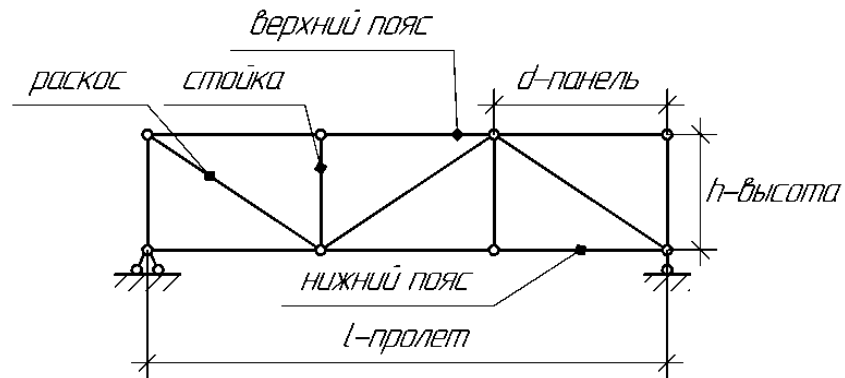


Рисунок 81

Стержни, соединяющие пояса, образуют решетку фермы и называются: вертикальные – стойками, наклонные – раскосами.

Расстояние между соседними узлами любого пояса фермы (обычно по горизонтали) называется панелью.

Классификацию ферм проведем по следующим пяти признакам: по характеру очертания внешнего контура; по типу решетки; по типу опирания фермы; по назначению фермы; по уровню езды.

**По характеру очертания** различают фермы с параллельными поясами, с ломаными поясами (называемым полигональным расположением поясов) фермы треугольного очертания (рис. 82, а, б, в).

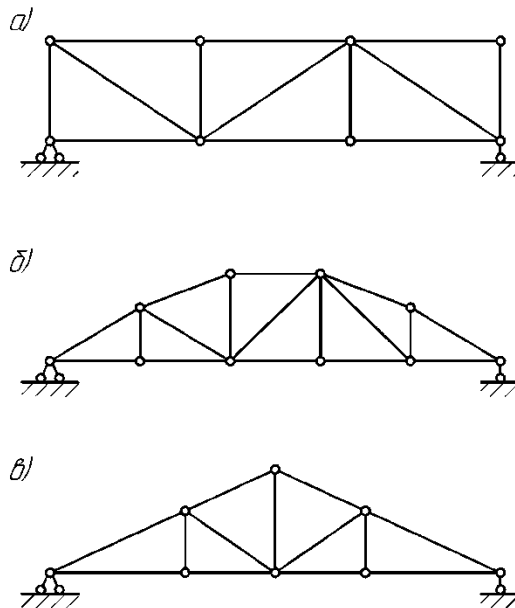


Рисунок 82

**По типу решетки** фермы делятся: на фермы с треугольной решеткой (рис. 83, *а*); с раскосной решеткой (рис. 83, *б*); с полураскосной решеткой (рис. 83, *в*); с ромбической решеткой (рис. 83, *г*); двухрешетчатые (рис. 83, *д*).

В зависимости от **назначения** различают фермы стропильные, крановые, башенные, мостовые.

Мостовые фермы от **уровня езды** делятся на фермы с ездой понизу, фермы с ездой поверху и фермы с ездой посередине.

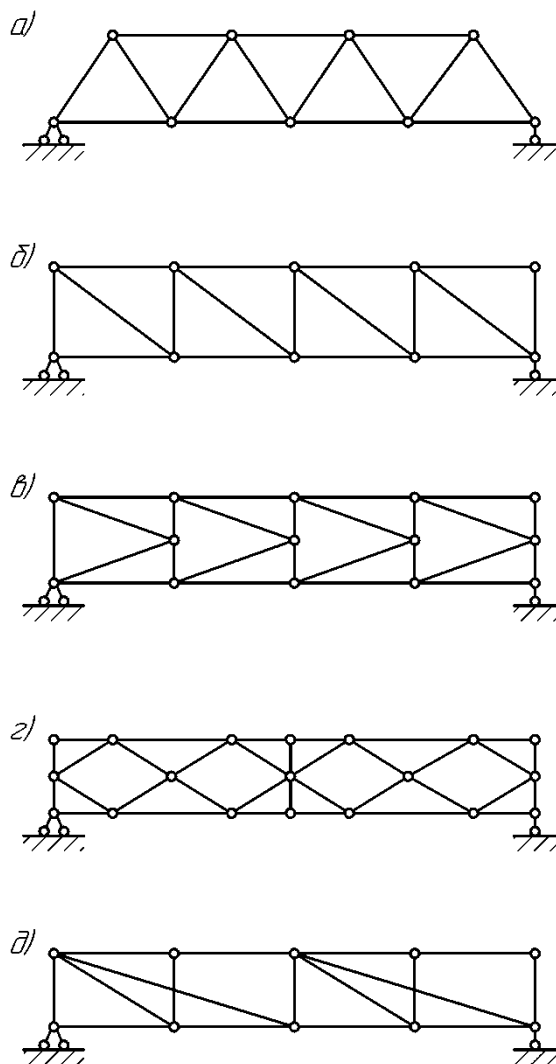


Рисунок 83

**По типу опирания** фермы могут быть: балочными – закрепленными с обоих концов (рис. 84, *а*); консольными – закрепленными у одного конца (рис. 84, *б*); балочно-консольными (рис. 84, *в*).

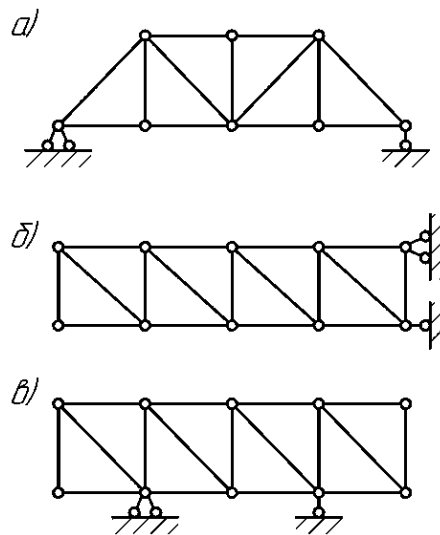


Рисунок 84

### 9.1. Порядок образования простейших ферм. Условия геометрической неизменяемости и статической определимости

Как известно, свободная конструкция, составленная из узлов  $U$ , шарнирно связанных между собой при помощи стержней  $C$ , будет геометрически неизменяемой, и в то же время не будет содержать лишних стержней лишь при условии, если  $C = 2U - 3$ .

Это условие является также условием статической определимости. Для каждого узла можно составить два уравнения, а именно:  $\sum P(x) = 0$ ;  $\sum P(y) = 0$ . Для всей системы этих уравнений будет  $2U$ . Пренебрежем тремя уравнениями, необходимыми для определения опорных реакций, и получим, что для определения усилий в стержнях системы останется  $2U - 3$  уравнений, т. е. равное числу стержней  $C$ .

Если  $C > 2U - 3$ , система имеет некоторое число лишних связей и значит статически неопределима. Условие  $C > 2U - 3$  является необходимым, но не достаточным для обеспечения геометрической неизменяемости. Может иметь место случай неправильного распределения стержней, в результате чего их в отдельной части будет больше, чем минимально необходимо, а в другой части недостаточно. Неизменяемость системы можно установить с помощью кинематического анализа.

Простейший способ образования плоских статически определимых и геометрически неизменяемых систем состоит в том, что к основному треугольнику шарнирно присоединяется новый узел с помощью двух стержней.

Второй способ – два диска соединяются тремя связями, о чем говорилось раньше.

## 9.2. Аналитическое определение усилий

Расчет ферм состоит в определении опорных реакций и внутренних усилий, возникающих в стержнях под действием внешних сил, приложенных к узлам ферм.

Для расчета применяют метод сечений в нескольких вариантах.

**Способ вырезания узлов** является одним из частных случаев метода сечений. Мысленно вырезаем отдельные узлы фермы, прикладываем в месте разреза неизвестные внутренние усилия, предварительно считая их растягивающими, а затем находим их из уравнений статики  $\sum P(x) = 0$  и  $\sum P(y) = 0$ .

Таким образом получаем для каждого узла систему сходящихся сил, а для такой системы составляются только два уравнения равновесия.

Рекомендуется вести расчет в следующем порядке:

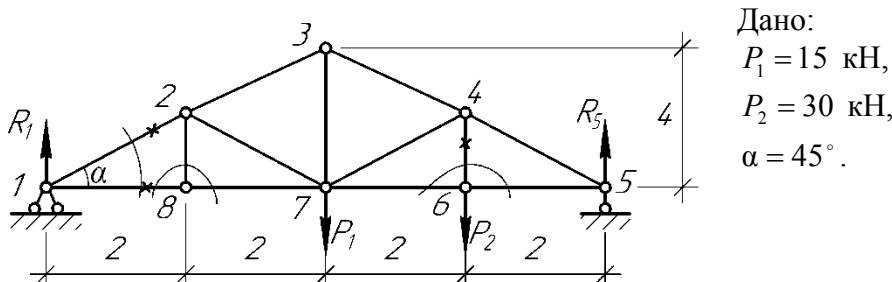
- рассматривая ферму как одно целое, определяем опорные реакции из условия равновесия всей фермы;
- вырежем узел, в котором сходятся лишь два стержня, имеющих неизвестные усилия, и находим эти усилия из уравнений статистики;
- в дальнейшем вырежем соседние узлы, в которых сходятся не более двух неизвестных усилий, и вычисляем их.

### Пример

Определить усилия в отмеченных на рисунке 85 стержнях фермы.

### Решение

Определим опорные реакции:



Дано:

$$P_1 = 15 \text{ кН,}$$

$$P_2 = 30 \text{ кН,}$$

$$\alpha = 45^\circ.$$

Рисунок 85

$$\sum M_1 = 0, \quad -P_1 4 - P_2 6 + R_5 8 = 0; \quad (9.1)$$

$$R_5 = \frac{P_1 4 + P_2 6}{8} = \frac{15 \cdot 4 + 30 \cdot 6}{8} = \frac{60 + 180}{8} = \frac{240}{8} = 30 \text{ кН.}$$

$$\sum M_5 = 0, \quad -R_1 8 + P_1 4 + P_2 2 = 0; \quad (9.2)$$

$$R_1 = \frac{P_1 4 + P_2 2}{8} = \frac{15 \cdot 4 + 30 \cdot 2}{8} = \frac{60 + 60}{8} = 15 \text{ кН.}$$

Проверка:  $\sum P(y) = 0; R_1 - P_1 - P_2 + R_5 = 0;$  (9.3)  
 $15 - 15 - 30 + 30 = 0; \quad 45 - 45 = 0.$

Определяем усилия в отмеченных стержнях фермы.  
 Для определения усилий  $N_{1-2}$  и  $N_{1-8}$  вырезаем узел 1 (рис. 86).

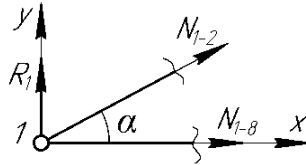


Рисунок 86

Через узел 1 проведем систему координат. Составим уравнение суммы проекций сил на ось  $y$ :

$$\sum P(y) = 0, \quad R_1 + N_{1-2} \sin 45^\circ = 0.$$

$$N_{1-2} = -\frac{R_1}{\sin 45^\circ} = -\frac{15}{0,707} = -21,22 \text{ кН.} \quad (9.4)$$

Знак «-» указывает на то, что стержень сжат.

Спроецировав все силы на горизонтальную ось  $x$ , получаем

$$\sum P(x) = 0, \quad N_{1-2} \cos 45^\circ + N_{1-8} = 0;$$

$$N_{1-8} = -N_{1-2} \cos 45^\circ = -(-21,22) \cdot 0,707 = 15 \text{ кН} \quad \text{— стержень растянут.} \quad (9.5)$$

Для определения усилия в стержнях 6-4 вырезаем узел 6 и рассматриваем его в равновесии (рис. 87):

$$\sum P(y) = 0, \quad N_{6-4} - P_2 = 0; \quad N_{6-4} = P_2 = 30 \text{ кН} \quad \text{— стержень растянут.} \quad (9.6)$$

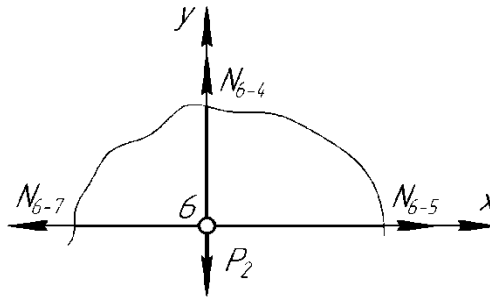


Рисунок 87

Рассмотрим некоторые **частные случаи равновесия узлов**, позволяющие определить неработающие (нулевые) стержни.

Стержни, усилия в которых равны нулю, называем **нулевыми**.



1. Если в узле сходятся два стержня и отсутствует нагрузка, усилия в стержнях равны нулю (рис. 88).

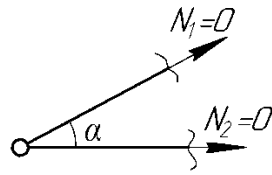


Рисунок 88

2. Если в узле сходятся три стержня, два из которых лежат на одной прямой и нагрузка в узле отсутствует, тогда усилие в третьем стержне равно нулю (рис. 89, а, б).

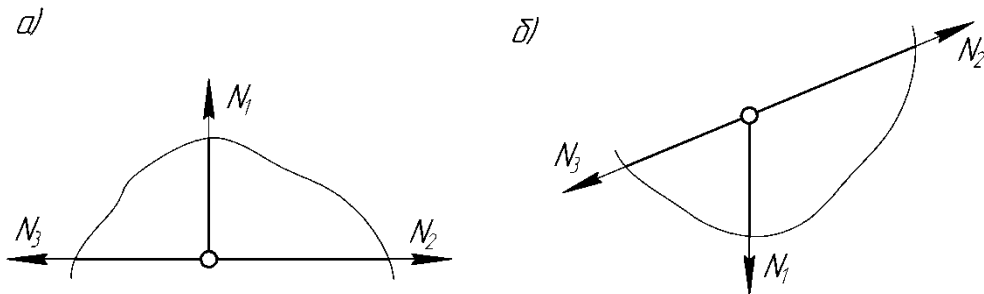


Рисунок 89

$$N_1 = 0; N_2 = N_3.$$

3. Если в узле сходятся три стержня, два из которых лежат на одной прямой, и в узле приложена нагрузка по направлению стержня, тогда усилие в третьем стержне равно по величине нагрузке и направлено в противоположную сторону (рис. 90).

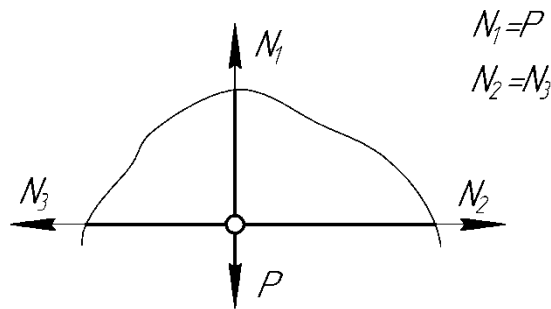


Рисунок 90

Для нахождения усилий способом вырезания узлов требуется постоянно переходить от узла к узлу в порядке, определяемом структурой фермы. Применение найденных ранее усилий при рассмотрении последующих узлов накапливает ошибку. Кроме того, способ вырезания узлов неудобен, ес-

ли требуется определить усилие в каком-либо одном стержне. Устранить это неудобство позволяет **способ сечений**.

**Способ моментной точки** применяется главным образом в тех случаях, когда удастся расечь ферму на две части так, чтобы при этом перерезанными оказались три ее стержня, направления осей которых не пересекаются в одной точке.

Для определения усилия в каком-либо стержне необходимо разрезать ферму так, чтобы в разрез, кроме данного стержня, попали еще два других (оси которых не сходятся с ним в общей точке), после чего из уравнения моментов относительно точки пересечения осей этих двух стержней можно легко определить усилие в данном стержне.

Точка пересечения осей двух стержней, относительно которой составляется уравнение моментов, называется **моментной**.

При составлении уравнений равновесия все неизвестные усилия в стержне фермы условно считаются положительными, т. е. растягивающими, и следовательно направленными от узлов. Если после решения уравнений какое-либо усилие окажется отрицательным, значит оно является сжимающим и направлено к узлу.

