

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА «ТРАНСПОРТНЫЕ СИСТЕМЫ И ЛОГИСТИКА ИМ. И.Г.
ШТОКМАНА»

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

**по дисциплине «Математическое моделирование технологических
процессов и машин»**

**для студентов всех форм обучения направления подготовки 23.04.02
«Наземные транспортно-технологические комплексы» магистерская
программа «Компьютерный инжиниринг транспортных логистических
систем»**

РАССМОТРЕНО
на заседании кафедры
«Транспортные системы и логистика»
Протокол № 6 от 3 февраля 2020г.

Донецк
2020

УДК 629.3

ББК 39.9

Составитель:

Кондрахин Виталий Петрович – доктор технических наук, заведующий кафедрой «Транспортные системы и логистика» ГОУВПО «ДОННТУ»

М54

Конспект лекций по дисциплине «Математическое моделирование технологических процессов и машин» [Электронный ресурс]: для студентов всех форм обучения направления подготовки 23.04.02 «Наземные транспортно-технологические комплексы» магистерская программа «Компьютерный инжиниринг транспортных логистических систем» / ГОУВПО «ДОННТУ», Каф. трансп. систем и логистики им. И. Г. Штокмана; сост.: В.П. Кондрахин - Донецк, ГОУВПО «ДОННТУ», 2020. – Систем. требования: Acrobat Reader

Приведены необходимые сведения из программного материала по дисциплине «Математическое моделирование технологических процессов и машин».

УДК 629.3

ББК 39.9

Содержание

Лекция 1. Введение.....	5
1.1 Идентификация параметров математических моделей для моделирования рабочих процессов транспортно-технологических машин...	6
1.2 Математическое моделирование динамики подъемно-транспортной машины.....	10
Лекция 2. Математическое моделирование поперечных колебаний груза.....	14
Лекция 3. Переходные процессы в подъемно-транспортных машинах	17
Лекция 4. Математическое моделирование кранов с подвижной кареткой подъема груза.....	25
Лекция 5. Математическое моделирование стреловых кранов.....	29
Лекция 6. Математическое моделирование конвейеров и транспортеров.....	34
Лекция 7. Математическое моделирование динамических процессов в редукторах и трансмиссиях.....	37
Лекция 8. Математическое моделирование рабочего процесса механических возбудителей колебаний.....	40
Лекция 9. Математическое моделирование процесса вибропогружения свай.....	45
Лекция 10. Математическое моделирование рабочего процесса шаровой мельницы.....	49
Лекция 11. Математическое моделирование рабочего процесса молотковой дробилки.....	54
Лекция 12. Основы виброизоляции транспортно-технологических машин.....	57
Лекция 13. Математическое моделирование процесса перехода через резонанс при пуске и торможении транспортно-технологической машины.....	61
Лекция 14. Математическое моделирование и выбор параметров динамического гасителя колебаний.....	67
Лекция 15. Общие сведения о случайных процессах, протекающих в подсистемах технологических машин.....	71

Лекция 1.

Введение.

Предмет «Математическое моделирование технологических процессов и машин» ставит перед собой цель научить основным простейшим приемам вывода дифференциальных уравнений динамического состояния технологических процессов и элементов машин наземных транспортно-технологических комплексов при всем их многообразии и сложности.

Предполагается, что слушатели в достаточной мере владеют аппаратом математического анализа, знают основы классической механики материальной точки и твердого тела в трактовке Лагранжа-Гамильтона.

Уравнения Лагранжа II рода имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

где $L = T - U$ - функция Лагранжа;

T – кинетическая энергия системы;

U – потенциальная энергия;

Q_i - обобщенная сила, соответствующая i -ой обобщенной координате q_i .

Кинетическая энергия системы материальных точек массой m_i и скоростью v_i является мерой движения и определяется формулой

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2.$$

Потенциальная энергия:

- системы материальных точек в поле силы тяготения

$$U = \sum m_i g h_i;$$

h_i – высота тела массой m_i от уровня, принятого за начало отсчета;

- деформированного упругого элемента

$$U = Cx^2/2;$$

C – коэффициент жесткости;

x – упругая деформация.

В случае, когда диссипативные силы, рассеивающие энергию колебаний, можно представить в виде вязкого трения, пропорционального скорости v_i движения, $F_{ci} = \beta_i v_i$, уравнения Лагранжа можно использовать в форме:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i,$$

где $R = \frac{1}{2} \sum \beta_i v_i^2$ - диссипативная функция Рэлея.

1.1 Идентификация параметров математических моделей для моделирования рабочих процессов транспортно-технологических машин

Математическое моделирование транспортно-технологических машин основано на трех концепциях:

- “черного ящика” – регрессионная модель на основе экспериментальных данных;
- “прозрачного ящика” – известна и структура модели, и методы определения ее параметров (расчетным путем или непосредственным измерением);
- “серого ящика” – известна структура и методы математического описания, однако требуется найти значения некоторых параметров таким образом, чтобы погрешность моделирования была минимальной.

Пример модели, основанной на концепции “прозрачного ящика” – двухмассовая линейная модель динамики привода машины, расчетная схема которой приведена на рис.1.1. Она описывается системой дифференциальных уравнений

$$I_1 \ddot{\varphi}_1 + \beta_{01} \dot{\varphi}_1 + C_{01} \varphi_1 - \beta_{12} (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) - C_{12} (\varphi_2 - \varphi_1) = 0;$$

$$I_2 \ddot{\varphi}_2 + \beta_{12} (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) + C_{12} (\varphi_2 - \varphi_1) = M_c.$$

Рассмотрим методы определения инерционных I_1, I_2 упругих C_{01}, C_{12} и диссипативных β_{01}, β_{12} параметров этой модели.

Инерционные параметры в данной модели – это моменты инерции вращающихся масс привода. При расчете моментов инерции все детали разбиваются на простые составные части в виде цилиндров или конусов, для которых известны простые расчетные формулы.

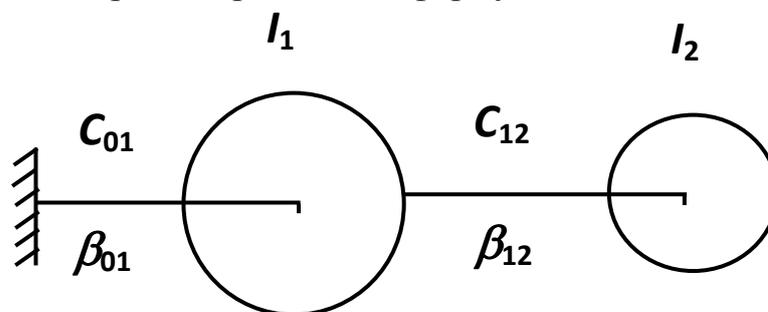


Рисунок 1.1 – Расчетная схема привода транспортно-технологической машины.

Например, для деталей цилиндрической формы

$$I = \gamma \pi l (d_1^4 - d_2^4) / 32,$$

где d_1 и d_2 – внешний и внутренний диаметры детали;

l – длина детали;

γ – плотность материала.

Момент инерции ротора электродвигателя определяются по выражению по выражению

$$I_p = \frac{1}{4g} GD^2, \text{ кг м}^2$$

где GD^2 - маховый момент, Н м²,

g - ускорение свободного падения, м/с².

Для узлов сложной формы иногда целесообразно использовать экспериментальное определение момента инерции, например, методом бифилярного подвеса.

При компьютерном проектировании машины с использованием метода трехмерного моделирования инерционные характеристики всех деталей и машины в целом определяются автоматически компьютерной программой.

Моменты инерции валов присоединяются к моментам инерции сосредоточенных масс (шкивов, колес и т.д.).

Упругими характеристиками являются коэффициенты податливости или коэффициенты жесткости участков привода. При наличии жестких корпусных деталей достаточно точные оценки получают расчетным путем. При этом учитывается податливость валов на кручение, податливость шлицевых и шпоночных соединений, зубчатых передач, а также изгибная податливость валов и радиальные деформации опор.

Коэффициент податливости цилиндрического участка вала

$$e_g = 32l / (\pi G d^4), (\text{Н}^{-1} \text{м}^{-1})$$

где G – модуль сдвига.

Коэффициент податливости соединения вал-ступица определяется по формуле

$$e_c = \frac{K_c}{d^2 l h z}$$

где d, l – диаметр и длина соединения, h – активная высота шпонки или шлица, z – количество шпонок или шлицев; K_c – коэффициент пропорциональности.

Приведенная к одному из валов крутильная податливость зубчатой передачи

$$e_{zn} = \frac{K_3}{b R^2 \cos^2 \alpha},$$

где b – рабочая ширина колеса, R – радиус начальной окружности колеса, расположенного на валу, к которому приводится податливость передачи; α - угол зацепления, K_3 – коэффициент пропорциональности.

Изгибная податливость валов и податливость подшипниковых опор определяется по известным методам сопротивления материалов и приводится к крутильной податливости.

Для экспериментального определения податливости привода машины производится ступенчатое нагружение ротора электродвигателя крутящим моментом известной величины при застопоренном исполнительном органе. При этом измеряется угол поворота ротора, а также угол поворота исполнительного органа, поскольку стопорение не может быть абсолютно

жестким. В результате строятся гистерезисные петли, по которым можно определить линейризованные коэффициенты жесткости или податливости.

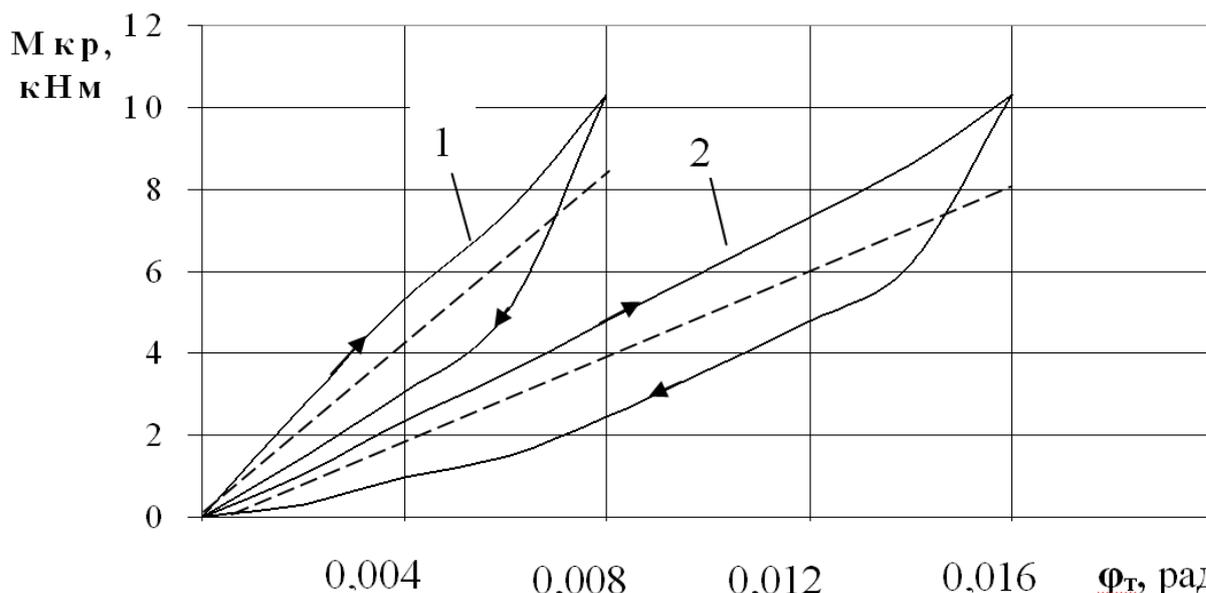


Рисунок 1.2. - Результаты экспериментального определения коэффициента жесткости привода неподвижного (гистерезисная петля 1) и подвижного (гистерезисная петля 2) валков двухвалковой зубчатой дробилки ДДЗ-6А.

В качестве основной характеристики рассеяния энергии (диссипативной характеристики) независимо от природы энергетических потерь выступает относительное рассеяние энергии ψ (коэффициент поглощения). Величина ψ определяется по формуле

$$\psi = \frac{\Delta W}{W}$$

где ΔW - энергия рассеиваемая за цикл колебаний;

W - максимальное амплитудное значение потенциальной энергии, накопленной системой в начале рассматриваемого цикла.

Величина ψ определяется также по формуле:

$$\psi = e^{\delta} - e^{-\delta}$$

где $e = 2,71828\dots$ - основание натурального логарифма,

δ - логарифмический декремент колебаний.

Для подсистем с невысокой диссипацией (при $\delta < 0,2\dots 0,3$) $\psi \approx 2\delta$.

Логарифмический декремент колебаний часто используется на практике в качестве характеристики рассеяния энергии колебаний. Величина δ определяется по выражению:

$$\delta = \ln \frac{a_k}{a_{k+1}}$$

где a_k, a_{k+1} - две последующие амплитуды свободных затухающих колебаний в начале и в конце $(k + 1)$ -го периода.

Коэффициент поглощения обычно определяют экспериментально при помощи опыта свободных затухающих колебаний системы или, используя гистерезисные петли, полученные при статическом, а лучше динамическом нагружении исследуемой подсистемы машины.

Найдем эквивалентный коэффициент сопротивления для рассматриваемой модели

$$\beta_{12} = \frac{\Psi C_{12}}{2 \cdot \pi \cdot \omega}$$

где ω - парциальная собственная частота системы;

$$\omega = \sqrt{\frac{C_{12}}{I_3}}; \quad I_3 = I_1 I_2 (I_1 + I_2)^{-1}.$$

Упругие и диссипативные характеристики модели асинхронного электродвигателя определяются в зависимости от принятого конкретного вида модели. В рассматриваемом на рис. 1.1 примере использована модель электродвигателя, в которой упругие и диссипативные элементы аналога связи электромагнитной связи ротора и статора соединены параллельно. В этом случае

$$\beta_{01} = S_{\kappa} \omega_c I_1 \quad C_{01} = \frac{1}{v \omega_0 T_{\mathcal{E}}}$$

$$v = \frac{S_{\kappa}}{2M_{\kappa}} \quad - \text{условная крутизна моментной характеристики};$$

$$T_{\mathcal{E}} = \frac{1}{\omega_c S_{\kappa}} \quad - \text{электромагнитная постоянная времени};$$

S_{κ}, M_{κ} – критическое скольжение и критический момент;

ω_c – угловая частота сети электроснабжения

ω_0 – синхронная угловая частота вращения ротора.

При использовании имитационных математических моделей, полученных на основе концепции “серого ящика”, необходимым этапом является идентификация параметров модели. Параметрическая идентификация является специфическим этапом имитационного моделирования сложных технических систем, определяющим адекватность модели реальной системе. Разработанная математическая модель содержит ряд параметров, которые являются настроечными, то есть должны подбираться таким образом, чтобы результаты вычислительного эксперимента наилучшим образом удовлетворяли экспериментальным данным.

Структурная схема идентификации параметров показана на рис. 1.3.

Критериями близости для имитационных моделей машин являются: статистические характеристики динамических процессов (м.о., с.к.о., коэффициент вариации, гистограммы распределения, спектральные

плотности), а также удельные энергозатраты процесса и характеристики полученного продукта.

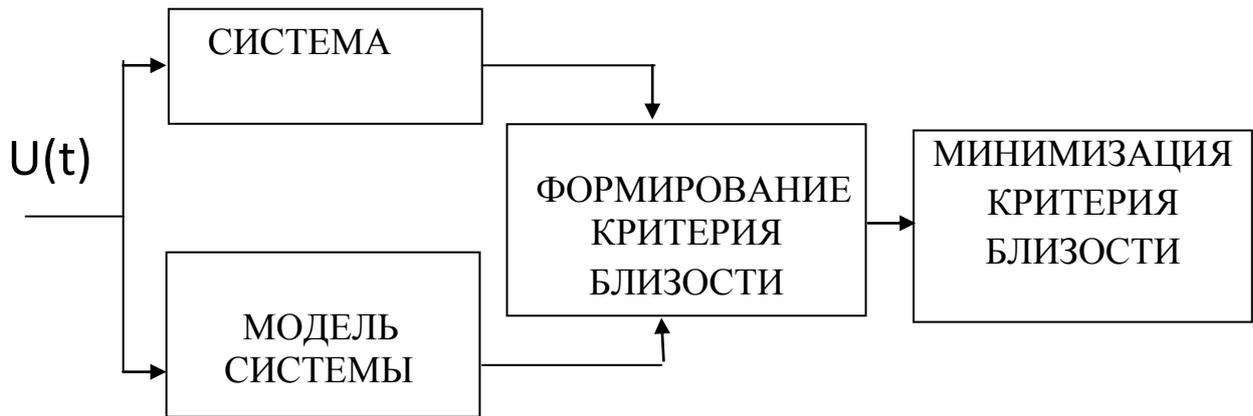


Рисунок 1.3 – Структурная схема идентификации ($U(t)$ – внешнее воздействие).

Для минимизации критерия близости чаще всего используется метод наименьших квадратов – то есть минимизируется сумма квадратов отклонений результатов натурального $P_{нэі}$ и вычислительного $P_{вэі}$ эксперимента.

$$\sum_{i=1}^N (P_{вэі} - P_{нэі})^2 \rightarrow \min .$$

1.2 Математическое моделирование динамики подъемно-транспортной машины

Подъем груза на некоторую высоту осуществляется специальной установкой, называемой подъемной машиной или лебедкой. Схематизация такой установки изображена на рис. 1.4.

