

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
“ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ”

КАФЕДРА «ОХРАНЫ ТРУДА И АЭРОЛОГИИ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
для проведения практических (семинарских) занятий по дисциплине ва-
риативной части учебного плана по выбору вуза
«Теория и методы инженерного эксперимента»

для обучающихся уровня профессионального образования "специалист" по
направлению подготовки 21.05.04 горное дело всех форм обучения

РАССМОТРЕНО
на заседании кафедры
охраны труда и аэрологии
Протокол № 1 от 27 августа 2020 г

УТВЕРЖДЕНО
на заседании Учебно-издательского
совета ДОННТУ
Протокол № 8 от 15 декабря 2020 г.

Донецк
2020

УДК 622.8(076)
ББК 33н
М54

Рецензенты:

Моргунов Виктор Михайлович – кандидат технических наук, доцент кафедры энергомеханических систем ГОУВПО «ДОННТУ»;
Кавера Алексей Леонидович – кандидат технических наук, доцент кафедры охраны труда и аэрологии ГОУВПО «ДОННТУ».

Составитель:

Овсянников Владимир Павлович – кандидат технических наук, доцент кафедры охраны труда и аэрологии ГОУВПО «ДОННТУ».

- М54 **Методические рекомендации для проведения практических (семинарских) занятий по дисциплине вариативной части учебного плана по выбору вуза «Теория и методы инженерного эксперимента» [Электронный ресурс]: для обучающихся уровня профессионального образования "специалист" по направлению подготовки 21.05.04 горное дело всех форм обучения / ГОУВПО «ДОННТУ», Каф. охраны труда и аэрологии; сост. В.П. Овсянников. – Электрон. дан. (1 файл: 1 515 017 б). – Донецк: ДОННТУ, 2020. – Систем. требования: ZIP-архиватор.**
- Приведены необходимые теоретические сведения, задания и вопросы для самопроверки студентов по курсу «Теория и методы инженерного эксперимента». Даны рекомендации и алгоритмы для выполнения практических работ. Детально описан ход выполнения работ на ПЭВМ. Составителем самостоятельно разработаны алгоритмы решения этих задач с использованием пакета программ Apache OpenOffice.
- Учебно-методические рекомендации могут быть использованы студентами горных специальностей всех форм обучения при подготовке и выполнении практических и контрольных работ.

УДК 622.8(076)
ББК 33н

Содержание

Объект, цель и задачи освоения дисциплины. Введение.....	4
Факторное пространство.....	5
Проведение эксперимента.....	5
Построение регрессионных моделей	7
Полный факторный эксперимент.....	8
Свойства полного факторного эксперимента.....	9
Дробный факторный эксперимент.....	9
Определение коэффициентов уравнения регрессии.....	9
Практическое (семинарское) занятие №1 Обработка экспериментальные данные при технических измерениях.....	11
Пример решения задачи 1	11
Пример решения задачи 2	13
Пример решения задачи 3	14
Пример решения задачи 4	15
Пример решения задачи 5	17
Практическое (семинарское) занятие №2 Полный факторный эксперимент.....	19
Полный факторный эксперимент.....	19
Стандартизация масштаба факторов.....	20
Составление матрицы планирования ПФЭ	20
Порядок постановки ПФЭ	22
Проверка воспроизводимости опытов (однородности дисперсий).....	22
Расчет оценок коэффициентов регрессионного уравнения	23
Проверка значимости коэффициентов регрессии	24
Проверка адекватности полученной математической модели (ММ).....	26
Переход к физическим переменным	27
Практическое (семинарское) занятие №3 Дробно факторный эксперимент.....	27
Дробно факторный эксперимент.....	27
Составление матрицы планированияДФЭ	29
Определение смешанности оценок коэффициентов	30
Порядок постановкиДФЭ.....	31
Контрольные вопросы	31
Рекомендации по подготовке к практическим (семинарским) занятиям.....	31
Требования к качеству подготовки студентов к практическим (семинарским) занятиям....	34
Рекомендации по подготовке доклада.....	34
Литература	35

Объект, цель и задачи освоения дисциплины Введение

Изучение основных понятий, определений, принципов теории планирования экспериментов, приобретение навыков проведения экспериментов по построению математических моделей, ознакомление с методикой построения регрессионных моделей.

Эксперимент – метод научного исследования, когда исследователь активно и целенаправленно воздействует на объект исследования путем создания искусственных условий или использования естественных условий, необходимых для выявления конкретных свойств объекта.

Эксперименты делятся на пассивные и активные (управляемые). В пассивном эксперименте контролируемые (входные) параметры нельзя изменять, в активном – можно.

Планирование эксперимента – область знания, связанная с построением и оптимизацией математических моделей.

Объект исследования рассматривается как носитель некоторых неизвестных или подлежащих исследованию свойств и качеств – своеобразный «черный ящик». При этом вектор $X_1 \dots X_k$ представляет собой группу контролируемых и управляемых величин, которые могут изменяться определенным образом в ходе эксперимента, а $Z_1 \dots Z_k$ контролируемые характеристики. Характеристики ($X_1 \dots X_k$) также называют факторами или управляемыми воздействиями. Функция Y – функция отклика (поверхность отклика), представляет собой реакцию системы на воздействие факторов. Также можно выделить и третью, не обозначенную на идеальной модели систему входных сигналов – это шумы или помехи, которые обусловлены многими факторами: ошибками обслуживающего персонала, влиянием внешней среды, погрешностью приборов и т.д. К этой же группе относятся воздействия, которые не могут контролироваться либо из-за их сложности, либо из-за незнания их природы и невозможности контроля.

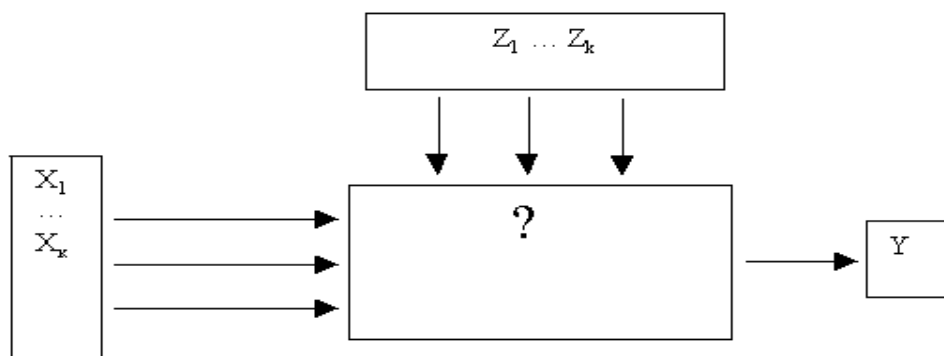


Рис 1 Структурная схема объекта (процесса) при проведении активного эксперимента

Характеристики объектов имеют различную физическую природу, а, следовательно, и размерность, что затрудняет построения модели. Поэтому на

практике значения факторов, которые имеют реальный физический смысл, нормируют (приводят к определенному ранее заданному набору значений). Для любого фактора X существует нижний X_{\min} и верхний X_{\max} уровни изменения значений.

Факторное пространство

Приведем алгоритм нормировки фактора:

- выбираем масштаб и положение осей координат таким образом, чтобы $X_{i \min}$ соответствовало -1 , а $X_{i \max} + 1$.

- вычисляем значение X_{i0} для данного фактора следующим образом

$$X_{i0} = \frac{X_{i \max} + X_{i \min}}{2}.$$

- вычисляем интервал изменения фактора $dx_i = X_{i0} - X_{i \min} = X_{i \max} - X_{i0}$.

- находим нормированное значение X_n для каждого фактора

$$X_{in} = \frac{X_i - X_{i0}}{dx_i}.$$

-

	A	B	C	D	E	F
1	Факторное пространство					
2						
3	x1 max	80	x1-0	50	(B3+B4)/2	
4	x1 min	20	Δx1	30	B3-D3	
5	x2 max	11,34	x2-0	10,545		
6	x2 min	9,75	Δx2	0,795		
7						
8						

Рис 2 Нормировка факторов в OpenOffice Calc

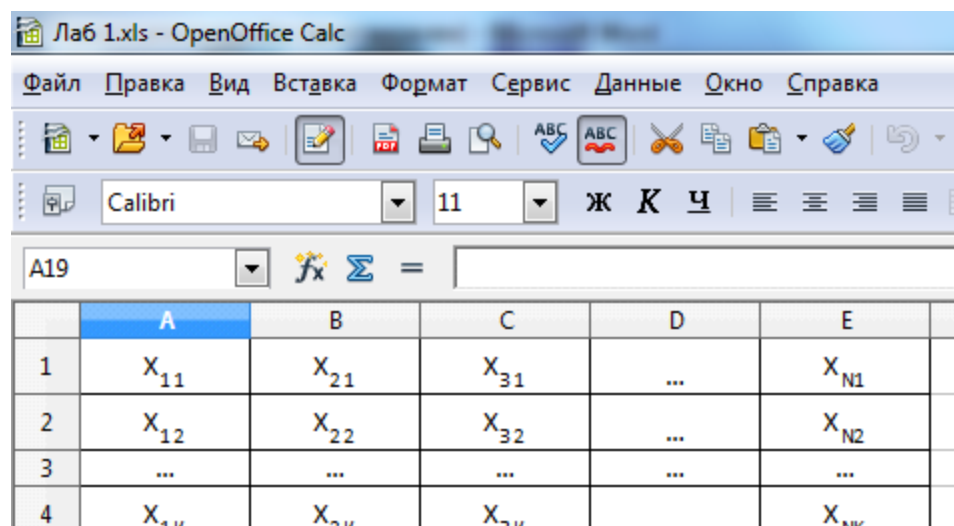
Зависимость реакции объекта от точки факторного пространства называется функцией отклика Y , а ее геометрическое представление $Y(x_1, x_2, \dots, x_i)$ – поверхностью отклика. Векторов значений функции отклика может быть столько, сколько опытов.

Проведение эксперимента

Эксперимент состоит из опытов (воспроизведение исследуемого явления). Под планированием эксперимента понимают выбор плана эксперимента – совокупности данных, определяющих число, условия и порядок реализации опытов. Каждый опыт эксперимента характеризуется определенным набором значений факторов.

Вектор, содержащий некоторый набор конкретных значений факторов X_i , определяет q-ю точку плана эксперимента. Совокупность векторов X_q ($q = 1, 2, \dots, n$) образует план эксперимента (матрица, содержащая k строк и n столбцов, каждая строка которой образует точку плана эксперимента, а столбец фактор эксперимента).