Перейдем к примерам расчета, поясняющим способ моментной точки. Рассмотрим ферму и найдем усилия в отмеченных стержнях (рис 91).

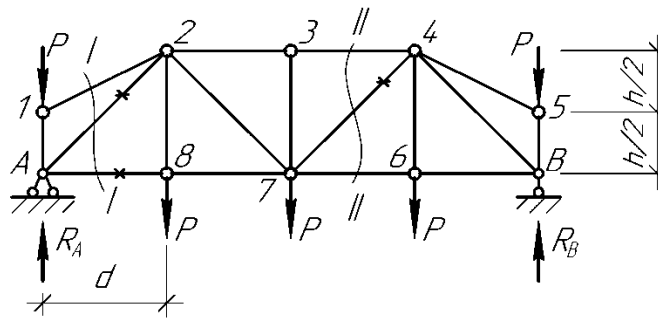


Рисунок 91

Для этого проведем сечение I-I (рис. 91). Одной из двух частей пренебрегаем. Действие части, которой пренебрегаем, заменяем усилиями в стержнях. Всегда проще рассматривать ту часть фермы, на которую действует меньше сил, а поэтому в данном случае рассмотрим ее левую часть. Она должна оставаться в равновесии под действием внешних сил  $P$ ,  $R_A$ , и внутренних усилий  $N_{1-2}$ ;  $N_{A-8}$ ;  $N_{A-2}$  в рассеченных элементах. Эти усилия заменяют собой действие правой части фермы, которой пренебрегли, на действие левой (рис. 92).

Для определения неизвестного усилия  $N_{A-8}$  с помощью одного уравнения с одним неизвестным составим сумму моментов всех сил, действующих на левую часть фермы, относительно точки пересечения рассе-

ченных стержней 1-2, A-2, т. е. точки 2. Эта точка при определении усилия в стержне A-8 будет моментной точкой (рис. 92).

$$\sum M_2^{лев} = 0, N_{A-8}h + Pd - R_A d = 0; \quad (9.7)$$

$$N_{A-8} = \frac{R_A d - Pd}{h}. \quad (9.8)$$

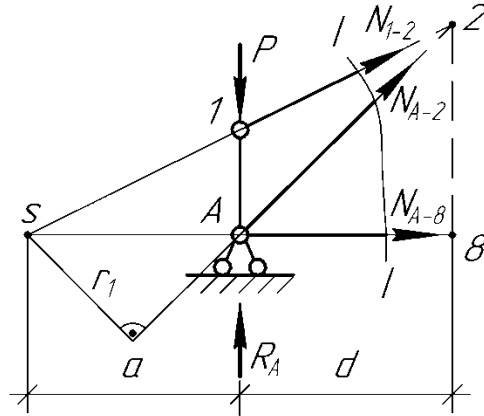


Рисунок 92

Для определения усилий в стержне A-2 два других рассеченных стержня (1-2 и A-8) продлеваем до взаимного пересечения. Это и будет моментная точка, т. е. точка S (рис. 92).

Сумма моментов всех сил, действующих на левую часть фермы, относительно точки S имеет вид:

$$\sum M_S^{лев} = 0, N_{A-2}r_1 + R_A a - Pa = 0; \quad (9.9)$$

$$N_{A-2} = \frac{Pa - R_A a}{r_1}.$$

При расчетах ферм по способу моментной точки каждое усилие определяется с помощью одного уравнения с одним неизвестным. При этом уравнение моментов составляется таким образом, что в состав его входят только действующие на ферму силы и одно определяемое усилие в рассматриваемом элементе. В этих случаях возможная ошибка при определении усилия в одном элементе не оказывает влияния на усилие в другом элементе.

**Способ проекций** применяется главным образом в следующих случаях, когда два из трех рассеченных стержней параллельны друг другу.

Для определения усилия в стержне 4-7 (рис. 91), проводим сечение II-II, и в равновесии рассмотрим правую часть (рис. 93).

Так как стержень 3-4 параллелен стержню 7-6, используем способ проекций для определения усилия  $N_{4-7}$ .

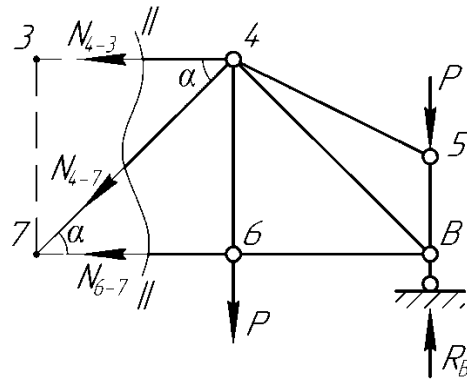


Рисунок 93

$$\sum P(y)^{np} = 0, R_B - P - P - N_{4-7} \sin \alpha = 0; \quad (9.10)$$

$$N_{4-7} = \frac{R_B - 2P}{\sin \alpha}.$$

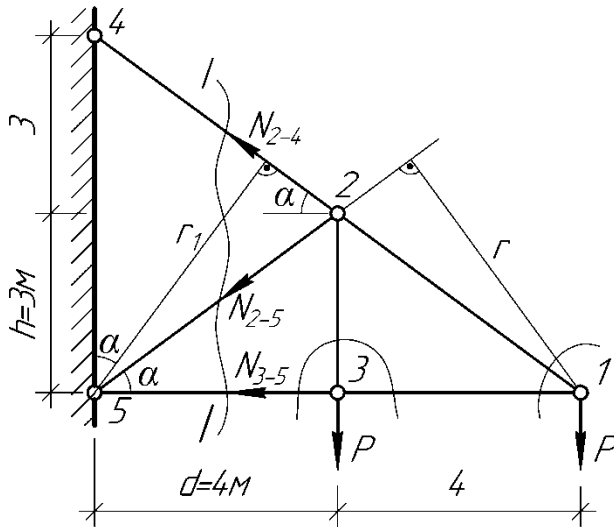
Обычно при расчете фермы пользуемся и способом моментной точки и способом проекций, применяя каждый раз тот из них, с помощью которого более просто определяется усилие в данном элементе.

**Пример**

Для заданной фермы определить усилие в стержнях, если  $h = 3$  м;  $d = 4$  м;  $P = 40$  кН.

**Решение**

Воспользуемся способом вырезания узлов для определения усилий в стержнях 1-2; 1-3; 3-5; 2-3 (рис. 94).



$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{6}{8} = 0,75; \\ \alpha &= 36,87^\circ; \\ \sin \alpha &= 0,6; \\ \cos \alpha &= 0,779. \end{aligned}$$

Рисунок 94

Составляем уравнение равновесия для узла 1 (рис. 95, б):

$$\sum P(y) = 0, \quad -P + N_{1-2} \sin \alpha = 0; \quad (9.11)$$

$$N_{1-2} = \frac{P}{\sin \alpha} = \frac{40}{0,6} = 66,67 \text{ кН};$$

$$\sum P(x) = 0, \quad -N_{1-2} \cos \alpha - N_{1-3} = 0; \quad (9.12)$$

$N_{1-3} = -N_{1-2} \cos \alpha = -66,67 \cdot 0,779 = -51,94 \text{ кН}$  – стержень сжат.

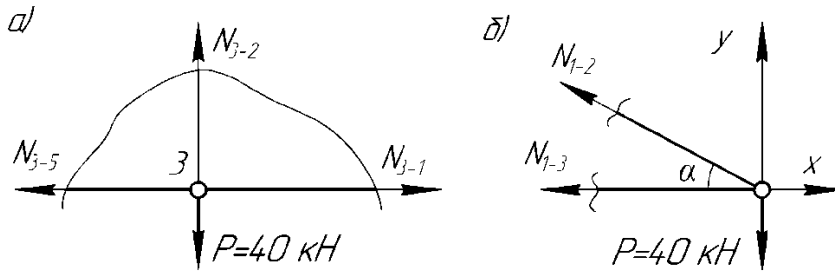


Рисунок 95

Составляем уравнения равновесия для узла 3 (рис. 95, а):

$$\sum P(y) = 0, \quad N_3 - P = 0; \quad N_3 = P = 40 \text{ кН}. \quad (9.13)$$

$$\sum P(x) = 0, \quad N_{3-1} - N_{3-5} = 0;$$

$$N_{3-5} = N_{3-1} = N_{1-3} = -40 \text{ кН}.$$

Проводим сечение I–I.

Для определения усилия в стержне 2-5, необходимо два других стержня продлить до взаимного пересечения. Точка пересечения и будет моментной точкой. На линию действия усилия  $N_{2-5}$  опускаем перпендикуляр  $r$  – плечо и составляем уравнение равновесия (рис. 94):

$$\sum M_1^{np} = 0, \quad Pd + N_{2-5}r = 0; \quad (9.14)$$

$$N_{2-5} = -\frac{Pd}{r} = -\frac{40 \cdot 4}{4,8} = -33,33 \text{ кН},$$

где  $\frac{r}{(2d)} = \sin \alpha$ ;  $r = (2d) \sin \alpha = 2d \sin \alpha = 2 \cdot 4 \cdot 0,6 = 4,8 \text{ м}$ .

Моментной точкой для усилия  $N_{2-4}$  будет точка пересечения стержней 2-5 и 3-5. Из моментной точки 5 на линию действия усилия  $N_{2-4}$  опускаем перпендикуляр  $r_1$ .

$$\sum M_5^{np} = 0, \quad N_{2-4}r_1 - Pd - P2d = 0; \quad (9.15)$$

$$N_{2-4} = \frac{Pd + P2d}{r_1} = \frac{40 \cdot 4 + 2 \cdot 40 \cdot 4}{4,674} = 102,7 \text{ кН},$$

где  $\frac{r_1}{(2h)} = \cos \alpha$ ;  $r_1 = (2h) \cos \alpha = 6 \cdot 0,779 = 4,674 \text{ м}$ .

## 10. ЛИНИИ ВЛИЯНИЙ УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ ФЕРМ С ПРОСТОЙ РЕШЕТКОЙ

Поскольку рассматриваемые фермы являются геометрически неизменяемыми, т. е. ферма по отношению к земле – это диск, то реакции опор определяются так же как и в балке. Следовательно, линии влияния реакций опор такие же как в балках.

Линии влияния усилий в стержнях – это графики, выражающие закон изменения усилия в рассматриваемом стержне при движении сосредоточенного груза  $P=1$ .

Передача нагрузки на ферму производится в узлах-шарнирах. Следовательно, в фермах всегда имеет место узловая передача нагрузки, т. е. все сказанное о построении линий влияния при узловой передаче нагрузки на балку относится и к фермам.

Статический метод построения линии влияния состоит в том, что груз  $P=1$  устанавливается в произвольном узле фермы, и для искомого усилия составляется формула, вытекающая из того или иного уравнения статики. Затем эту формулу анализируют для того, чтобы выяснить характер линии влияния усилий для характерных стержней фермы.

Аналогично способам определения усилий в фермах при подвижной нагрузке применяют следующие способы построения линий влияния для ферм:

- способ моментной точки;
- способ проекций.

**Способ моментной точки.** Нижний пояс грузовой. Построим линию влияния  $N_{3-4}$ . Проведем сечение I-I, пересекающее три стержня. Два других стержня продлеваем до взаимного пересечения (точка 12), это и будет моментная точка (рис. 96, а).

Чтобы получить левую и правую ветви линии влияния, располагаем груз  $P=1$  в узлах левее сечения I-I и правее сечения I-I.

Груз  $P=1$  движется левее сечения I-I (узлы 1, 12) – в равновесии правая часть. Составляем уравнение равновесия:

$$\sum M_{12}^{np} = 0; \quad N_{3-4} 1,5h + R_B 4d = 0; \quad (10.1)$$

$$N_{3-4} = -R_B \frac{4d}{1,5h} = R_B \left( -\frac{4d}{1,5h} \right).$$

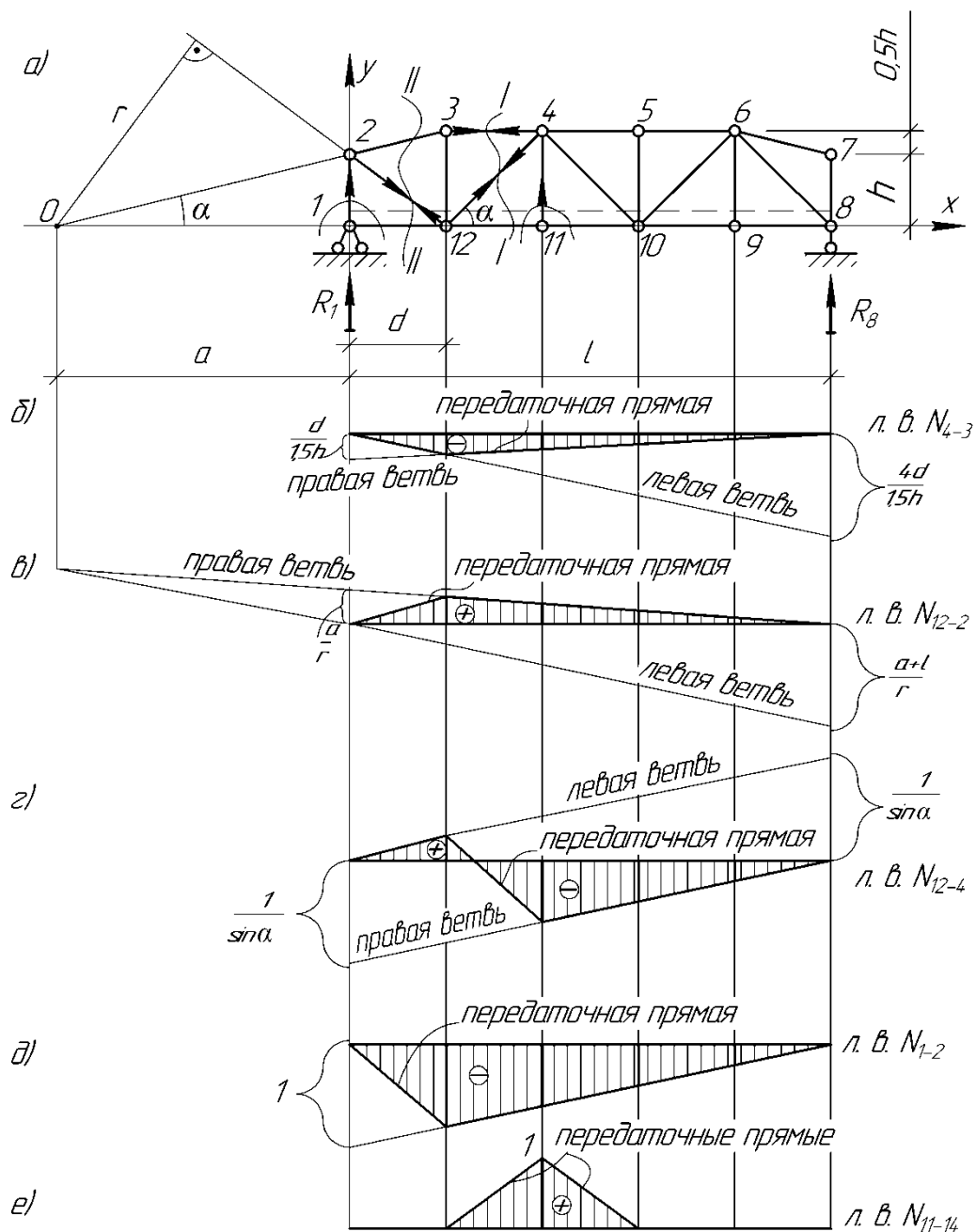


Рисунок 96

Левая ветвь линии влияния представляет собой линию влияния опорной реакции  $R_8$  с ординатами, умноженными на  $\left(-\frac{4d}{1,5h}\right)$ . Поэтому

для ее построения под опорой  $B$  откладываем ординату  $\left(-\frac{4d}{1,5h}\right)$  и соединяем с нулевой ординатой под опорой  $A$ . Груз  $P=1$  движется правее сечения I-I (узлы 8, 9, 10, 11) – в равновесии левая часть.