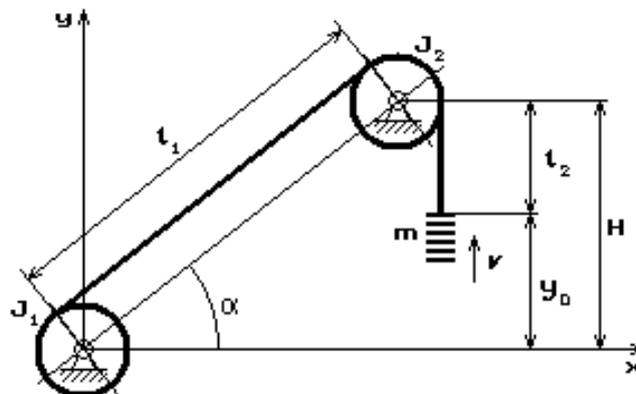


Рис. 1.4. Расчетная схема подъемно-транспортной установки

Здесь обозначено: J_1 – момент инерции барабана машины с приведенными к нему моментами инерции вращающихся частей редуктора и ротора электродвигателя; J_2 – момент инерции направляющего шкива; l_1 – длина наклонной струны каната, считающейся постоянной; l_2 – длина отвесной части каната; α – угол наклона струны; m – масса концевого груза; V – скорость подъема груза.

Пусть φ_{σ} и φ_{ω} – углы поворота барабана и шкива против часовой стрелки, y_0 – перемещение крюка подвески груза по вертикали, отсчитываемое от некоторого исходного положения груза. Предполагается, что груз перемещается только в вертикальном направлении вдоль оси y и не имеет боковых смещений. В таком случае

$$\delta l_1 = R_{\sigma}\varphi_{\sigma} - R_{\omega}\varphi_{\omega} \quad (1.1)$$

есть величина упругого удлинения струны каната. В то же время

$$\delta l_2 = R_{\omega}\varphi_{\omega} - y_0 \quad (1.2)$$

есть величина упругого удлинения отвеса каната. Здесь R_{σ}, R_{ω} – радиусы соответственно барабана и шкива.

Формулы (1.1) и (1.2) дают возможность записать потенциальную энергию системы в виде

$$U = \frac{1}{2} C_{стр} (\delta l_1)^2 + \frac{1}{2} C_{отв} (\delta l_2)^2 + mgy_0, \quad (1.3)$$

где g – ускорение свободного падения, $C_{стр}$ и $C_{отв}$ – коэффициенты жесткости соответственно струны и отвеса каната. Эти коэффициенты определяются следующим образом:

$$C_{стр} = \frac{E\bar{a}d_k^2}{l_1}, \quad C_{отв} = \frac{E\bar{a}d_k^2}{l_2}, \quad (1.4)$$

где E – модуль упругости стали проволоки ($E = 2,06 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$); \bar{a} – безразмерный параметр, зависящий от конструкции каната (для канатов ГОСТ 7668-80 – $\bar{a} \approx 0,315$); d_k – диаметр каната, $м$. Заметим, что в (1.4) $l_2 = l_{02} - y_0$, где l_{02} – начальная длина отвеса, но, строго говоря, $C_{отв}$ зависит не от координаты y_0 , а от его «среднего значения», определяемого как средняя интегральная величина по времени t при перемещении груза. Поэтому в дальнейшем переменную $C_{отв}$ следует рассматривать как параметрическую функцию от t , а не функцию от y_0 .

Подстановка (1.1) и (1.2) в (1.3) приводит к окончательному выражению для потенциальной энергии:

$$U = \frac{1}{2} C_{стр} (R_{\sigma}\varphi_{\sigma} - R_{\omega}\varphi_{\omega})^2 + \frac{1}{2} C_{отв} (R_{\omega}\varphi_{\omega} - y_0)^2 + mgy_0. \quad (1.5)$$

Далее определим кинетическую энергию рассматриваемой системы, которая представляет собой совокупность двух вращающихся масс барабана и шкива и одной линейно перемещающейся массы концевого груза.

Распределенную по длине массу каната учтем следующим образом. Массу части каната, навитой на барабан машины, присоединим к его вращающейся массе, то есть в таком случае момент инерции барабана будет равным

$$J'_1 = J_1 + \rho R_\sigma^2 y_0. \quad (1.6)$$

Здесь ρ – масса единицы длины каната, определяемая по формуле

$$\rho = \bar{\rho} \gamma d_\kappa^2, \quad (1.7)$$

где $\bar{\rho}$ – безразмерный параметр, зависящий от конструкции каната (например, для канатов ГОСТ 7668-80 – $\bar{\rho} = 0,491$); γ – плотность стали, из которой изготовлена проволока ($\gamma = 7800 \text{ кг/м}^3$).

Массу струны и отвеса каната присоединим соответственно к массе шкива и груза, то есть

$$J'_2 = J_2 + \rho R_u^2 l_1, \quad m' = m + \rho l_2. \quad (1.8)$$

Способы приведения массы каната могут быть и другими, но для сравнительно коротких длин, какими являются на практике l_1 и l_2 , указанный прием с достаточной для инженерных целей точностью отражает действительность.

Во втором из соотношений (1.8), как и в (1.4), $l_2 = l_{02} - y_0$, следовательно, параметры J'_1 [см. (1.6)] и m' формально являются функциями от переменной y_0 . Однако фактически J'_1 и m' зависят, как и $C_{отв}$, не от координаты y_0 , а от его «среднего значения», определяемого как средняя интегральная величина по времени t при перемещении груза. Поэтому в дальнейшем переменные J'_1 и m' следует рассматривать как параметрическую функцию от времени t , а не функцию от y_0 .

Итак, с учетом соотношений (1.6) и (1.8) кинетическую энергию запишем в форме

$$T = \frac{1}{2} J'_1 \dot{\phi}_\sigma^2 + \frac{1}{2} J'_2 \dot{\phi}_u^2 + \frac{1}{2} m' \dot{y}_0^2, \quad (1.9)$$

где точка над символом динамической переменной означает ее производную по времени t . Таким образом, $\dot{\phi}_\sigma, \dot{\phi}_u$ – угловые скорости соответственно барабана и шкива, а $\dot{y}_0 = V$ – скорость концевого груза.

Теперь с помощью (1.6) и (1.9) можно записать функцию Лагранжа в форме

$$L = \frac{1}{2} J'_1 \dot{\phi}_\sigma^2 + \frac{1}{2} J'_2 \dot{\phi}_u^2 + \frac{1}{2} m' \dot{y}_0^2 - mgy_0 - \rho gl_2 \left(H - \frac{l_2}{2} \right) - \frac{1}{2} C_{cmp} (R_\sigma \phi_\sigma - R_u \phi_u)^2 - \frac{1}{2} C_{отв} (R_u \phi_u - y_0)^2, \quad (1.10)$$

а в уравнениях Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.11)$$

примем $q_1 = \varphi_{\delta}$, $q_2 = \varphi_{\text{ш}}$, $q_3 = y_0$ и $\dot{q}_1 = \dot{\varphi}_{\delta}$, $\dot{q}_2 = \dot{\varphi}_{\text{ш}}$, $\dot{q}_3 = \dot{y}_0$, которые являются обобщенными координатами и скоростями дискретных элементов установки. Обобщенные непотенциальные силы Q_1, Q_2, Q_3 для рассматриваемой системы примем следующими:

$$Q_1 = M_{\delta\delta}(t), \quad Q_2 = 0, \quad Q_3 = 0, \quad (1.12)$$

где $M_{\delta\delta}(t)$ – приведенный к оси барабана момент, развиваемый двигателем, и эту переменную будем считать известной функцией от времени t . Обобщенные силы Q_2, Q_3 приняты равными нулю, так как предполагается, что шкив и концевой груз не подвержены действию иных внешних сил, кроме уже учтенных. В действительности же на указанные тела действуют силы сопротивления воздушной среды, силы трения в подшипниковых узлах, возможно также возникновение каких либо импульсных нагрузок, вызванных, например, столкновением поднимающегося груза с препятствием и т.д. Однако такие силы здесь рассматриваться не будут.

Произведем необходимые вычисления производных от функции (1.10) в соответствии с формой записи уравнений Лагранжа (1.11).

Прежде всего, вычислим частные производные по обобщенным координатам:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \varphi_{\delta}} &= -C_{\text{стр}} R_{\delta} (R_{\delta} \varphi_{\delta} - R_{\text{ш}} \varphi_{\text{ш}}), \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi_{\text{ш}}} &= C_{\text{стр}} R_{\text{ш}} (R_{\delta} \varphi_{\delta} - R_{\text{ш}} \varphi_{\text{ш}}) - C_{\text{омс}} R_{\text{ш}} (R_{\text{ш}} \varphi_{\text{ш}} - y_0), \\ \frac{\partial L}{\partial y_0} &= C_{\text{омс}} (R_{\text{ш}} \varphi_{\text{ш}} - y_0) - mg. \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

Далее определим частные производные по обобщенным скоростям:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_{\delta}} = J_1' \dot{\varphi}_{\delta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_{\text{ш}}} = J_2' \dot{\varphi}_{\text{ш}}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_0} = m' \dot{y}_0,$$

и возьмем полную производную по времени от этих величин с учетом соотношений (1.6) и (1.8) и формулы $l_2 = l_{02} - y_0$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_{\delta}} = J_1' \ddot{\varphi}_{\delta} + \rho R_{\delta}^2 \dot{\varphi}_{\delta} \dot{y}_0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_{\text{ш}}} = J_2' \ddot{\varphi}_{\text{ш}}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_0} = m' \ddot{y}_0 - \rho \dot{y}_0^2. \quad (1.14)$$

Подставив теперь (1.13) и (1.14) в уравнение Лагранжа (1.11) с учетом (1.12), получим

$$\left. \begin{aligned} J_1' \ddot{\varphi}_{\delta} + C_{\text{стр}} R_{\delta} (R_{\delta} \varphi_{\delta} - R_{\text{ш}} \varphi_{\text{ш}}) + \rho n R_{\delta}^2 \dot{\varphi}_{\delta} \dot{y}_0 &= M_{\delta\delta}(t), \\ J_2' \ddot{\varphi}_{\text{ш}} - C_{\text{стр}} R_{\text{ш}} (R_{\delta} \varphi_{\delta} - R_{\text{ш}} \varphi_{\text{ш}}) + C_{\text{омс}} R_{\text{ш}} (R_{\text{ш}} \varphi_{\text{ш}} - y_0) &= 0, \\ m' \ddot{y}_0 - C_{\text{омс}} (R_{\text{ш}} \varphi_{\text{ш}} - y_0) + mg - \rho \dot{y}_0^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Уравнения (1.15) и являются искомыми уравнениями, описывающие динамическое состояние подъемной машины или лебедки.

Лекция 2

Математическое моделирование поперечных колебаний груза

В подъемно-транспортных машинах груз при подъеме или спуске ничем не удерживается от поперечных перемещений (отсутствуют направляющие проводники). В то же время поперечные перемещения груза доставляют в эксплуатации дополнительные заботы в части обеспечения безопасности обслуживающего персонала и сохранности окружающих построек. Поэтому задача инженера состоит в правильном описании поперечных перемещений груза, на основе чего можно делать практические выводы и рекомендации.

На рис. 2.1 изображена подъемная система, подобная рассмотренной в предыдущей лекции.

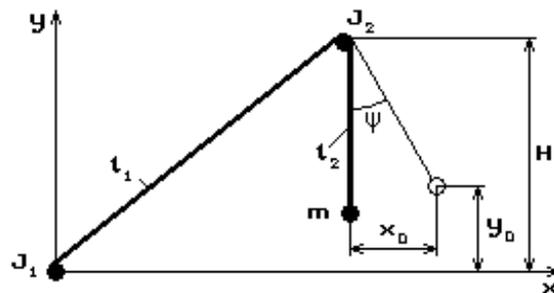


Рис. 2.1. Расчетная схема подъемной машины с поперечным отклонением груза

Но здесь концевой груз может свободно отклоняться от вертикали на некоторый угол ψ . В этом случае положение в пространстве массы m определяется не только вертикальной координатой y_0 , но и горизонтальной x_0 , как показано на рисунке. Отсюда видно, что если в динамическом состоянии длина отвеса каната равна l_2 , то при плоском движении груза

$$x_0 = l_2 \sin \psi, \quad y_0 = H - l_2 \cos \psi, \quad (2.1)$$

где H – превышение оси шкива над выбранной нулевой отметкой. С помощью (2.1) находим

$$\dot{x}_0 = \dot{l}_2 \sin \psi + l_2 \dot{\psi} \cos \psi, \quad \dot{y}_0 = -\dot{l}_2 \cos \psi + l_2 \dot{\psi} \sin \psi. \quad (2.2)$$

Отсюда квадрат скорости груза получим в форме

$$V_0^2 = \dot{l}_2^2 + l_2^2 \dot{\psi}^2,$$

и тогда кинетическая энергия в целом всей системы определится как

$$T = \frac{J_1}{2} \dot{\phi}_o^2 + \frac{J_2}{2} \dot{\phi}_u^2 + \frac{m}{2} (\dot{l}_2^2 + l_2^2 \dot{\psi}^2), \quad (2.3)$$

где, как и в предыдущей лекции, ϕ_o, ϕ_u – углы поворота соответственно барабана и шкива; J_1, J_2 – моменты инерции барабана и

шкива. Здесь, в отличие от лекции 1, считается параметр J_1 постоянным, пренебрегая его изменением за счет присоединенных масс каната.

Упругие удлинения струны и качающегося отвеса каната определяются соотношениями:

$$\delta l_1 = R_{\sigma} \varphi_{\sigma} - R_{\omega} \varphi_{\omega}, \quad \delta l_2 = R_{\omega} \varphi_{\omega} - (l_{02} - l_2),$$

где l_{02} – начальная длина отвеса, и тогда потенциальная энергия представится в форме

$$U = \frac{C_{стр}}{2} (R_{\sigma} \varphi_{\sigma} - R_{\omega} \varphi_{\omega})^2 + \frac{C_{отв}}{2} [(R_{\omega} \varphi_{\omega} - (l_{02} - l_2))]^2 + mg(H - l_2 \cos \psi), \quad (2.4)$$

где $C_{стр}$ и $C_{отв}$ – коэффициенты жесткости соответственно струны и отвеса каната, определяемые формулами (1.4) из первой лекции.

Функция Лагранжа $L = T - U$ с учетом (2.3) и (2.4) будет иметь вид

$$L = \frac{J_1}{2} \dot{\varphi}_{\sigma}^2 + \frac{J_2}{2} \dot{\varphi}_{\omega}^2 + \frac{m}{2} (\dot{l}_2^2 + l_2^2 \dot{\psi}^2) - \frac{C_{стр}}{2} (R_{\sigma} \varphi_{\sigma} - R_{\omega} \varphi_{\omega})^2 - \frac{C_{отв}}{2} [R_{\omega} \varphi_{\omega} - (l_{02} - l_2)]^2 - mg(H - l_2 \cos \psi). \quad (2.5)$$

В уравнениях Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (2.6)$$

в качестве обобщенных координат и скоростей дискретных элементов установки примем $q_1 = \varphi_{\sigma}, q_2 = \varphi_{\omega}, q_3 = l_2, q_4 = \psi$ и $\dot{q}_1 = \dot{\varphi}_{\sigma}, \dot{q}_2 = \dot{\varphi}_{\omega}, \dot{q}_3 = \dot{l}_2, \dot{q}_4 = \dot{\psi}$. Будем считать, что обобщенные непотенциальные силы Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 есть

$$Q_1 = M_{\sigma}(t), \quad Q_2 = 0, \quad Q_3 = 0, \quad Q_4 = 0, \quad (2.7)$$

где $M_{\sigma}(t)$ – приведенный к оси барабана момент, развиваемый двигателем, и эту переменную будем считать известной функцией от времени t . Обобщенные силы Q_2, Q_3, Q_4 приняты равными нулю, так как предполагается, что шкив и концевой груз не подвержены действию иных внешних сил, кроме уже учтенных.

Произведем необходимые вычисления производных от функции Лагранжа (2.5) в соответствии с формой записи уравнений Лагранжа (2.6).