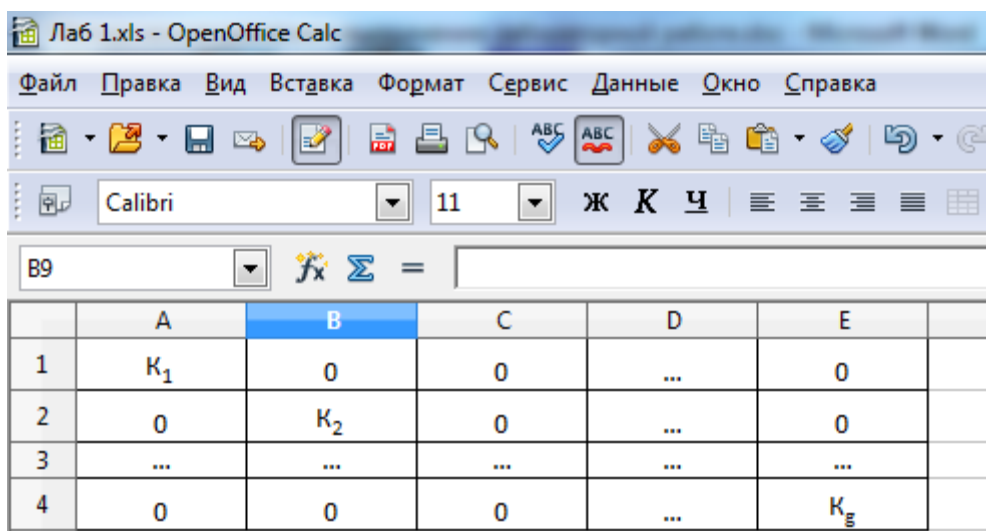
$$X_q = (X_{1q}, X_{2q}, X_{3q} \dots X_{nq})$$



	A	B	C	D	E
1	X_{11}	X_{21}	X_{31}	...	X_{N1}
2	X_{12}	X_{22}	X_{32}	...	X_{N2}
3
4	X_{1k}	X_{2k}	X_{3k}	...	X_{Nk}

Рис 3 Матрица спектра плана в OpenOffice Calc

Совокупность всех точек плана, отличающихся уровнем хотя бы одного фактора (различных строк матрицы планирования), называется спектром плана. Матрица, получаемая из всех различных строк плана - матрица спектра плана. Она отличается от приведенной выше матрицы только числом строк (из-за отсутствия повторяющихся точек плана). При количестве точек спектра плана G, ее размерность будет составлять: G строк на N столбцов. Применяется также матрица дублирования, размерность которой совпадает с размерностью матрицы спектра плана. Она имеет вид:



	A	B	C	D	E
1	K_1	0	0	...	0
2	0	K_2	0	...	0
3
4	0	0	0	...	K_g

Рис 4 Матрица дублирования спектра плана в OpenOffice Calc

Здесь K_j - число параллельных опытов в точке спектра плана с номером j ($j = 1, 2, \dots, N$). Т.е. это число характеризует дублирование соответствующей строки в матрице спектра плана.

Построение регрессионных моделей

Для описания объектов исследования часто используются полиномиальные модели. При этом в качестве базисного выражения используется ряд Тейлора, имеющий конечное число членов:

$$F(x) = F(a) + \frac{x-a}{1!} F'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} F''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} F^{(n)}(a).$$

Но при использовании аппроксимирующего полинома Тейлора в приведенном выше виде возникает ряд проблем, связанных с нахождением производных, так как неизвестна функция, а известен только ряд ее значений. Поэтому заменим полином Тейлора на аналогичное ему уравнение регрессии

$$\hat{Y} = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i,j=1}^k b_{i,j} x_i x_j + \sum_{i=1}^k b_{i,i} x_i^2 + \sum_{i,j,n=1}^k b_{i,j,k} x_i x_j x_n + \dots$$

где k – число столбцов в матрице планирования. Построим линейную регрессионную модель. Для ее экспериментального получения используем план первого порядка (факторный эксперимент первого порядка):

$$\hat{Y} = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i.$$

Для k -факторного эксперимента достаточно $k+1$ опытов. При определении коэффициентов регрессии должны выполняться необходимые и достаточные условия:

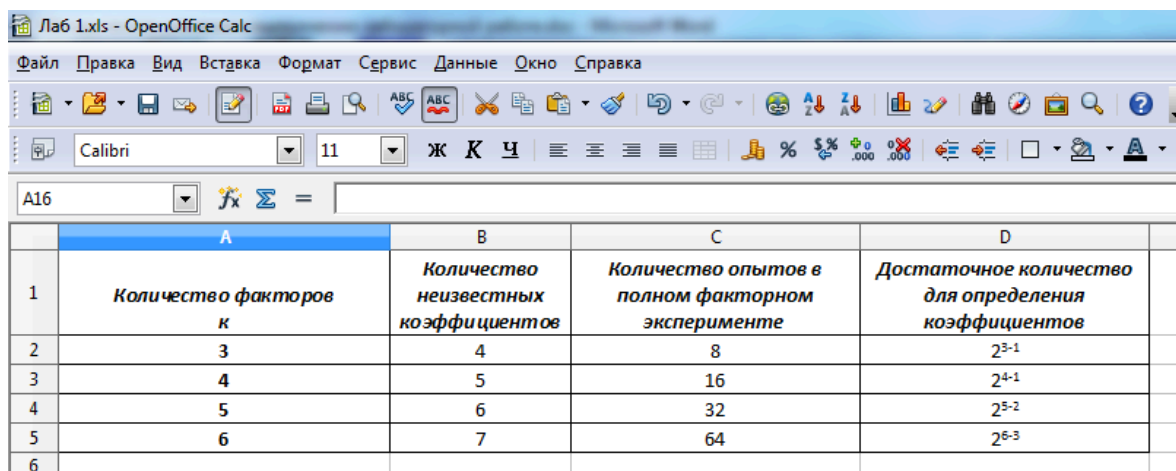
1. Результаты измерений выходной величины Y в N точках факторного пространства – нормально распределенные величины.
2. Дисперсии реализации во всех точках факторного пространства одинаковы, то есть не зависят от абсолютного значения величины и от направления обхода факторного пространства.
3. Входные переменные (факторы) – это независимые величины, которые измеряются с бесконечно малой ошибкой по отношению к ошибке выходной величины.

Оценка выполняется по критерию Фишера.

Любой многофакторный эксперимент является результатом варьирования всех факторов.

Полный факторный эксперимент

Если в многофакторном эксперименте использованы все возможные комбинации уровней факторов, то такой эксперимент называется полным факторным экспериментом. Приведем таблицу (для линейного уравнения регрессии):

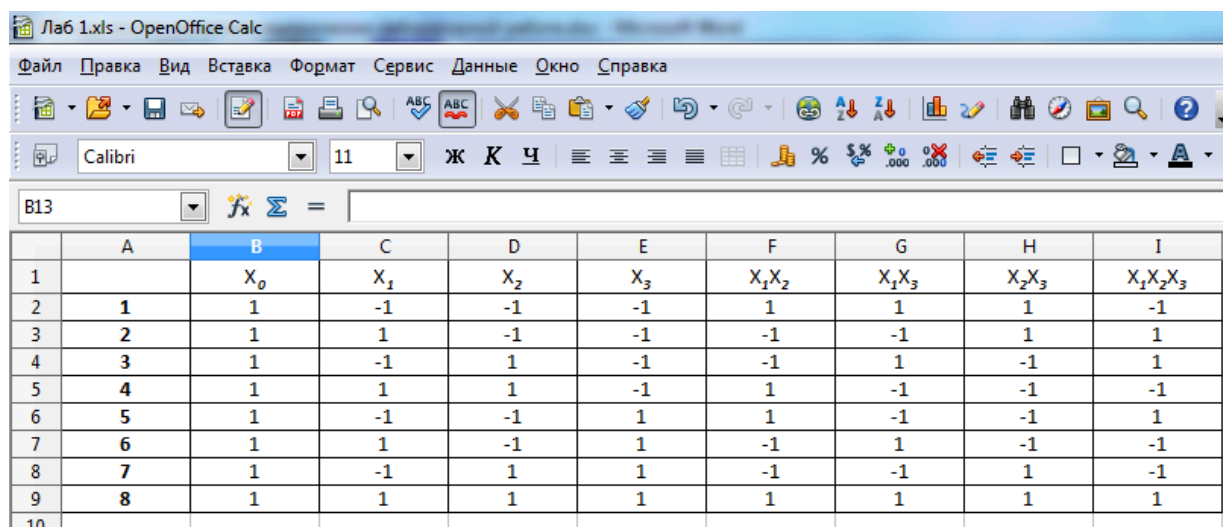


	A	B	C	D
1	Количество факторов k	Количество неизвестных коэффициентов	Количество опытов в полном факторном эксперименте	Достаточное количество для определения коэффициентов
2	3	4	8	2^{3-1}
3	4	5	16	2^{4-1}
4	5	6	32	2^{5-2}
5	6	7	64	2^{6-3}

Рис 5 Необходимое количество опытов при проведении экспериментов

Полный факторный эксперимент (ПФЭ) включает в себя 2^k опытов, которые при построении линейной модели могут полностью не использоваться. В общем случае ПФЭ позволяет найти 2^k коэффициентов регрессии при 2^k базисных функциях. Первые $k+1$ базисные функции очевидны – они составляют линейную модель ($f_0=1$ $f_1=X_1$ $f_2=X_2$ $f_3=X_3$).

Приведем пример полного трехфакторного эксперимента (столбцы с первого по четвертый – первый столбец вводится искусственным путем и постоянен и равен 1). Эта матрица является матрицей базисных функций.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		X_0	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$
2	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
3	2	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
4	3	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
5	4	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1
6	5	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
7	6	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1
8	7	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1
9	8	1	1	1	1	1	1	1	1

Рис 6 матрица базисных функций

Свойства полного факторного эксперимента

Матрица планирования ПФЭ обладает рядом свойств:

1. симметричность плана относительно центра эксперимента – $\sum_{i=1}^n x_{j,i} = 0$, то есть сумма значений уровней любого фактора (столбца) равна 0 ;
2. нормировка плана – $\sum_{i=1}^n x_{j,i}^2 = N$, сумма квадратов значений уровней любого фактора равна N (числу строк матрицы планирования ПФЭ);
3. ортогональность плана – $\sum_{i=1}^n x_{j,i} \cdot x_{u,i} = 0$, сумма по парным произведений значений уровней любых 2 факторов (кроме $j=u$) равна 0;
4. ротатабельность плана – точность предсказания значений функции отклика одинакова на равном расстоянии от центра и не зависит от направления обхода.