Составляем уравнение суммы моментов всех сил, действующих на левую часть фермы, относительно точки 12.

$$\sum M_{12}^{лев} = 0, \quad -R_A d - N_{3-4} 1,5h = 0; \quad (10.2)$$

$$N_{3-4} = -R_A \frac{d}{1,5h} = R_A \left(-\frac{d}{1,5h}\right).$$

Правая ветвь линии влияния представляет собой линию влияния левой опорной реакции  $R_A$ , умноженную на коэффициент  $\left(-\frac{d}{1,5h}\right)$ . Левая и правая ветви линии влияния пересекаются под моментной точкой.

На левую ветвь линии влияния сносим узлы 1 и 12, а на правую – 8, 9, 10, 11. В пределах рассеченной панели – передаточная прямая (рис. 96, б).

**Построим линию влияния  $N_{2-12}$ .**

Проведем сечение II-II. Сечение проходит через три стержня. Линии действия усилий в стержнях 2-3 и 1-12 пересекаются за пределами фермы в точке  $O$ . Это и будет моментная точка. Располагаем груз  $P=1$  левее сечения II-II (узел 1) – в равновесии правая часть.

Составляем уравнение суммы моментов всех сил, действующих на правую часть относительно точки  $O$ .

$$\sum M_0^{np} = 0, \quad R_B (a+l) + N_{2-12} r = 0; \quad (10.3)$$

$$N_{2-12} = R_B \left(-\frac{a+l}{r}\right).$$

Строим левую ветвь линии влияния следующим образом: под правой опорой вниз откладываем по вертикали ординату, равную  $\left(\frac{a+b}{r}\right)$ , после чего соединяем ее с нулевой ординатой под опорой  $A$ . На эту ветвь сносится левый узел 1. Для построения правой ветви линии влияния располагаем груз  $P=1$  правее сечения II-II (узлы 8, 9, 10, 11, 12). В равновесии рассматриваем левую часть фермы. Составляем уравнение равновесия:

$$\sum M_0^{лев} = 0; \quad R_A a - N_{2-12} r = 0; \quad (10.4)$$

$$N_{2-12} = R_A \left(\frac{a}{r}\right).$$



Под левой опорой откладываем вверх ординату  $\left(\frac{a}{r}\right)$  и соединяем с нулевой под правой опорой. Левая и правая ветви линии влияния пересекаются под моментной точкой  $O$ . На правую ветвь линии влияния переносим узлы 8, 9, 10, 11, 12. В пределах рассеченной панели – передаточная прямая (рис. 96, б).

**Способ проекций. Построим линию влияния** в раскосе фермы 4-12.

Рассматриваем равновесие правой отсеченной части фермы в случае, когда груз  $P=1$  расположен левее сечения I-I, (узлы 1, 12). Составляем уравнение проекций всех сил на вертикальную ось:

$$\sum P(y)^{np} = 0, \quad R_B - N_{4-12} \sin \alpha = 0; \quad (10.5)$$

$$N_{4-12} = R_B \left( \frac{1}{\sin \alpha} \right).$$

Для построения левой ветви линии влияния откладываем вверх ординату  $\left(\frac{1}{\sin \alpha}\right)$  под правой опорой и соединяем с нулевой ординатой под левой опорой. На построенную левую ветвь переносим узлы 1 и 12.

Располагаем груз  $P=1$  правее сечения I-I, (узлы 8, 9, 10, 11) – в равновесии левая часть фермы.

Составляем уравнение равновесия:

$$\sum P(y)^{лев} = 0, \quad R_A + N_{4-12} \sin \alpha = 0; \quad (10.6)$$

$$N_{4-12} = -R_A \left( \frac{1}{\sin \alpha} \right).$$

Строим правую ветвь линии влияния. Откладываем под опорой  $A$  вниз ординату  $\left(\frac{1}{\sin \alpha}\right)$  и соединяем с нулевой ординатой под правой опорой. На построенную ветвь переносим узлы 8, 9, 10, 11.

Передаточная прямая соединяет вершины узловых ординат рассеченной панели. Ветви линии влияния параллельны между собой (рис. 96, з).

**Построим линию влияния**  $N_{1-2}$  усилия в стойке 1-2. В этом случае способ моментной точки не применим. Целесообразно воспользоваться способом вырезания узлов. Вырезав узел 1, рассмотрим груз  $P=1$  в этом узле (рис. 97, а) и вне узла 1: в узлах 8, 9, 10, 11, 12 (рис. 97, б).

Составляем уравнения проекций на ось  $y$  (рис. 97, а, б):

$$\sum P(y) = 0, \quad N_{1-2} - P + R_A = 0; \quad N_{1-2} = P - R_A = 1 - 1 = 0. \quad (10.7)$$

$$\sum P(y) = 0, \quad R_A + N_{1-2} = 0; \quad (10.8)$$

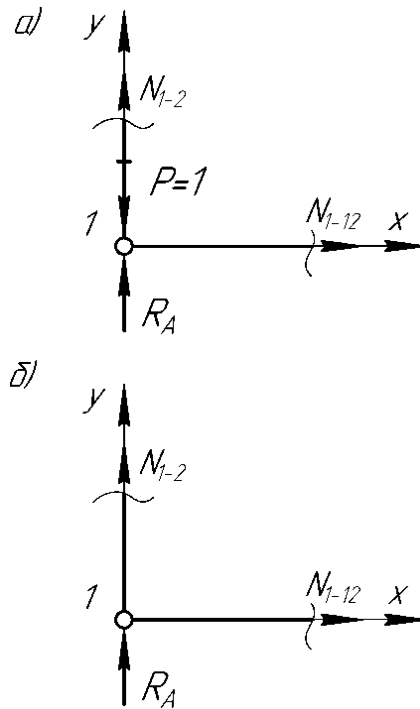


Рисунок 97

Под опорой  $A$  на линии влияния откладываем вниз ординату, равную 1, и соединяем ее с нулевой ординатой под правой опорой. На эту ветвь переносим узлы 8, 9, 10, 11, 12. В пределах рассеченной панели – передаточная прямая (рис. 96,  $\delta$ ).

Аналогично строим линию влияния усилия в стержне 4-11. Располагаем груз  $P=1$  в узле 11 (рис. 96,  $a$ ).

Составляем уравнение равновесия для узла 11 (рис. 98,  $a$ ):

$$\sum P(y) = 0, \quad N_{4-11} - P = 0; \quad N_{4-11} = P = 1. \quad (10.9)$$

Под узлом 11 на линии влияния откладываем вверх ординату, равную 1.

Располагаем груз  $P=1$  в узлах 1, 8, 9, 10, 12. Составляем уравнение равновесия для узла 11 (рис. 98,  $\delta$ ):

$$\sum P(y) = 0, \quad N_{4-11} = 0. \quad (10.10)$$

Эта ветвь совпадает с нулевой линией. Переносим на нее узлы 1, 8, 9, 10, 12 и соединяем ординаты передаточными прямыми (рис. 96,  $e$ ).

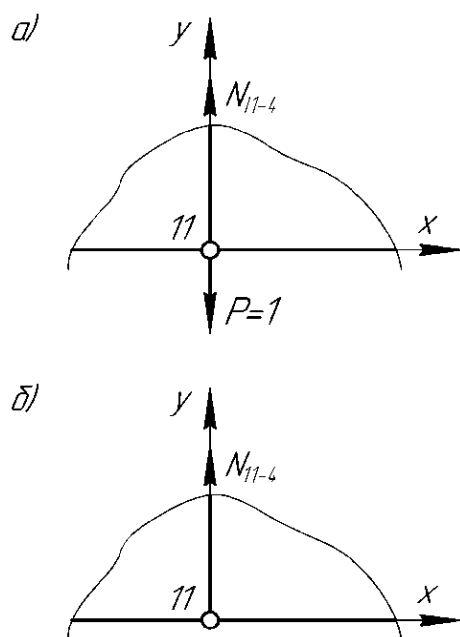


Рисунок 98

## 11. РАСЧЕТ ШПРЕНГЕЛЬНЫХ СОСТАВНЫХ ФЕРМ

Если в обыкновенной ферме заменить отдельные ее элементы самостоятельными фермами, это и будет *составная ферма*.

Составная ферма образована из фермы, где стержень  $BC$  заменен фермочкой  $BC$  (рис. 99, а). Систему сил, приложенных к фермочке  $BC$ , можно заменить эквивалентными силами  $R'_B$  и  $R'_C$ , приложенными в узлах  $B$  и  $C$  расчетной схемы. Рассчитав ферму (рис. 99, б), определим силу, действующую по линии  $BC$ . Приложив эту силу вместе с силами, уравнивающими нагрузку на фермочке  $BC$  ( $N_{BC}$ ), получим все данные для расчета фермочки  $BC$ , т. е. для определения усилий в ее стержнях (рис. 100).

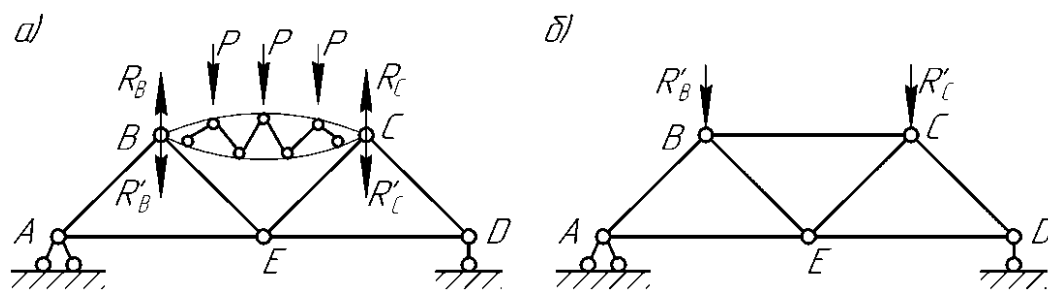


Рисунок 99

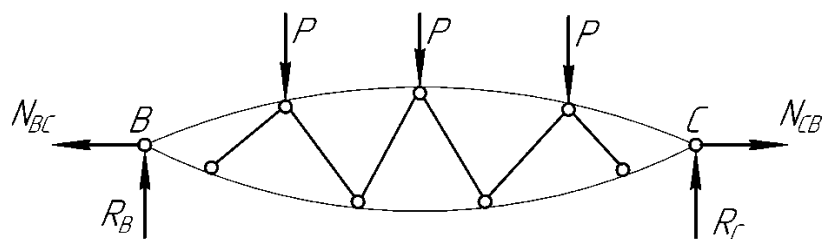


Рисунок 100

К категории составных ферм также относятся шпренгельные фермы. Для объяснения их целесообразности и принципа образования вспомним, что усилия в стержнях способом моментной точки определяются по формуле:

$$N = \pm \frac{M}{r}, \quad (11.1)$$

где  $M$  – момент левых или правых сил относительно моментной точки;

$r$  – плечо усилия  $N$  относительно этой точки.

Из этой формулы видно, что чем больше  $r$ , тем меньше усилие  $N$ .

Увеличение высоты фермы приводит к увеличению плеч  $r$  и уменьшению усилий в элементах фермы. Исходя из удобств выполнения узлов, раскосы выполняем под углом  $45^\circ$  к поясам. Поэтому увеличение высоты ферм приводит к увеличению длины панелей. Устройство больших панелей вызывает увеличение массы проезжей части моста – поперечных балок, опирающихся на узлы ферм и главным образом вспомогательных балок, опирающихся на поперечные балки. Экономия материала на поясах фермы, достигаемая при увеличении высоты фермы, может оказаться меньше дополнительного его расхода на устройство проезжей части.

Задача увеличения высоты фермы может быть рационально решена при введении в состав каждой панели дополнительных двухопорных фермочек – шпренгелей. Они вводятся в грузовой пояс. Образование промежуточных узлов на раскосах треугольной раскосной решетки основной фермы можно рассматривать как конструктивное объединение в один стержень примыкающих стержней шпренгеля и основной фермы, и считать, что этот стержень является сложным поясным элементом в скрытом виде.

В данном случае шпренгельные стойки и раскосы работают только на местную нагрузку. Это же относится и к дополнительным стойкам и подвескам. Различают одноярусные и двухярусные шпренгели (рис. 101, а, б).

Одноярусные шпренгели передают нагрузку из узлов одного пояса в узлы основной фермы того же пояса.

Двухярусные шпренгели передают нагрузку из узлов одного пояса в узлы основной фермы противоположного пояса.

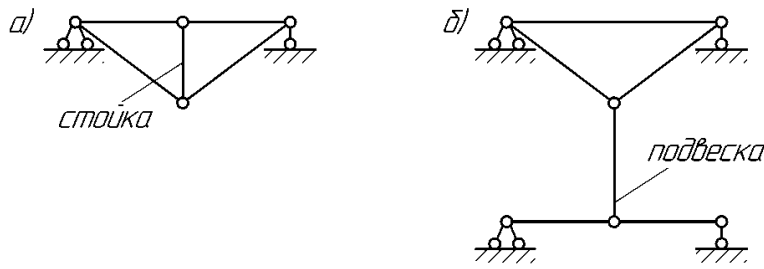


Рисунок 101

В фермах с одноярусным шпренгелем различают *три категории* стержней:

**1 категория** – стержни, принадлежащие основной ферме. Усилия в таких стержнях определяются расчетом основной фермы.

**2 категория** – стержни, принадлежащие только шпренгелю. Усилия в стержнях шпренгеля определяются расчетом этого шпренгеля, как самостоятельной фермы.

**3 категория** – стержни, принадлежащие одновременно основной ферме и шпренгелю. Усилия в таких стержнях определяются как алгебраическая сумма усилий в стержнях основной фермы и шпренгельной.

В ферме с двухярусным шпренгелем различают *четыре категории* стержней. Усилия в стержнях 1, 2 и 3 категорий определяются, как в ферме с одноярусным шпренгелем.

**4 категория** – стойки основной фермы, линии влияния для которых имеют различный вид при перемещении по узлам верхнего и нижнего поясов. Усилия в этих стержнях определяются расчетом основной фермы.

**Пример**

Определить усилие в отмеченных стержнях шпренгельной фермы, если  $h = d = 3$  м;  $P = 10$  кН (рис. 102, а).

**Решение**

Определяем усилия в отмеченных стержнях шпренгельной фермы. Стержни 8-13, 8-13' – стержни третьей категории. Усилия в этих стержнях определяются как алгебраическая сумма усилий в основной ферме и шпренгеле, т. е.

$$N_{8-13} = N_{4-8}^{осн} + N_{8-13}^{ш}; \quad (11.2)$$

$$N_{8-13'} = N_{8-9}^{осн} + N_{8-13'}^{ш}. \quad (11.3)$$

Стержни 9-13, 13-13' – стержни второй категории.

Для определения усилий в стержнях рассмотрим загруженный шпренгель (рис. 102, б). Опорные реакции равны между собой и равны половине действующей нагрузки, т. е.

$$R_9^{ш} = R_8^{ш} = \frac{P}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ кН}.$$

Используем способ вырезания узлов.

Для каждого узла составляем уравнения равновесия.

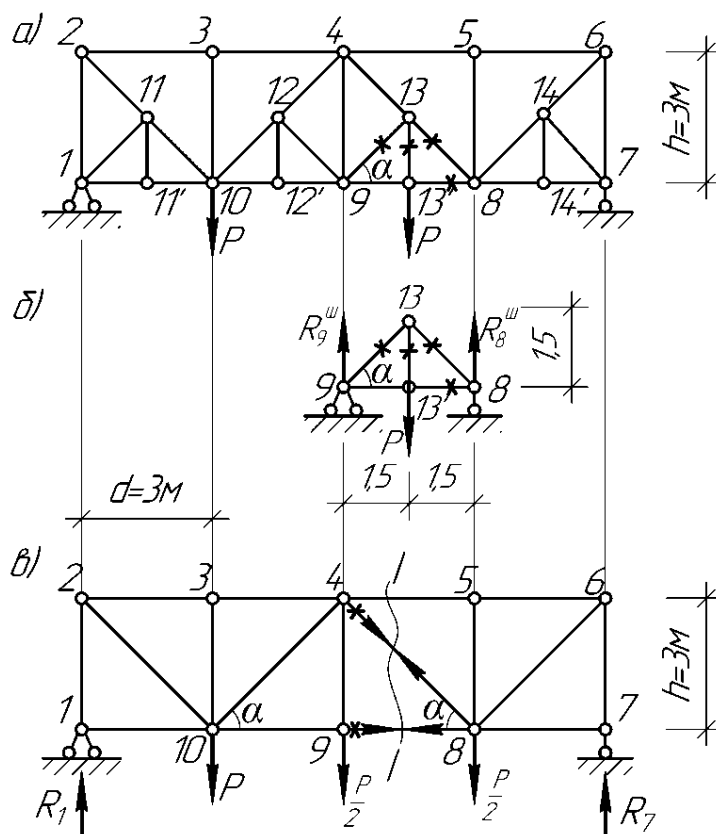


Рисунок 102

Узел 9 (рис. 103, а)

$$1) \sum P(y), \quad R_9^u + N_{9-13}^u \sin 45^\circ = 0; \quad (11.4)$$

$$N_{9-13}^u = -\frac{R_9^u}{\sin 45^\circ} = -\frac{5}{0,707} = -7,07 \text{ кН.}$$

$$2) \sum P(x) = 0, \quad N_{9-13}^u \cos 45^\circ + N_{9-13'}^u = 0; \quad (11.5)$$

$$N_{9-13'}^u = -N_{9-13}^u \cos 45^\circ = -(-7,07) \cdot 0,707 = 5 \text{ кН.}$$

Узел 13' (рис. 103, б)

$$1) \sum P(y) = 0, \quad N_{13-13'}^u - P = 0; \quad (11.6)$$

$$N_{13-13'}^u = P = 10 \text{ кН.}$$

$$2) \sum P(x) = 0, \quad -N_{9-13'}^u + N_{8-13'}^u = 0; \quad (11.7)$$

$$N_{8-13}^u = N_{9-13'}^u = 5 \text{ кН.}$$

$N_{8-13}^u = N_{9-13}^u = -7,07 \text{ кН}$ , т. к. стержни симметричные.

