УДК 681.5

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ БЛОЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Фельдман Л.П.
Кафедра ПМиИ ДонНТУ

Рассмотрены обобщенные блочные многошаговые многоточечные методы решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены расчетные формулы для общих m- шаговых k- точечных блочных методов, определен порядок их точности. ***.*** *Определены условия устойчивости по Далквисту и доказана сходимость устойчивых по начальным данным общих m- шаговых k- точечных блочных методов к точному решению. Получена априорная оценка погрешности приближенного решения. Полученные результаты представляют возможности построения новых более эффективных параллельных алгоритмов и их реализации на современных мультипроцессорных вычислительных системах*

Введение

Доклад содержит обобщение результатов исследований, опубликованных в [1,2,3,4,5,6], посвященных параллельным методам численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений и является продолжением ранее опубликованных работ [7,8,9,10,11,12,13]. В нем рассматривается устойчивость решения по начальным данным, получена оценка точности решения, приводится доказательство сходимости приближенного решения для общих m- шаговых k- точечных блочных методов, что представляет обобщение ранее опубликованных результатов. Приведен пример решения блочным разностным методом и даны практические рекомендации их использования для более широкого набора параллельных разностных схем.

1. Погрешность аппроксимации блочных методов

Для численного решения задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), t > 0, x(0) = x_0 \qquad (1)$$

используется блочный m-шаговый k-точечный разностный метод вида

$$\frac{1}{\tau}\sum_{j=1-m}^{k} a_{i,j}u_{n,j} = \sum_{j=1-m}^{k} b_{i,j}F_{i,j}\ ,\ i=\overline{1,k}, \qquad (2)$$

Коэффициенты уравнений (2) определены с точностью до множителя. Чтобы устранить этот произвол, будем считать, что выполнено условие

$$\sum_{j=1-m}^{k} b_{i,j} = 1,\ i=\overline{1,k}. \qquad (3)$$

Показано, что погрешность аппроксимации имеет порядок p, если выполнены условия

$$\sum_{j=1-m}^{k} a_{i,j} = 0;\quad \sum_{\substack{j=1-m,\\ j\neq 0}}^{k} [\,ja_{i,j} - b_{i,j}\,] = 0\,,$$
$$\sum_{\substack{j=1-m,\\ j\neq 0}}^{k} [\frac{a_{i,j}j}{s} - b_{i,j}\,] * j^{s-1} = 0, s=\overline{2,p},\ i=\overline{1,k}. \qquad (4)$$

Каждое уравнение системы (4), (3), соответствующее фиксированному значению i, может содержать $2(k+m)$ неизвестных $a_{i,j}$, $b_{i,j}$. Для того чтобы система разностных уравнении, построенных на одном наборе узлов сетки, была линейно независима, шаблоны разностных схем для уравнений должны отличаться между собой хотя бы одним вхождением либо коэффициента $a_{i,j}$ либо $b_{i,j}$. Отсюда следует, что наивысший порядок аппроксимации m-шагового k-точечного блочного метода не может превосходить $p = 2(k+m)-3$. Его погрешность определяется формулой

$$r_{n,i} = \frac{\tau^{2(k+m)3}}{[\,2(k+m-1)-1]!}\, x^{2(k+m)-3}{}_{n,0} \sum_{j=1-k}^{m} [\frac{a_{i,j}}{2(k+m-1)} - \frac{b_{i,j}}{j}\,]\, j^{2(k+m)-3},\ i=\overline{1,k} \qquad (5)$$

Приведем пример двухшаговой двухточечной разностной схемы наивысшего (пятого) порядка точности, полученной по формулам (3),(4).

$$-\tfrac{11}{30}u_{n-1} - \tfrac{4}{15}u_n + \tfrac{19}{30}u_{n+1} = \tau(\tfrac{1}{9}F_{n-1} + \tfrac{19}{30}F_n + \tfrac{4}{15}F_{n+1} - \tfrac{1}{90}F_{n+2}),$$
$$\tfrac{4}{15}u_{n-1} - \tfrac{9}{10}u_n + \tfrac{19}{30}u_{n+2} = \tau(-\tfrac{1}{10}F_{n-1} + \tfrac{9}{10}F_{n+1} + \tfrac{1}{5}F_{n+2})$$