Дробный факторный эксперимент

В некоторых случаях нет необходимости использовать полный факторный эксперимент. В таких случаях усекают количество строк матрицы ПФЭ до количества коэффициентов регрессионной модели. Это производится в случаях линейной регрессионной модели. Дробный факторный эксперимент удовлетворяет всем свойствам полного факторного эксперимента.

Определение коэффициентов уравнения регрессии

После проведения опытов во всех точках факторного пространства необходимо найти коэффициенты уравнения регрессии. Для этого воспользуемся методом наименьших квадратов.

$$\Phi = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \rightarrow \min ;$$

$$\hat{Y}_i = \varphi(X_1, \dots, X_k, b_0, \dots, b_k)$$
$$\Phi = \sum_{i=1}^n (\varphi(X_1, \dots, X_k, b_0, \dots, b_k) - Y_i)^2, \text{ поскольку } \begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial b_0} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial b_k} = 0 \end{cases},$$

то после дифференцирования получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial b_0} = 2 \sum_{i=1}^n (\varphi(X_1, \dots, X_k, b_0, \dots, b_k) - Y_i) \frac{\partial \varphi}{\partial b_0} = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial b_k} = 2 \sum_{i=1}^n (\varphi(X_1, \dots, X_k, b_0, \dots, b_k) - Y_i) \frac{\partial \varphi}{\partial b_k} = 0. \end{array} \right.$$

Для линейной регрессии при $k=2$:

$$Y_i = \varphi(X_{1i}, X_{2i}, b_0, b_1, b_2), Y_i = b_0 + b_1 X_{1i} + b_2 X_{2i};$$

продифференцировав по коэффициентам, получим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b_0} = 1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial b_1} = X_{1i}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial b_2} = X_{2i}.$$

Запишем уравнения в полной форме:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n (b_0 + b_1 X_{1i} + b_2 X_{2i} - Y_i) * 1 = 0, \\ \sum_{i=1}^n (b_0 + b_1 X_{1i} + b_2 X_{2i} - Y_i) * X_{1i} = 0, \quad \Leftrightarrow \\ \sum_{i=1}^n (b_0 + b_1 X_{1i} + b_2 X_{2i} - Y_i) * X_{2i} = 0. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\sum_{i=1}^n 1) b_0 + (\sum_{i=1}^n X_{1i}) b_1 + (\sum_{i=1}^n X_{2i}) b_2 = \sum_{i=1}^n Y_i, \\ (\sum_{i=1}^n X_{1i}) b_0 + (\sum_{i=1}^n X_{1i}^2) b_1 + (\sum_{i=1}^n X_{2i} X_{1i}) b_2 = \sum_{i=1}^n X_{1i} Y_i, \\ (\sum_{i=1}^n X_{2i}) b_0 + (\sum_{i=1}^n X_{1i} X_{2i}) b_1 + (\sum_{i=1}^n X_{2i}^2) b_2 = \sum_{i=1}^n X_{2i} Y_i. \end{array} \right.$$

$\sum_{i=1}^n 1 = n$, разделим каждое уравнение на n

$$\left\{ \begin{array}{l} b_0 + (\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{1i}) b_1 + (\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{2i}) b_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i, \\ (\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{1i}) b_0 + (\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{1i}^2) b_1 + (\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{2i} X_{1i}) b_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{1i} Y_i, \\ (\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{2i}) b_0 + (\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{1i} X_{2i}) b_1 + (\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{2i}^2) b_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{2i} Y_i. \end{array} \right.$$

Отсюда, принимая в расчет свойства матрицы планирования, получим следующие формулы для вычисления коэффициентов

$$b_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i,$$

$$b_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{1i} Y_i,$$

$$b_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{2i} Y_i.$$

Практическое (семинарское) занятие №1

Обработка экспериментальные данные при технических измерениях

Цель работы: научиться обрабатывать экспериментальные данные при технических измерениях.

Решается несколько типовых задач.

Пример решения задачи 1

В результате измерений силы тока цифровым миллиамперметром получен ряд значений:

10,3924	мА
10,2123	мА
9,8534	мА
9,7754	мА
10,1545	мА
9,9921	мА

Варианты

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
10,023	10,09	10,04	10,03	10,086	10,013	10,00	10,025	10,00	10,04
10,02	10,001	10,041	10	10,075	10,01	10,06	10,01	10,06	10,06
10,088	10,039	10,013	10,011	10,055	10,061	10,02	10,06	10,02	10,03
10,029	10,059	10,068	10,019	10,061	10,056	10,05	10,033	10,05	10,06
10,008	10,075	10,052	10,071	10,061	10,005	10,09	10,038	10,09	10,10
10,047	10,07	10,045	10,074	10,087	10,006	10,02	10,092	10,02	10,09

Определить среднее значение и абсолютную и относительную погрешности силы тока при доверительной вероятности $\alpha=0,95$.

Среднее значение определяем по зависимости

$I_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^n I_i}{n} = 10,6155$	<code>ROUND(AVERAGE(A1:A6);4)</code>
---	--------------------------------------

Округление до четвертого знака после запятой произведено, так как точность среднего значения не может быть выше точности результатов исходных измерений.

Среднее квадратичное отклонение полученного результата определяем по формуле

$\sigma_{I_{cp}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (I_{cp} - I_i)^2}{n(n-1)}} = 1,3208$	<code>ROUND((G8/E2/(E2-1))^(1/2);4)</code>
--	--

Для расчета абсолютной погрешности воспользуемся формулой
 $X = \bar{x} \pm \Delta X = \bar{x} \pm t_{\alpha, n-1} \sigma_{\bar{x}}$

Входящий в формулу коэффициент Стьюдента $t_{\alpha, n-1}$ рассчитываем при помощи функции TINV(1- α ;n-1) функций рабочего листа OpenOffice Calc по доверительной вероятности α 0,95 и числу степеней свободы $n-1=6-1=5$, $t_{0,95,5} = 2,571$.

Рассчитываем абсолютную погрешность $\Delta I = \sigma_{I_{cp}} t_{0,95,5} = 0,2442$.

Округляем результат до второй значащей цифры абсолютной погрешности:

$$I = 10,06 \pm 0,24 \text{ мА.}$$

Находим относительную погрешность

$$\varepsilon = \frac{\Delta I}{I_{cp}} \cdot 100\% = \frac{0,24}{10,06} \cdot 100\% = 2.4\%.$$

Таким образом, можно сказать, что измеренное значение силы тока равно $10,06 \pm 0,24 \text{ мА.}$

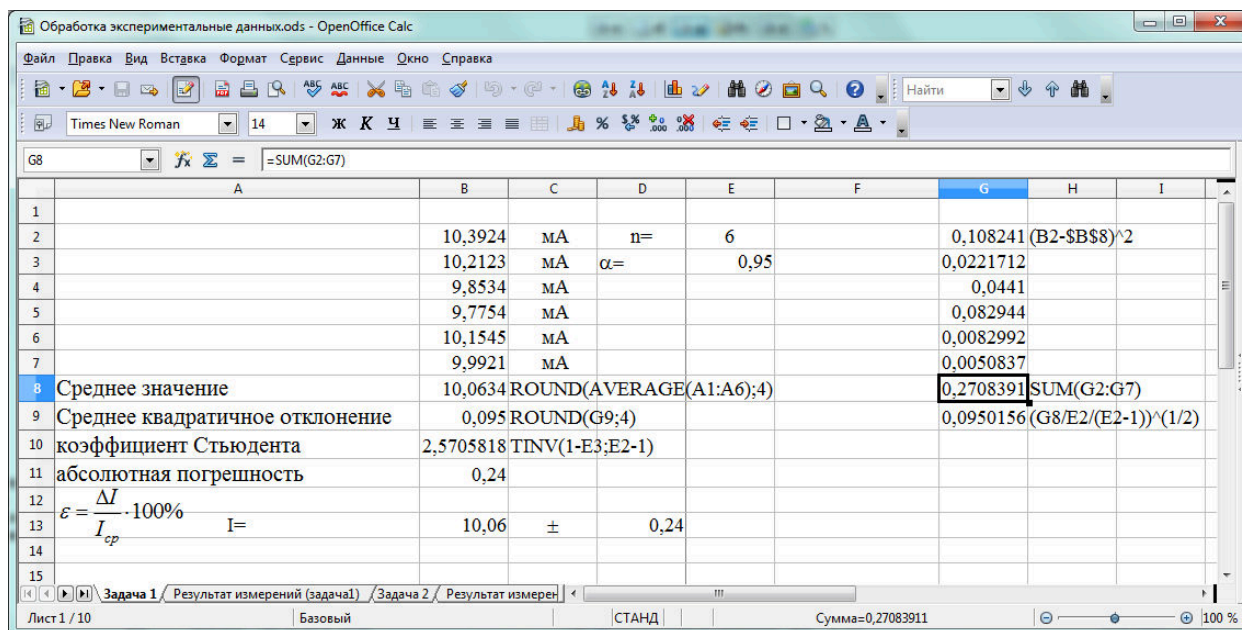


Рис 7 Решение задачи 1 средствами OpenOffice Calc

Пример решения задачи 2

Прибор для измерения длин волн электромагнитного излучения аттестуется по стандартному излучению $\lambda_{эт}=546,07$ нм. При семи измерениях получены результаты: 546,06 нм, 546,05 нм, 546,08 нм, 546,07 нм, 546,05 нм, 546,07 нм, 546,06 нм

Варианты

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
546,10	546,09	546,12	546,11	546,12	546,12	546,15	546,15	546,16	546,12
546,11	546,10	546,10	546,08	546,09	546,14	546,17	546,12	546,07	546,11
546,15	546,10	546,12	546,14	546,15	546,12	546,12	546,13	546,15	546,13
546,09	546,09	546,14	546,13	546,13	546,08	546,15	546,11	546,07	546,17
546,07	546,10	546,09	546,10	546,15	546,14	546,17	546,11	546,08	546,11
546,15	546,11	546,08	546,11	546,10	546,12	546,10	546,17	546,17	546,10
546,15	546,14	546,10	546,09	546,11	546,16	546,09	546,11	546,08	546,15

Оценить систематическую погрешность измерений и ширину доверительного интервала при доверительной вероятности 0,95.