Прежде всего, вычислим частные производные по обобщенным координатам:

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \varphi_{\delta}} &= -C_{cmp}R_{\delta}(R_{\delta}\varphi_{\delta} - R_{uu}\varphi_{uu}), \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi_{uu}} &= C_{cmp}R_{uu}(R_{\delta}\varphi_{\delta} - R_{uu}\varphi_{uu}) - C_{омв}R_{uu}[R_{uu}\varphi_{uu} - (l_{02} - l_2)], \\ \frac{\partial L}{\partial l_2} &= -C_{омв}[R_{uu}\varphi_{uu} - (l_{02} - l_2)] + mg \cos \psi + ml_2\dot{\psi}^2, \\ \frac{\partial L}{\partial \psi} &= -mgl_2 \sin \psi.\end{aligned}$$

Далее имеем:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_{\delta}} = J_1\dot{\varphi}_{\delta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_{uu}} = J_2\dot{\varphi}_{uu}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{l}_2} = ml_2, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = ml_2^2\dot{\psi},$$

и тогда уравнения динамического состояния будут

$$\left. \begin{aligned}J_1\ddot{\varphi}_{\delta} + C_{cmp}R_{\delta}(R_{\delta}\varphi_{\delta} - R_{uu}\varphi_{uu}) &= M_{\delta\delta}(t), \\ J_2\ddot{\varphi}_{uu} - C_{cmp}R_{uu}(R_{\delta}\varphi_{\delta} - R_{uu}\varphi_{uu}) + C_{омв}R_{uu}[R_{uu}\varphi_{uu} - (l_{02} - l_2)] &= 0, \\ m\ddot{l}_2 + C_{омв}[R_{uu}\varphi_{uu} - (l_{02} - l_2)] - mg \cos \psi - ml_2\dot{\psi}^2 &= 0, \\ ml_2^2\ddot{\psi} + 2ml_2\dot{l}_2\dot{\psi} + mgl_2 \sin \psi &= 0.\end{aligned}\right\} \quad (2.8)$$

В третьем уравнении системы (2.8) компонента $ml_2\dot{\psi}^2 = F_y$ представляет собой центробежную силу, возникающую при поперечных раскачиваниях груза. По величине эта сила значительно меньше веса груза, если угол отклонения отвеса сравнительно мал, и по этой причине из системы (2.8) член $ml_2\dot{\psi}^2$ можно исключить.

В четвертом уравнении системы (2.8) компонента $2ml_2\dot{l}_2\dot{\psi} = M_k$ – является моментом силы Кориолиса, который, вообще говоря, может быть соизмеримым с восстанавливающим моментом $mgl_2 \sin \psi$, и поэтому им пренебрегать нельзя. Однако здесь, дабы избежать излишних нелинейностей, целесообразно считать, что $\dot{l}_2 \approx V_{cp}(t)$, где $V_{cp}(t)$ – известная функция времени, представляющая собой среднюю скорость подъема груза. Тогда момент кориолисовой силы в линеаризованном виде будет $M_k = 2ml_2V_{cp}\dot{\psi}$.

В системе (2.8) при малых углах отклонений отвеса можно положить

$$\cos \psi \approx 1, \quad \sin \psi \approx \psi,$$

и тогда вместо нелинейной системы (2.8) получим

$$\left. \begin{aligned}J_1\ddot{\varphi}_{\delta} + C_{cmp}R_{\delta}(R_{\delta}\varphi_{\delta} - R_{uu}\varphi_{uu}) &= M_{\delta\delta}(t), \\ J_2\ddot{\varphi}_{uu} - C_{cmp}R_{uu}(R_{\delta}\varphi_{\delta} - R_{uu}\varphi_{uu}) + C_{омв}R_{uu}[R_{uu}\varphi_{uu} - (l_{02} - l_2)] &= 0, \\ m\ddot{l}_0 + C_{омв}[R_{uu}\varphi_{uu} - (l_{02} - l_2)] &= mg, \\ ml_2^2\ddot{\psi} + 2ml_2V_{cp}\dot{\psi} + mgl_2\psi &= 0.\end{aligned}\right\} \quad (2.9)$$

Решение системы (2.9) позволяет определить максимальные поперечные перемещения груза. Заметим, что момент сил Кориолиса $2ml_2V_{cp}\dot{\psi}$ выступает в последнем уравнении данной системы как своего рода диссипативный фактор при $V_{cp} > 0$ (подъем груза). При спуске же груза $V_{cp} < 0$, и по этой причине груз раскачивается с непрерывно увеличивающейся амплитудой. Это важное обстоятельство необходимо учитывать при эксплуатации.

Лекция 3.

Переходные процессы в подъемно-транспортных машинах

Реальные машины и механизмы, как правило, работают по схеме: пуск – разгон до заданной скорости – движение с постоянной скоростью – замедление – стопорение. Далее этот процесс повторяется сколь угодно раз в зависимости от технологического назначения машины. Имеется целый ряд машин, работающих в таком *повторно-кратковременном* режиме, когда указанный процесс от пуска до стопорения имеет сравнительно небольшую продолжительность и часто повторяется. Примером могут служить подъемно-транспортные машины (краны всевозможных типов), лебедки и подъемные машины, предназначенные для транспортировки различных грузов, и др.

Процессы, происходящие в моменты времени изменения режима движения или работы машины, называются *переходными*. Разумеется, переходные процессы возникают не только при изменении характера движения, но и при изменении вида внешнего нагружения, при изменении структуры системы и во многих других случаях. В данном же разделе рассматриваются переходные процессы, вызванные только переменностью условий движения по приведенной в начале лекции схеме.

Итак, пусть скорость некоторой машины, агрегата, устройства и т.д. является переменной во времени и управляется либо оператором вручную, либо с помощью специального регулятора по заданной программе. В простейшем случае, как показано на рис. 3.1, регулируемая скорость изменяется по некоторой ломаной линии *ABC*. В физически реальных системах, даже при отсутствии специального регулирования, фактическая скорость, как правило, не имеет резкого излома и между точками 1 и 2, расположенных вблизи точки *B*, изменяется по некоторой плавной дуге, как изображено на рисунке 3.1.

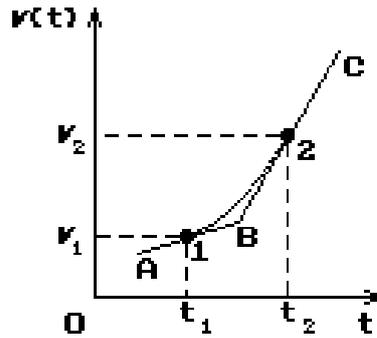


Рис. 3.1.- К понятию рывка

Происходит это из-за инерционности механизма управления, из-за различного рода задержек и запаздывания сигналов, а также по многим другим причинам.

В большинстве случаев, впрочем, точки 1 и 2 настолько близки к точке *B*, что даже высокочувствительные регистраторы фиксируют это место именно как «излом». Естественно, что в таких случаях в окрестности точки *B* происходит резкое изменение ускорения (или замедления) движения машины. Так, если при движении по линии *AB* ускорение равно w_1 , то при переходе через точку *B* ускорение практически мгновенно становится равным w_2 . Изменение ускорения за единицу времени в механике принято называть *рывком*, то есть

$$\rho = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2v}{dt^2}, \quad (3.1)$$

где ρ, w, v – соответственно рывок, ускорение и скорость какой-либо специально выбранной для контроля (то есть для управления) точки машины. В дальнейшем перечисленные параметры будут относиться лишь только к этой контрольной или управляемой точке.

Как уже говорилось, в реальности рывок хотя и может достигать больших значений, но все же он ограничен естественными факторами. Искусственное снижение рывка возможно с применением специальных устройств. Системы автоматического управления электроприводом, как правило, основаны на принципе ограничения рывка, и они так и называются – *системы подчиненного регулирования с ограничением рывка*.

Установим основные зависимости величины рывка от параметров движения с изменяющейся скоростью.

Пусть требуется осуществить плавное изменение скорости в интервале времени $[t_1, t_2]$ такое, чтобы ее вторая производная согласно (3.1) равнялась заданной величине рывка внутри данного интервала. Для этого представим переменную скорость функцией

$$v(t) = v_1 + w_1(t - t_1) + \frac{\rho}{2}(t - t_1)^2 \quad (t_1 \leq t \leq t_2), \quad (3.2)$$

где v_1 и w_1 – соответственно скорость и ускорение в точке 1 на рис. 3.1. Как следует из (3.2), функция $v(t)$ удовлетворяет условиям сопряжения в точке 1, то есть

$$v(t)|_{t=t_1} = v_1, \quad \dot{v}(t)|_{t=t_1} = w_1,$$

но аналогичные условия должны быть и в точке 2 при $t = t_2$:

$$v(t)|_{t=t_2} = v_2, \quad \dot{v}(t)|_{t=t_2} = w_2.$$

Подстановка сюда выражения (3.2) однозначно приводит к соотношениям:

$$t_2 - t_1 = \frac{w_2 - w_1}{\rho}, \quad v_2 - v_1 = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2\rho}. \quad (3.3)$$

Путь, пройденный машиной за время $t_2 - t_1$, найдем путем интегрирования по t функции (3.2) от t_1 до t_2 :

$$h = v_1(t_2 - t_1) + \frac{w_1}{2}(t_2 - t_1)^2 + \frac{\rho}{6}(t_2 - t_1)^3. \quad (3.4)$$

Как следует из (3.3), рывок является алгебраической величиной, и его знак определяется знаком разности $w_2 - w_1$.

Рассмотрим теперь отвлеченную модель машины, представленную одномерным осциллятором, изображенным на рис. 3.2 (как системы с одной степенью свободы).

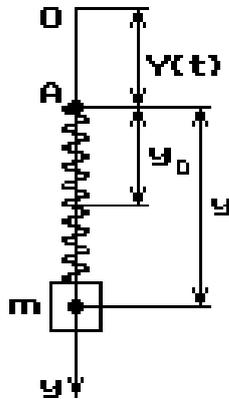


Рис. 3.2. Осциллятор с управляемой скоростью спуска-подъема

Такая модель в первом, но в достаточном инженерном приближении описывает подъем груза подъемно-транспортными машинами, подъем стрелы крана или экскаватора и др. Дифференциальное уравнение такой системы записывается в форме

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + cx = -m\ddot{Y}(t), \quad (3.5)$$

где применительно к рассматриваемой модели m – общая или, как говорят, приведенная к названной выше контрольной точке масса машины; b – коэффициент вязкого сопротивления; c – жесткость упругой связи; x – малая величина деформации упругой связи; $Y(t)$ – заданный закон движения контрольной (управляемой) точки машины. Дальнейшая задача состоит в

назначении такой функции $Y(t)$, чтобы $x(t)$ как решение уравнения (3.5) обуславливало минимальные напряжения в упругой связи, являющейся основным грузонесущим элементом машины и ответственным за ее безаварийное состояние.

Пусть точка A на рис. 3.2 перемещается так, что вначале она ускоряется, двигаясь вниз, затем некоторое время движется с постоянной скоростью, после чего замедляется и, наконец, останавливается. По истечении времени паузы точка A начинает перемещаться в обратном направлении, проходя такие же стадии движения. Затем эти циклы повторяются неоднократно.

Сказанное иллюстрирует диаграмма на рис. 3.3, на которой показано изменение скорости $v(t) = dY(t)/dt$ и ускорения $w(t) = d^2Y(t)/dt^2$ точки A в течение одного цикла операции спуска-подъема.

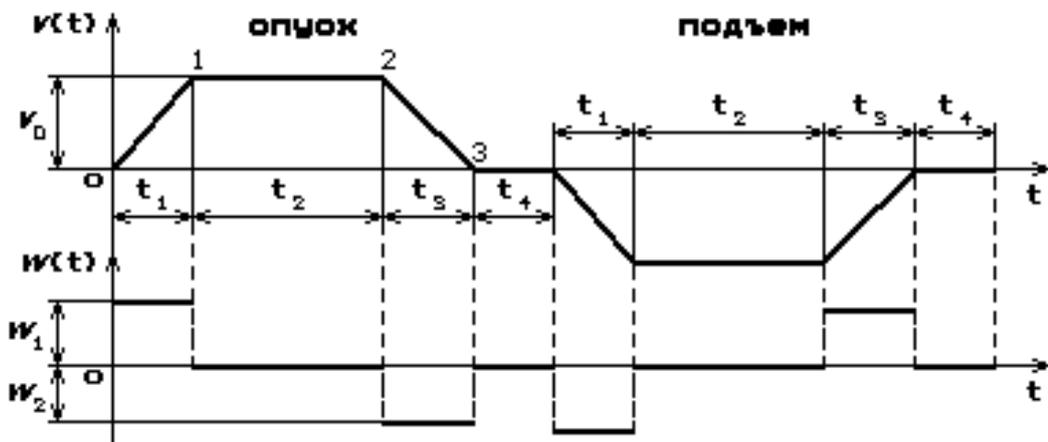


Рис. 3.3. Диаграммы скорости и ускорения без ограничения рывка

Здесь рывок в моменты изменения ускорений принят настолько большим, что в точках 0, 1, 2, 3 имеют место резкие «изломы» функции скорости $v(t)$ и при этом ускорение $w(t)$ изменяется «скачкообразно».

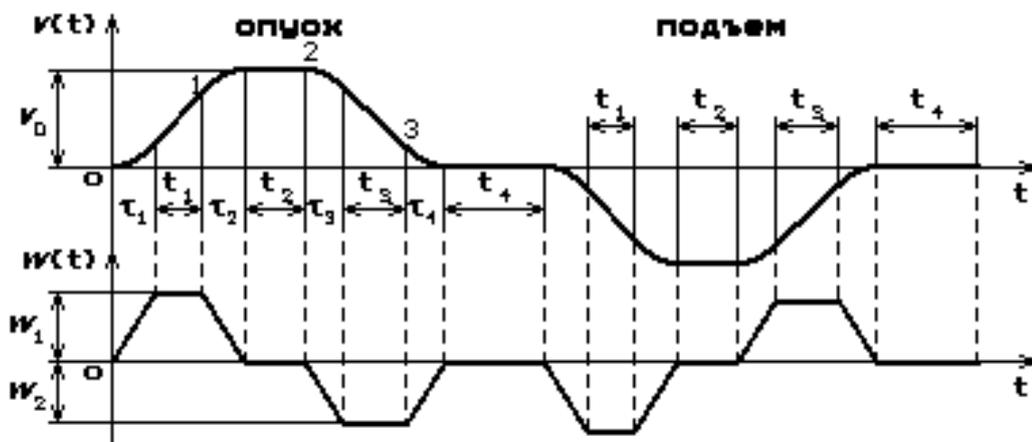


Рис. 3.4. Диаграммы скорости и ускорения с ограничением рывка

На рис. 3.4 показано изменение переменной скорости и ускорения точки A при достаточно небольших рывках, обеспечивающих плавное изменение скорости $v(t)$ в точках 0,1,2,3 (то есть на интервалах τ_1, τ_2, τ_3 и τ_4) и трапецеидальный характер изменения ускорений $w(t)$. Функция изменения рывка здесь также не показана, но можно сказать, что она представляет собой ступенчатую линию и отличается от нуля только на интервалах времени τ_1, τ_2, τ_3 и τ_4 , причем согласно с первой формулой (3.3) этим интервалам соответствуют величины рывков, определяемые очевидными соотношениями

$$\rho_1 = \frac{w_1}{\tau_1}, \quad \rho_2 = -\frac{w_1}{\tau_2}, \quad \rho_3 = \frac{w_2}{\tau_3}, \quad \rho_4 = -\frac{w_2}{\tau_4}, \quad (3.6)$$

в которых знаки рывков обусловлены знаками соответствующих ускорений. В частности, так как $w_1 > 0$ (разгон), а $w_2 < 0$ (замедление), то $\rho_{1,4} > 0$, а $\rho_{2,3} < 0$, разумеется, при естественной положительной определенности τ_i . Знак ρ_i можно определить также по следующему мнемоническому правилу: если функция $v(t)$ на интервале τ_i вогнутая, то $\rho_i > 0$, а если выпуклая – то $\rho_i < 0$.

Как правило, в управляемых системах величины ρ_i являются заданными, как и величины w_1 и w_2 , и тогда формулы (3.6) могут служить для определения продолжительности интервалов τ_i , что также необходимо для возможности интегрирования уравнения движения (3.5). Кроме этого, необходимо определить продолжительности и остальных этапов движения – t_1, t_2, t_3 и t_4 , а так как интервал t_4 (пауза между операциями спуска и подъема) не определяется параметрами движения, а назначается технологическими требованиями, то подлежат определению только три из них – t_1, t_2, t_3 . Перед началом вычисления этих интервалов условимся, что помимо параметров $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, w_1, w_2$ известными являются еще два параметра – максимальная скорость движения v_0 и так называемая высота подъема H , которая представляет собой путь движения машины (точки A) от пуска до стопорения.