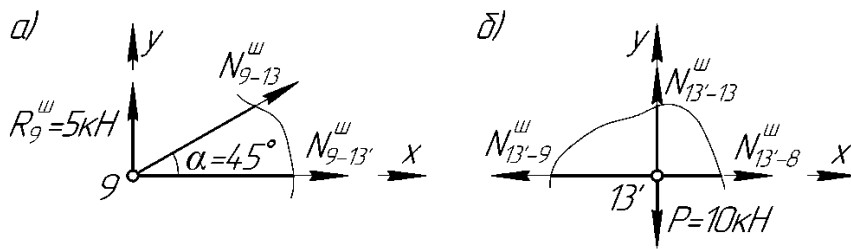


Рисунок 103

Определяем опорные реакции основной фермы. Для этого составляем уравнения равновесия. К узлам 8 и 9 прикладываем реакции давления от шпренгеля, которые равны:  $R_8^{ту} = \frac{P}{2}$  и  $R_9^{ту} = \frac{P}{2}$  (рис. 102, в).

$$\sum M_1 = 0, \quad -Pd - \frac{P}{2}2d - \frac{P}{2}3d + R_7 4d = 0. \quad (11.8)$$

Сокращаем на величину  $d$

$$-P - \frac{P}{2}2 - \frac{P}{2}3 + R_7 4 = 0; \quad (11.9)$$

$$R_7 = \frac{P + P + 1,5P}{4} = \frac{3,5P}{4} = \frac{3,5 \cdot 10}{4} = 8,75 \text{ кН.}$$

$$\sum M_7 = 0, \quad \frac{P}{2}d + \frac{P}{2}2d + P3d - R_1 4d = 0; \quad (11.10)$$

или 
$$\frac{P}{2} + \frac{P}{2}2 + 3P - R_1 4 = 0;$$

$$R_1 = \frac{0,5P + P + 3P}{4} = \frac{4,5P}{4} = \frac{4,5 \cdot 10}{4} = 11,25 \text{ кН.} \quad (11.11)$$

Проверка:  $\sum P(y) = 0, \quad R_1 - P - \frac{P}{2} - \frac{P}{2} + R_7 = 0;$

$$11,25 - 10 - \frac{10}{2} - \frac{10}{2} + 8,75 = 0;$$

$$20 - 20 = 0.$$

Реакции опор определены верно.

Для определения усилий в стержнях 8-4 и 8-9 основной фермы проводим сечение I-I. В равновесии рассматриваем правую часть фермы:

$$\sum M_4^{np} = 0, \quad -\frac{P}{2}d + R_7 2d - N_{8,9}^{очн} h = 0; \quad (11.12)$$

$$N_{8,9}^{очн} = \frac{-\frac{P}{2}d + R_7 2d}{h} = \frac{-5 \cdot 3 + 8,75 \cdot 2 \cdot 3}{3} = 12,5 \text{ кН.} \quad (11.13)$$

$$\sum P(y)^{np} = 0, \quad R_7 - \frac{P}{2} + N_{8-4}^{och} \sin 45^\circ = 0; \quad (11.14)$$

$$N_{8-4}^{och} = \frac{\frac{P}{2} - R_7}{\sin 45^\circ} = \frac{\frac{10}{2} - 8,75}{0,707} = \frac{5 - 8,75}{0,707} = -5,3 \text{ кН.}$$

Переходим к определению усилий в стержнях третьей категории.

$$N_{8-13} = N_{4-8}^{och} + N_{8-13}^u = -5 + (-7,07) = -12,37 \text{ кН.} \quad (11.15)$$

$$N_{8-13'} = N_{8-9}^{och} + N_{8-13'}^u = 12,5 + 5 = 17,5 \text{ кН.} \quad (11.16)$$

### Пример

Определить усилия в отмеченных стержнях фермы с двухрусным шпренгелем (рис. 104, а).

### Решение

Рассмотрим нагруженный шпренгель (рис. 104, б). Для определения усилия в стержне 13-13', вырезаем узел 13' и рассматриваем его в равновесии (рис. 105, а).

$$\sum P(y) = 0, \quad N_{13-13'}^u - P = 0; \quad N_{13-13'}^u = P = 10 \text{ кН.}$$

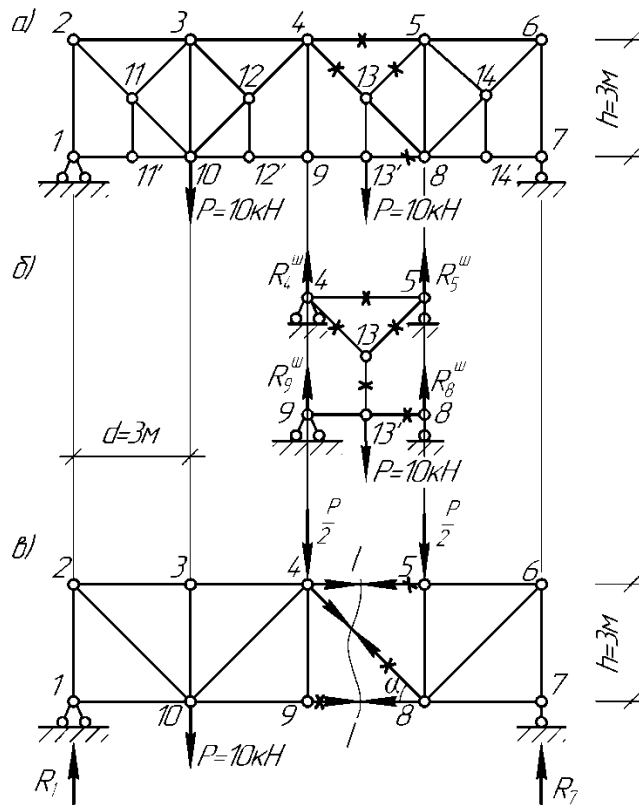


Рисунок 104



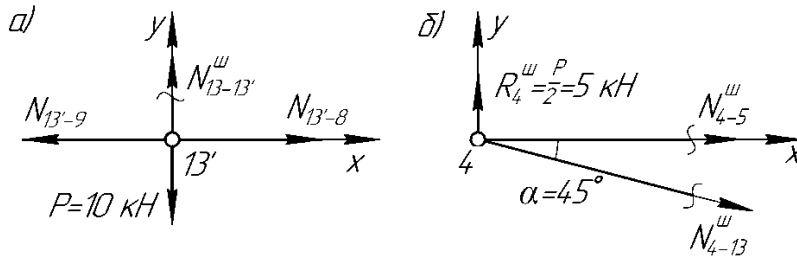


Рисунок 105

Рассмотрим равновесие узла 4 (рис. 105, б):

$$\sum P(y) = 0, \quad R_4^u - N_{4-13}^u \sin 45^\circ = 0; \quad N_{4-13}^u = \frac{R_4^u}{\sin 45^\circ}; \quad (11.17)$$

$$N_{4-13}^u = \frac{5}{0,707} = 7,07 \text{ кН};$$

$$\sum P(x) = 0, \quad N_{4-5}^u + N_{4-13}^u \cos 45^\circ = 0; \quad (11.18)$$

$$N_{4-5}^u = -N_{4-13}^u \cos 45^\circ = -7,07 \cdot 0,707 = -5 \text{ кН}.$$

Стержни 9-13' и 8-13' – нулевые,  $N_{9-13'}^u = N_{8-13'}^u = 0$ .

Переходим к определению усилий в стержнях основной фермы. Для этого определяем опорные реакции из суммы моментов относительно опор (рис. 104, в), т. е.:

$$\sum M_1 = 0, \quad -Pd - \frac{P}{2}2d - \frac{P}{2}3d + R_7 4d = 0; \quad (11.19)$$

или 
$$-P - \frac{P}{2}2 - \frac{P}{2}3 + R_7 4 = 0;$$

$$R_7 = \frac{P + P + 1,5P}{4} = \frac{3,5P}{4} = \frac{3,5 \cdot 10}{4} = 8,75 \text{ кН}.$$

$$\sum M_7 = 0, \quad -R_1 4d + P3d + \frac{P}{2}2d + \frac{P}{2}d = 0; \quad (11.20)$$

или 
$$-4R_1 + 3P + P + 0,5P = 0;$$

$$R_1 = \frac{3P + P + 0,5P}{4} = \frac{4,5P}{4} = \frac{4,5 \cdot 10}{4} = 11,25 \text{ кН}.$$

Проверка: 
$$\sum P(y) = 0, \quad R_1 - P - \frac{P}{2} - \frac{P}{2} + R_7 = 0;$$

$$11,25 - 10 - 5 - 5 + 8,75 = 0;$$

$$20 - 20 = 0.$$

К узлам 4 и 5 были приложены реакции давления от двухъярусного

шпренгеля,  $R_4^u = \frac{P}{2}$  и  $R_5^u = \frac{P}{2}$ .

Проводим сечение I-I.

Усилие в стержне 4-5 определяем способом моментной точки, которая получена на пересечении линий действия усилий в стержнях 4-8 и 8-9.

$$\sum M_8^{np} = 0, \quad N_{4-5}^{очн} h + R_7 d = 0; \quad (11.21)$$

$$N_{4-5}^{очн} = -R_7 \frac{d}{h} = -8,75 \cdot \frac{3}{3} = -8,75 \text{ кН.}$$

Из суммы моментов относительно узла 4 определяем усилие в стержне 8-9.

$$\sum M_4^{np} = 0, \quad -N_{8-9}^{очн} h - \frac{P}{2} d + R_7 2d = 0; \quad (11.22)$$

$$N_{8-9}^{очн} = \frac{-0,5Pd + R_7 2d}{h} = \frac{-0,5 \cdot 10 \cdot 3 + 8,75 \cdot 2 \cdot 3}{3} = \frac{-15 + 52,5}{3} = 12,5 \text{ кН.}$$

Так как стержни 4-5 и 8-9 параллельны, следовательно, усилие в стержне 4-8 определяем из суммы проекций всех сил правой отсеченной части.

$$\sum P(y)^{np} = 0, \quad N_{4-8}^{очн} \sin 45^\circ - \frac{P}{2} + R_7 = 0; \quad (11.23)$$

$$N_{4-8}^{очн} = \frac{\frac{P}{2} - R_7}{\sin 45^\circ} = \frac{5 - 8,75}{0,707} = -5,3 \text{ кН.}$$

Определяем усилия в стержнях третьей категории.

$$N_{4-5} = N_{4-5}^{очн} + N_{4-5}^u = -8,75 - 5 = -13,75 \text{ кН;} \quad (11.24)$$

$$N_{4-13} = N_{4-8}^{очн} + N_{4-13}^u = -5,3 + 7,07 = 1,77 \text{ кН;} \quad (11.25)$$

$$N_{8-13'} = N_{8-9}^{очн} + N_{8-13'}^u = 12,5 + 0 = 12,5 \text{ кН.} \quad (11.26)$$

### 11.1. Линии влияния усилий в шпренгельных фермах

Особенности построения линий влияния в стержнях шпренгельных ферм рассмотрим на примерах (рис. 106, а).

**Построим линию влияния**  $N_{8-13}$ . Стержень 8-13 – стержень третьей категории.

Линию влияния этого усилия получим путем суммирования двух линий влияния (рис. 106, е), т. е.

$$\text{л. в. } N_{8-13} = \text{л. в. } N_{4-8}^{очн} + \text{л. в. } N_{8-13}^u. \quad (11.27)$$

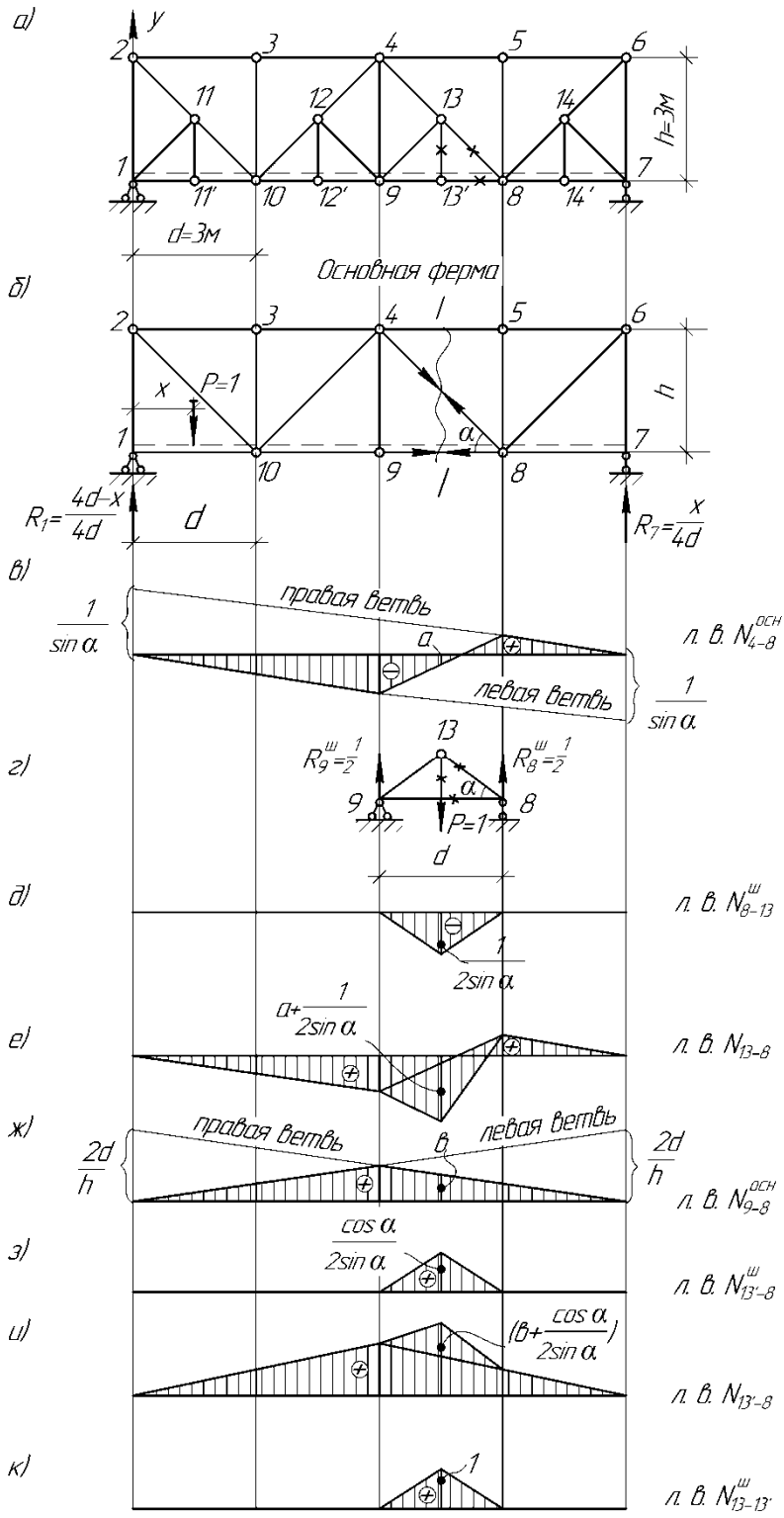


Рисунок 106

Строим линию влияния  $N_{4-8}^{очн}$ . Для этого проводим сечение I-I (рис. 106, б) в основной ферме и рассматриваем положение единичной силы левее и правее сечения. При этом получим левую и правую ветви линии влияния. Груз  $P=1$  движется левее сечения I-I (узлы 1, 10, 9), в равновесии правая часть:

$$\sum P(y)^{np} = 0, \quad R_7 + N_{4-8}^{очн} \sin \alpha = 0; \quad (11.28)$$

$$N_{4-8}^{очн} = R_7 \left( -\frac{1}{\sin \alpha} \right).$$

Под правой опорой вниз откладываем ординату  $\frac{1}{\sin \alpha}$  и соединяем с нулевой ординатой под левой опорой. Это левая ветвь линии влияния. На эту ветвь переносим узлы 1, 9 и 10.