Определяем среднее значение полученных результатов измерений по за-

$$\text{висимости: } \lambda_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{n} = 546,06 \text{ нм.}$$

Разница между истинным значением измеряемой величины и средним значением результатов измерений и будет систематической погрешностью:

$$\Delta \lambda_{сист} = \lambda_{эм} - \lambda_{cp} \approx 0,01.$$

Ширину доверительного интервала – $2\Delta\lambda$ определяем как в предыдущей

задаче: $\sigma_{\lambda_{cp}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\lambda_{cp} - \lambda_i)^2}{n(n-1)}} = 0,0044 \text{ нм}, \Delta\lambda = \sigma_{\lambda_{cp}} t_{0,95,5} = 0,01 \text{ нм}.$

Таким образом, ширина доверительного интервала составляет $2\Delta\lambda = 0,02 \text{ нм}.$

А	В	С	Д	Е	Г	Н	И	К	Л	М	О
1	Оценить систематическую погрешность измерений и ширину доверительного интервала при доверительной вероятности										$\alpha=0,95$
2	$\lambda_{эт} =$	546,07 нм	$n =$	7							
3											
4		546,06	$0 \text{ ABS}(B4-\$B\$13)$		$0(\$B\$13-B4)^2$						
5		546,05	0,01		0,0001						
6		546,08	0,02		0,0004						
7		546,07	0,01		0,0001						
8		546,05	0,01		0,0001						
9		546,07	0,01		0,0001						
10		546,06	0		0						
11	\sum	3822,44			0,0008						
12	$\sum \lambda_i$	546,06286			$0,004364358 (F11/E2/(E2-1))^{(1/2)}$						
13	$\lambda_{cp} = \frac{\sum \lambda_i}{n}$	546,06	$\text{ROUND}(B12;2)$								
14											
15											
16											
17	$\sigma_{\lambda_{cp}} = \sqrt{\frac{\sum (\lambda_{cp} - \lambda_i)^2}{n(n-1)}}$		0,0044								
18											
19	$\Delta\lambda = \sigma_{\lambda_{cp}} t_{0,95,5}$		$0,01 \text{ ROUND}(C17*Задача 1'.B10;2)$								
20											
21											

Рис 9 Решение задачи 2 средствами OpenOffice Calc

Пример решения задачи 3

При измерении времени истечения жидкости через капилляр вискозиметра получено 8 различных значений: 154,1 с; 154,4 с; 154,7 с; 154,8 с; 155,2 с; 154,3 с; 154,3 с; 154,2 с. Проверить, является ли пятое измерение промахом? Выберем доверительную вероятность $\alpha = 0,95$. Исключим из набора значение $t_5 = 155,2 \text{ с}$. Вычислим среднее статистическое остальных семи значений по

формуле: $t_{cp1} = \frac{\sum_{i=1}^{n, n \neq 5} t_i}{n-1} = 154,4 \text{ с}.$

Варианты

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
155,25	155,22	155,27	155,26	155,20	155,20	155,24	155,27	155,30	155,24
155,23	155,26	155,28	155,30	155,24	155,24	155,29	155,24	155,22	155,25
155,21	155,23	155,24	155,21	155,29	155,29	155,21	155,23	155,28	155,20
155,30	155,21	155,20	155,29	155,20	155,20	155,23	155,21	155,20	155,27

155,22	155,22	155,24	155,22	155,23	155,23	155,21	155,28	155,25	155,28
155,21	155,28	155,28	155,25	155,30	155,30	155,30	155,29	155,21	155,28
155,25	155,25	155,23	155,27	155,25	155,25	155,29	155,28	155,29	155,22
155,22	155,29	155,23	155,29	155,30	155,30	155,29	155,24	155,22	155,27

Для $\alpha=0,95$ и числа степеней свободы $8-2=6$ определим значение коэффициента Стьюдента $t_{0,95,6} = 2,447$.

Рассчитываем ширину интервала по формуле:

$$\Delta t_1 = 3 \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n, i \neq 5} (t_i - t_{cp1})^2}{(n-1)}} \approx 0,78 \text{ с.}$$

Отклонение проверяемого измерения t_5 от среднего значения t_{cp} остальных результатов значительно превышает Δt_1 , поэтому величину t_5 следует признать промахом и исключить из набора результатов.

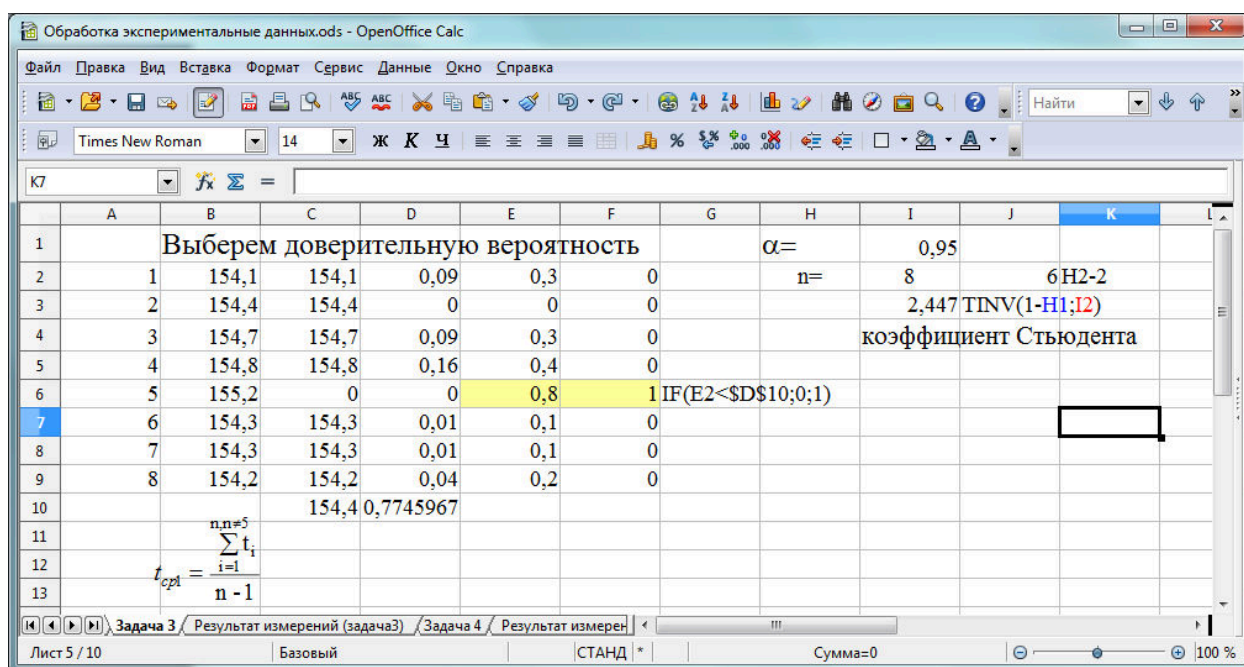


Рис 10 Решение задачи 3 средствами OpenOffice Calc

Пример решения задачи 4

Диаметр цилиндра измерялся пять раз микрометром с приборной погрешностью $\delta = 0,01$ мм. При этом были получены следующие числовые значения: 15,32 мм; 15,31 мм; 15,29 мм; 15,31 мм; 15,32 мм.

Требуется определить абсолютную и относительную погрешности измерения диаметра d , а также границы доверительного интервала для заданной доверительной вероятности $\alpha=0,95$.

Варианты

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
15,34	15,35	15,39	15,40	15,41	15,37	15,42	15,37	15,33	15,37
15,36	15,36	15,35	15,36	15,33	15,35	15,40	15,32	15,36	15,42
15,40	15,39	15,40	15,35	15,38	15,34	15,38	15,35	15,37	15,33
15,35	15,38	15,35	15,37	15,33	15,42	15,39	15,41	15,41	15,36
15,35	15,38	15,38	15,32	15,41	15,41	15,39	15,41	15,37	15,34

Сначала рассчитываем среднее значение диаметра по формуле и полу-

чаем: $d_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n} = 15,31 \text{ мм.}$

Прежде чем вычислять Δd , следует провести предварительный анализ данных.

Все разности $(d_{cp} - d_i)$ по абсолютной величине соизмеримы с δ , следовательно, необходимо учесть и случайную, и приборную составляющие погреш-

ности. По формуле $\sigma_{d_{cp}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (d_i - d_{cp})^2}{n(n-1)}}$ получаем: 0,006 мм.

Выбираем доверительную вероятность (надежность) 0,95. Так как серия измерений содержит пять значений, то коэффициент Стьюдента следует брать для числа степеней свободы равного 4. По формуле для определения коэффициентов Стьюдента получаем значение $t_{0,95;4} = 2,776$.

Для той же доверительной вероятности 0,95 и для бесконечного числа степеней свободы значение коэффициента Стьюдента $t_{0,95;\infty} = 1,960$. Далее рассчитываем по формуле $d = d_{cp} \pm \sqrt{\left(t_{\alpha,n-1} \sigma_{d_{cp}}\right)^2 + \left(t_{\alpha,\infty} \sigma_{d_{cp}} / 3\right)^2} = 15,31 \pm 0,03 \text{ мм.}$

Эта запись означает, что истинное значение диаметра цилиндра с вероятностью 0,95 находится внутри доверительного интервала с границами (15,28 мм; 15,34 мм).

Относительную погрешность считаем по зависимости $\varepsilon_g = \sqrt{\frac{\Delta d}{d_{cp}}} \cdot 100\%$
 $= 0,2\%$

Таким образом, можно записать результат: $d = 15,31 \pm 0,2\%$.