Интервалы t_1 и t_3 определяются просто – для этого достаточно в соотношении (3.2) положить $\rho = 0$, как для равноускоренного движения, и при известных скоростях в начале ($v_{iнач}$) и в конце интервала ($v_{iкон}$) вычислить

$$t_1 = (v_{1кон} - v_{1нач}) / w_1, \quad t_3 = (v_{3кон} - v_{3нач}) / w_2. \quad (3.7)$$

Величину $v_{1нач}$ можно считать также скоростью в конце интервала τ_1 , которую определим согласно с (3.2) по формуле

$$v_{1нач} = \rho_1 \tau_1^2 / 2 = w_1^2 / (2\rho_1), \quad (3.8)$$

где использовано первое из соотношений (3.6). Скорость же $v_{1кон}$ может рассматриваться и как начальная на интервале τ_2 , а так как в конце этого интервала скорость становится равной v_0 , то с помощью (3.2) нетрудно получить

$$v_{1кон} = v_0 + w_1^2 / (2\rho_2), \quad (3.9)$$

где использовалось второе из соотношений (3.6). Заметим, что здесь $\rho_2 < 0$, следовательно $v_{1кон} < v_0$. Подставив теперь полученные выражения для $v_{1нач}$ и $v_{1кон}$ в первую формулу (3.7), получим

$$t_1 = \frac{v_0}{w_1} - \frac{w_1}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2} \right). \quad (3.10)$$

Аналогично поступим при определении t_3 . Величину $v_{3нач}$ можно считать скоростью в конце интервала τ_3 , и она определяется согласно с (3.2) по формуле

$$v_{3нач} = v_0 + \rho_3 \tau_3^2 / 2 = v_0 + w_2^2 / (2\rho_3), \quad (3.11)$$

где использовано третье из соотношений (3.6). Скорость же $v_{3кон}$ может рассматриваться и как начальная на интервале τ_4 , а так как в конце этого интервала скорость становится равной нулю, то с помощью (3.2) получим

$$v_{3кон} = w_2^2 / (2\rho_4), \quad (3.12)$$

где использовано четвертое из соотношений (3.6). Подставив теперь полученные выражения для $v_{3нач}$ и $v_{3кон}$ во вторую формулу (3.7), получим

$$t_3 = -\frac{v_0}{w_2} + \frac{w_2}{2} \left(\frac{1}{\rho_4} - \frac{1}{\rho_3} \right). \quad (3.13)$$

Что же касается интервала t_2 , то его определим так. Найдем вначале отрезки пути $\Delta h_1, \Delta h_2, \Delta h_3, \Delta h_4$, пройденные машиной соответственно за промежутки времени $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$. Найдем также отрезки пути h_1, h_3 , пройденные машиной соответственно за промежутки времени t_1, t_3 . А так как общий путь движения машины равен H , и на интервале t_2 машина движется с постоянной скоростью v_0 , то

$$t_2 = \frac{1}{v_0} [H - (\Delta h_1 + \Delta h_2 + \Delta h_3 + \Delta h_4 + h_1 + h_3)]. \quad (3.14)$$

Означенные отрезки пути легко находятся по формуле (3.4) с учетом полученных соотношений (3.6). Так,

$$\left. \begin{aligned} \Delta h_1 &= \frac{w_1^3}{6\rho_1^2}, \quad \Delta h_2 = -\frac{w_1}{\rho_2} \left(v_0 + \frac{w_1^2}{6\rho_2} \right), \\ \Delta h_3 &= \frac{w_2}{\rho_3} \left(v_0 + \frac{w_2^2}{6\rho_3} \right), \quad \Delta h_4 = -\frac{w_2^3}{6\rho_4^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

С помощью той же формулы (3.4), выражений (3.8), (3.9), (3.11), (3.12), а также соотношений (3.10) и (3.13) найдем, опуская промежуточные выкладки,

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= \frac{w_1}{2} \left[\left(\frac{v_0}{w_1} \right)^2 + \frac{v_0}{\rho_2} - \left(\frac{w_1}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1}{\rho_2^2} \right) \right], \\ h_3 &= -\frac{w_2}{2} \left[\left(\frac{v_0}{w_2} \right)^2 + \frac{v_0}{\rho_3} - \left(\frac{w_2}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{\rho_4^2} - \frac{1}{\rho_3^2} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Подстановка (3.15) и (3.16) в (3.14) дает

$$t_2 = \frac{1}{v_0} \left[H - \frac{w_1^3}{24} \left(\frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1}{\rho_2^2} \right) + \frac{w_2^3}{24} \left(\frac{1}{\rho_4^2} - \frac{1}{\rho_3^2} \right) \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{w_1}{\rho_2} - \frac{w_2}{\rho_3} \right) - \frac{v_0}{2} \left(\frac{1}{w_1} - \frac{1}{w_2} \right).$$

С помощью найденных выражений для всех интервалов времени несложно записать формулу для суммарного времени движения машины с момента пуска до стопорения в форме

$$T_{\text{движ}} = \frac{v_0}{w_0} + \frac{H - h_0}{v_0} + t_0, \quad (3.17)$$

где обозначено

$$w_0 = 2 \frac{w_1 w_2}{w_2 - w_1}, \quad h_0 = \frac{w_1^3}{24} \left(\frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1}{\rho_2^2} \right) - \frac{w_2^3}{24} \left(\frac{1}{\rho_4^2} - \frac{1}{\rho_3^2} \right), \quad t_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{w_1}{\rho_1} - \frac{w_2}{\rho_4} \right).$$

Для интегрирования уравнения движения машины (3.5) теперь можно уже записать:

$$\ddot{Y}(t) = \begin{cases} \rho_1(t - T_0) & \text{при } T_0 \leq t < T_1, \\ w_1 & \text{при } T_1 \leq t < T_2, \\ w_1 + \rho_2(t - T_2) & \text{при } T_2 \leq t < T_3, \\ 0 & \text{при } T_3 \leq t < T_4, \\ \rho_3(t - T_4) & \text{при } T_4 \leq t < T_5, \\ w_2 & \text{при } T_5 \leq t < T_6, \\ w_2 + \rho_4(t - T_6) & \text{при } T_6 \leq t < T_7, \\ 0 & \text{при } T_7 \leq t < T_8, \end{cases} \quad (3.18)$$

где T_0, T_1, \dots, T_8 – моменты времени, соответствующие началу каждого из означенных на рис. 3.3 интервалов, а именно:

$T_0 = 0, \quad T_1 = T_0 + \tau_1, \quad T_2 = T_1 + t_1, \quad T_3 = T_2 + \tau_2,$
 $T_4 = T_3 + t_2, \quad T_5 = T_4 + \tau_3, \quad T_6 = T_5 + t_3, \quad T_7 = T_6 + \tau_4,$
 причем последняя отметка времени $T_8 = T_7 + t_4$, где t_4 – продолжительность паузы. Заметим, что $T_7 = T_{\text{движ}}$, определяемое формулой (3.17).

Решение уравнения (3.5), записанное в форме

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = -\ddot{Y}(t), \quad (3.19)$$

представляется как сумма решений однородного и неоднородного уравнений, и его несложно получить на любом из означенных интервалов. Затем необходимо потребовать, чтобы на границах каждого соседних интервалов выполнялись равенства этих решений и их первые производные по времени. Такой способ построения решений известен под названием метода *сшивания* или *припасовки*. На рис. 3.6. изображены две различные функции $x(t)$, полученные при моделировании операции спуска груза подъемной машиной (кривые 1 и 2). Кривая 1 построена, для варианта, когда все ρ_i настолько велики, что диаграмма скорости (вверху на рисунке) состоит из одних ломаных линий. Кривая же 2 построена для случая, когда величины ρ_i рассчитаны по формуле «оптимального рывка»

$$\rho_{\text{opt}} = \frac{\omega w_1}{2\pi},$$

и при этом, как видно, полностью отсутствует колебательный характер функции перемещений. Сама же функция $x(t)$ как бы копирует диаграмму ускорения $w(t) = \dot{v}(t)$, что и подтверждает сказанное выше. Таким образом, при правильном назначении параметров регулирования движения машины можно добиться эффективных результатов в части ее общего динамического состояния.

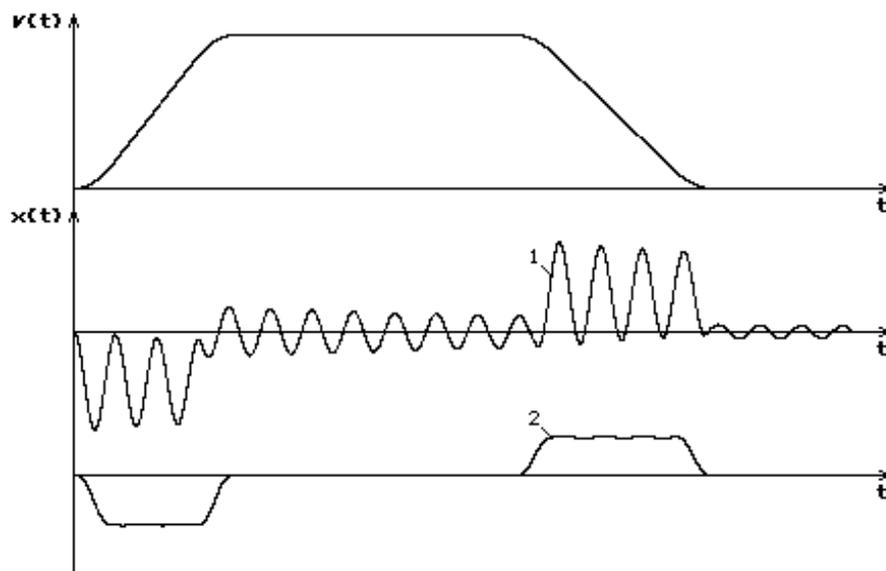


Рис. 3.5. Динамические процессы при спуске груза при различных рывках

Лекция 4.

Математическое моделирование кранов с подвижной кареткой подъема груза

К таким кранам относятся башенные, мостовые и козловые, которые схематически изображены на рис. 4.1.

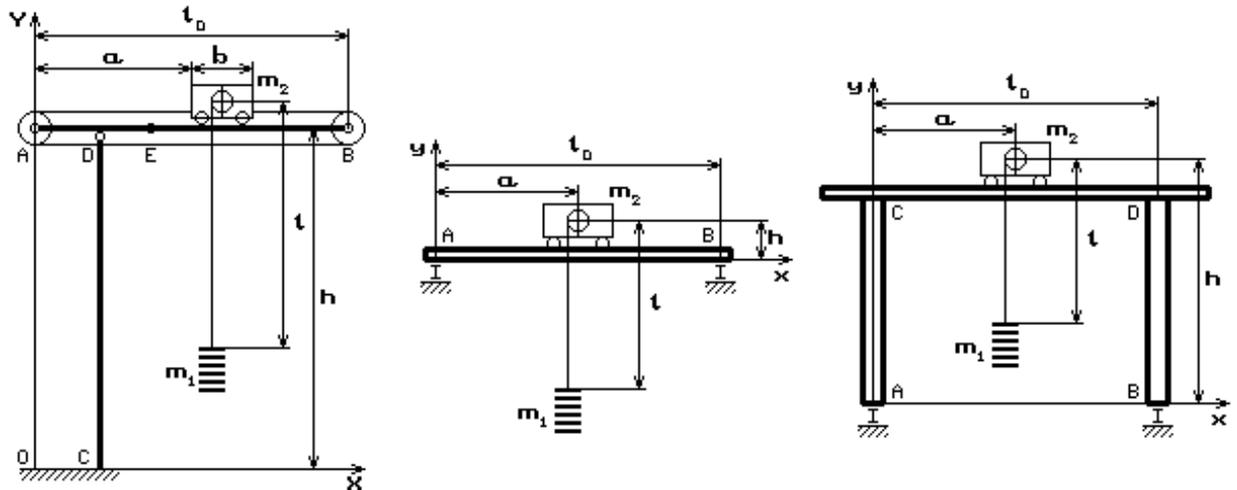


Рис. 4.1. Схемы башенного, мостового и козлового кранов

Отличительной особенностью таких кранов является то, что грузовая каретка в общем случае совершает двухмерное движение в горизонтальной плоскости. В связи с этим концевой груз кроме перемещения в вертикальном направлении также перемещается в поперечных направлениях.

В отличие от рассмотренной в первой лекции установки для подъема груза, в таких кранах подъемный канат непосредственно наматывается на барабан лебедки, установленной на грузовой каретке, при отсутствии каких-либо направляющих или отклоняющих шкивов.

Рассмотрим простейший вариант подъема груза в такого рода кранах, когда каретка совершает одномерное движение при отсутствии перемещения самого крана.

Будем считать, что перемещение каретки задано, и при этом скорость $V(t) = \dot{X}(t)$ и ускорение $W(t) = \dot{V}(t) = \ddot{X}(t)$ каретки изменяются, например, так, как показано на рис. 4.2 [здесь $X(t)$ – текущая горизонтальная координата каретки, отсчитываемая от ее некоторого первоначального положения, причем на рис. 4.1 эта координата обозначена символом a].

Подобно выкладкам, произведенным во второй лекции, запишем координаты груза в форме

$$x_0 = X(t) + l \sin \psi, \quad y_0 = l_0 - l \cos \psi, \quad (4.1)$$

где $X(t)$, как было сказано выше, заданная координата грузовой тележки, l_0 – начальная длина отвеса каната, l – текущая его длина, ψ – угол, образуемый отвесом подъемного каната с вертикалью. С помощью (4.1) находим

$$\dot{x}_0 = \dot{X}(t) + l \sin \psi + l \dot{\psi} \cos \psi, \quad \dot{y}_0 = -\dot{l} \cos \psi + l \dot{\psi} \sin \psi. \quad (4.2)$$

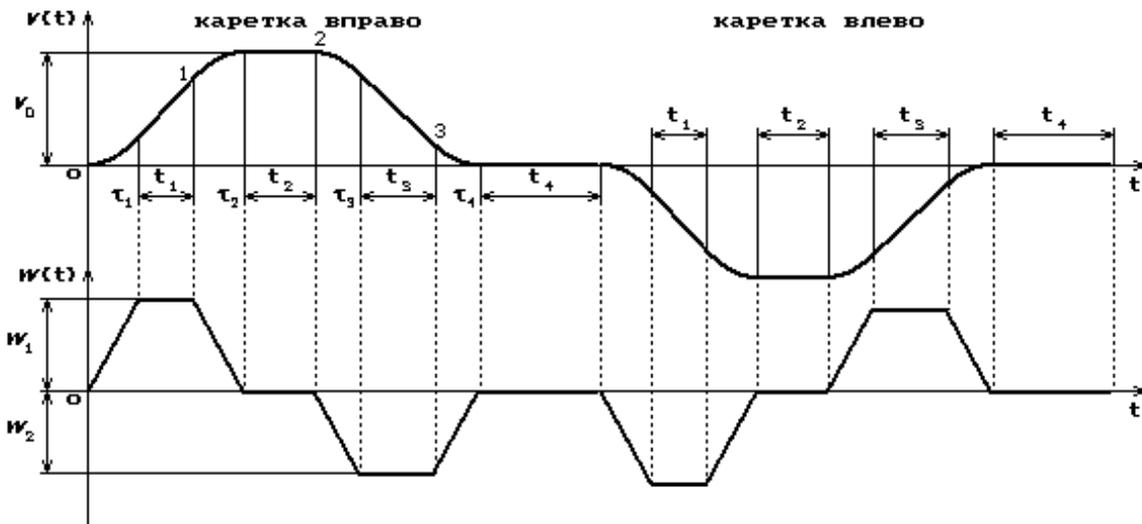


Рис. 4.2. Изменение скорости и ускорений кадетки при ее горизонтальном перемещении

Отсюда квадрат скорости груза определится в форме

$$V_0^2 = \dot{X}^2 + 2\dot{X}(l \sin \psi + l \dot{\psi} \cos \psi) + l^2 + l^2 \dot{\psi}^2,$$

и тогда кинетическую энергию в целом всей системы найдем как

$$T = \frac{J}{2} \dot{\varphi}_\sigma^2 + \frac{m}{2} [\dot{X}^2 + 2\dot{X}(l \sin \psi + l \dot{\psi} \cos \psi) + l^2 + l^2 \dot{\psi}^2], \quad (4.3)$$

где φ_σ – текущий угол поворота барабана; J – момент инерции барабана (здесь считается этот параметр постоянным, то есть пренебрегается его изменением за счет присоединенной массы навиваемого на барабан каната, однако при больших скоростях подъема груза и при значительных длинах каната фактор переменности момента инерции барабана все же следует принимать во внимание).

Упругое удлинение качающегося отвеса каната определим как разность намотанной на барабан длины каната $R_\sigma \varphi_\sigma$ и фактического сокращения (уменьшения) длины каната на величину $(l_0 - l)$ в текущий момент времени:

$$\delta l = R_\sigma \varphi_\sigma - (l_0 - l),$$

и тогда общая потенциальная энергия системы представится в форме

$$U = \frac{C_{отв}}{2} [R_\sigma \varphi_\sigma - (l_0 - l)]^2 + mg(l_0 - l \cos \psi), \quad (4.4)$$

где $C_{отв}$ – коэффициент жесткости отвеса каната, определяемый формулами (1.4) из первой лекции [при определении этого параметра необходимо учитывать, что в кранах, как правило, для подъема груза применяются полиспастные системы, поэтому вычисленные по формуле (1.4) значения необходимо умножать на величину кратности полиспаста; см. также лекцию 5].

Функция Лагранжа $L = T - U$ с учетом (4.3) и (4.4) будет иметь вид

$$L = \frac{J}{2} \dot{\varphi}_o^2 + \frac{m}{2} \left[\dot{X}^2 + 2\dot{X}(\dot{l} \sin \psi + l\dot{\psi} \cos \psi) + \dot{l}^2 + l^2 \dot{\psi}^2 \right] - \frac{C_{ome}}{2} [R_o \varphi_o - (l_o - l)]^2 - mg(l_o - l \cos \psi). \quad (4.5)$$

В уравнениях Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4.6)$$

в качестве обобщенных координат и скоростей дискретных элементов установки целесообразно взять

$$q_1 = \varphi_o, \quad q_2 = l, \quad q_3 = \psi, \quad \dot{q}_1 = \dot{\varphi}_o, \quad \dot{q}_2 = \dot{l}, \quad \dot{q}_3 = \dot{\psi},$$

а обобщенные непотенциальные силы Q_1, Q_2, Q_3 – примем следующими:

$$Q_1 = M_{oe}(t), \quad Q_2 = 0, \quad Q_3 = 0, \quad (4.7)$$

где $M_{oe}(t)$ – приведенный к оси барабана момент, развиваемый двигателем, как известная функция от времени t . Обобщенные силы Q_2, Q_3 приняты равными нулю, так как предполагается, что концевой груз не подвержен действию иных внешних силовых факторов, кроме уже учтенных сил. При более строгом подходе Q_2 и Q_3 можно интерпретировать как упруго-вязкие силы сопротивления внешней среды или силы внутреннего трения проволок в канате. Но это могут быть и силы совсем иной природы, например, силы удара концевого груза о внешнее препятствие и др.