Груз  $P=1$  движется правее сечения I-I (узлы 7, 8), в равновесии левая часть:

$$\sum P(y)^{лев} = 0, \quad R_1 - N_{4-8}^{очн} \sin \alpha = 0; \quad (11.29)$$

$$N_{7-8}^{очн} = \frac{R_1}{\sin \alpha} = R_1 \left( \frac{1}{\sin \alpha} \right).$$

Под левой опорой откладываем ординату  $\frac{1}{\sin \alpha}$  и соединяем с нулевой ординатой под правой опорой. Получим правую ветвь линии влияния. На эту ветвь переносим узлы 7 и 8. В пределах рассеченной панели – передаточная прямая (рис. 106, в).

Загружаем шпренгель единичной силой (рис. 106, з). При грузе  $P=1$ , расположенном в узле 13', усилие в стержне 8-13 определится из уравнения (рис. 107):

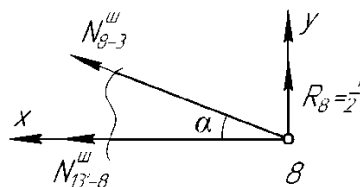


Рисунок 107

$$\sum P(y) = 0, \quad \frac{1}{2} + N_{8-13}^ш \sin \alpha = 0; \quad (11.30)$$

$$N_{8-13}^ш = -\frac{1}{2 \sin \alpha}.$$

Под узлом 13' откладываем вниз ординату  $\frac{1}{2\sin\alpha}$ . При грузе  $P=1$ , расположенном в опорных узлах, усилие в стержне 8-13 равно нулю. Полученные ординаты соединяем передаточными прямыми (рис. 106, д).

**Построим линию влияния**  $N_{13'-8}$ . Линия влияния усилия в стержне 8-13' представляет собой сумму двух линий влияния (рис. 106, и):

$$\text{л. в. } N_{8-13'} = \text{л. в. } N_{8-9}^{очн} + \text{л. в. } N_{13'-8}^{II}. \quad (11.31)$$

Располагаем груз  $P=1$  левее сечения I-I (узлы 1, 9, 10) основной фермы и рассматриваем в равновесии правую часть:

$$\begin{aligned} \sum M_4^{np} = 0, \quad R_7 2d - N_{8-9}^{очн} h = 0; \quad (11.32) \\ N_{8-9}^{очн} = R_7 \left( \frac{2d}{h} \right). \end{aligned}$$

Эта ветвь линии влияния может быть получена из линии влияния  $R_7$  умножением ее ординат на  $\frac{2d}{h}$ . Переносим узлы 1, 9, 10 на левую ветвь линии влияния. При построении правой ветви линии влияния расположим груз  $P=1$  правее сечения I-I. В равновесии рассмотрим левую часть:

$$\begin{aligned} \sum M_4^{лев} = 0; \quad -R_1 2d + N_{8-9}^{очн} h = 0; \quad (11.33) \\ N_{8-9}^{очн} = R_1 \left( \frac{2d}{h} \right). \end{aligned}$$

Под левой опорой откладываем вверх ординату  $\frac{2d}{h}$  и соединяем с нулевой опорой под правой опорой. На эту ветвь переносим узлы 8 и 7. В пределах рассеченной панели – передаточная прямая (рис. 106, ж).

**Построим линию влияния**  $N_{8-13'}^{III}$ . Располагаем груз  $P=1$  в узле 13'. Вырезав узел 8 и рассмотрев его в равновесии, получаем:

$$\begin{aligned} \sum P(x) = 0, \quad N_{8-13'}^{III} + N_{8-13}^{III} \cos\alpha = 0; \quad (11.34) \\ N_{8-13'}^{III} = -N_{8-13}^{III} \cos\alpha = N_{8-13}^{III} (-\cos\alpha). \end{aligned}$$

Таким образом линия влияния  $N_{13'-8}^{III}$  будет равна линии влияния  $N_{8-13}^{III}$ , каждая ордината которой умножается на величину  $(-\cos\alpha)$  (рис. 106, з).

**Построим линию влияния**  $N_{13-13'}^{III}$ . Стержень 13-13' – стержень второй категории, т. е. принадлежит только шпренгелю. При грузе  $P=1$  в узле 13', усилие в стержне 13-13' определится из уравнения, составленного для

узла 13':

$$\begin{aligned}\sum P(y) &= 0, & N_{13-13'}^{III} - P &= 0; \\ N_{13-13'}^{III} &= P = 1.\end{aligned}\tag{11.35}$$

При грузе, расположенном в опорных узлах, усилие  $N_{13-13'}^{III}$  равно нулю. Полученных значений достаточно для построения линии влияния  $N_{13-13'}^{III}$  (рис. 106, к).

Линии влияния усилий в элементах четвертой категории можно получить следующим путем. Построить линию влияния изучаемого усилия для основной фермы (без учета шпренгеля) при движении по верхним узлам фермы, а затем – при движении по нижним узлам. Далее следует определить закон изменения усилия при наличии в системе двухъярусных шпренгелей. Для этого необходимо перемещать груз по узлам шпренгельной системы и учитывать, что груз, расположенный в дополнительных узлах с помощью шпренгелей, передается из узлов одного пояса фермы (например, нижнего) в узлы другого пояса (верхнего).

#### **Пример**

Построить линии влияния в стержнях четвертой категории (рис. 108, а). При построении линий влияния усилий в стержнях четвертой категории следует сначала получить основную систему, исключив шпренгели.

#### **Решение**

Построим линию влияния  $N_{5-10}$ . Груз  $P=1$  движется по узлам нижнего пояса.

Для определения усилия в стержне 5-10 располагаем груз в узле 10 (рис. 108, б).

Из уравнения равновесия имеем:

$$\sum P(y) = 0, \quad N_{5-10} - P = 0; \quad N_{5-10} = P = 1.\tag{11.36}$$

Груз  $P=1$  располагаем в узлах 1, 8, 9, 11, 12, тогда усилие  $N_{5-10} = 0$ .

Полученные ординаты соединяем передаточными прямыми (рис. 108, в).

При движении груза  $P=1$  по узлам верхнего пояса (узлы 2, 3, 4, 5, 6, 7) усилие в стержне  $N_{5-10} = 0$ . Линия влияния представляет собой нулевую линию (рис. 108, г). Груз, расположенный в дополнительных узлах 15' и 16' панелей, с помощью шпренгелей передается в узлы верхнего пояса и в этот момент как бы осуществляется движение поверху (рис. 108, д).

**Построим линию влияния  $N_{4-11}$ .** Груз  $P=1$  движется по узлам нижнего пояса. Для определения усилия в стержне 4-11 проводим сечение I-I.

Располагаем груз левее сечения (узлы 1, 12) – в равновесии правая часть:

$$\sum P(y)^{np} = 0, \quad R_8 + N_{4-11} = 0; \quad N_{11-4} = R_8(-1). \quad (11.37)$$

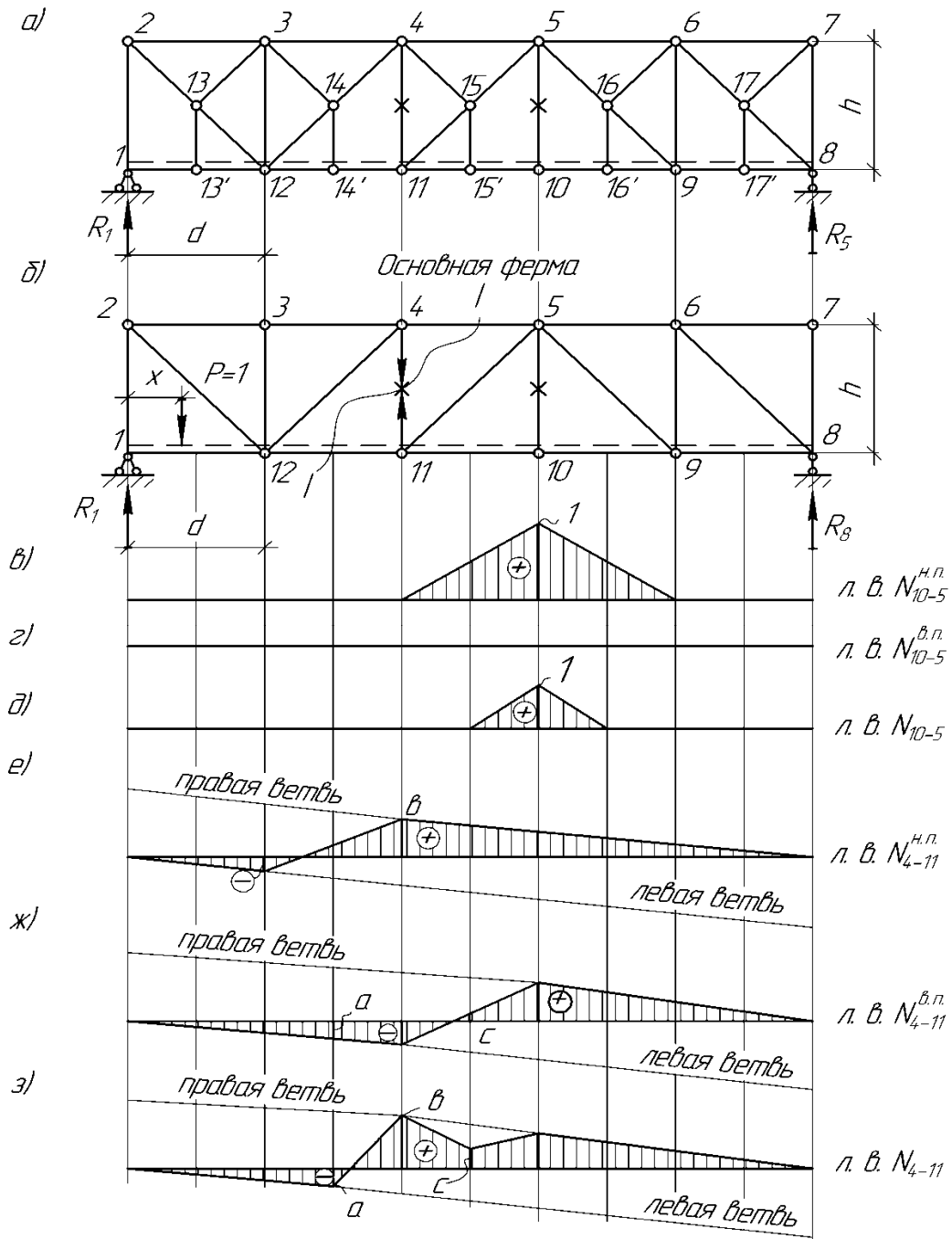


Рисунок 108

Под правой опорой откладываем ординату равную  $-1$  и соединяем с нулем под левой опорой. Получена левая ветвь линии влияния. Узлы 1, 12

переносим на эту ветвь. Располагаем груз  $P=1$  правее сечения I-I – в равновесии левая часть:

$$\sum P(y)^{лев} = 0, \quad R_1 - N_{4-11} = 0; \quad N_{11-4} = R_1(1). \quad (11.38)$$

Под левой опорой откладываем вверх ординату равную 1 и соединяем с нулевой ординатой под правой опорой. На эту ветвь линии влияния переносим узлы 8, 9, 10, 11. В пределах рассеченной панели передаточная прямая (рис. 108, *е*). Аналогично строим ветви линии влияния при движении груза  $P=1$  по узлам верхнего пояса (рис. 108, *ж*).

Груз  $P=1$ , расположенный в дополнительных узлах панелей 13', 14', 16', 17', 25', с помощью шпренгелей передается на верхние узлы фермы и в этот момент как бы осуществляется движение поверху.

Линия влияния усилия  $N_{4-11}$  в заданной шпренгельной ферме изображена на рисунке 108, *з*.

## 12. СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫЕ ПЛОСКИЕ РАМЫ

### 12.1. Общие сведения

Стержневая система, у которой все или некоторые узловые соединения являются жесткими, называется **рамой**. Жесткие узлы обеспечивают полную неизменяемость углов между осями соединяемых стержней. Жесткие узлы препятствуют поворотам стержней, сходящихся в узле, поэтому стержни, образующие раму, кроме растяжения и сжатия, подвергаются изгибу. Рамы, у которых оси всех стержней и нагрузки лежат в одной плоскости и в той же плоскости происходит деформация, называются **плоскими**.

Вертикально расположенные стержни принято называть **стойками**, горизонтально – **ригелями**.

Если усилия во всех стержнях рамы могут быть определены с помощью уравнений статики, то такая рама является статически определимой. Как и в статически определимых балках, в статически определимых рамах геометрическую неизменяемость обеспечивают опорные связи (рис. 109).

Опорные реакции в таких рамах определяются с помощью трех уравнений равновесия:  $\sum P(x) = 0$ ;  $\sum P(y) = 0$ ;  $\sum M = 0$ .

Если статически определимая рама помимо жестких узлов имеет один шарнирный узел, то для обеспечения неизменяемости рамы число опорных связей должно быть четыре.



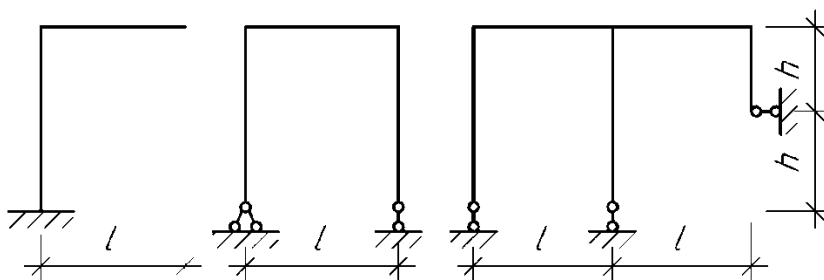


Рисунок 109

В этом случае от вертикальной нагрузки в опорах появляется распор. Такие рамы называются *распорными* (рис. 110).

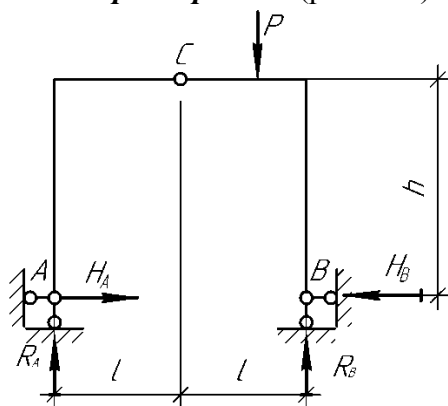


Рисунок. 110

Для определения реакций опор в таких рамах недостаточно трех уравнений статики. Дополнительным уравнением является уравнение

$$\sum M_c^{лев} = 0 \text{ или } \sum M_c^{пр} = 0.$$

## 12.2. Построение эпюр изгибающих моментов поперечных и продольных сил в статически определимых рамах

Статический расчет рамы состоит в построении эпюр поперечных, продольных сил и изгибающих моментов. Ось рамы представляет собой ломаную линию, однако каждый прямолинейный участок ее можно рассматривать как балку. Поэтому, чтобы построить какую-либо эпюру для рамы, нужно построить ее для каждой отдельной балки, входящей в состав рамы. В отличие от обыкновенных балок в сечениях стержней рамы, кроме изгибающих моментов и поперечных сил, обычно действуют еще продольные силы. Для продольных сил сохраняются правила знаков, принятые для балки:

если  $N > 0$  – продольные силы вызывают растяжение;

если  $Q > 0$  – векторы стремятся вращать части рассеченной рамы по

часовой стрелке.