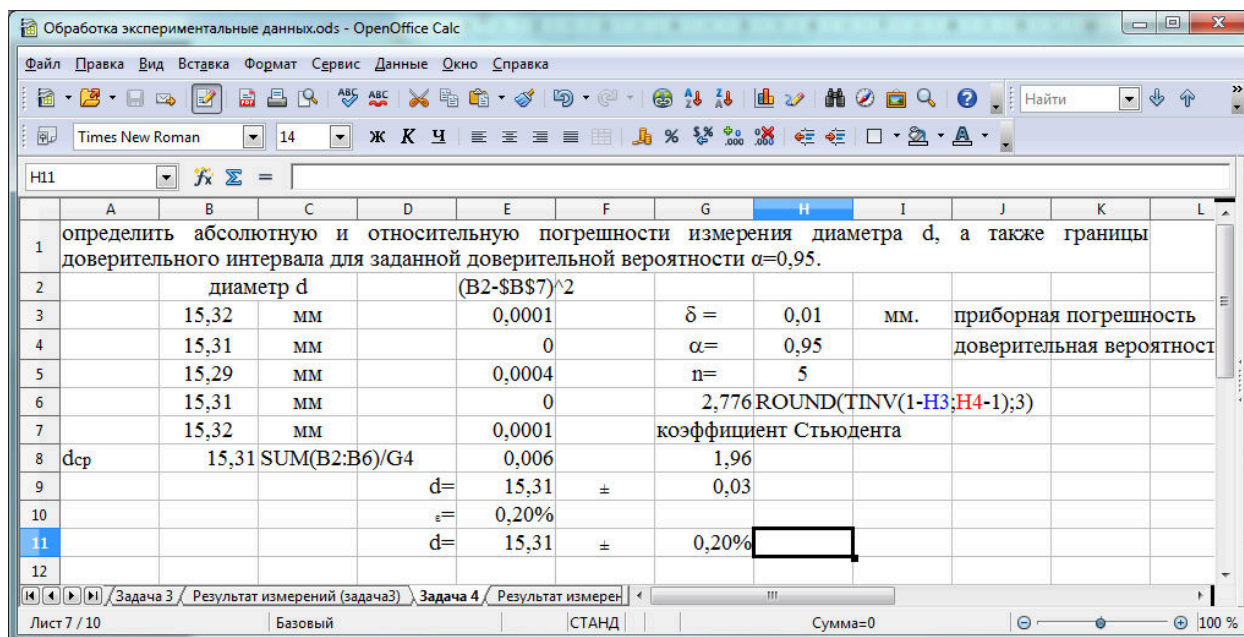


Рис 11 Решение задачи 4 средствами OpenOffice Calc

Пример решения задачи 5

Определяется количество выделившегося в химической реакции водорода путем косвенных измерений, количество водорода рассчитывается по уравнению Менделеева-Клапейрона:

$$pV = \nu RT.$$

В результате измерений получены следующие величины:

p=	795	±	1	мм.рт.ст.
T=	293	±	0,1	К
V=	19,2	±	0,1	мл.

Варианты

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
795,01	795,09	795,07	795,09	795,05	795,02	795,01	795,06	795,06	795
293,04	293,03	293,09	293,04	293,08	293,06	293,08	293	293,08	293,05
19,24	19,21	19,27	19,25	19,21	19,21	19,24	19,23	19,22	19,26

Определить количество водорода и абсолютную погрешность измерений. Переведем данные измерений в единицы СИ:

p=	105990,99	±	133,322	Па
T=	293,00	±	0,1	К
V=	1,92E-05	±	1,00E-07	м³

Выведем формулу для расчета количества водорода: $\nu = \frac{pV}{RT}$,

где p – давление, Па;

V – объем, м³;

T – температура, К;

R – универсальная газовая постоянная – 8,31 Дж/(моль К);

ν – количество вещества, моль.

Рассчитываем количество водорода:

$$\nu_{H_2} = \frac{106050 \text{ Па} \cdot 1,92 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3}{8,3144 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot 293 \text{ К}} = 8,36 \cdot 10^{-4} \text{ моль}.$$

Выведем формулу для расчета погрешности:

$$\Delta \nu = \sqrt{\left(\frac{\partial \nu}{\partial p}\right)^2 (\Delta p)^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial V}\right)^2 (\Delta V)^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial T}\right)^2 (\Delta T)^2} =$$
$$\sqrt{\left(\frac{V}{RT}\right)^2 (\Delta p)^2 + \left(\frac{p}{RT}\right)^2 (\Delta V)^2 + \left(-\frac{pV}{RT^2}\right)^2 (\Delta T)^2}.$$

Рассчитываем значение погрешности $\Delta \nu = 4,5 \cdot 10^{-6}$ моль. Окончательно получаем $\nu = 8,36 \cdot 10^{-4} \pm 4,5 \cdot 10^{-6}$ моль.

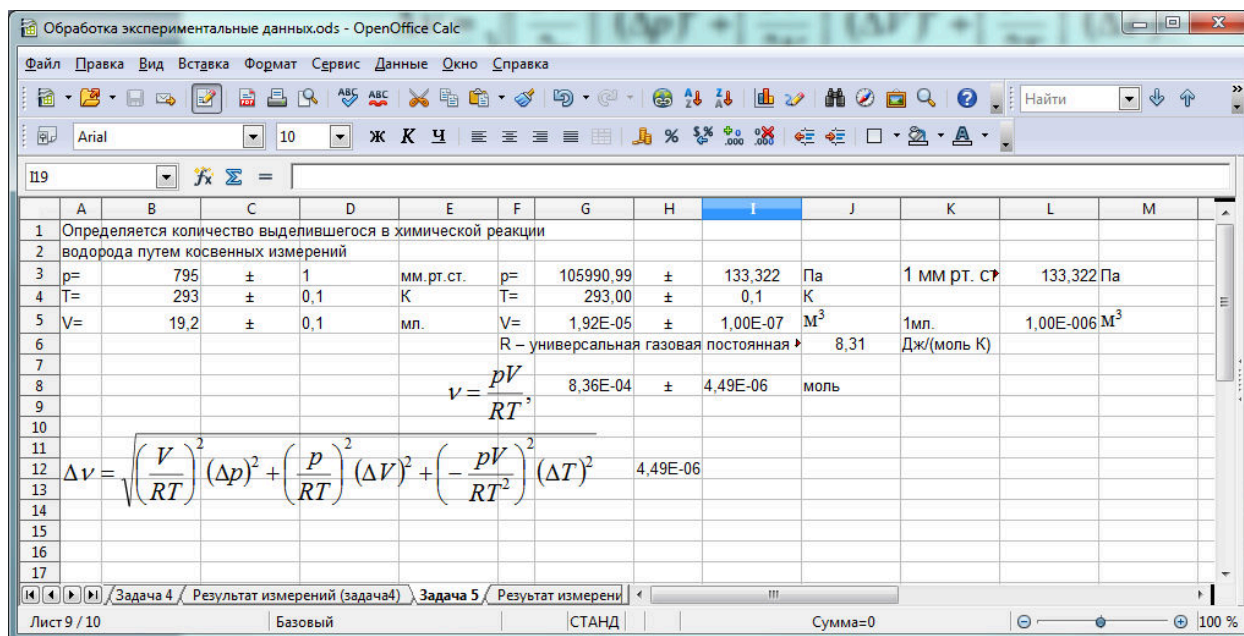


Рис 12. Решение задачи 5 средствами OpenOffice Calc

Задание:

Студентам предлагается самостоятельно решить аналогичные задачи по одному из вариантов. Численные значения исходных данных можно найти на

соответствующем каждой задаче листе OpenOffice Calc. Необходимо обратить внимание на соблюдение точности расчетов. Отчеты представляются преподавателю в электронном виде.

Практическое (семинарское) занятие №2

Полный факторный эксперимент

Используя данные испытаний образца горной породы (ОГП) с применить методом полного факторного эксперимента получить математическую модель поведения исследуемого образца.

Полный факторный эксперимент

В полном факторном эксперименте (ПФЭ) исследуется один параметр и реализуются все возможные сочетания уровней факторов. Для каждого фактора выбираются два уровня – верхний и нижний, на которых фактор варьируется. Половина разности между верхним и нижним уровнями называется интервалом варьирования. Интервал варьирования должен быть больше погрешности измерения уровня фактора (ограничение снизу), а верхний и нижний уровни фактора не должны выходить за область его определения (ограничение сверху). На практике интервал варьирования составляет обычно 3–10% от области определения.

При двух уровнях для каждого из n факторов общее число опытов составляет $2n$. ПФЭ – это эксперимент типа $2n$. ПФЭ позволяет получить математическую модель исследуемого объекта в виде уравнения множественной регрессии или по линиям

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i=1}^n \sum_{k=i+1}^n b_{ik} x_i x_k + \sum_{i=1}^n \sum_{k=i+1}^n \sum_{l=k+1}^n b_{ikl} x_i x_k x_l + \dots,$$

где b_0 – свободный член; b_i , b_{ik} , b_{ikl} – коэффициенты уравнения множественной регрессии.

Так, например, при $n = 2$ $y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2$, при $n = 3$
 $y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{23} x_2 x_3 + b_{13} x_1 x_3 + b_{123} x_1 x_2 x_3$.

Модели обычно называют регрессионными, а коэффициенты b_0 , b_i , b_{ik} , b_{ikl} – коэффициентами уравнения регрессии.

В зависимости от объема априорной информации в ММ включают не все, а лишь некоторые взаимодействия первого порядка, иногда – взаимодействия второго порядка и очень редко – взаимодействия выше третьего порядка. Связано это с тем, что учет всех взаимодействий приводит к громоздким расчетам.

Зависимость количества взаимодействий различного порядка от числа факторов приведена в табл. 1.

Табл. 1

N	N=2 ⁿ	Число линейных эффектов	Порядок взаимодействия					
			1	2	3	4	5	6
2	4	2	1	-	-	-	-	-
3	8	3	3	1	-	-	-	-
4	16	4	6	4	1	-	-	-
5	32	5	10	10	5	1	-	-
6	64	6	15	20	15	6	1	-
7	128	7	21	35	35	21	7	1

Стандартизация масштаба факторов

Для удобства расчетов масштаб факторов выбирают так, чтобы значение верхнего уровня было равно +1, а нижнего –1. С этой целью делают преобразование начала координат факторов и переходят к нормированному (стандартному) масштабу $x_i = \frac{(\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i0})}{I}$ где x_i – нормированное значение; \tilde{x}_i – натуральное значение; \tilde{x}_{i0} – основной уровень; I – интервал варьирования. Интеграл варьирования равен $I = |\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i0}|$.

Составление матрицы планирования ПФЭ

План ПФЭ изображают в виде таблицы, столбцы которой отражают уровни факторов, а строки – номера опытов. Эти таблицы называют матрицами планирования (МП) эксперимента. Поскольку значения уровней факторов по модулю всегда равны единице, то обычно в МП записывают только знак уровня (т. е. «+» вместо «1» и «–» вместо «–1»). В табл. 2 для примера приведена МП для ПФЭ типа 2², которую называют базовой, так как с ее помощью легко построить матрицы любого порядка.

Так, для построения матрицы 2³ сочетаем базовую матрицу с нижним и верхним уровнями x3 (табл. 3). Легко заметить, что в первом столбце знаки меняются поочередно, во втором через 2, в третьем через 4 и так далее. То есть 2⁰, 2¹, 2², 2³, ...