2. Общая процедура интегрирования

Обозначим матрицы коэффициентов системы уравнений (2) через

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{i,j}),\ \ \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_{i,j}), \boldsymbol{i} = \overline{1,\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{j} = \overline{-(\boldsymbol{m}-1),\boldsymbol{k}}\,.$$

Разобьем каждую из матриц на две части

$$A_1 = (\,a_{i,j}\,),\ \boldsymbol{B}_1 = (\boldsymbol{b}_{i,j}), \boldsymbol{i} = \overline{1,\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{j} = \overline{-(\boldsymbol{m}-1),0}\,,$$

$$A_2 = (a_{i,j}),\ B_2 = (b_{i,j}), i = \overline{1,k}, j = \overline{1,k}$$

Введем соответствующие им вектора

$$U_n = \left(u_{n,j}\right), j = \overline{1-m,0},\ V_{n+1} = \left(u_{n,j}\right), n = 1,2,...,, j = \overline{1,k}.$$

$$F_n = \left(F_{n,j}\right), j = \overline{1-m,0}, G_{n+1} = \left(F_{n,j}\right), j = \overline{1,k}.$$

В векторной форме уравнение (2) будет иметь вид

$$A_1 U_n + A_2 V_{n+1} = \tau\left(B_1 F_n + B_2 G_{n+1}\right)$$

Предполагая, что матрица A_2 невырожденная, разрешим последнее уравнение относительно V_{n+1}

$$V_{n+1} = S U_n + \tau\left(\Phi_1 F_n + \Phi_2 G_{n+1}\right), \tag{6}$$

где $S = -A_2^{-1} A_1, \Phi_1 = A_2^{-1} B_1, \Phi_2 = A_2^{-1} B_2$.

Если решение разностной задачи сходится к решению исходной задачи, то сначала вычислим стартовые значения, например, с помощью явных формул Рунге – Кутта

$$U_0 = (u_{0,j}, j = \overline{0,m-1}),$$

затем на каждом последующем этапе необходимо решить нелинейное уравнение (6), определив последовательно вектора $V_1, V_2,...,$ для соответствующих значений векторов $U_0, U_1, U_2,...$

3. Устойчивость по начальным данным

Задача Коши для однородного уравнения, соответствующего (6) состоит в отыскании сеточной функции $V_{n+1} = \{u_{n+j}, j = \overline{1,k}\}$, удовлетворяющей при всех $n \geq 0$ уравнению

$$V_{n+1} = S U_n \tag{7}$$

при $U_n = \{u_{n-j}, j = \overline{0,m-1}\}$ и принимающей при $n = 0$ заданные начальные значения

$$U_0 = \{u_j, j = \overline{0,m-1}\}$$

Также как и в случае многошаговых разностных методов, рассмотренных в [1,3,4,5], устойчивость или неустойчивость уравнения (7) по начальным данным определяется расположением корней характеристического уравнения матрицы $\tilde{S}$. Доказано. *Если все корни характеристического уравнения матрицы $\tilde{S}$, лежат внутри или на границе единичного круга, причем на границе круга нет кратных корней, то блочный многошаговый многоточечный метод устойчив по начальным данным.*

Получены выражения для матриц перехода $\tilde{S}$ для общих блочных многошаговых многоточечных методов для случаев $m>k$ и $m<k$.

4. Устойчивость по правой части

В предыдущем пункте была приведена оценка решения однородного уравнения (7) через начальные данные. Приведем здесь оценку решения неоднородного уравнения.

$$\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{n}+1} = \boldsymbol{S}\,\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{n}} + \tau\left(\Phi_1\,\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{n}} + \Phi_2\,\boldsymbol{G}_{\boldsymbol{n}+1}\right) \qquad (6)$$

Представив уравнение (6) в виде

$$Y_{n+1} = \widetilde{S}\,Y_n + \boldsymbol{\tau}\,H_n$$

Получена оценка

$$\left\|Y_{k+1}\right\|_C \le M_1\left(\max_{0\le j\le m-1}\left|y_j\right| + \boldsymbol{\tau}\sum_{n=1}^{l}\left\|H_n\right\|_c\right), \qquad (8)$$