Для изгибающих моментов специального правила знаков не устанавливаем. При составлении выражений для изгибающих моментов принимаем по собственному усмотрению какой-либо момент положительным. Эпюру изгибающих моментов строим на растянутом волокне.

В данном случае можно пользоваться балочным правилом знаков для горизонтальных стержней.

Вертикальные и наклонные стержни можно мысленно поворачивать до совмещения с горизонталью в ту или иную сторону. Например, вертикальные стержни поворачиваем на  $90^\circ$  по часовой стрелке, а наклонные – на угол, меньше  $90^\circ$ .

Например, построим эпюры  $Q$ ,  $M$ ,  $N$  для заданной рамы (рис. 111).

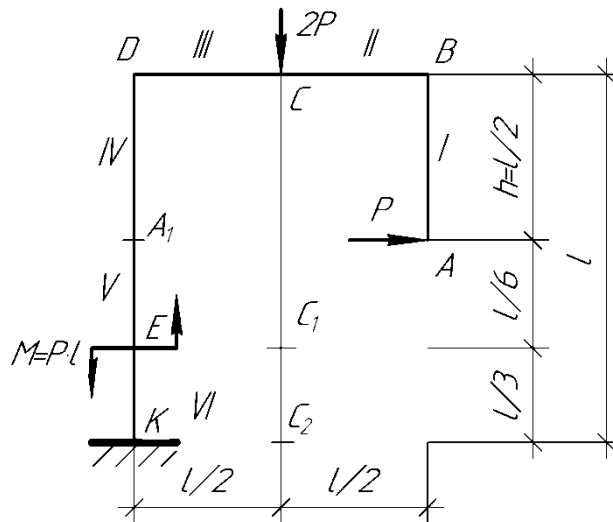


Рисунок 111

В рамах с жесткой заделкой эпюры можно строить, не определяя реакции опор. Разбиваем раму на участки, границами которых являются точки приложения сосредоточенных сил (в том числе и реакций опор), моментов и границы распределенных нагрузок.

Заметим, что ввиду отсутствия распределенной нагрузки все эпюры будут прямолинейными.

Чтобы построить эпюру  $N$ , спроецируем силы, приложенные к части рамы, лежащей по одну сторону от сечения, на ось стержня (рис. 111). Таким образом, на первом участке  $N = 0$  во всех сечениях. На втором участке  $N = P$ , и наконец  $N = -2P$  во всех сечениях стойки. По этим данным строим эпюру  $N$ . Она имеет вид двух прямоугольников, расположенных на ригеле и левой стойке (рис. 113, а).

Перейдем к построению эпюры  $Q$ .

Для любого сечения на первом участке сумма проекций нижележа-

щих сил в сечении одинакова, равна  $P$  и дает отрицательную величину  $Q$ , т. е.  $Q = -P$ . А в любом сечении стойки сила  $Q = P$ .

Чтобы пояснить знаки в этом случае, покажем направления векторов  $Q$ , например в сечениях I и IV.

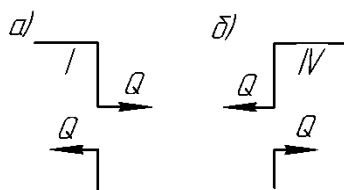


Рисунок 112

На рисунке 112, а векторы стремятся повернуть части рассеченной рамы против часовой стрелки, значит  $Q < 0$ , а на рисунке 112, б – по часовой стрелке, поэтому здесь  $Q > 0$ . В сечениях участка II (рис. 111) поперечная сила равна нулю. На третьем участке поперечная сила будет равна  $2P$  (рис. 113, б). Для построения эпюры изгибающих моментов вычислим величины изгибающих моментов в характерных сечениях А, В, С, D, E, К. Очевидно, что  $M_A = 0$ . В сечении В стержня АВ, имеем:  $M_B = P \cdot AB = \frac{Pl}{2}$ . Причем от действия этого момента растянуты внутренние волокна. Поэтому на эпюре  $M$  из точки В откладываем с внутренней стороны ординату равную  $\frac{Pl}{2}$ . Эпюра на участке АВ представлена прямой линией (рис. 113, в).

В сечении В стержня ВD имеем ту же величину:  $M_B = P \cdot AB = P \frac{l}{2}$ .

Внутренние волокна растянутые. Такой же изгибающий момент будет и в сечении С. Проводим прямую параллельную оси стержня.

В сечении С приложена внешняя сила, поэтому здесь на эпюре изгибающих моментов должен быть перелом (рис. 113, в).

В сечении D стержня ВD изгибающий момент вычисляется от сил  $P$  и  $2P$ .

Находим значение момента в точке D:

$$M_D = P \cdot A_1D - 2P \cdot CD = \frac{Pl}{2} - 2P \frac{l}{2} = \frac{Pl}{2} - Pl = -P \frac{l}{2}. \quad (12.1)$$

Знак «-» говорит о том, что в этом сечении растянуты верхние волокна. Откладываем вверх ординату, равную  $\frac{Pl}{2}$  и проводим прямую, соединяющую полученные ординаты.

На стержне DK пусть положительным будет момент, растягиваю-

ший внешние волокна, тогда в сечении:

$$M_D = -P \cdot A_1 D + 2P \cdot CD = -P \frac{l}{2} + 2P \frac{l}{2} = \frac{Pl}{2}. \quad (12.2)$$

В сечении  $E$  должен быть скачок, поэтому значение момента вычисляем отдельно.

$$\text{В сечении } V: M'_E = P \cdot A_1 E + 2P \cdot C_1 E = P \frac{l}{6} + 2P \frac{l}{2} = \frac{7}{6} Pl.$$

В сечении  $VI$ :

$$M''_E = P \cdot A_1 E + 2P \cdot C_1 E - M = P \frac{l}{6} + 2P \cdot \frac{l}{2} - Pl = \frac{1}{6} Pl.$$

В сечении  $K$ :

$$M_K = P \cdot A_1 K + 2P \cdot C_2 K - M = P \frac{l}{2} + 2P \frac{l}{2} - Pl = \frac{Pl}{2}. \quad (12.3)$$

Все моменты являются положительными. Следовательно, во всех этих сечениях, согласно принятому для стержня  $DK$  правилу знаков, растянутыми будут волокна внешние. Поэтому откладываем соответствующие ординаты и соединяем прямыми линиями (рис. 113, в).

Для проверки правильности построения эпюр  $M$ ,  $Q$ ,  $N$  вырежем из рамы узлы. Вырежем сначала узел  $B$  (рис. 114, а) и заменим действие на него оставшихся частей рамы моментами и силами, взятыми из трех построенных эпюр (рис. 113, а, б, в), учитывая, что эпюра моментов построена со стороны растянутых волокон, положительная поперечная сила вращает элемент по часовой стрелке и положительная продольная сила растягивает элемент.

На рисунке 114 видно, что узлы  $B$  и  $D$  находятся в равновесии.

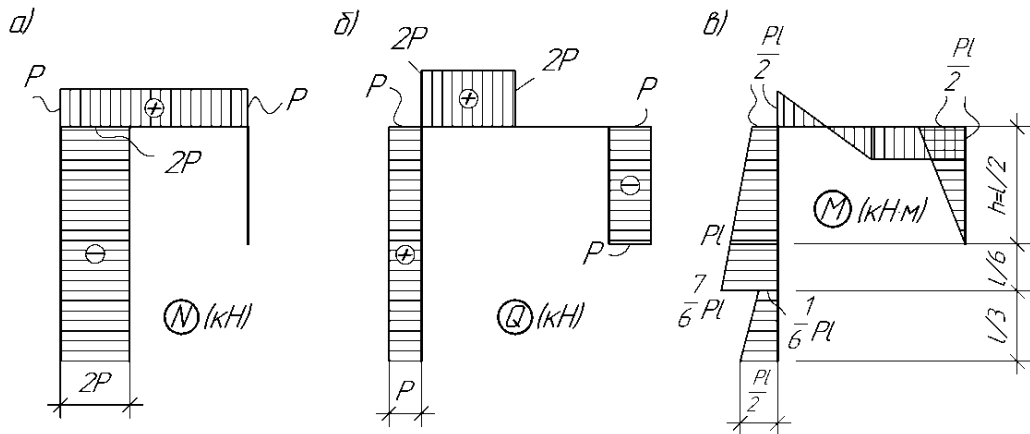


Рисунок 113

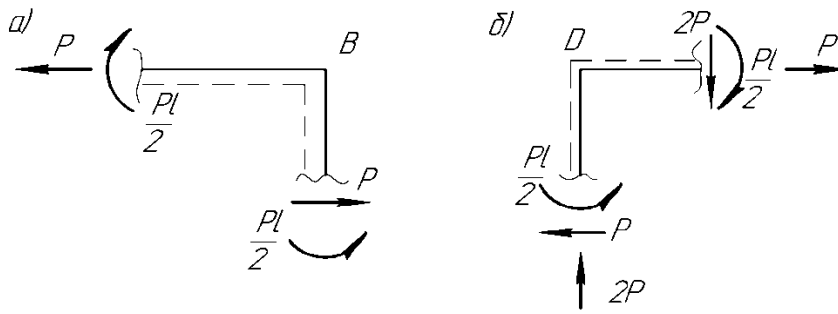


Рисунок 114

**Пример**

Построить эпюры внутренних усилий в раме (рис. 115), если

$$P = 10 \text{ кН}; q = 2 \frac{\text{кН}}{\text{м}}; M = 4 \text{ кНм}; a = 2 \text{ м.}$$

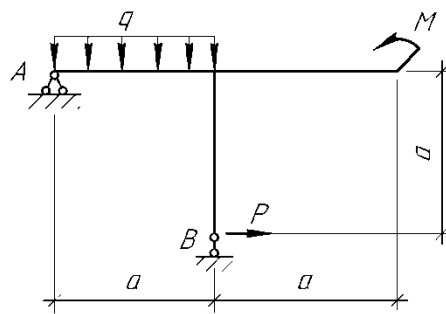


Рисунок 115

**Решение**

Рассмотрим расчетную схему (рис. 116).

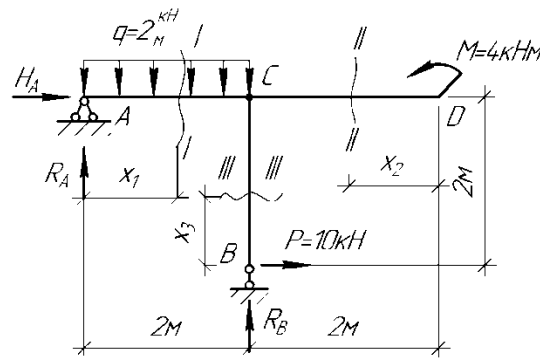


Рисунок 116

Из уравнений равновесия статики определяем опорные реакции и выполняем проверку их определения:

$$\sum P(x) = 0, \quad H_A + P = 0; \quad H_A = -P = -10 \text{ кН.} \quad (12.4)$$

$$\sum M_A = 0, \quad -q2 \cdot 1 + M + P2 + R_B 2 = 0; \quad (12.5)$$

$$R_B = \frac{q2 \cdot 1 - M - P2}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 1 - 4 - 10 \cdot 2}{2} = -10 \text{ кН.}$$

$$\sum M_B = 0, \quad M + q2 \cdot 1 - H_A 2 - R_A 2 = 0; \quad (12.6)$$

$$R_A = \frac{M + q2 \cdot 1 - H_A 2}{2} = \frac{4 + 2 \cdot 2 \cdot 1 - (-10) \cdot 2}{2} = \frac{+20 + 8}{2} = 14 \text{ кН.} \quad (12.7)$$

Проверка:  $\sum P(y) = 0, \quad R_A - q2 + R_B = 0;$

$$14 - 2 \cdot 2 + (-10) = 0;$$

$$14 - 14 = 0.$$

Опорные реакции определены верно. Рама имеет три участка. В пределах каждого участка на расстоянии  $x$  проводим сечения и относительно этих сечений записываем законы изменения внутренних усилий для построения эпюр  $Q, M, N$ .

**Сечение I-I** ( $0 \leq x_1 \leq 2$  м).

$$Q_I = R_A - qx_1;$$

при  $x_1 = 0 \quad Q_I = R_A = 14 \text{ кН};$

при  $x_1 = 2 \text{ м} \quad Q_I = R_A - q2 = 14 - 2 \cdot 2 = 10 \text{ кН.}$

$$N_I = -H_A = -(-10) = 10 \text{ кН};$$

$$M_I = R_A x_1 - qx_1 \frac{x_1}{2}; \quad \text{при } x_1 = 0 \quad M_I = 0;$$

при  $x_1 = 2 \text{ м} \quad M_I = R_A 2 - q2 \cdot \frac{2}{2} = 14 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 = 28 - 4 = 24 \text{ кНм.}$

Строим эпюры  $Q, M, N$  на участке  $AC$  (рис. 117, а, б, в).

**Сечение II-II** ( $0 \leq x_2 \leq 2$  м).

$$Q_{II} = 0; \quad N_{II} = 0; \quad M_{II} = M = 4 \text{ кНм.}$$

Получили значения внутренних усилий на участке  $CD$ .

**Сечение III-III** ( $0 \leq x_3 \leq 2$  м).

Развернем раму по часовой стрелке на угол  $90^\circ$ . Рассматриваем элемент  $BC$ , как обычную балку (рис. 117, а, б, в).

$$Q_{III} = -P = -10 \text{ кН};$$

$$N_{III} = -R_B = -(-10) = 10 \text{ кН};$$

$$M_{III} = -Px_3; \quad \text{при } x_3 = 0 \quad M_{III} = 0;$$

при  $x_3 = 2 \text{ м} \quad M_{III} = -10 \cdot 2 = -20 \text{ кНм.}$

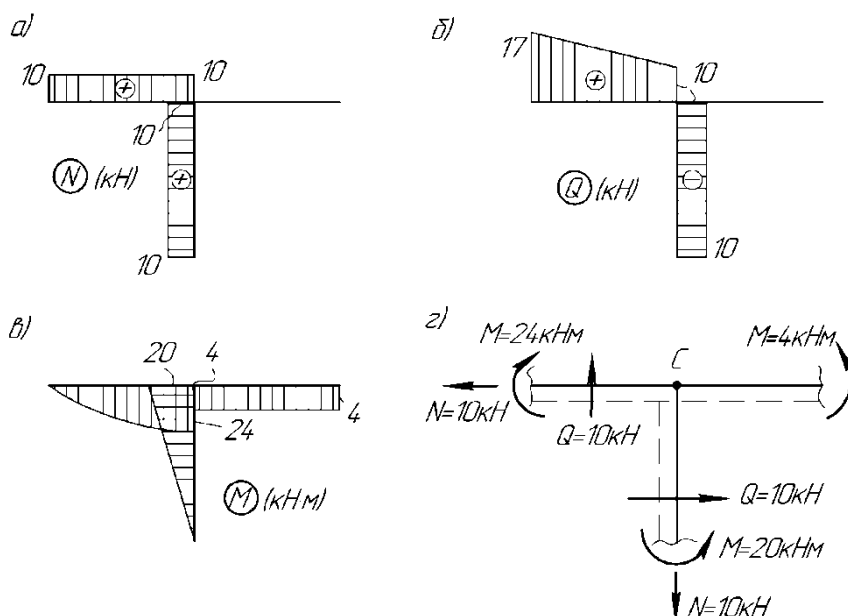


Рисунок 117

Для проверки составляем уравнения равновесия узла  $C$  (рис. 117,  $z$ ):

$$\sum M_c = 0, \quad 4 + 20 - 24 = 0; \quad 24 - 24 = 0.$$

$$\sum P(y) = 0, \quad -10 + 10 = 0;$$

$$\sum P(x) = 0, \quad -10 + 10 = 0.$$

Узел  $C$  в равновесии. Эпюры построены верно.

### 13. РАБОТА ВНЕШНИХ И ВНУТРЕННИХ СИЛ

Действие нагрузки на любое сооружение вызывает его деформацию. Определим нагрузку, статически приложенную к некоторой упругой системе (рис. 118), материал которой удовлетворяет закону Гука.