Прежде чем приступить к записи уравнений движения путем подстановки (4.5) в уравнения (4.6), заметим, что в выражении (4.5), в силу свойств функций Лагранжа, слагаемые $m\dot{X}^2/2$ и $mg l_o$ можно не принимать во внимание, так как первое из них есть известная функция от времени t , а второе – обычная константа. Кроме того, так как слагаемое $m\dot{X}(\dot{l} \sin \psi + l\dot{\psi} \cos \psi)$ можно представить в форме

$$m\dot{X}(\dot{l} \sin \psi + l\dot{\psi} \cos \psi) = m\dot{X} \frac{d}{dt} (l \sin \psi) = m \frac{d}{dt} (\dot{X} l \sin \psi) - \ddot{X} l \sin \psi,$$

то в функции Лагранжа можно оставить вместо $m\dot{X}(\dot{l} \sin \psi + l\dot{\psi} \cos \psi)$ один лишь член $-\ddot{X} l \sin \psi$, так как $m \frac{d}{dt} (\dot{X} l \sin \psi)$ представляет собой полную производную по времени от функции, содержащей время и обобщенные координаты l и ψ . В результате таких исключений окончательно получим вместо (4.5):

$$L = \frac{J}{2} \dot{\varphi}_o^2 + \frac{m}{2} [\dot{l}^2 + l^2 \dot{\psi}^2] - \frac{C_{ome}}{2} [R_o \varphi_o - (l_o - l)]^2 + ml(g \cos \psi - \ddot{X} \sin \psi), \quad (4.8)$$

Теперь вычислим в соответствии с (4.6) частные производные от функции Лагранжа (4.8) по обобщенным координатам:

$$\frac{\partial L}{\partial \phi_{\delta}} = -C_{омв} R_{\delta} [R_{\delta} \phi_{\delta} - (l_0 - l)],$$

$$\frac{\partial L}{\partial l} = -C_{омв} [R_{\delta} \phi_{\delta} - (l_0 - l)] + mg \cos \psi - m\ddot{X} \sin \psi + ml\dot{\psi}^2,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = -mgl \sin \psi - m\ddot{X} l \cos \psi.$$

Заметим, что несмотря на, казалось бы, явную зависимость жесткости отвеса каната $C_{омв}$ от обобщенной координаты l в соответствии с (6), при вычислении частной производной $\partial L / \partial l$ дифференцирование $C_{омв}$ по l не производится, так как, строго говоря, $C_{омв}$ зависит фактически не от l , а от его «среднего значения», определяемого как средняя интегральная величина по времени t при перемещении груза. Поэтому в функции Лагранжа $C_{омв}$ следует рассматривать как параметрическую функцию от t , а не функцию от l . Далее имеем:

$$\frac{\partial L}{\partial \phi_{\delta}} = J\dot{\phi}_{\delta}, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{l}} = ml, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = ml^2\dot{\psi},$$

и тогда уравнения динамического состояния будут

$$\left. \begin{aligned} J\ddot{\phi}_{\delta} + C_{омв} R_{\delta} [R_{\delta} \phi_{\delta} - (l_0 - l)] &= M_{\delta\delta}(t), \\ m(\ddot{X} \sin \psi + \ddot{l}) + C_{омв} [R_{\delta} \phi_{\delta} - (l_0 - l)] - mg \cos \psi - ml\dot{\psi}^2 &= 0, \\ ml(\ddot{X} \cos \psi + 2\dot{l}\dot{\psi} + l\ddot{\psi}) + gml \sin \psi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Во втором уравнении системы (4.9) компонента $ml\dot{\psi}^2 = F_y$ представляет собой центробежную силу, возникающую при поперечных раскачиваниях груза. По абсолютной величине эта сила значительно меньше веса груза, если угол отклонения отвеса ψ (следовательно, и $\dot{\psi}$) сравнительно мал, и по этой причине из системы (4.9) слагаемое $ml\dot{\psi}^2$ можно исключить, как это было сделано при рассмотрении поперечных колебаний груза во второй лекции.

В третьем уравнении системы (4.9) компонента $2ml\dot{l}\dot{\psi} = M_k$ – является моментом силы Кориолиса, которая, вообще говоря, может быть соизмеримой с восстанавливающим моментом $mgl \sin \psi$, следовательно, этим силовым фактором пренебрегать нельзя. Однако здесь, как и второй лекции, дабы избежать излишних нелинейностей, целесообразно считать, что $\dot{l} \approx V_{cp}(t)$, где $V_{cp}(t)$ – некоторая функция времени, представляющая собой усредненную за период продольных колебаний скорость подъема груза, и эта скорость считается известной в силу заданной тахограммы движения. Тогда момент кориолисовой силы в линеаризованном виде будет $M_k = 2mlV_{cp}\dot{\psi}$.

В системе (4.9) при малых углах отклонений отвеса можно положить

$$\cos \psi \approx 1, \quad \sin \psi \approx \psi,$$

и тогда вместо нелинейной системы (4.8) получим

$$\left. \begin{aligned} J\ddot{\varphi}_{\delta} + C_{oms}R_{\delta}[R_{\delta}\varphi_{\delta} - (l_0 - l)] &= M_{\delta s}(t), \\ m(\ddot{l} + \ddot{X}\psi) + C_{oms}[R_{\delta}\varphi_{\delta} - (l_0 - l)] - mg &= 0, \\ ml^2\ddot{\psi} + ml(\ddot{X} + 2V_{cp}\dot{\psi}) + mgl\psi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

Заметим, что в последнем уравнении системы (4.10) можно произвести сокращение на величину ml , но здесь это не делается по соображениям сохранения физического содержания, которое несет каждое из слагаемых. Разумеется, при аналитическом или численном решении данных уравнений такое сокращение не только целесообразно, но и необходимо.

Решение системы (4.10) позволяет определить максимальные поперечные перемещения груза при любом заданном законе перемещения каретки $X(t)$, максимальные динамические усилия в подъемном канате, а также изучить и проанализировать другие важные для инженерного дела вопросы.

Заметим, что в последнем уравнении данной системы [в отличие от системы (2.8)] не только момент сил Кориолиса $2ml_2V_{cp}\dot{\psi}$ выступает как диссипативный фактор при $V_{cp} > 0$ (подъем груза), но и момент типа $ml\ddot{X}$. При $V_{cp} < 0$ (спуск груза), эти моменты становятся уже не диссипативными, а «возбуждающими», способствующими раскачиванию груза. И вообще, скорость подъема (спуска) груза и ускорение каретки играют важную роль в динамике рассматриваемой системы. В этом отношении для оптимизации динамических процессов при перемещении каретки полезно использовать методы, изложенные в третьей лекции данного курса.

Лекция 5.

Математическое моделирование стреловых кранов

На рис. 5.1 изображена упрощенная схема стрелового крана. Здесь OA – стрела, AB – маневровый клюв, AC – стойка. Полиспастная система с лебедкой в точке D управляет наклоном стрелы (изменение угла ψ). Полиспастом с лебедкой в точке F устанавливается наклон маневрового клюва (изменение угла φ). Считается для упрощения выкладок, что стойка AC сохраняет неизменную ориентацию по отношению к стреле, то есть она жестко связана со стрелой. В действительности же стойка также может управляться отдельной полиспастной системой. Полиспастной системой с лебедкой в точке E осуществляется подъем или спуск груза. Центры масс стрелы и маневрового клюва сосредоточены соответственно в точках 1 и 2, которые считаются расположенными в геометрических центрах этих звеньев.

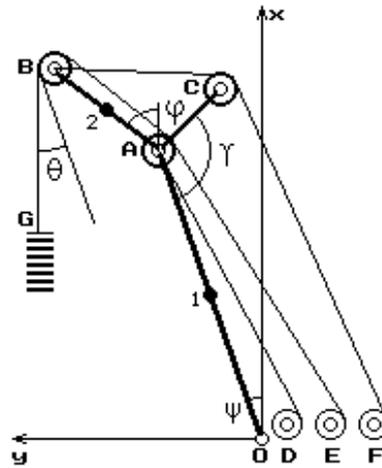


Рис. 5.1. Расчетная схема стрелового крана

Рассмотрим, прежде всего, кинетическую энергию данной системы. Пусть углы ψ и φ имеют динамические отклонения $\delta\psi$ и $\delta\varphi$ от некоторых постоянных величин углов ψ_0 и φ_0 , то есть фактические углы наклона стрелы и клюва есть $\psi = \psi_0 + \delta\psi$, $\varphi = \varphi_0 + \delta\varphi$. Тогда координаты точки 1 и проекции ее скорости будут

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{l_1}{2} \cos\psi, & y_1 &= \frac{l_1}{2} \sin\psi, \\ \dot{x}_1 &= -\frac{l_1}{2} \dot{\psi} \sin\psi, & \dot{y}_1 &= \frac{l_1}{2} \dot{\psi} \cos\psi, & V_1^2 &= \frac{l_1^2}{4} \dot{\psi}^2, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где V_1 – абсолютная скорость центра инерции стрелы. Координаты и скорости точки A стрелы отличаются от (5.1) лишь постоянным множителем:

$$\begin{aligned} x_A &= l_1 \cos\psi, & y_A &= l_1 \sin\psi, \\ \dot{x}_A &= -l_1 \dot{\psi} \sin\psi, & \dot{y}_A &= l_1 \dot{\psi} \cos\psi. \end{aligned} \quad (5.2)$$

С помощью (5.2) нетрудно записать координаты и скорости точки 2 клюва:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_A + \frac{l_2}{2} \cos\varphi, & y_2 &= y_A + \frac{l_2}{2} \sin\varphi, \\ \dot{x}_2 &= \dot{x}_A - \frac{l_2}{2} \dot{\varphi} \sin\varphi, & \dot{y}_2 &= \dot{y}_A + \frac{l_2}{2} \dot{\varphi} \cos\varphi, \\ V_2^2 &= (l_1 \dot{\psi})^2 + \left(\frac{l_2}{2} \dot{\varphi}\right)^2 + l_1 l_2 \cos(\varphi - \psi). \end{aligned} \quad (5.3)$$

где V_2 – абсолютная скорость центра инерции маневрового клюва.

Аналогично для точки B оголовки маневрового клюва имеем:

$$\begin{aligned} x_B &= x_A + l_2 \cos\varphi, & y_B &= y_A + l_2 \sin\varphi, \\ \dot{x}_B &= \dot{x}_A - l_2 \dot{\varphi} \sin\varphi, & \dot{y}_B &= \dot{y}_A + l_2 \dot{\varphi} \cos\varphi. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Будем считать, что концевой груз перемещается не только в вертикальном, но и в поперечном направлении в плоскости, образуемой стрелой и клювом. Положение концевой груза в пространстве определяется,

прежде всего, длиной каната $GBAE$. Обозначим эту длину в исходном состоянии перед началом подъема символом l_{0k} , а в динамическом состоянии – символом l_k . Если точка E отстоит от точки O на расстоянии a_F по горизонтали, то пренебрегая диаметрами барабанов лебедки и направляющих шкивов в точках A и B , из элементарных геометрических соотношений находим координаты точки G при отвесно висящем грузе:

$$\begin{aligned} x'_G &= l_3 + l_1 \cos \psi + l_2(1 + \cos \varphi) - l_k, \\ y'_G &= l_1 \sin \psi + l_2 \sin \varphi. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Но груз может также отклоняться в поперечном направлении при отклонении отвеса BG от вертикали на некоторый угол θ , и тогда истинные координаты точки G определяются формулами

$$\begin{aligned} x_G &= x'_G + (l_k - l_3 - l_2)(1 - \cos \theta), \\ y_G &= y'_G - (l_k - l_3 - l_2) \sin \theta, \end{aligned}$$

или с подстановкой сюда (5.5)

$$\begin{aligned} x_G &= l_3 + l_1 \cos \psi + l_2(1 + \cos \varphi) - l_k + (l_k - l_3 - l_2)(1 - \cos \theta), \\ y_G &= l_1 \sin \psi + l_2 \sin \varphi - (l_k - l_3 - l_2) \sin \theta. \end{aligned} \quad (5.6)$$

С помощью этих соотношений находим проекции скорости точки G :

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_G &= l_1 \dot{\psi} \left(\frac{a_F}{l_3} \cos \psi - \sin \psi \right) - l_2 \dot{\varphi} \sin \varphi - \dot{l}_k + \\ &+ \left(\dot{l}_k - \frac{l_1 a_F}{l_3} \dot{\psi} \cos \psi \right) (1 - \cos \theta) - (l_k - l_3 - l_2) \dot{\theta} \sin \theta, \\ \dot{y}_G &= l_1 \dot{\psi} \cos \psi + l_2 \dot{\varphi} \cos \varphi - \\ &- \left(\dot{l}_k - \frac{l_1 a_F}{l_3} \dot{\psi} \cos \psi \right) \sin \theta - (l_k - l_3 - l_2) \dot{\theta} \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

В соотношениях (5.7) целесообразно произвести некоторые упрощения без ущерба для точности описания реальных физических процессов. Именно, заметим, что здесь \dot{l}_k – есть фактически скорость подъема груза и является вполне конечной величиной. В то же время выражение $\frac{l_1 a_F}{l_3} \dot{\psi} \cos \psi$ несоизмеримо мало по сравнению с \dot{l}_k . По этой же причине пренебрегаем $\frac{a_F}{l_3} \cos \psi$ по сравнению с $\sin \psi$. Следовательно, вместо (5.7) в итоге будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_G &= -l_1 \dot{\psi} \sin \psi - l_2 \dot{\varphi} \sin \varphi - \dot{l}_k \cos \theta - (l_k - l_3 - l_2) \dot{\theta} \sin \theta, \\ \dot{y}_G &= l_1 \dot{\psi} \cos \psi + l_2 \dot{\varphi} \cos \varphi - \dot{l}_k \sin \theta - (l_k - l_3 - l_2) \dot{\theta} \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

Полученные соотношения позволяют записать кинетическую энергию данной системы в виде

$$T = \frac{m_1}{2} V_1^2 + \frac{J_1}{2} \dot{\psi}^2 + \frac{m_2}{2} V_2^2 + \frac{J_2}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{m_{zp}}{2} (\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2),$$

где m_1, m_2, m_{zp} – массы соответственно стрелы, клюва и концевого груза; J_1, J_2 – центральные моменты инерции стрелы и клюва; V_1^2, V_2^2 – определяются из формул (5.1) и (5.3).

Перейдем теперь к записи потенциальной энергии, которая определяется энергией упругих деформаций канатных растяжек стрелы и маневого клюва, а также энергией удлинения подъемного каната и энергией концевого груза в поле сил тяжести.

Упругое удлинение канатной растяжки AD найдем из выражения для квадрата его длины, определяемой формулой

$$l_4^2 = l_1^2 + a_D^2 + 2a_D l_1 \sin \psi. \quad (5.10)$$

Так как при $\psi = \psi_0$ квадрат длины l_{04} есть

$$l_{04}^2 = l_1^2 + a_D^2 + 2a_D l_1 \sin \psi_0, \quad (5.11)$$

то, вычитая (5.11) из (5.10), найдем

$$l_4^2 - l_{04}^2 = 2l_1 a_D (\sin \psi - \sin \psi_0).$$

Но $l_4^2 - l_{04}^2 = (l_4 - l_{04})(l_4 + l_{04}) \approx 2l_{04}(l_4 - l_{04})$, так как при малых $\delta\psi$ можно вполне считать, что $l_4 + l_{04} \approx 2l_{04}$. В свою очередь $l_4 - l_{04} = \delta l_4$ – есть искомое упругое удлинение каната. Следовательно,

$$\delta l_4 = \frac{l_1 a_D}{l_{04}} (\sin \psi - \sin \psi_0) \approx \frac{l_1 a_D}{l_{04}} \delta\psi \cos \psi_0. \quad (5.12)$$

Упругое удлинение канатной растяжки BCF найдем, используя допущение о том, что стойка AC жестко связана со стрелой и перемещается так же, как и сама стрела. Пусть, таким образом $\angle CAO = \gamma$, как показано на рис. 5.1. Так как координаты точки A уже определены соотношениями (5.2), то с помощью них находим координаты точки C :

$$x_C = x_A - b \cos(\psi + \gamma), \quad y_C = y_A - b \sin(\psi + \gamma),$$

где b – длина стойки. Пусть точка F отстоит от точки O по горизонтали на величину a_F . Тогда $(CF)^2 = x_C^2 + (y_C + a_F)^2$ и $(CB)^2 = (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2$, где

x_B, y_B определяются соотношениями (5.4).