Выполнение оценки (8) означает по определению устойчивость уравнения (6) по правой части

5. Оценка погрешности разностного метода

Обозначив вектор погрешности решения разностного уравнения (24) через

$$\boldsymbol{\Sigma}_n = Y_n - X(t_n)\,.$$

Справедлива теорема

Если выполнено условие корней, $\left\|\boldsymbol{\Sigma}_1\right\|_* \to 0$ *при* $\boldsymbol{\tau} \to 0$ *и разностное урав нение (2) аппроксимирует исходное уравнение (1), то решение разностной задачи (2) сходится при* $\boldsymbol{\tau} \to 0$ *к решению исходной задачи (1).*

Приводятся примеры решения задач Коши, рассмотренными блочными многошаговыми многоточечными методами

Заключение. Общие блочные многошаговые многоточечные методы, рассмотренные в докладе, представляют обобщение известных многошаговых методов и существенно расширяют класс разностных методов решения задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Проведенный анализ этих методов позволил получить оценки их устойчивости по Далквисту, сходимости по правой части и оценки погрешности. Полученные результаты представляют возможности построения новых более эффективных параллельных алгоритмов и их реализации на современных мультипроцессорных вычислительных системах.

Литература

1. Дж. Холл, Дж. Уатт. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир,1979.-312с.
2. Системы параллельной обработки. Под ред. Ивенса Д. – М.:Мир,1985. – 416с.
3. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы.- М.:Наука.1989.- 432 с.

4. Хайрер Э., Нёрсет С., Ваннер. Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. - Мир,1990.-512 с .

5. Хайрер Э., Ваннер. Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие задачи.-Мир,1999.-685 с.

6. Молчанов И.Н. Введение в алгоритмы параллельных вычислений. АН УССР, Инст. Кибернетики им. В.М. Глушкова. Киев: Наукова думка. 1990,-128с.

7. Фельдман Л.П. Параллельные интерполяционные алгоритмы численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений на SIMD компьютере. Научн. Тр. ДонГТУ. Серия: Проблемы моделирования и автоматизации проектирования динамических систем, выпуск 10:- Донецк: ДонГТУ,1999, с. 20-25.

8. Фельдман Л.П. Сходимость и оценка погрешности параллельных одношаговых блочных методов моделирования динамических систем с сосредоточенными параметрами. Научн. Тр. ДонГТУ. Серия: Інформатика, Кібернетика та обчислювальна техніка, выпуск 15:- Донецк: -ДонГТУ,2000, с. 34-39.

9. L.P. Feldmann Implementierung und Effizienzanalyse von parallelen blockartigen Simulati onsalgorithmen für dynamische Systeme mit konzentrierten Parametern. In: Möller, D.P.F. (Hrsg.): Tagungsband 14. ASIM-Symposium Simulationstechnik in Hamburg, September 2000, SCS-Europe BVBA, Ghent/Belgium 2000, S. 241-246.

10. Фельдман Л.П., Дмитриева. О.А. Разработка и обоснование параллельных блочных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений на SIMD– структурах. Научн. Тр. ДонГТУ. Серия: Проблемы моделирования и автоматизации проектирования динамических систем, выпуск 29:- Донецк: ДонГТУ,2001, с. 70-79.

11. L.P. Feldman, O.A. Dmitrieva, S. Gerber. Abbildung der blockartigen Algorithmen auf Parallelrechnerarchitekture. In: Tavangarian,D., Grützner,R. (Hrsg.): Tagungs-band 15. ASIM-Symposium Simulationstechnik in Rostock, September 2002, SCS-Europe BVBA, Ghent/Belgium 2002, S.359-364.

12. Фельдман Л.П., Параллельные алгоритмы моделирования динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями.//Электронное моделирование, том 26, № 1, 2004.- С.19-30.

13. Фельдман Л.П., Назарова И.А., Параллельные алгоритмы численного решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений Ж. Математическое моделирование. 2006. т.18, №6, с. 17-31.

Получено 01.06.07