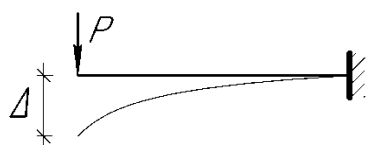


Рисунок 118

При малых деформациях к этой системе применим принцип независимости действия сил. Следовательно, перемещения отдельных точек и сечений конструкции прямо пропорциональны числовой величине вызывающей их нагрузки:

$$\Delta = \alpha P, \quad (13.1)$$

где  $\Delta$  – перемещение по направлению действия сил  $P$ ;  
 $\alpha$  – некоторый коэффициент, зависящий от материала, схемы и размеров сооружения.

Увеличим силу  $P$  на бесконечно малую величину  $dP$ . Это приращение вызовет возрастание перемещения на  $d\Delta$ .

Составим выражение элементарной работы на перемещении  $d\Delta$ , не учитывая при этом бесконечно малые величины второго порядка малости:

$$dA = P \cdot d\Delta, \quad (13.2)$$

где  $d\Delta = \alpha \cdot dP$ .

$$\text{Тогда} \quad dA = P\alpha \cdot dP. \quad (13.3)$$

Интегрируем это выражение в пределах полного изменения силы от нуля до ее конечного значения:

$$A = \alpha \int_0^P P \cdot dP = \frac{\alpha P^2}{2}. \quad (13.4)$$

Так как  $\Delta = \alpha P$ , следовательно

$$A = \frac{\alpha P \cdot P}{2} = \frac{P\Delta}{2}. \quad (13.5)$$

При статическом действии на сооружение нескольких внешних сил работа будет равна

$$A = \sum \frac{P_i \Delta_i}{2}. \quad (13.6)$$

Работу внешних сил на вызванных ими перемещениях можно выразить через изгибающие моменты, продольные и поперечные силы, возникающие в поперечных сечениях стержневой конструкции. Выделим из прямолинейного стержня бесконечно малый элемент  $dx$ . К элементу  $dx$  приложены продольная сила  $N$ , изгибающий момент  $M$  и поперечная сила  $Q$  (рис. 119).

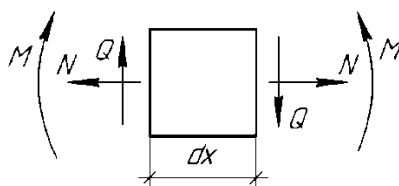


Рисунок 119

Усилия  $N$ ,  $M$ ,  $Q$  являются внутренними. Пользуясь принципом независимости действия сил, определим элементарную работу каждого из этих воздействий.



### 13.1. Элементарная работа продольной силы

Левое сечение элемента  $dx$  считаем неподвижным (рис. 120).

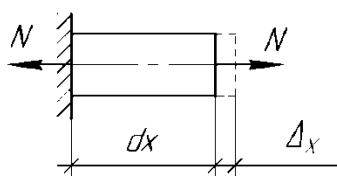


Рисунок 120

Тогда правое под действием силы  $N$  переместится на величину  $\Delta_x = \frac{Ndx}{EA}$ , и элементарная работа будет равна

$$dA_N = \frac{N\Delta_x}{2} = \frac{N \cdot N \cdot dx}{2EA}. \quad (13.7)$$

### 13.2. Элементарная работа изгибающего момента

Элемент  $dx$  находится под действием только изгибающего момента (рис. 121).

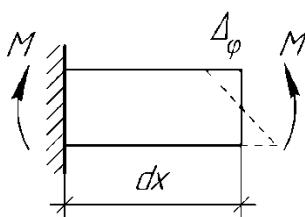


Рисунок 121

$$dA_M = \frac{M\Delta_\varphi}{2}, \quad (13.8)$$

$$\text{т. к. } \Delta_\varphi = \frac{M \cdot dx}{EI}. \quad (13.9)$$

В этом случае элементарная работа будет равна

$$dA_M = \frac{M \cdot M \cdot dx}{2EI}. \quad (13.10)$$

### 13.3. Элементарная работа поперечной силы

Закрепив левое сечение элемента  $dx$ , приложим к правому сечению касательные усилия  $\tau \cdot dA$ , равнодействующей которых является поперечная сила  $Q$  (рис. 122).

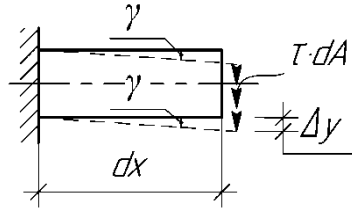


Рисунок 122

Перемещение  $\Delta_y$ , вызванное поперечной силой  $Q$ , равно

$$\Delta_y = \gamma \cdot dx, \quad (13.11)$$

где  $\gamma = \frac{\tau}{G}$ ,  $\tau = \frac{Q}{A}$ .

Таким образом

$$\Delta_y = \frac{Q \cdot dx}{GA}. \quad (13.12)$$

Элементарная работа поперечной силы на перемещении  $\Delta_y$  выражается формулой

$$dA_Q = \frac{Q \cdot Q \cdot dx}{2GA} \eta. \quad (13.13)$$

При одновременном действии на выделенный элемент  $dx$  внутренних усилий  $N$ ,  $Q$  и  $M$  элементарную работу определяем по следующей формуле:

$$dA = dA_N + dA_M + dA_Q$$

или

$$dA = \frac{N^2 \cdot dx}{2EA} + \frac{M^2 \cdot dx}{2EI} + \frac{Q^2 \cdot dx}{2GA} \eta, \quad (13.14)$$

где  $\eta$  – поправочный коэффициент, зависящий от неравномерности распределения касательных напряжений.

Интегрируя выражение (13.14) в пределах длины  $l$  каждого участка всех стержней и проведя суммирование по всем участкам системы, получаем:

$$A = \sum \int_0^l \frac{M^2 \cdot dx}{2EI} + \sum \int_0^l \frac{N^2 \cdot dx}{2EA} + \sum \int_0^l \frac{Q^2 \cdot dx}{2GA} \eta - \text{полная работа. (13.15)}$$

#### 13.4. Теорема взаимности работ (теорема Бетти)

Рассмотрим простую балку под действием сил  $P_1$  и  $P_2$  (рис. 123, а).  
Случай, когда к балке приложена сила  $P_1$ , назовем 1-м состоянием (рис. 123, б), случай, когда приложена сила  $P_2$  – 2-м состоянием (рис. 123, в).

Приложим первоначально к балке статически действующую на нее силу  $P_1$  (рис. 123, б).

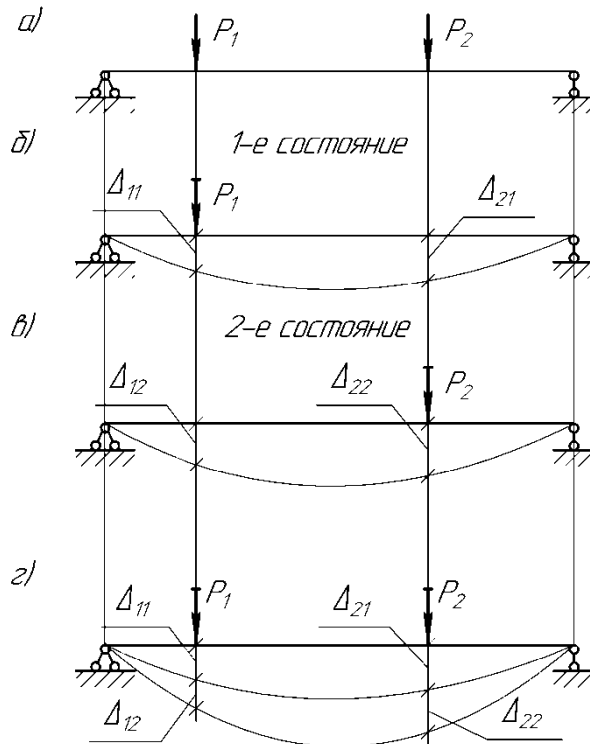


Рисунок 123

Эта сила совершит на перемещении  $\Delta_{11}$  действительную работу:

$$A_{11} = \frac{P_1 \Delta_{11}}{2}. \quad (13.16)$$

Сила 1-го состояния  $P_1$  вызывает по направлению силы  $P_2$  прогиб  $\Delta_{21}$ .

Затем рассмотрим 2-е состояние (рис. 123, в). Прогиб балки под статически приложенной силой  $P_2$  равняется  $\Delta_{22}$ . Следовательно, работа на этом перемещении:

$$A_{22} = \frac{P_2 \Delta_{22}}{2}. \quad (13.17)$$

В то же время сила  $P_1$ , оставаясь постоянной, совершит возможную работу на перемещении  $\Delta_{12}$ :

$$A_{12} = P_1 \Delta_{12}. \quad (13.18)$$

Полная работа сил  $P_1$  и  $P_2$  в этом случае равна

$$A = A_{11} + A_{22} + A_{12}; \quad (13.19)$$

$$A = \frac{P_1 \Delta_{11}}{2} + \frac{P_2 \Delta_{22}}{2} + P_1 \Delta_{12}. \quad (13.20)$$

Если изменить порядок приложения сил, т. е. сначала приложить силу  $P_2$ , а затем силу  $P_1$ , то полная работа этих сил в данном случае будет равна

$$A = \frac{P_2 \Delta_{22}}{2} + \frac{P_1 \Delta_{11}}{2} + P_2 \Delta_{21}. \quad (13.21)$$

Отметим, что от порядка приложения сил величина полной работы не меняется. Следовательно, правые части обоих равенств можно приравнять:

$$\frac{P_1 \Delta_{11}}{2} + \frac{P_2 \Delta_{22}}{2} + P_1 \Delta_{12} = \frac{P_2 \Delta_{22}}{2} + \frac{P_1 \Delta_{11}}{2} + P_2 \Delta_{21}, \quad (13.22)$$

откуда  $P_1 \Delta_{12} = P_2 \Delta_{21}$ .

Значение  $P_1 \cdot \Delta_{12}$  представляет собой работу  $A_{12}$  силы  $P_1$  первого состояния на перемещении по ее направлению, вызванном силой  $P_2$  второго состояния. Аналогично,  $P_2 \cdot \Delta_{21}$  представляет собой работу  $A_{21}$  силы  $P_2$  второго состояния на перемещении по направлению, вызванном силой  $P_1$  первого состояния. Следовательно,  $A_{12} = A_{21}$ .

Полученное равенство выражает **теорему о взаимности работ (теорему Бетти)**, которая формулируется так: **возможная работа первой силы на перемещении, вызванном второй силой, равна возможной работе второй силы на перемещении, вызванном первой силой.**

При совместном действии сил  $P_1$  и  $P_2$  (рис. 123, з) работа  $A$  этих сил будет равна полусумме произведений каждой силы на соответствующее ей полное перемещение, вызванное обеими силами:

$$A = \frac{P_1 (\Delta_{11} + \Delta_{12})}{2} + \frac{P_2 (\Delta_{22} + \Delta_{21})}{2}, \quad (13.23)$$

где  $\Delta_{11}$  – перемещение по направлению силы  $P_1$  от действия силы  $P_1$ ;  
 $\Delta_{12}$  – перемещение по направлению силы  $P_1$  от действия силы  $P_2$ ;  
 $\Delta_{21}$  – перемещение по направлению силы  $P_2$  от действия силы  $P_1$ ;  
 $\Delta_{22}$  – перемещение по направлению силы  $P_2$  от действия силы  $P_2$ .  
 Приравняв выражения (13.20) и (13.23), получим:

$$\frac{P_1\Delta_{11}}{2} + \frac{P_2\Delta_{22}}{2} + P_1\Delta_{12} = \frac{P_1(\Delta_{11} + \Delta_{12})}{2} + \frac{P_2(\Delta_{22} + \Delta_{21})}{2}, \quad (13.24)$$

откуда  $P_1\Delta_{12} = P_2\Delta_{21}$  или  $A_{12} = A_{21}$ . Работы равны.

Эта теорема справедлива не только для балки, но и для любой упругой системы, причем и для тех случаев, когда к системе прикладывается любое число сил и моментов.

### 13.4. Теорема взаимности перемещений (теорема Максвелла)

Рассмотрим балку в следующих двух состояниях: в 1-м состоянии приложим к балке силу  $P_1=1$  (рис. 124, а), а во 2-м состоянии – силу  $P_2=1$  (рис. 124, б).

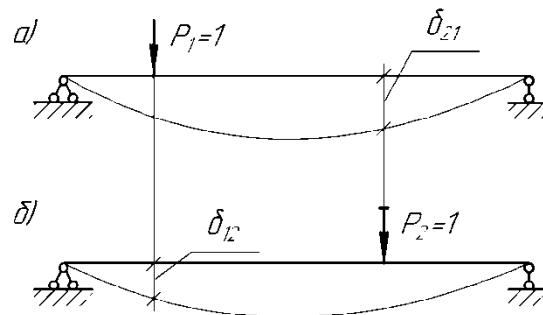


Рисунок 124

Обозначим перемещения, вызванные единичными силами или моментами (т. е. силами  $P=1$  или моментом  $M=1$ ), знаком  $\delta$  в отличие от перемещений, вызванных силами и моментами не равными единице, обозначаемых знаком  $\Delta$ .

Применим теорему о взаимности работ:

$$P_1\delta_{12} = P_2\delta_{21}. \quad (13.25)$$

$$\text{Так как } P_1 = P_2 = 1, \text{ значит } \delta_{12} = \delta_{21}. \quad (13.26)$$

Равенство (13.26) выражает **теорему о взаимности перемещений (теорему Максвелла)**, которая формулируется так: **перемещение по направлению первой единичной силы, вызванное второй единичной силой, равно перемещению по направлению второй силы, вызванному первой силой.**

### 13.5. Вычисление перемещений по формуле Мора

При определении перемещений рассмотрим заданную систему в двух следующих состояниях:

1-е состояние – действительное или грузовое, когда сооружение нагружено заданной нагрузкой (рис. 125, а);

2-е состояние – единичное, когда к системе по направлению искомого перемещения приложена единичная сила, а заданной нагрузкой пренебрегаем (рис. 125, б).

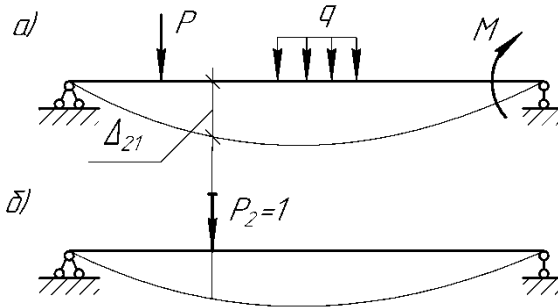


Рисунок 125

Составим выражение работы  $A_{21}$  силы  $P_2=1$  на перемещении  $\Delta_{21}$ , возникающем от сил первого состояния:

$$A_{21} = P_2 \Delta_{21} = 1 \Delta_{21} = \Delta_{21}. \quad (13.27)$$

Выразим  $A_{21}$  через внутренние усилия в стержнях системы:

$$A_{21} = \Delta_{21} = \sum_0^l \int \bar{M}_2 \frac{M_1 \cdot dx}{EI} + \sum_0^l \int \bar{N}_2 \frac{N_1 \cdot dx}{EA} + \sum_0^l \int \bar{Q}_2 \frac{Q_1 \cdot dx}{GA} \eta. \quad (13.28)$$

Черточки над  $M_2$ ,  $Q_2$  и  $N_2$  указывают на то, что эти внутренние усилия вызваны действием силы, равной единице.

Для определения линейного перемещения в заданной точке прикладываем единичную безразмерную силу, а для определения угла поворота в какой-либо точке прикладываем единичный безразмерный момент.

Индексы 1 и 2 в формуле (13.28) заменяем буквами  $m$  и  $n$ , тогда

$$\Delta_{mn} = \sum_0^l \int \bar{M}_m \frac{M_n \cdot dx}{EI} + \sum_0^l \int \bar{N}_m \frac{N_n \cdot dx}{EA} + \sum_0^l \int \bar{Q}_m \frac{Q_n \cdot dx}{GA} \eta, \quad (13.29)$$

где  $\Delta_{mn}$  – перемещение по направлению силы  $P_m=1$ , вызванное действием заданной нагрузки  $n$ .