Таким образом, длина каната BCF есть

$$l_5 = \sqrt{x_C^2 + (y_C + a_F)^2} + \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}.$$

Приближенно можно записать

$$\begin{aligned} (l_5 - l_6)^2 &= l_2^2 + b^2 + 2l_2 b \cos(\psi - \phi + \gamma), \\ (l_{05} - l_6)^2 &= l_2^2 + b^2 + 2l_2 b \cos(\psi_0 - \phi_0 + \gamma), \end{aligned} \quad (5.13)$$

и тогда, определяя разность между первым и вторым равенствами в (5.13), находим

$$(l_5 - l_6)^2 - (l_{05} - l_6)^2 \approx 4\delta l_5(l_{05} - l_6). \quad (5.14)$$

Следовательно,

$$\delta l_5 = \frac{l_2 b}{2(l_{05} - l_6)} (\delta\varphi - \delta\psi) \sin(\psi_0 - \varphi_0 + \gamma). \quad (5.15)$$

Итак, потенциальная энергия системы найдется как

$$U = \frac{C_4}{2} (\delta l_4)^2 + \frac{C_5}{2} (\delta l_5)^2 + \frac{C_k}{2} (l_k - l_{0k} - R_\sigma \varphi_\sigma)^2 + m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + m_{zp} g y_G,$$

где y_1, y_2, y_G определяются соотношениями (5.1), (5.3) и (5.6), а δl_4 и δl_5 определяются формулами (5.12) и (5.15) соответственно. Коэффициенты жесткости канатных растяжек C_4, C_5 и подъемного каната C_k определяются по формулам, аналогичным (1.4) из первой лекции, но при этом необходимо учитывать, что в данном случае используются полиспастные системы с заданной кратностью, на которую надо умножать вычисляемые по формулам (1.4) значения. Иными словами,

$$C_4 = \frac{E \bar{a} d_4^2}{l_4} n_4, \quad C_5 = \frac{E \bar{a} d_5^2}{l_5} n_5, \quad C_k = \frac{E \bar{a} d_k^2}{l_k} n_k,$$

где l_4, d_4, n_4 — соответственно длина каната AD , его диаметр и кратность полиспаста; l_5, d_5, n_5 — соответственно длина каната BCF , его диаметр и кратность полиспаста; l_k, d_k, n_k — соответственно длина каната $GBAE$, его диаметр и кратность полиспаста. Иначе говоря, все длины l_4, l_5, l_k являются длинами одной ветви соответствующих полиспастов.

Теперь не представляет труда определить функцию Лагранжа и получить уравнения динамического состояния стрелового крана, что рекомендуется студентам сделать самостоятельно.

В заключение заметим, что изложенные здесь приемы получения функции Лагранжа без особого труда можно распространить на динамические системы экскаваторов и драглайнов, схематизация которых приведена на рис. 5.2.

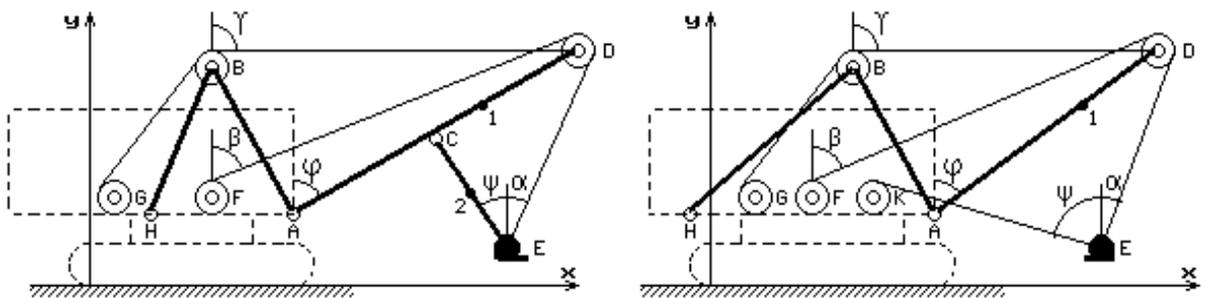


Рис. 5.2. Схематизация экскаватора с прямой лопатой и экскаватора-драглайна

Лекция 6. Математическое моделирование конвейеров и транспортеров

Схематизация широко используемых в строительстве ленточных конвейеров, изображена на рис. 6.1.

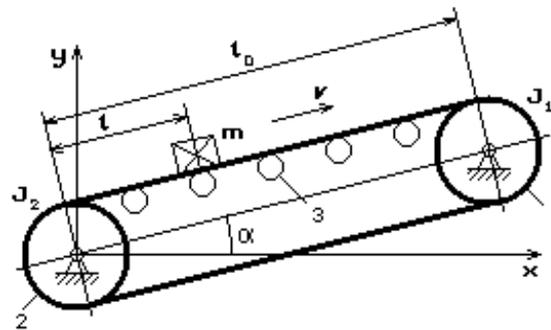


Рис. 6.1. Расчетная схема конвейера

Здесь 1 – приводной барабан, вращающийся в данном случае по часовой стрелке; 2 – натяжной или ведомый барабан. Конвейер может быть горизонтальным или наклонным под углом α , как это изображено на рисунке. Цифрой 3 обозначены поддерживающие ролики, устанавливаемые с некоторым постоянным шагом h по всей длине конвейера. Общее количество роликов примем равным n .

На рис. 6.1 изображен штучный транспортируемый груз массой m , но конвейер может быть предназначен и для транспортировки насыпного груза с примерно равномерным распределением массы по длине ленты. В этом случае можно говорить о погонной массе насыпного груза интенсивностью q , кг/м. В данной лекции рассмотрим вариант транспортировки штучного груза, который будем считать материальной точкой.

Будем полагать, что лента движется без проскальзывания по барабанам; предполагается, что груз и поддерживающие ролики также не проскальзывают относительно ленты.

Из рис. 6.1 следует, что координаты груза и их производные по времени определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} x_{zp} &= l \cos \alpha - R_2 \sin \alpha, & y_{zp} &= l \sin \alpha + R_2 \cos \alpha, \\ \dot{x}_{zp} &= \dot{l} \cos \alpha, & \dot{y}_{zp} &= \dot{l} \sin \alpha, & V^2 &= \dot{l}^2, \end{aligned} \quad (6.1)$$

где l – координата положения груза на ленте, V – абсолютная скорость груза.

Координаты поддерживающих роликов (точнее, координаты точек соприкосновения роликов с лентой) есть

$$x_{ip} = ih \cos \alpha - R_2 \sin \alpha, \quad y_{ip} = ih \sin \alpha + R_2 \cos \alpha \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Потенциальная энергия рассматриваемой системы обуславливается упругими деформациями ленты, вызванных неравномерным перемещением самого груза и неравномерным вращением барабанов и роликов.

Пусть φ_1 – угол поворота приводного барабана, а φ_2 – угол поворота ведомого барабана; ψ_i – углы поворота каждого i -го ролика. Тогда потенциальная энергия упруго-напряженного состояния ленты определится выражением

$$U_y = \frac{C'_l}{2}[\varphi_1 R_1 - (l_0 - l)]^2 + \frac{C''_l}{2}[l - \varphi_2 R_2]^2 + \frac{C_l}{2}[\varphi_1 R_1 - \varphi_2 R_2]^2 + \frac{C'''_l}{2}[(\psi_1 r - \varphi_2 R_2)^2 + (\psi_2 r - \psi_1 r)^2 + \dots + (\psi_n r - \psi_{n-1} r)^2 + (\varphi_1 R_1 - \psi_n r)^2], \quad (6.2)$$

где C_l – коэффициент жесткости ленты как упругой связи между барабанами (для нижней порожней ветви); C'_l – коэффициент жесткости ленты как упругой связи между приводным барабаном и массой груза; C''_l – коэффициент жесткости ленты как упругой связи между массой груза и ведомым барабаном; C'''_l – коэффициент жесткости ленты как упругой связи между соседними роликами, а также между роликом с номером 1 и ведомым барабаном и между роликом с номером n и приводным барабаном. Так, очевидно,

$$C_l = \frac{EF}{l_0}, \quad C'_l = \frac{EF}{l_0 - l}, \quad C''_l = \frac{EF}{l}, \quad C'''_l = \frac{EF}{h},$$

где EF – продольная жесткость ленты, в свою очередь E – модуль упругости материала ленты, F – площадь ее поперечного сечения.

Общая потенциальная энергия складывается из, определяемой выражением (6.2), и потенциальной энергии груза в поле сил тяготения:

$$U_{gp} = mgy_{gp}, \quad (6.3)$$

где y_{gp} находится из соотношений (6.1).

Итак, складывая (6.2) и (6.3), получим

$$U = mgy_{gp} + \frac{C'_l}{2}[\varphi_1 R_1 - (l_0 - l)]^2 + \frac{C''_l}{2}[l - \varphi_2 R_2]^2 + \frac{C_l}{2}[\varphi_1 R_1 - \varphi_2 R_2]^2 + \frac{C'''_l}{2}[(\psi_1 r - \varphi_2 R_2)^2 + (\psi_2 r - \psi_1 r)^2 + \dots + (\psi_n r - \psi_{n-1} r)^2 + (\varphi_1 R_1 - \psi_n r)^2]. \quad (6.4)$$

Кинетическая энергия системы обуславливается вращающимися массами двух барабанов, вращающимися роликами и линейно перемещающимся грузом, то есть

$$T = \frac{J'_1}{2}\dot{\varphi}_1^2 + \frac{J'_2}{2}\dot{\varphi}_2^2 + \frac{J'_p}{2}(\dot{\psi}_1^2 + \dot{\psi}_2^2 + \dots + \dot{\psi}_n^2) + \frac{m}{2}\dot{i}^2, \quad (6.5)$$

причем здесь

$$J'_1 = J_1 + \frac{m_n}{4} R_1^2, \quad J'_2 = J_2 + \frac{m_n}{2} R_2^2, \quad J'_p = J_p + \frac{m_n}{n} r^2, \quad (6.6)$$

где J_1, J_2, J_p – моменты инерции соответственно ведомого и приводного барабанов и момент инерции одного ролика. Формулами (6.6) осуществляется приведение подвижной массы ленты по правилу: к массам барабанов прибавляется по 1/4 всей массы ленты, а остальная 1/2 массы ленты равномерно распределяется по всем роликам.

Так как из (6.4) и (6.5) видно, что кинетическая энергия зависит только от обобщенных скоростей, а потенциальная – только от обобщенных координат, то уравнение Лагранжа представим в форме

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n+3).$$

Здесь примем $q_1 = \varphi_1, q_2 = \varphi_2, q_3 = l, q_4 = \psi_1, \dots, q_{n+3} = \psi_n$. В качестве обобщенных сил положим

$$Q_1 = -M_{c1}, \quad Q_2 = M_{\partial\partial} - M_{c2}, \quad Q_3 = 0,$$

где $M_{\partial\partial}, M_{c1}, M_{c2}$ – момент приводного двигателя и моменты сил сопротивления соответственно на ведомом и приводном барабанах. Что же касается обобщенных сил для роликов, то примем их одинаковыми и равными $Q_{i+3} = -M_{cp}$, где M_{cp} – момент сил сопротивления вращению роликов. Все моменты сил сопротивления нетрудно оценить, зная радиальную составляющую сил давления на опорные подшипники, коэффициенты трения качения в подшипниковых узлах и эффективные радиусы подшипников.

В результате подстановки (6.4) и (6.5) в уравнения (6.7) получим

$$\begin{aligned} J'_1 \ddot{\varphi}_1 + C'_n R_1 [\varphi_1 R_1 - (l_0 - l)] + C_n R_1 [\varphi_1 R_1 - \varphi_2 R_2] + C_n''' R_1 (\varphi_1 R_1 - \psi_n r) &= -M_{c1}, \\ J'_2 \ddot{\varphi}_2 + C_n'' R_2 [\varphi_1 R_1 - l] - C_n R_2 [\varphi_1 R_1 - \varphi_2 R_2] - C_n''' R_1 (\psi_1 r - \varphi_2 R_2) &= M_{\partial\partial} - M_{c2}, \\ m \ddot{l} + C'_n [\varphi_1 R_1 - (l_0 - l)] + C_n'' [l - \varphi_2 R_2] &= 0, \\ J'_p \ddot{\psi}_1 + C_n''' r [(\psi_1 r - \varphi_2 R_2) - (\psi_2 r - \psi_1 r)] &= -M_{cp}, \\ J'_p \ddot{\psi}_i + C_n''' r [(\psi_i r - \varphi_{i+1} r) - (\psi_{i+1} r - \psi_i r)] &= -M_{cp} \quad (i = 2, 3, \dots, n-1), \\ J'_p \ddot{\psi}_n + C_n''' r [(\psi_n r - \psi_{n-1} r) - (\varphi_1 R_1 - \psi_n r)] &= -M_{cp}. \end{aligned}$$

Эта система и является искомыми уравнениями динамического состояния конвейера. Решения полученных уравнений дает возможность найти динамические составляющие натяжений ветвей ленты, обнаружить явления, когда соотношения между натяжениями ветвей становятся опасными и могут привести к проскальзыванию ленты по приводному барабану, а также решать другие важные в практическом аспекте задачи.

Лекция 7.

Математическое моделирование динамических процессов в редукторах и трансмиссиях.

Редуктор в том или в ином исполнении является неотъемлемым элементом многих машин и механизмов и является одним из основных звеньев трансмиссии, передающей энергию привода исполнительным органам для осуществления технологически заданного режима движения.

В общей цепи механических взаимодействий элементов конкретной машины редуктор является важным передаточным звеном, формирующим и определяющим характер движения элементов исполнительного органа в динамическом отношении. Поэтому инженеру необходимо знать, как описать динамическое состояние редуктора с тем, чтобы правильно учесть привносимые им особенности в динамику исполнительного органа.

Схематизация простейшего одноступенчатого редуктора изображена на рис. 7.1.

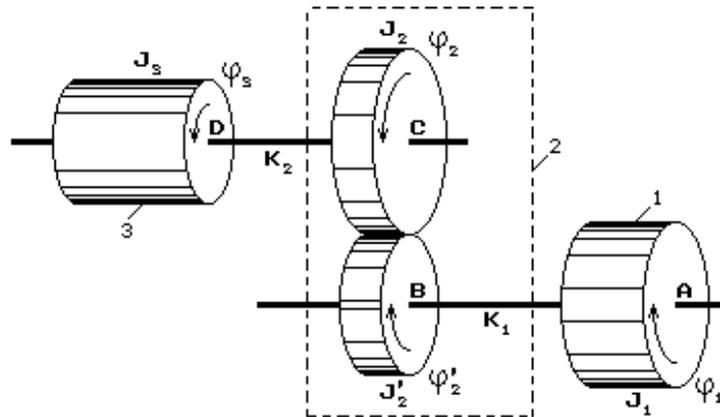


Рис. 7.1. Расчетная схема одноступенчатого редуктора

Здесь 1 – ротор приводного двигателя, 2 – редукторная пара, 3 – вращающиеся элементы исполнительного органа машины. Вал AB является так называемым быстроходным валом, и он, собственно говоря, является состоящим из входного вала редуктора и вала ротора двигателя, соединенных между собой муфтой. Вал CD называется тихоходным, и он также состоит из выходного вала редуктора и вала исполнительного органа, которые также соединяются муфтой.

Кинетическая энергия такой многомассовой системы записывается в форме

$$T = \frac{J_1}{2} \dot{\phi}_1^2 + \frac{J'_2}{2} \dot{\phi}'_2{}^2 + \frac{J_2}{2} \dot{\phi}_2^2 + \frac{J_3}{2} \dot{\phi}_3^2, \quad (7.1)$$

где J_1, J_3 – моменты инерции ротора двигателя и исполнительного органа, J'_2, J_2 – моменты инерции соответственно шестерни и колеса, φ_1, φ_3 – углы поворота ротора двигателя и исполнительного органа, φ'_2, φ_2 – углы поворота соответственно шестерни и колеса.