Табл. 2 МП ПФЭ типа 2²

N	x1	x2	y
1	-	-	y1
2	+	-	y12
3	-	+	y3
4	+	+	y4

Табл . 3 МП ПФЭ типа 2^3

N	x_1	x_2	x_3	y
1	-	-	-	y_1
2	+	-	-	y_2
3	-	+	-	y_3
4	+	+	-	y_4
5	-	-	+	y_5
6	+	-	+	y_6
7	-	+	+	y_7
8	+	+	+	y_8

Влияние факторов на выходной параметр может зависеть от уровня, на котором находится другой фактор, или от сочетания уровней нескольких факторов. Если априорно не известно, что такой зависимости между факторами нет, то строят развернутую МП, учитывающую не только факторы, но и их взаимодействия. При этом знаки в столбцах для взаимодействий получают перемножением знаков взаимодействующих факторов. Пример развернутой МП для ПФЭ дан в табл. 4.

Табл . 4 МП ПФЭ типа 2^3 в OpenOffice Calc

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	y
1	1	11,5	+	-1	-	-1	-	1	11,5
2	1	20,15	+	1	+	-1	-	-1	20,15
3	1	10,44	+	-1	-	1	-	1	10,44
4	1	12,17	+	1	+	-1	-	-1	12,17
5	1	11,5	+	-1	-	1	+	1	11,5
6	1	41,69	+	1	+	-1	-	-1	41,69
7	1	13,63	+	-1	-	1	+	1	13,63
8	1	28,78	+	1	+	-1	-	-1	28,78

Фиктивный фактор x_0 вводят для удобства машинного расчета свободного члена b_0 (для идентичности формул).

	AE	AF	AG	AH
1				
2	y_1	y_2	y_3	\bar{y}_1
3	10,88	10,57	13,06	11,5
4	23,98	17,85	18,62	20,15
5	8,3	11,89	11,13	10,44
6	9,39	16,8	10,32	12,17
7	10,23	9,6	14,67	11,5
8	44,02	40,3	40,76	41,69
9	12,25	11,56	17,09	13,63
10	27,73	30,8	27,81	28,78

Порядок постановки ПФЭ

Для оценки точности эксперимента для каждой i -й точки факторного пространства (для каждого сочетания уровней факторов МП) проводят K опытов. В результате получают значения $y_{i1}, y_{i2}, \dots, y_{iK}$ исследуемого параметра, для которых находят среднее значение

$$\bar{y}_i = \frac{1}{K} \sum_{t=1}^K y_{it} \quad \text{AVERAGE(B10:D10)}$$

При этом опыты в одной точке проводят не подряд, а обходят все точки в первой серии опытов, затем во второй, и так далее до K -й. Для уменьшения влияния внешней среды и не-

контролируемых факторов внутри каждой серии точки факторного пространства обходят случайным образом – рандомизируют последовательность опытов. Рандомизацию опытов можно провести с помощью генератора случайных чисел или таблицы случайных чисел.

Например, в случае постановки двух серий опытов для экспериментов 2^3 получим с учетом данных таблицы такие последовательности:

1 серия: 4, 2, 3, 7, 8, 1, 5, 6 2 серия: 2, 4, 6, 8, 5, 7, 3, 1. Это означает, что в первой серии опытов первым выполняется опыт в точке факторного пространства № 4, вторым – в точке № 2 и т. д. Во второй серии первым выполняется опыт в точке № 2, вторым – в точке № 4 и т. д.

Проверка воспроизводимости опытов (однородности дисперсий)

Опыт считается воспроизводимым, если дисперсия D_{yi} выходного параметра y^i однородна в каждой точке факторного пространства. Оценка S_{yi} дисперсии D_{yi} определяется для каждой точки факторного пространства по формуле:

$$S_{yi}^2 = \frac{1}{K-1} \sum_{t=1}^K (y_{it} - \bar{y}_i)^2.$$

Гипотезу однородности (равенства) дисперсий проверяют с помощью критерия Кохрена. Расчетное значение этого критерия определяют по формуле:

$$G_p = \frac{\max(S_{yi}^2)}{\sum_{i=1}^N S_{yi}^2}$$

а его критическое значение $G_{кр}$ находят из таблицы распределения Кохрена по числу степеней свободы числителя $f=K-1$, знаменателя

$f=N$ и уровню значимости q . Если $G_p < G_{кр}$, гипотеза об однородности дисперсий принимается, в противном случае – отвергается, и тогда эксперимент необходимо повторить, изменив условия его проведения (набор факторов, интервал их варьирования, точность измерительных приборов и пр.). Например, если при варьировании какого-то фактора изменение исследуемого параметра сравнимо с погрешностью эксперимента, то интервал варьирования необходимо увеличивать примерно на порядок.

полный факторный эксперимент 3 фактора.ods - OpenOffice Calc

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
1	Скрия	№ опыта	X1	X2	X3	Узкс	\bar{Y}	s_j^2												
2	1	1	1	1	1	7,10			1,777778											
3		2	1	1	1	10,10			2,777778											
4		3	1	1	1	8,10	8,43	2,333333	0,111111											
5	2	1	-1	-1	-1	5,30			0,217778											
6		2	-1	-1	-1	4,10			0,537778											
7		3	-1	-1	-1	5,10	4,83	0,413333	0,071111											
8	3	1	0	0	0	4,40			0											
9		2	0	0	0	4,20			0,04											
10		3	0	0	0	4,60	4,40	0,04	0,04											
11																				
12						«Расчетное значение критерия Кохрена»	0,8373205742													
13						«Табличное значение критерия Кохрена»	0,871													
14						опыты воспроизводимы														
26																				
27						Оценка дисперсии воспроизводимости	0,9288888889													
28						Связанное с ней число степеней свободы	6													
29																				
30						Оценка дисперсии среднего значения	0,31													
31						Связанное с ней число степеней свободы	6													
32																				
33																				
34																				
35																				
36																				
37																				
38																				
39																				
40																				
41																				
42																				
43																				
44																				
45																				
46																				
47																				
48																				
49																				
50																				
51																				
52																				
53																				
54																				
55																				
56																				

$$s_j^2 = \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^k (Y_{j,i} - \bar{Y}_j)^2$$

$$G_p = \frac{\max s_j^2}{\sum_{j=1}^N s_j^2}$$

$$s_Y^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N s_j^2, \quad f = N(k-1)$$

$$s_{\bar{Y}}^2 = \frac{s_Y^2}{k}$$

Расчет оценок коэффициентов регрессионного уравнения

Расчет оценок коэффициентов уравнения регрессии производится по методу наименьших квадратов, при этом минимизируется сумма квадратов отклонений между экспериментальными значениями исследуемого параметра и значениями, вычисленными для тех же точек факторного пространства по уравнению регрессии. Благодаря предварительной стандартизации масштаба факторов и ортогональности МП, расчет оценок коэффициентов регрессии в ПФЭ превращается в простую арифметическую процедуру

$$b_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_i y_j$$

$$b_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_i x_k \bar{y}_j$$

$$b_o = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_o \bar{y}_j.$$

полный факторный эксперимент 3 фактора.ods - OpenOffice Calc

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

Calibri 11 Ж К Ч

W1:W1048576 fx Σ =

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	№	X ₁	X ₂	X ₃	Yэксп	Yх ₁	Yх ₂	Yх ₃	x1x2	x1*x3	x2x3				
2	1	1	1	1	8,5	8,5	8,5	8,5	1	1	1				
3	2	1	1	-1	9,7	9,7	9,7	-9,7	1	-1	-1	1	8,5	8,5	8,5
4	3	1	-1	1	6,3	6,3	-6,3	6,3	-1	1	-1	-1	9,7	-9,7	-9,7
5	4	1	-1	-1	12	12	-12	-12	-1	-1	1	1	-6,3	6,3	-6,3
6	a	-1	1	1	3,5	-3,5	3,5	3,5	-1	-1	1	-1	-12	-12	12
7	6	-1	1	-1	4,7	-4,7	4,7	-4,7	-1	1	1	1	-3,5	-3,5	3,5
8	7	-1	-1	1	3,6	-3,6	-3,6	3,6	1	-1	-1	-1	-4,7	4,7	-4,7
9	8	-1	-1	-1	5,2	-5,2	-5,2	-5,2	1	1	1	1	3,6	-3,6	-3,6
10					53,5	19,5	-0,7	-9,7					5,2	5,2	5,2
11	b0	6,6875											0,5	-4,1	4,9
12	b1	2,4375													
13	b2	-0,0875													
14	b3	-1,2125													
15	b12	0,0625													
16	b13	-0,5125													
17	b23	0,6125													
18															
19															
20															
21															
22															
23															
24															
25															
26															
27															
28															
29															
30															
31															
32															

Лист1 / Лист1 (2) / Коэффициенты / Фишнр / критерий Кохрена / Критерий фишера

Лист 3 / 6 PageStyle:Коэффициенты СТАНД Сумма=0 100 %

$$b_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Y_j;$$

$$b_j = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Y_j X_{ji};$$

$$b_{lm} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N Y_j X_{jm} X_{jl} \quad l \neq m.$$

Проверка значимости коэффициентов регрессии

Гипотезу о статистической значимости (отличии от нуля) коэффициентов регрессии проверяют по критерию Стьюдента. Расчетное значение t_p этого критерия определяют как частное от деления модуля коэффициента b_i на оценку его среднеквадратического отклонения S_b :

$$t_p = \frac{|b_i|}{S_b}$$

В ПФЭ, благодаря одинаковой удаленности всех экспериментальных точек факторного пространства от центра эксперимента, оценки всех коэффици-

ентов уравнения регрессии независимо от их величины вычисляются с одинаковой погрешностью (при выполнении условия воспроизводимости опытов):

$$S_b = \frac{S_y}{N}$$

где S_y – оценка дисперсии воспроизводимости эксперимента,

$$S_y^2 = \frac{\sum_{j=1}^N S_{y_j}^2}{N}$$

Критическое значение критерия $t_{кр}$ находят из таблицы распределения Стьюдента по числу степеней свободы $f=N(K-1)$ и уровню значимости q . Если $t_p > t_{кр}$, гипотеза о значимости коэффициента b_i принимается, в противном случае коэффициент считается незначимым и приравнивается нулю.

The screenshot shows a spreadsheet titled "полный факторный эксперимент 3 фактора.ods". The data is organized into columns A through S. Columns A through H contain experimental data for factors X1, X2, X3 and their interactions. Columns I through S contain calculated values, including the regression equation $Y_i = 6,6875 + 2,4375X_1 - 0,0875X_2 - 1,212X_3 + 0,0625X_1X_2 + 0,6125X_2X_3 - 0,5125X_1X_3$. The spreadsheet also displays the calculation of the Fisher criterion $F_{кр} = 5,99$ and the critical value $t_{кр} = 2,262113$. The regression equation is highlighted in blue, and the Fisher criterion calculation is highlighted in yellow.