Пренебрегая влиянием продольной и поперечной сил, упростим выражение (13.29):

$$\Delta_{mn} = \sum \int_0^l \bar{M}_m \frac{M_n \cdot dx}{EI}. \quad (13.30)$$

Определение перемещения с помощью полученной формулы производится в следующем порядке:

- 1) находим выражение  $M_n$  от заданной нагрузки как функцию координаты  $x$  произвольного сечения;
- 2) по направлению искомого перемещения прикладываем единичную силу или единичный момент;
- 3) определяем усилие  $\bar{M}_m$  от соответствующего единичного усилия;
- 4) найденные выражения  $M_n$  и  $\bar{M}_m$  подставляем в правую часть формулы (13.30) и интегрируем по участкам.

Если  $\Delta_{mn}$  положительное – перемещение совпадает с направлением единичной силы или единичного момента, а если отрицательное – перемещение противоположно этому направлению.

**Пример**

Определить вертикальное перемещение точки  $B$  рамы (рис. 126, а).

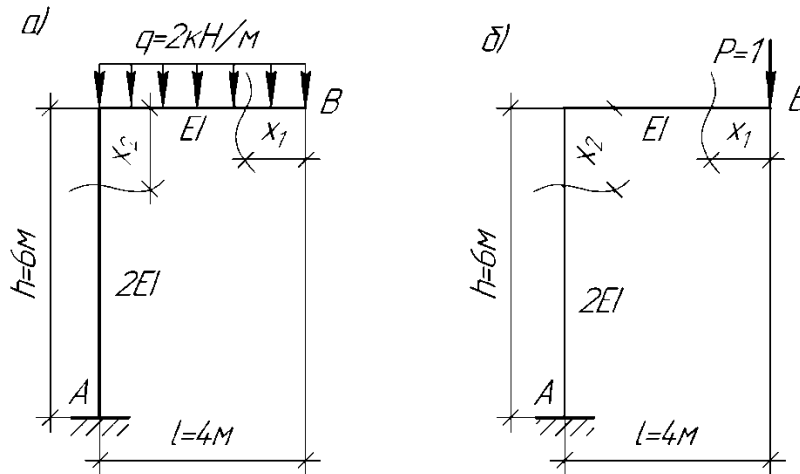


Рисунок 126

**Решение**

Во втором состоянии приложим в точке  $B$  вертикальную единичную силу (рис. 126, б).

Составим выражения изгибающих моментов.

Для ригеля  $0 \leq x_1 \leq l$ :

- а) от заданной нагрузки

$$M_p = -qx_1 \frac{x_1}{2} = -2 \frac{x_1^2}{2} = -x_1^2; \quad (13.31)$$

б) от единичной нагрузки

$$\bar{M}_1 = -Px_1 = -1x_1 = -x_1. \quad (13.32)$$

Для стойки  $0 \leq x_2 \leq h$ :

а) от заданной нагрузки

$$M_p = -ql \frac{l}{2} = -2 \frac{l^2}{2} = -l^2; \quad (13.33)$$

б) от единичной силы

$$\bar{M}_2 = -Pl = -1l = -l. \quad (13.34)$$

Искомое перемещение:

$$\begin{aligned} y_B &= \frac{1}{EI} \int_0^l (-x^2)(-x_1) dx + \frac{1}{2EI} \int_0^h (-l^2)(-l) dx = \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^l x^3 \cdot dx + \frac{1}{2EI} l^3 \int_0^h dx = \frac{1}{EI} \frac{x^4}{4} \Big|_0^l + \frac{l^3}{2EI} x \Big|_0^h = \\ &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{l^4}{4} + \frac{l^3 h}{2EI} = \frac{1}{EI} \cdot \left[ \frac{4^4}{4} + \frac{4^3 \cdot 6}{2} \right] = \frac{1}{EI} [64 + 192] = \frac{256}{EI} \text{ (м)}. \end{aligned} \quad (13.35)$$

### 13.6. Правило Верещагина

Вычисление интеграла  $\Delta_{mn} = \int_0^l \bar{M}_m \frac{M_n \cdot dx}{EI}$  по формуле (13.30) можно

упростить, если применить способ перемножения эпюр, предложенный А. Н. Верещагиным. Этот способ часто называют **правилом Верещагина**: *если одна из перемножаемых эпюр ( $\bar{M}_m$ ) очерчена прямой, а другая ( $M_n$ )*

*имеет произвольное очертание,  $\Delta_{mn} = \int_0^l \bar{M}_m \frac{M_n \cdot dx}{EI}$  можно вычислить*

*как произведение площади эпюры произвольного очертания на ординату под ее центром тяжести, взятую из прямолинейной эпюры.*

Рассмотрим одноименные участки на грузовой и единичной эпюрах. Пусть эпюра  $M_n$  имеет криволинейное очертание, а единичная – прямолинейное (рис. 127, а, в).

Выразим ординату  $\bar{M}_m$  единичной эпюры через произвольную абсциссу  $x$ :

$$\bar{M}_m = x \operatorname{tg} \alpha. \quad (13.36)$$



Тогда

$$\Delta_{mn} = \frac{1}{EI} \int_l \bar{M}_m M_n \cdot dx = \frac{1}{EI} \int_l M_n x \operatorname{tg} \alpha \cdot dx = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{EI} \int_l M_n x \cdot dx. \quad (13.37)$$

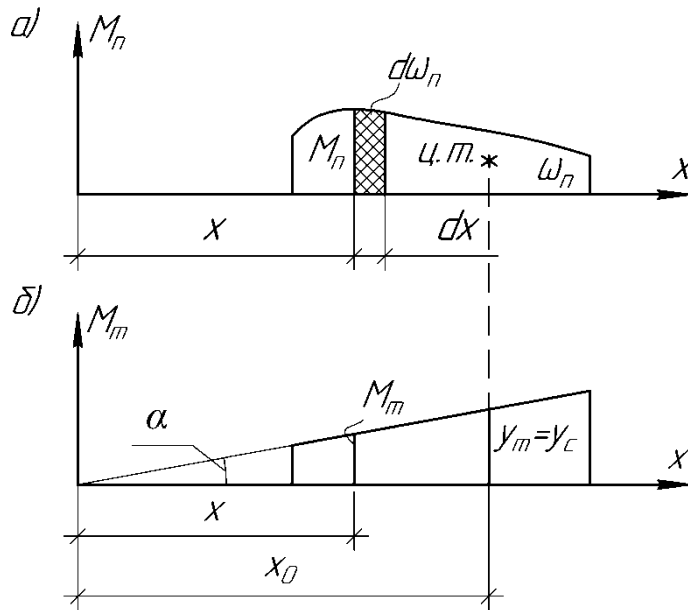


Рисунок 127

Из рисунка (127, а) видно, что  $M_n \cdot dx$  – элементарная площадка  $d\omega_n$  эпюры  $M_n$ , а произведение  $M_n x \cdot dx = x \cdot d\omega_n$  – элементарный статический момент этой площадки относительно вертикальной оси. Следовательно,

$$\Delta_{mn} = \int_l x M_n \cdot dx = S = \omega_n x_0, \quad (13.38)$$

где  $S$  – статический момент площади  $\omega_n$  эпюры  $M_n$  относительно вертикальной оси;

$x_0$  – абсцисса центра тяжести этой площади.

Значит

$$\Delta_{mn} = \frac{1}{EI} \int_l \bar{M}_m M_n \cdot dx = \frac{1}{EI} \operatorname{tg} \alpha \omega_n x_0 = \frac{\omega_n y_m}{EI}. \quad (13.39)$$

Опустив индексы в обозначениях правой части, получим

$$\Delta_{mn} = \frac{\omega y}{EI}. \quad (13.40)$$

Если рассматриваемая система имеет несколько участков, переме-

щение определяется по формуле

$$\Delta_{mn} = \sum \frac{\omega y}{EI}. \quad (13.41)$$

*Примечания:*

1) произведение  $\omega y$  следует считать положительным, если площадь  $\omega$  и ордината  $y$  расположены по одну сторону оси стержня, т. е. имеют одинаковые знаки, и отрицательными, если расположены по разные стороны оси;

2) эпюра, из которой берут площадь  $\omega$ , может быть любого очертания, эпюра же, из которой берется ордината  $y$ , обязательно должна быть прямолинейной;

3) если обе эпюры прямолинейные, то из одной (любой из них) берут площадь  $\omega$ , а из другой – ординату  $y$ .

Для упрощения перемножения эпюр предлагаем две формулы:

– перемножение прямолинейных участков (рис. 128):

$$\frac{l}{6EI} [2ac + 2bd + ad + cb]; \quad (13.42)$$

– перемножение криволинейного участка с прямолинейным (рис. 129):

$$\frac{l}{6EI} [ac + 4fk + bd]. \quad (13.43)$$

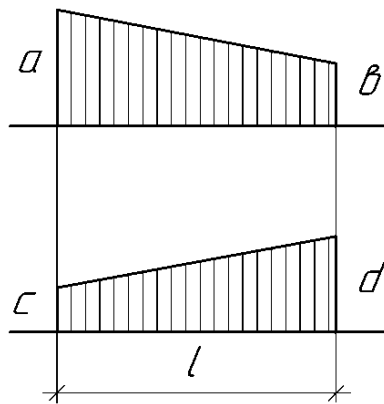


Рисунок 128

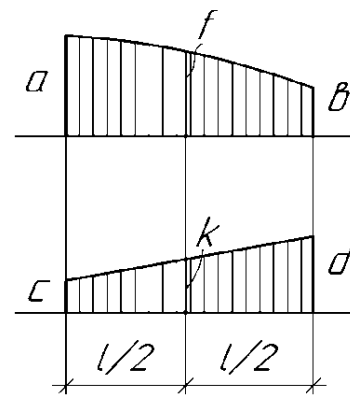


Рисунок 129

**Пример**

Определить перемещение в точке  $B$ , используя правило Верещагина (рис. 130,  $a$ ).

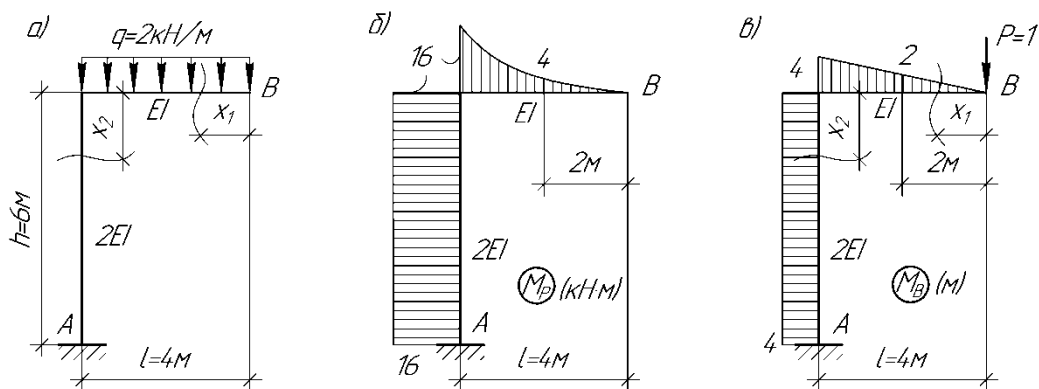


Рисунок 130

**Решение**

Для построения эпюры  $M_p$  в раме вычислим изгибающие моменты в сечениях ее элементов:

**Сечение I-I** ( $0 \leq x_1 \leq 4$  м).

$$M_p = -qx_1 \frac{x_1}{2}; \quad (13.44)$$

при  $x_1 = 0$   $M_p = 0$ ;

при  $x_1 = 2$  м  $M_p = -2 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = -4$  кНм;

при  $x_1 = 4$  м  $M_p = -2 \cdot 4 \cdot \frac{4}{2} = -16$  кНм.

**Сечение II-II** ( $0 \leq x_2 \leq 6$  м).

$$M_p = -ql \frac{l}{2} = -q \frac{l^2}{2}; \quad (13.45)$$

при  $x_2 = 0$   $M_p = -2 \cdot \frac{4^2}{2} = -16$  кНм;

при  $x_2 = 6$  м  $M_p = -2 \cdot \frac{4^2}{2} = -16$  кНм.

Эпюра  $M_p$  приведена на рисунке 130, б.

Приложив в точке  $B$  вертикальную единичную эпюру, вычисляем изгибающие моменты для этого состояния.

**Сечение I-I** ( $0 \leq x_1 \leq 4$  м).

$$\bar{M}_B = -Px_1 = -1x_1 = -x_1; \quad (13.46)$$

при  $x_1 = 0$   $\bar{M}_B = 0$ ;

при  $x_1 = 4$  м  $\bar{M}_B = -4$  м.

**Сечение II-II** ( $0 \leq x_2 \leq 6$  м).

$$\bar{M}_B = -Pl = -1l; \quad (13.47)$$

при  $x_2 = 0$        $\bar{M}_B = -1l = -4$  м;

при  $x_2 = 6$  м     $\bar{M}_B = -1l = -4$  м.

Эпюра  $\bar{M}_B$  показана на рисунке 130, в.

Используя вышеприведенные формулы, определяем вертикальное перемещение в точке  $B$  рамы.

$$\begin{aligned} y_B &= \frac{4}{6EI} \cdot [16 \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 2] + \frac{6}{6 \cdot 2EI} \cdot \left[ \begin{array}{l} 2 \cdot 16 \cdot 4 + 2 \cdot 16 \cdot 4 + \\ + 16 \cdot 4 + 4 \cdot 16 \end{array} \right] = \\ &= \frac{64}{EI} + \frac{192}{EI} = \frac{256}{EI} \text{ (м)}. \end{aligned} \quad (13.48)$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анохин, Н. Н. Строительная механика в примерах и задачах : учебное пособие. В 2-х частях. Часть 2 / Н. Н. Анохин. – Москва : АСВ, 2010. – 464 с.
2. Бабанов, В. В. Строительная механика. В 2-х томах. Том 1 / В. В. Бабанов. – Москва : Academia, 2017. – 256 с.
3. Борисевич, А. А. Строительная механика : учебник для вузов / А. А. Борисевич, Е. М. Сидорович, В. И. Игнатюк. – Минск : БНТУ, 2007. – 821 с.
4. Городецкий, А. С. Строительная механика : учебник для бакалавров / В. А. Смирнов, А. С. Городецкий ; под редакцией В. А. Смирнова. – Москва : Юрайт, 2013. – 423 с.
5. Дарков, А. В. Строительная механика / А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. – Санкт-Петербург : Лань, 2010. – 656 с.
6. Коробко, В. И. Строительная механика стержневых систем : учебник / В. И. Коробко. – Москва : АСВ 2007. – 510 с.
7. Постников, М. М. Строительная механика : учебник / М. М. Постников. – Санкт-Петербург : Лань, 2014. – 656, с.
8. Саргсян, А. Е. Строительная механика. Механика инженерных конструкций и сооружений / А. Е. Саргсян. – Москва : Высшая школа, 2008. – 462 с.
9. Смирнов, В. А. Строительная механика : учебник для вузов / В. А. Смирнов, А. С. Городецкий. – Люберцы : Юрайт, 2016. – 423 с.
10. Старцева, Л. В. Строительная механика в примерах и задачах : учебное пособие / Л. В. Старцева, В. Г. Архипов, А. А. Семенов. – Москва : АСВ, 2014. – 224 с.
11. Ступишин, Л. Ю. Строительная механика плоских стержневых систем : учебное пособие / Л. Ю. Ступишин. – Москва : Инфра-М, 2018. – 248 с.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

**Чальцев Михаил Николаевич  
Алтухова Татьяна Ивановна  
Губа Константин Романович**

**Строительная механика. Часть 1**

Учебное пособие  
для обучающихся образовательных учреждений  
высшего профессионального образования направлений подготовки  
08.03.01 «Строительство» и 08.05.02 «Строительство, эксплуатация и  
техническое прикрытие автомобильных дорог, мостов и тоннелей»)

Ответственная за выпуск Н. Ф. Курган

Подписано к печати 30.10.2020 г.  
Формат 70×90/16. Бумага офисная.  
Гарнитура «Times New». Печать – лазерная.  
Усл. печ. листов 7,81.  
Тираж 100 экз. Заказ № 200.

ГОУВПО «ДОННТУ»  
83001, ДНР, г. Донецк, ул. Артема, 58. Тел.: (062)301-03-04

Отпечатано в Автомобильно-дорожном институте ГОУВПО «ДОННТУ»  
84646, ДНР, г. Горловка, ул. Кирова, 51

Свидетельство о государственной регистрации ДНР  
Серия АА03 № 029192 от 7 апреля 2016 г.