В данном рассмотрении будем считать зацепление в зубчатых парах плотным, то есть при отсутствии боковых зазоров. Полагаем также, что зубья шестерни и колеса являются абсолютно жесткими. Тогда существует обычное кинематическое соотношение между углами поворота шестерни и колеса: $\varphi'_2 = i\varphi_2$, где i – передаточное число редукторной пары. Имеет место также равенство соответствующих угловых скоростей: $\dot{\varphi}'_2 = i\dot{\varphi}_2$. В этом случае выражение (7.1) можно переписать в форме

$$T = \frac{J_1}{2} \dot{\varphi}_1^2 + \left(\frac{J'_2}{2} i^2 + \frac{J_2}{2} \right) \dot{\varphi}_2^2 + \frac{J_3}{2} \dot{\varphi}_3^2. \quad (7.2)$$

Потенциальная энергия обуславливается энергией упругой закрутки торсионов AB и CD , каждый из которых имеет собственные торсионные жесткости K_1 и K_2 , вычисленные с учетом податливости упругих элементов соединительных муфт. Таким образом

$$U = \frac{K_1}{2} (\varphi'_2 - \varphi_1)^2 + \frac{K_2}{2} (\varphi_3 - \varphi_2)^2,$$

а с учетом кинематического равенства $\varphi'_2 = i\varphi_2$ запишем

$$U = \frac{K_1}{2} (i\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{K_2}{2} (\varphi_3 - \varphi_2)^2. \quad (7.3)$$

Так как из (7.2) и (7.3) видно, что кинетическая энергия зависит только от обобщенных скоростей, а потенциальная – только от обобщенных координат, то уравнение Лагранжа представим в форме

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i \quad (i = 1, 2, 3). \quad (7.4)$$

Здесь примем $q_1 = \varphi_1$, $q_2 = \varphi_2$, $q_3 = \varphi_3$. В качестве обобщенных сил положим

$$Q_1 = M_{\partial e} - M_{c1}, \quad Q_2 = -M_{c2}, \quad Q_3 = -M_{c3},$$

где $M_{\partial e}, M_{c1}, M_{c2}, M_{c3}$ – момент приводного двигателя и моменты сил сопротивления соответственно при вращении ротора двигателя, зубчатых колес редуктора и исполнительного органа. Моменты сил сопротивления нетрудно оценить, зная радиальную составляющую сил давления на опорные подшипники, коэффициенты трения качения в подшипниковых узлах и эффективные радиусы подшипников. Эти параметры в большинстве случаев можно считать некоторыми постоянными, то есть независящими ни от обобщенных перемещений, ни от обобщенных скоростей. Что же касается момента сил сопротивления исполнительного органа, то в общем виде M_{c3} может быть явной функцией не только от времени, но и от φ_3 и $\dot{\varphi}_3$, и эта

зависимость устанавливается в каждом конкретном случае индивидуально, сообразуясь со спецификой данного механизма.

Итак, подстановка (7.2) и (7.3) в уравнения Лагранжа (7.4) приводит к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 - K_1(i\varphi_2 - \varphi_1) &= M_{\partial 6} - M_{c1}, \\ (J_2' i^2 + J_2) \ddot{\varphi}_2 + K_1 i(i\varphi_2 - \varphi_1) - K_2(\varphi_3 - \varphi_2) &= -M_{c2}, \\ J_3 \ddot{\varphi}_3 + K_2(\varphi_3 - \varphi_2) &= -M_{c3}(t, \varphi_3, \dot{\varphi}_3). \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

Система (7.5), таким образом, описывает динамическое состояние одноступенчатого редуктора во взаимодействии с приводом и исполнительным органом.

Часто при исследовании динамики редукторов удобнее, оказывается, иметь дело не с угловыми перемещениями, а непосредственно с силовыми факторами, то есть в данном случае – с крутящими моментами в упругих элементах трансмиссии. Такими моментами, как следует из (7.5), являются

$$M_1 = K_1(i\varphi_2 - \varphi_1), \quad M_2 = K_2(\varphi_3 - \varphi_2). \quad (7.6)$$

С введением новых физических переменных M_1 и M_2 необходимо какую-либо пару «старых» переменных φ_1, φ_2 или φ_2, φ_3 выразить посредством M_1, M_2 при помощи соотношений (7.6) и исключить их из системы (7.5). Выбор предпочтительной пары φ_1, φ_2 или φ_2, φ_3 зависит, главным образом, от субъективных соображений, следовательно не имеет принципиального значения. Однако в некоторых случаях может оказаться, что выбор, например, пары φ_1, φ_2 приводит к некоторым преимуществам. Для определенности остановимся на паре φ_1, φ_2 , и тогда соотношения (7.6) рассмотрим как линейную алгебраическую систему относительно этих переменных:

$$\left. \begin{aligned} -K_1\varphi_1 + K_1 i\varphi_2 &= M_1, \\ -K_2\varphi_2 &= M_2 - K_2\varphi_3. \end{aligned} \right\} \quad (7.7)$$

Решение системы (7.7) нетрудно найти в форме

$$\varphi_1 = i\varphi_3 - i\frac{M_2}{K_2} - \frac{M_1}{K_1}, \quad \varphi_2 = \varphi_3 - \frac{M_2}{K_2}. \quad (7.8)$$

А так как параметры K_1, K_2 являются константами, то из (7.8) следует, что

$$\ddot{\varphi}_1 = i\ddot{\varphi}_3 - i\frac{\ddot{M}_2}{K_2} - \frac{\ddot{M}_1}{K_1}, \quad \ddot{\varphi}_2 = \ddot{\varphi}_3 - \frac{\ddot{M}_2}{K_2}. \quad (7.9)$$

Теперь осталось подставить (7.9) и (7.6) в уравнения (7.5):

$$\begin{aligned}
J_1 \left(i\ddot{\varphi}_3 - i\frac{\ddot{M}_2}{K_2} - \frac{\ddot{M}_1}{K_1} \right) - M_1 &= M_{\partial 6} - M_{c1}, \\
(J_2 i^2 + J_2) \left(\ddot{\varphi}_3 - \frac{\ddot{M}_2}{K_2} \right) + iM_1 - M_2 &= -M_{c2}, \\
J_3 \ddot{\varphi}_3 + M_2 &= -M_{c3}(t, \varphi_3, \dot{\varphi}_3).
\end{aligned}
\tag{7.10}$$

Это и есть уравнения динамического состояния редуктора относительно силовых факторов в трансмиссии.

Пользуясь изложенной методологией, нетрудно вывести аналогичные уравнения типа (7.5) или (7.10) для двухступенчатого редуктора, для редуктора с планетарной передачей и др.

Лекция 8.

Математическое моделирование рабочего процесса механических возбудителей колебаний

При построении решений уравнений динамики машин с внешней вынужденной силой предполагается, что возмущение $Q(t)$ есть известная сила как функция от времени t . Возникает эта сила в результате взаимодействия исполнительного органа машины, условно называемого осциллятором, с некоторой внешней механической системой, движение которой задано, благодаря чему рассматриваемый осциллятор оказывается системой незамкнутой или неавтономной. В связи с этим, возбуждение осциллятора, в частности гармонической силой, представляется в двух основных формах – *кинематической* и *силовой* или *динамической*. Рассмотрим эти две возможности на конкретных примерах.

Вначале дадим определение кинематическому возбуждению, для чего выведем уравнение движения осциллятора, изображенного на рис. 8.1.

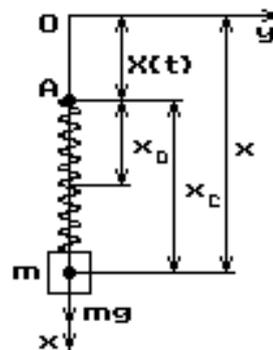


Рис. 8.1. Схема к кинематическому возбуждению

Здесь точка A (верхний конец пружины) перемещается (например, при помощи кривошипно-шатунного механизма) вдоль вертикальной оси x так, что длина отрезка OA описывается заданной функцией времени $X = X(t)$

Пусть x_0 – длина недеформированной пружины, а x_c – текущая длина деформированной пружины. Если x – абсолютная координата массы относительно неподвижной точки O , то кинетическая энергия колеблющейся массы m будет

$$T = \frac{m}{2} \dot{x}^2, \quad (8.1)$$

а потенциальная энергия определится выражением

$$U = \frac{c}{2} [x - X(t) - x_0]^2 - mgx, \quad (8.2)$$

где c – коэффициент жесткости пружины. При этом функция Лагранжа

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{c}{2} [x - X(t) - x_0]^2 + mgx. \quad (8.3)$$

Соответствующее уравнение движения нетрудно получить с помощью (8.3) и функции Рэля $R = b\dot{y}^2/2$ в форме

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + c(x - x_0) = mg + cX(t). \quad (8.4)$$

Для вывода уравнений малых колебаний введем новую переменную x' , связанную с x посредством соотношения $x' = x - x_0 - mg/c$, и подставим это выражение в (8.4). В результате относительно x' получим уравнение

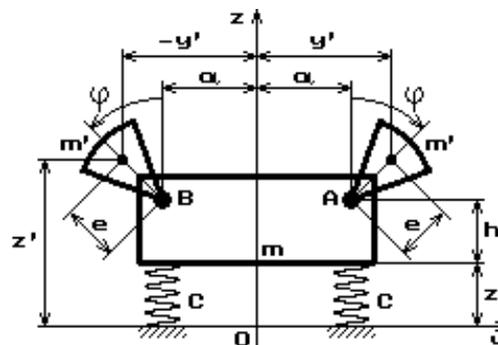
$$m\ddot{x}' + b\dot{x}' + cx' = cX(t). \quad (8.5)$$

В правой части этого уравнения $Q(t) = cX(t)$ есть, сила, действующая на осциллятор. Если верхний конец пружины перемещается по гармоническому закону, то есть в (8.5) $X(t) = X_0 \cos \omega t$, где X_0 – амплитуда перемещений, то $Q(t) = cX_0 \cos \omega t$, и отсюда получим амплитудное значение силы $Q_0 = cX_0$. В этом выражении удобно представить $c = m\omega^2$, где ω – собственная частота осциллятора, и тогда

$$Q(t) = m\omega^2 X_0 \cos \omega t. \quad (8.6)$$

Итак, при кинематическом возбуждении амплитуда гармонической силы пропорциональна квадрату собственной частоты осциллятора. Это обстоятельство необходимо учитывать при построении его амплитудно-частотных характеристик.

Рассмотрим теперь вариант силового возбуждения. Простейший тип устройства, реализующего такое возбуждение, основан на использовании для этих целей сил инерции при возвратно-поступательном или вращательном движении неуравновешенных масс. На рис. 8.2 схематически изображен механический вибровозбудитель направленного действия, в котором две массы m' , эксцентрично вращающиеся вокруг точек A и B во взаимно противоположных направлениях, приводят к появлению центростремительных сил,



равнодействующая которых направлена по оси z , благодаря чему масса осциллятора m будет перемещаться также вдоль этой оси.

Рис. 8.2. Механический вибровозбудитель

Как видно из схемы, координаты центров инерции вращающихся масс и их первые производные по времени определяются формулами:

$$y' = \pm(a + e \sin \varphi), \quad z' = h + z + e \cos \varphi,$$

$$\dot{y}' = \pm e \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \dot{z}' = \dot{z} - e \dot{\varphi} \sin \varphi,$$

и тогда суммарная кинетическая энергия системы

$$T = \frac{m + 2m'}{2} \dot{z}^2 + (I + e^2 m') \dot{\varphi}^2 - 2m' e \dot{z} \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad (8.7)$$

где I – центральный момент инерции каждой из вращающихся масс. Так как масса осциллятора удерживается двумя упругими связями, имеющими одинаковые коэффициенты жесткости c , то потенциальная энергия

$$U = c(z - z_0)^2 + (m + 2m')g z + 2m'g e \cos \varphi, \quad (8.8)$$

где z_0 – длина недеформированных связей. Фактически данный осциллятор представляет собой систему с двумя степенями свободы, обобщенные координаты которой есть z и φ . Но если привод вращения неуравновешенных масс обладает неограниченной или достаточно большой мощностью, и он способен обеспечивать постоянную частоту вращения, то рассматриваемая система становится незамкнутой с одной степенью свободы, так как угол φ при этом считается известной функцией времени. Пусть, таким образом, $\varphi = \nu t$, где ν – постоянная частота вращения. Тогда при записи функции Лагранжа учтем, что в (8.8) $2m'g e \cos \varphi = 2m'g e \cos \nu t$ есть известная функция времени и ее из рассмотрения исключаем. Кроме того, второе слагаемое в (8.7) также исключаем, так как $(I + e^2 m') \dot{\varphi}^2 = (I + e^2 m') \nu^2$ есть константа, а в последнем слагаемом в (8.7), представленном в форме

$$-2m' e \dot{z} \dot{\varphi} \sin \varphi = -2m' e \dot{z} \nu \sin \nu t = -2m' e \nu \frac{d}{dt} (z \sin \nu t) + 2m' e z \nu^2 \cos \nu t,$$

исключаем полную производную по t от $z \sin \nu t$. В итоге получим

$$L = \frac{m + 2m'}{2} \dot{z}^2 + 2m' e z \nu^2 \cos \nu t - c(z - z_0)^2 - (m + 2m')g z.$$

Уравнение движения данной системы, опуская промежуточные выкладки, и с учетом диссипации энергии запишем в форме

$$(m + 2m')\ddot{z} + b\dot{z} + c(z - z_0) = 2m' e \nu^2 \cos \nu t - (m + 2m')g. \quad (8.9)$$

В этом уравнении сделаем замену $z = x + z_0 - (m + 2m')g/c$, введя перемещение x массы m относительно положения ее равновесия, и в результате подстановки этого выражения в (8.9) получим

$$(m + 2m')\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 2m' e \nu^2 \cos \nu t. \quad (8.10)$$

В правой части уравнения (8.10) выражение

$$Q(t) = 2m'ev^2 \cos vt \quad (8.11)$$

есть суммарная проекция на вертикальную ось центробежных сил, возникающих при вращении неуравновешенных масс, и в отличие от (8.6) представляет собой активную силу, действующую на осциллятор, чем и обуславливается термин “силовое возбуждение”. Из (8.11) видно, что амплитуда возмущающей силы $Q_0 = 2m'ev^2$ пропорциональна квадрату частоты внешнего возбуждения.

Заметим, что в формуле (8.11) множитель "2" обусловлен тем, что вынуждающая сила вызывается *двумя* вращающимися массами возбудителя, следовательно, для одной возбуждающей массы

$$Q(t) = m'ev^2 \cos vt. \quad (8.12)$$

Лекция 9.

Математическое моделирование процесса вибропогружения свай

Вибрационные погружатели безударного действия, с помощью которых осуществляется забивка в грунт на определенную глубину (как и извлечение из грунта) длинномерных свай, труб, шпунтов и пр., являются весьма распространенным видом машин, используемых при строительстве зданий и сооружений.

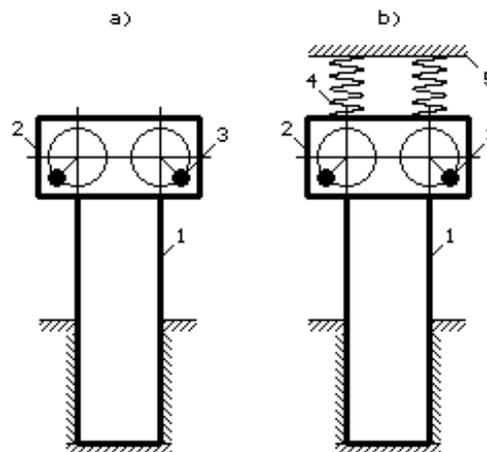
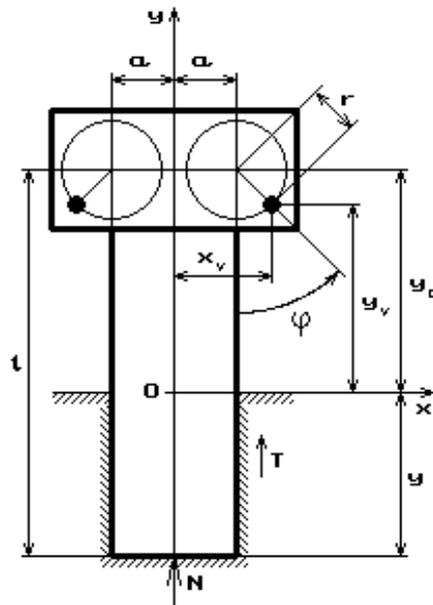


Рис. 9.1. Основные схемы вибрационных погружателей свай и шпунтов

На рис. 9.1 изображены два основных типа вибропогружателей: обыкновенного (а) и с подрессоренным пригрузом (б). Здесь цифрами обозначено: 1 – погружаемая свая, 2 – корпус механического инерционного вибровозбудителя направленного действия, образующий со сваем одно целое, благодаря специальной конструкции так называемого наголовника (он на рисунке не показан), 3 – дебалансы, приводимые во вращение

асинхронным короткозамкнутым электродвигателем, 4 – упругие элементы пригруза, 5 – плита безынерционного пригруза. Несмотря на конструктивное различие приведенных на рис. 9.1 схем, их математические модели мало



отличаются друг от друга, поэтому в данной лекции рассматривается вариант вибропогружателя, изображенного на рис. 9.1, а, как наиболее доступного для описания. На рис. 9.2 показана расчетная схематизация такого устройства.

Рис. 9.2. Расчетная схема вибровозбудителя

Для вывода дифференциальных уравнений динамического состояния вибропогружателя введем координатную систему xu , начало которой (точка O) располагается на уровне поверхности грунта (см. рис. 9.2).

Отсчет угла поворота φ правого дебаланса осуществляется от его нижнего положения против часовой стрелки (соответственно для левого дебаланса отсчет ведется по часовой стрелке). Координаты центра инерции правого дебаланса обозначим символами x_v и y_v . Массу одного дебаланса и его эксцентриситет обозначим посредством m_v и r , а сумму центральных моментов инерции двух дебалансов, вращающихся элементов трансмиссии и ротора двигателя – как J_v .

Так как свая при погружении совершает одномерное движение вдоль вертикальной оси y , то ее положение в пространстве достаточно определить одной координатой y_c , которую для удобства выкладок будем считать, например, как координату центра вращения дебалансов. Массу сваи вместе с корпусом вибровозбудителя и наголовником, но без учета двух вращающихся масс дебалансов обозначим посредством символа m_c .