№	X ₁	X ₂	X ₃	Y _{эк}	Y _м	Y _н	Y _н	x ₁ x ₂	x ₁ x ₃	x ₂ x ₃	t	M	N	O	P	Q	R	S
1	1	1	1	8,5	8,5	8,5	8,5	1	1	1	8,5	8,5	8,5	7,9875	0,262656			
2	1	1	-1	9,7	9,7	9,7	-9,7	1	-1	-1	-1	9,7	-9,7	10,2125	0,262656			
3	1	-1	1	6,3	6,3	-6,3	6,3	-1	1	1	-1	-6,3	6,3	-6,3	6,8125	0,262656		
4	1	-1	-1	12	12	-12	-12	-1	-1	-1	1	-12	-12	12	11,4875	0,262656		
5	-1	1	1	3,5	-3,5	3,5	3,5	-1	1	1	-3,5	-3,5	3,5	4,0125	0,262656			
6	-1	1	-1	4,7	-4,7	4,7	-4,7	-1	1	-1	-4,7	4,7	-4,7	4,1875	0,262656			
7	-1	-1	1	3,6	-3,6	-3,6	3,6	1	-1	1	3,6	-3,6	-3,6	3,0875	0,262656			
8	-1	-1	-1	5,2	-5,2	-5,2	-5,2	1	1	1	5,2	5,2	5,2	5,7125	0,262656			
9				53,5	19,5	-0,7	-9,7				0,5	-4,1	4,9		2,10125			
10																		
11	b ₀	6,6875																
12	b ₁	2,4375																
13	b ₂	-0,0875																
14	b ₃	-1,2125																
15	b ₁₂	0,0625																
16	b ₁₃	-0,5125																
17	b ₂₃	0,6125																
18	дисперсия адекватности																	
19	связанное с ней число степеней свободы																	
20																		
21																		
22	Оценка дисперсии воспроизводимости																	
23	Связанное с ней число степеней свободы																	
24																		
25																		
26																		
27																		
28																		
29																		
30																		
31																		
32																		

Необходимо помнить, что незначимость коэффициента может быть обусловлена и неверным выбором интервала варьирования фактора. Поэтому иногда бывает полезным расширить интервал варьирования и провести новый эксперимент.

Проверка адекватности полученной математической модели (ММ)

Для проверки гипотезы об адекватности ММ необходимо сравнить две дисперсии:

а) дисперсию неадекватности, зависящую от разности между значениями y_{ip} , рассчитанными по ММ, и экспериментальными результатами y_{it} :

$$S_a^2 = \frac{1}{(N-L)} \sum_{j=1}^N (y_{jp} - \bar{y}_j)^2 \quad \text{или}$$

$$S_a^2 = \frac{1}{K(N-L)} \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^K (y_{jp} - y_{jt})^2$$

где L – число значимых коэффициентов исследуемого уравнения регрессии, не считая b_0 ;

б) дисперсию неоднородности, характеризующую погрешности $S_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_{yi}^2$

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
1							
2	\bar{y}_j	σ^2			y_p		
3	11,5	1,84			11,71750,0473062		
4	20,15	11,15			20,36750,0473062		
5	10,44	3,58			10,22250,0473063		
6	12,17	16,29			11,95250,0473062		
7	11,5	7,64			11,28250,0473063		
8	41,69	4,11			41,47250,0473063		
9	13,63	9,08			13,84750,0473062		
10	28,78	3,06			28,99750,0473062		
11	$\sum x_i y_i$	0,29	7,09375	0,3329262	σ_{a0}^2	0,189225	
12	σ_{kp}	0,52			F_p	0,0266749	
13	дисперсии однородны				$f1=K(N-L)=$	6	
14	$N=$	8	$L=$	6	$f2=N(K-1)=$	16	
15	$K=$	3			$F_{кр} =$	2,7413108	
16	$f=$	16	$IF(A11>A112;"адекватна";"не адекватна")$		адекватна		
17	$\alpha=$	0,95					
18	$t_{кр}$	2,1199053					
19							

Заметим, что дисперсия погрешности наблюдений может быть оценена лишь путем сравнения результатов нескольких параллельных опытов, проводимых в каждой экспериментальной точке.

Адекватность ММ проверяется по F – критерию Фишера. Его расчетное значение находят как частное от деления оценки дисперсии неадекватности на

оценку дисперсии единичного наблюдения $F_p = \frac{S_a^2}{S_y^2}$

Критическое значение $F_{кр}$ находят из таблицы распределения Фишера по числу степеней свободы числителя $f=K(N-L)$, знаменателя $f=N(K-1)$ и уровню значимости q . Если $F_p > F_{кр}$ гипотеза об адекватности отклоняется.

Как правило, вначале проверяют адекватность линейной ММ. Если предположение об адекватности подтверждается, то в качестве окончательной ММ выбирают линейную; если отклоняется – добавляют эффект взаимодействия с наибольшим коэффициентом и вновь проверяют гипотезу, и так до тех пор, пока существуют степени свободы.

Если в результате модель все же оказалась неадекватной, это говорит о том, что тип математической модели выбран неудачно и при данном шумовом уровне и классе точности измерительных приборов ММ должна быть уточнена.

Для этого следует использовать более сложные модели, например, квадратичные (ортогональное и рототабельное композиционное планирование).

Переход к физическим переменным

Для записи ММ в реальных физических величинах производят обратный переход от стандартизированного масштаба к натуральному. Это можно сделать с помощью соответствующе соотношения. После чего записывают окончательный вид модели.

Практическое (семинарское) занятие №3 Дробно факторный эксперимент

Используя данные испытаний образца горной породы (ОГП) с применить методом дробно факторного эксперимента получить математическую модель поведения исследуемого образца.

Дробно факторный эксперимент

Число опытов ПФЭ 2^n быстро растет с увеличением числа факторов n , и при больших n этот вид эксперимента оказывается практически неприемлемым. Для уменьшения числа опытов из множества точек факторного пространства может быть отобрана их некоторая часть, содержащая подходящее число опытов и представляющая собой дробный факторный план.

Дробный факторный эксперимент (ДФЭ), как и ПФЭ, позволяет исследовать полиномиальные ММ. Число оцениваемых параметров ММ и число проводимых в эксперименте опытов связано с понятием насыщенности эксперимента. Если число проводимых опытов превышает число оцениваемых параметров, эксперимент называется ненасыщенным, если равно – насыщенным, если больше – сверхнасыщенным. Дробным факторным экспериментом называется система опытов, представляющая собой часть ПФЭ, позволяющая рассчитать коэффициенты уравнения регрессии и сократить объем экспериментальных данных.

Для построения МП ДФЭ из имеющихся n факторов отбирают $(n-p)$ основных факторов, для которых строят МП ПФЭ. Эту матрицу дополняют затем p столбцами, соответствующими оставшимся факторам. Уровни дополнительных факторов определяют как поэлементное умножение уровней не менее двух и не более $(n-p)$ основных факторов. Говорят, что ДФЭ – это эксперимент типа 2^{n-p} .

Выбранное для дополнительного фактора произведение называется генератором плана (поскольку определяет для дополнительного фактора правило чередования уровней варьирования в МП). Очевидно, что ДФЭ типа 2^{n-p} будет иметь p генераторов.

Составление матрицы планирования ДФЭ

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	№	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇
2	1	-1	-	-1	-	1	+	
3	2	1	+	-1	-	-1	-	
4	3	-1	-	1	+	-1	-	
5	4	1	+	1	+	1	+	
6								
7								
8								

Например, для ДФЭ типа 2^{3-1} число опытов равно четырем опытам по сравнению с 16 опытами в случае ПФЭ.

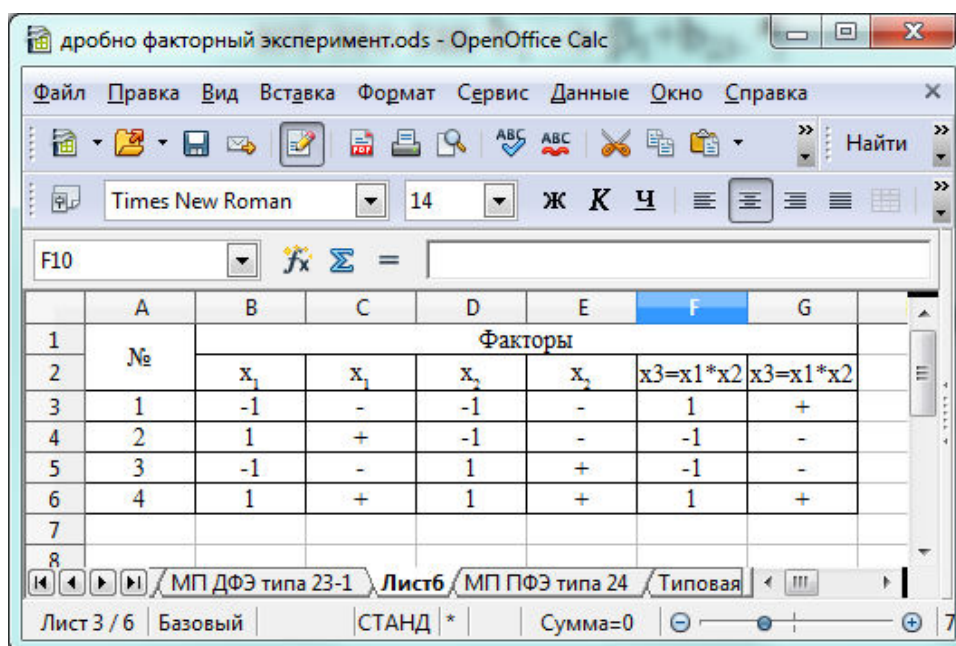
При трех основных факторах ДФЭ содержит 8 опытов, а генераторами для дробных планов могут служить произведения x_1x_2 , x_1x_3 , x_2x_3 , $x_1x_2x_3$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	№	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	x ₆	x ₇	x ₈	x ₉	x ₁₀	x ₁₁	x ₁₂	x ₁₃
2	1	-1	-	-1	-	-1	-	-1	-	y ₁	1/8	1/4	1/2	
3	2	1	+	-1	-	-1	-	-1	-	y ₂	1/8	1/4	1/2	
4	3	-1	-	1	+	-1	-	-1	-	y ₃	1/8	1/4	1/2	
5	4	1	+	1	+	-1	-	-1	-	y ₄	1/8	1/4	1/2	
6	5	-1	-	-1	-	1	+	-1	-	y ₅	1/8	1/4	1/2	
7	6	1	+	-1	-	1	+	-1	-	y ₆	1/8	1/4	1/2	
8	7	-1	-	1	+	1	+	-1	-	y ₇	1/8	1/4	1/2	
9	8	1	+	1	+	1	+	-1	-	y ₈	1/8	1/4	1/2	
10	9	-1	-	-1	-	-1	-	1	+	y ₉	1/8	1/4	1/2	
11	10	1	+	-1	-	-1	-	1	+	y ₁₀	1/8	1/4	1/2	
12	11	-1	-	1	+	-1	-	1	+	y ₁₁	1/8	1/4	1/2	
13	12	1	+	1	+	-1	-	1	+	y ₁₂	1/8	1/4	1/2	
14	13	-1	-	-1	-	1	+	1	+	y ₁₃	1/8	1/4	1/2	
15	14	1	+	-1	-	1	+	1	+	y ₁₄	1/8	1/4	1/2	
16	15	-1	-	1	+	1	+	1	+	y ₁₅	1/8	1/4	1/2	
17	16	1	+	1	+	1	+	1	+	y ₁₆	1/8	1/4	1/2	
18														
19														
20														

При введении одного дополнительного фактора (ДФЭ типа 2^{4-1}) может использоваться любой из четырех возможных генераторов:

В качестве генераторов плана используются незначимые взаимодействия. Для нахождения математического описания процесса используются определенные части ПФЭ: 1/2, 1/4, 1/8 и т. д. Эта система опытов называется дробными репликами, а сам метод ДФЭ – методом дробных реплик. Возможные дробные реплики от ПФЭ типа 2^4 приведены выше.

Определение смешанности оценок коэффициентов



The screenshot shows a spreadsheet titled "дробно факторный эксперимент.ods" in OpenOffice Calc. The table contains data for a fractional factorial experiment with 4 factors (x1, x2, x3, x4) and their interactions. The columns are labeled A through G, and the rows are numbered 1 through 8. The table structure is as follows:

	A	B	C	D	E	F	G
1	№	Факторы					
2		x ₁	x ₁	x ₂	x ₂	x ₃ =x ₁ *x ₂	x ₃ =x ₁ *x ₂
3	1	-1	-	-1	-	1	+
4	2	1	+	-1	-	-1	-
5	3	-1	-	1	+	-1	-
6	4	1	+	1	+	1	+
7							
8							

Составим матрицу ДФЭ для трех факторов.

По данному плану мы можем определить коэффициенты регрессии b_0, b_1, b_2, b_3 . Однако коэффициенты регрессии b_1, b_2, b_3 будут смешаны с пар-

ными взаимодействиями.

При значительном числе факторов и опытов определение смешанности по МП является трудоемким. Для нахождения, при каких факторах и взаимодействиях оценки коэффициентов будут смешанными, вводят понятие контраста плана.

Контраст получают умножением обеих частей генератора плана вводимого дополнительного фактора x_j на этот фактор. Например, поскольку для ДФЭ генератор плана $x_3 = x_1 x_2$, то для контраста получим $x_3^2 = x_1 x_2 x_3$. Т.к. $x_i^2 = 1$, окончательно имеем $1 = x_1 x_2 x_3$. Чтобы определить, с какими факторами и взаимодействиями смешана оценка фактора x_i , необходимо умножить обе части контраста на этот фактор. Например, для x_1 имеем: $x_1 = x_1^2 x_2 x_3 = x_2 x_3$, т. е. b_1 оценивает одновременно β_1 и b_{23} . Записывают это так $b_1 \rightarrow \beta_1 + b_{23}$.

Для x_2 : $x_2 = x_1 x_2 x_3 x_2 = x_1 x_3$, тогда $b_2 \rightarrow \beta_2 + b_{13}$; для x_3 : $x_3 = x_1 x_2 x_3 x_3 = x_1 x_2$, тогда $b_3 \rightarrow \beta_3 + b_{12}$, где β_i – действительные значения коэффициентов b_i .

В зависимости от числа факторов, входящих в контраст, говорят о разрешающей способности ДФЭ. Так, если для ДФЭ типа 2^{4-1} в качестве генератора плана выбрано $x_4 = x_1 x_2 x_3$ (контраст соответственно будет $1 = x_1 x_2 x_3 x_4$), то говорят, что у такого эксперимента разрешающая способность равна 4; если генератор $x_1 x_2 = x_4$ и контраст $1 = x_1 x_2 x_4$, то разрешающая способность равна 3; генераторы плана с наибольшей разрешающей способностью называют главными и им отдают предпочтение.

Необходимо отметить, что следствием уменьшения числа опытов по

сравнению с ПФЭ является и уменьшение точности оценок, вызванное их смешанностью.

Порядок постановки ДФЭ

При ДФЭ стандартизация масштабов факторов, порядок постановки опытов, проверка воспроизводимости опытов, расчет оценок коэффициентов регрессионного уравнения и проверка их статистической значимости, проверка адекватности полученной ММ и переход к физическим переменным производится так же, как и при ПФЭ. Однако необходимо учитывать, что для насыщенного и сверхнасыщенного экспериментов невозможна проверка адекватности ММ, так как для нее уже не остается степеней свободы.

Контрольные вопросы

1. В чем сущность планирования эксперимента? Поясните разницу между активным и пассивным экспериментом.
2. Какие задачи решает теория планирования эксперимента?
3. Что такое факторы оптимизации и какие требования к ним предъявляются? Как выбрать уровни варьирования факторов?
4. Какие требования предъявляются к параметрам оптимизации?
5. В чем сущность ДФЭ и какие ММ он позволяет исследовать?
6. Какую область описывает уравнение регрессии, полученное с помощью ДФЭ, и в каких границах его можно использовать?
7. Что такое взаимодействие факторов и сколько их может быть в ДЭФ?
8. В чем сущность и цели стандартизации масштаба факторов?
9. Как составляется и какими свойствами обладает МП ДФЭ?
10. Что такое генератор плана и из каких соображений он выбирается?
11. Что такое контраст плана и что такое обобщающий контраст?
12. Что такое смешанность оценок коэффициентов регрессии и как ее найти?
13. Каков порядок постановки опытов при ДФЭ?
14. Как проверить воспроизводимость опытов?
15. Как рассчитать оценки коэффициентов регрессионного уравнения?
16. Как проверить статистическую значимость оценок коэффициентов регрессии?
17. Как проверить адекватность полученной ММ?
18. Как перейти к исходным физическим переменным?
19. Проведите сравнительный анализ ПФЭ и ДФЭ

Рекомендации по подготовке к практическим (семинарским) занятиям

Семинар - важная и обязательная форма дидактического процесса, дополняющая лекционную форму обучения и ее углубление.

На семинарах поднимаются наиболее важные и сложные вопросы курса, требующие специальной подготовки студента с использованием рекомендованной учебной литературы и лекций.

Подготовку к семинару нужно проводить в следующем порядке:

- 1) Внимательно ознакомьтесь с планом семинара по заданной теме.
- 2) Прочитать конспекты лекций по теме семинара, отмечая материал, необходимый для изучения поставленных вопросов.
- 3) Ознакомиться с рекомендованной учебной литературе по данной теме: в первую очередь - с основной, при необходимости углубленного изучения - с дополнительной.
- 4) Обратите особое внимание на основные понятия изучаемого предмета, знание которых способствует эффективному усвоению курса.
- 5) Разберитесь в доступных в теме формулах и в том, как они используются для выполнения необходимых расчетов.
- 6) Освоить приемы построения графических моделей, если они используются в изучаемом предмете.
- 7) В процессе изучения темы следует подготовить тезисы или небольшие заметки в записной книжке семинара. Особенно это актуально для вопросов, предназначенных для самостоятельного изучения. Эти заметки можно использовать на семинаре для публичных выступлений, а также для работы во время семестровой работы и при подготовке к экзамену.

Требования к качеству подготовки студентов практическим (семинарским) занятиям

1. Подготовка к семинару является обязательной частью работы студента и охватывает все темы в плане занятия, а не выборочно по конкретным темам.
2. Работа студента на семинаре предполагает его высокую активность и соответствие следующим требованиям к публичным выступлениям:
 - а) свободное устное воспроизведение подготовленного выступления по темам с использованием заметок в качестве помощников. Это требование распространяется также на отображение графических моделей и формул на доске;
 - б) готовность и способность отвечать на вопросы и делать выводы из сказанного;
 - в) знание терминологии темы доклада;
 - г) регламент выступления - 10 минут.

Рекомендации по подготовке доклада

Доклад готовится по вопросу, выбранному из тем, предложенных для каждого семинара, согласованному с преподавателем. Доклад готовится с использованием как основной, так и дополнительной литературы, выбранной студентом самостоятельно. Как правило, на чтение доклада на семинаре отводится 10 минут. После прочтения доклада студентам предлагается обсудить проблемные вопросы, поднятые в выступлении. При чтении доклада студент должен представить материал в доступной и понятной форме.

Литература

I Основная литература

1. Юдин, Ю. В. Организация и математическое планирование эксперимента: учебное пособие / Ю. В. Юдин, М. В. Майсурадзе, Ф. В. Водолазский. — Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2018. — 124 с. (Доступ через личный кабинет студента). https://elar.urfu.ru/bitstream/10995/65224/1/978-5-7996-2486-6_2018.pdf

II Дополнительная литература

2 Карпушкин С.В.,Глебов А.О. Теория инженерного эксперимента Учебное пособие для студентов дневного и заочного отделения, обучающихся по направлениям "Машиностроение", "Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств" Тамбов 2017 (Доступ через личный кабинет студента). <https://tstu.ru/book/elib2/pdf/2017/karpushkin.pdf>

3 Макаричев Ю.А., Иванников Ю.Н. Методы планирование эксперимента и обработки данных: учеб. пособие / Макаричев Ю.А., Иванников Ю.Н. – Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2016. – 131 с.: ил. (Доступ через личный кабинет студента). http://em.samgtu.ru/sites/em.samgtu.ru/files/mpe_posobie_2016.pdf

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
“ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ”

КАФЕДРА «ОХРАНЫ ТРУДА И АЭРОЛОГИИ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
для проведения практических (семинарских) занятий по дисциплине ва-
риативной части учебного плана по выбору вуза
«Теория и методы инженерного эксперимента»

для обучающихся уровня профессионального образования "специалист" по
направлению подготовки 21.05.04 горное дело всех форм обучения

РАССМОТРЕНО
на заседании кафедры
охраны труда и аэрологии
Протокол № 1 от 27 августа 2020 г

УТВЕРЖДЕНО
на заседании Учебно-издательского
совета ДОННТУ
Протокол №8 от 15 декабря 2020 г.

Донецк
2020