В процессе погружения сваи на нее действуют силы лобового сопротивления N и силы бокового трения о грунт T , распределенные по периметру поперечного сечения и по длине заглубленной части сваи.

Прежде всего, с помощью рис. 9.2 установим, что для центра инерции вращающегося элемента вибровозбудителя (дебаланса) с координатами x_v, y_v имеют место соотношения

$$x_v = a + r \sin \varphi, \quad y_v = y_c - r \cos \varphi, \quad (9.1)$$

где r – радиус инерции вращающегося элемента y_c – координата по вертикали центра вращения дебалансов. Тогда из (9.1) следуют формулы

$$\dot{x}_v = r\dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \dot{y}_v = \dot{y}_c + r\dot{\varphi} \sin \varphi,$$

следовательно, квадрат скорости вращающегося элемента вибровозбудителя есть

$$V_v^2 = \dot{y}_c^2 + 2r\dot{y}_c\dot{\varphi} \sin \varphi + r^2\dot{\varphi}^2. \quad (9.2)$$

Таким образом, кинетическая энергия двух вращающихся масс вибровозбудителя и сваи вместе с его корпусом определится выражением

$$T = (2m_v r^2 + J_v) \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + 2m_v \dot{y}_c r \dot{\varphi} \sin \varphi + (2m_v + m_c) \frac{\dot{y}_c^2}{2}. \quad (9.3)$$

Потенциальная энергия системы с учетом соотношений (9.1) может быть представлена в виде:

$$U = (2m_v y_v + m_c y_c) g = [y_c (m_c + 2m_v) - 2m_v r \cos \varphi] g. \quad (9.4)$$

Функцию Лагранжа $L = T - U$ с помощью выражений (3) и (4) определим в форме

$$L = (2m_v r^2 + J_v) \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + 2m_v \dot{y}_c r \dot{\varphi} \sin \varphi + (2m_v + m_c) \frac{\dot{y}_c^2}{2} - [y_c (m_c + 2m_v) - 2m_v r \cos \varphi] g. \quad (9.5)$$

Учет сил сопротивления, пропорциональных первым степеням скорости перемещения подвижных масс (так называемые силы вязкого трения), произведем с помощью диссипативной функции Рэлея:

$$R = b_v V_v^2 + \frac{b_c}{2} \dot{y}_c^2,$$

где b_v, b_c – коэффициенты сопротивления при перемещении соответственно двух масс вибровозбудителя и массы сваи. Подставляя вместо V_v его определение согласно формуле (9.2), получим для функции Рэлея следующее выражение

$$R = b_v (2\dot{y}_c r \dot{\varphi} \sin \varphi + r^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{2b_v + b_c}{2} \dot{y}_c^2. \quad (9.6)$$

Для вывода уравнений движения будем исходить из уравнений Лагранжа в форме

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \quad (i = 1, 2), \quad (9.7)$$

где q_i – обобщенные координаты подвижных масс механической системы, \dot{q}_i – обобщенные скорости соответствующих масс, Q_i – обобщенные силы, действующие на i -ю массу. Принимаем в силу принятой расчетной схемы:

$$Q_1 = Q_c = N \pm T, \quad Q_2 = Q_v = M_{\text{дв}} - M_c, \quad (9.8)$$

где, как отмечалось выше, N – лобовая реакция грунта, всегда направленная вверх, T – сила бокового трения сваи о грунт, направление которой противоположно направлению скорости сваи, $M_{\text{дв}}$ – электродинамический момент двигателя, приведенный к оси вращения одного из дебалансов (то есть с учетом передаточного отношения трансмиссии), M_c – момент сил «вредных» сопротивлений при вращении дебалансов вибровозбудителя, возникающих за счет трения в подшипниках и редукторных парах (при наличии последних).

Для рассматриваемой системы $q_1 = y_c$, $q_2 = \varphi$, поэтому, благодаря (9.5) и (9.6) уравнения (9.7) приводят к следующей системе дифференциальных уравнений движения:

$$\left. \begin{aligned} m(\ddot{y}_c + g) + 2m_v r \ddot{\varphi} \sin \varphi + 2m_v r \dot{\varphi}^2 \cos \varphi + b \dot{y}_c + 2b_v r \dot{\varphi} \sin \varphi &= Q_c, \\ J \ddot{\varphi} + 2m_v r (\ddot{y}_c + g) \sin \varphi + 2b_v r (r \dot{\varphi} + \dot{y}_c \sin \varphi) &= M_{\text{дв}} - M_c, \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

где обозначено: $m = m_c + 2m_v$ – общая масса системы, $b = 2b_v + b_c$ – обобщенный коэффициент сопротивления, $J = 2m_v r^2 + J_v$ – приведенный к оси вращения одного из дебалансов момент инерции всех вращающихся деталей устройства.

При достаточно мощном двигателе и при его достаточно жесткой статической характеристике с некоторым приближением можно считать, что

$$\dot{\varphi} = \nu = \text{const}, \quad \ddot{\varphi} \equiv 0, \quad (9.10)$$

где ν – частота вращения масс вибровозбудителя, и тогда

$$\varphi = \nu t. \quad (9.11)$$

В этом случае первое уравнение системы (9.9) примет вид

$$(m_c + 2m_v)(\ddot{y}_c + g) + 2m_v r \nu^2 \cos \nu t + (2b_v + b_c) \dot{y}_c + 2b_v r \nu \sin \nu t = Q_c, \quad (9.12)$$

а второе уравнение, записанное в форме

$$2m_v r (\ddot{y}_c + g) \sin \nu t + 2b_v r (r \nu + \dot{y}_c \sin \nu t) = M_{\text{дв}} - M_c, \quad (9.13)$$

представляет собой выражение, определяющее величину момента двигателя, необходимого для обеспечения условий (9.10) и (9.11).

Движение рассматриваемой механической системы с постоянной частотой вращения дебалансов будем условно называть стационарным возбуждением. Очевидно, стационарное возбуждение по истечении времени переходных процессов приводит к установившемуся динамическому состоянию, при котором перемещение y_c является периодической функцией с постоянной амплитудой. Как видно из (9.13), момент, развиваемый двигателем при вращении дебалансов, в установившемся движении при стационарном возбуждении является некоторой периодической функцией, если периодическим является перемещение y_c как решение уравнения (9.12). Среднее значение $M_{\text{дв}}$ оценивается величиной $M_c + b_3 r^2 \nu = M_c + M_{\text{тр}}$, то есть определяется моментом сил сопротивления и моментом сил трения при вращении дебалансов, обусловленных

центробежными силами. Амплитудное значение $M_{\text{ов}}$ может достигать больших величин, поэтому для выполнения условий (9.10) и (9.11) двигатель должен обладать не только неограниченной мощностью, но и абсолютно жесткой характеристикой, обеспечивающей независимость частоты вращения от моментной нагрузки. Такие свойства присущи синхронным электродвигателям или специальным регулируемым электродвигателям постоянного тока.

В общем случае, когда двигатель имеет так называемую мягкую характеристику, при которой частота вращения уменьшается при увеличении момента сил сопротивлений, условия (9.10) и (9.11) принципиально невыполнимы, и тогда необходимо интегрировать полную систему двух уравнений (9.9). Естественно, что в этом случае $M_{\text{ов}}$ необходимо рассматривать как некоторый функционал или функцию от скорости вращения его ротора.

Теперь остановимся на вопросе определения обобщенной силы Q_c , определяемой первой формулой из соотношений (9.8). Введенные здесь силы N и T непосредственно связаны с упруго-деформационными свойствами грунта и характером движения сваи при вибрационном погружении.

Деформация грунта под действием статических и динамических нагрузок носит довольно сложный характер, как во времени, так и в пространстве. Некоторое упрощение описания этого процесса достигается путем применения концепции Прандтля, суть которой сводится к тому, что деформация грунта считается упругопластической и подчиняется диаграмме, приведенной на рис. 9.3. Здесь по горизонтальной оси откладывается величина деформации грунта Δ , а по вертикальной оси – величина прикладываемого нормального напряжения σ .

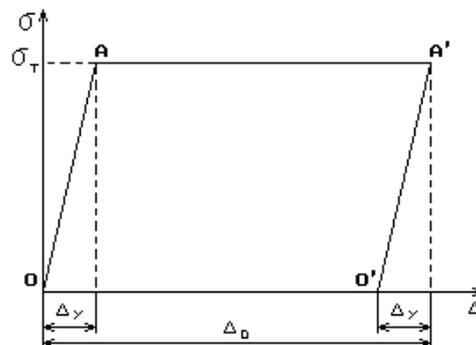


Рис. 9.3. Диаграмма Прандтля при погружении сваи

В области деформаций $\Delta < \Delta_y$ грунт ведет себя как упругая среда, подчиняющаяся обычному закону Гука (линия OA), а при достижении напряжения σ_T – грунт начинает проявлять свойства текучести, и дальнейший рост напряжения не происходит, но грунт при этом претерпевает пластическую деформацию (линия AA'), например, до

величины $\Delta = \Delta_0$. Если после достижения этой величины деформации происходит разгрузка, то есть уменьшение σ , то некоторое время грунт снова ведет себя как упругая среда (линия $A'O'$) до тех пор, пока σ не станет равной нулю. В этом случае общая величина деформации грунта станет равной $\Delta_0 - \Delta_y$. При следующем цикле “нагрузка-разгрузка” отправной точкой становится точка O' на диаграмме.

Для использования диаграммы Прандтля в математической модели рассматриваемой системы вместо координаты y_c введем координату перемещения нижнего торцевого сечения сваи $y = l - y_c$ (см. рис. 9.2), что позволяет записать следующие соотношения

$$Q_c = \begin{cases} T \operatorname{sgn} \dot{y} & \text{при } y < Y_n, \\ N + T \operatorname{sgn} \dot{y} & \text{при } y \geq Y_n, \end{cases} \quad (9.14)$$

где, в свою очередь,

$$N = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < y < Y_n, \\ \frac{y - Y_n}{\Delta_y} \sigma_T F & \text{при } Y_n \leq y < Y_n + \Delta_y, \\ \sigma_T F & \text{при } Y_n + \Delta_y \leq y, \dot{y} > 0, \end{cases} \quad (9.15)$$

причем здесь F – площадь поперечного сечения сваи, Y_n – значение y в начальный момент соприкосновения нижнего торца сваи с грунтом, когда ее скорость направлена вниз, Y_{n+1} – значение y в момент отрыва нижнего торца сваи от грунта, когда ее скорость направлена вверх. Так, если в какой-либо момент времени Y_n есть известная величина, например, $Y_n = 0$, то Y_{n+1} определится из равенства $Y_{n+1} - Y_n = \Delta_0 - \Delta_y$, как следует из рис. 9.3. Формально, сумма $Y_{n+1} + \Delta_y$ есть значение y , определяемое в момент изменения знака скорости \dot{y} в третьем условии (9.15). В этот момент времени в соотношениях (9.15) символ Y_n заменяется на Y_{n+1} . Таким образом, числа $Y_0, Y_1, Y_2, \dots, Y_n, Y_{n+1}, \dots$ образуют неубывающую последовательность координат нижнего торцевого сечения постепенно заглубляемой сваи.

Для сравнительно мягких грунтов допустимо пренебречь стадиями упругого сжатия и упругой «отдачи» грунта, и тогда соотношения (9.15) несколько упрощаются:

$$N = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < y < Y_n, \\ \sigma_T F & \text{при } Y_n + \Delta_y \leq y, \dot{y} > 0, \end{cases} \quad (9.16)$$

В отношении силы бокового трения T можно утверждать, что она пропорциональна периметру P поперечного сечения и длины заглубленной части сваи y . Кроме того, так как в процессе погружения сваи грунт практически находится в состоянии пластической текучести, то, предположительно,

$$T = f_{mp} P \gamma \sigma_T, \quad (9.17)$$

где f_{mp} – коэффициент трения боковой поверхности сваи о грунт.

Таким образом, динамический процесс вибрационного погружения сваи в грунт описывается в общем случае связанной системой дифференциальных уравнений (9.9) с функциональными соотношениями (9.16) и (9.17). При определенных оговоренных выше условиях допустимо использовать одно уравнение (9.12) совместно с (9.16) и (9.17).

Решения полученных уравнений позволяет не только глубоко изучить физическую суть описываемого процесса, но и выявить полезные для практики зависимости скорости погружения сваи от исходных параметров погружателя.

Лекция 10. **Математическое моделирование рабочего процесса шаровой мельницы.**

Принцип работы шаровой дробилки, как известно, основан на взаимодействии с измельчаемым материалом перекатываемых и падающих шаров внутри вращающегося с равномерной скоростью барабана. В данной лекции рассматриваются вопросы динамики такого устройства, оставляя в стороне взаимодействие шаров с материалом, что является самостоятельной задачей теории разрушения материалов и горных пород.

Итак, по внутренней поверхности цилиндрического барабана радиуса R , вращающегося с постоянной угловой скоростью $\omega_z = \dot{\theta}$, происходит качение шара радиуса r (рис. 10.1, а). Будем считать качение шара плоским, и в рамках такого предположения определим скорость его центра инерции и угловую скорость вращения.

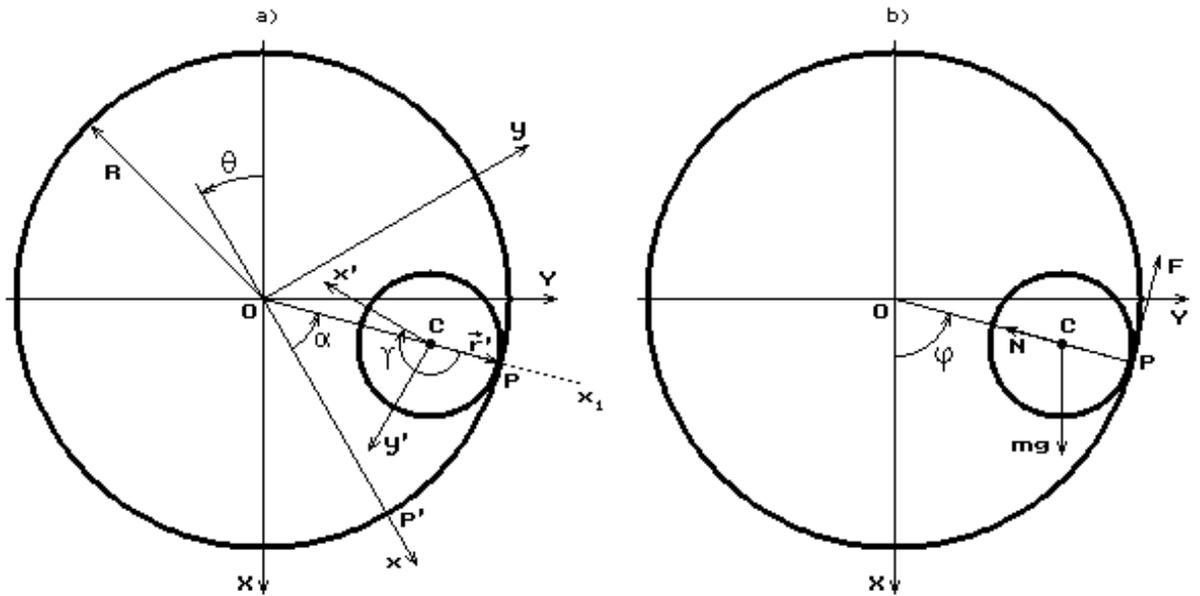


Рис. 10.1. Качение шара внутри вращающегося барабана

Рассмотрим качение шара при отсутствии проскальзывания в неинерциальной системе координат xu , жестко связанной с вращающимся барабаном. При плоском качении шара из трех углов Эйлера угол нутации $\beta \equiv 0$. Примем в качестве угла прецессии α угол отклонения центра шара от оси x ; тогда угол чистого вращения γ будет именно тем углом, на который поворачивается шар, вращаясь вокруг оси z (направленной перпендикулярно плоскости рисунка). На рис. 10.1, а, этот угол отсчитывается от линии узлов Cx_1 до оси x' подвижной системы $x'y'$, жестко связанной с шаром. Заметим, что если прецессия направлена против часовой стрелки, как на рисунке, то чистое вращение будет происходить по часовой стрелке, то есть углы α и γ имеют противоположные знаки.

Из очевидных равенств «длина дуги $P'P$ » = $\alpha R = -\gamma r$ устанавливаем, что $\gamma = -\alpha R/r$, а так как $\Omega_z = \dot{\alpha} + \dot{\gamma}$ при $\beta \equiv 0$, то в результате для относительной угловой скорости шара в подвижной системе xu получим

$$\Omega_z = -\dot{\alpha} \frac{R-r}{r}. \quad (10.1)$$

Здесь знак «минус» указывает на то, что угловая скорость шара направлена против положительного направления оси z . Мгновенная ось вращения шара проходит через точку P (перпендикулярно плоскости рисунка), поэтому в уравнении связи

$$\vec{V}_c + \vec{\Omega} \times \vec{r}' = 0$$

радиус-вектор $\vec{r}' = r[\vec{i} \cos(\alpha + \theta) + \vec{j} \sin(\alpha + \theta)]$, где \vec{i}, \vec{j} – орт-векторы, направленные соответственно по осям x, y ; тогда в проекциях на эти оси имеем для компонент скорости центра инерции шара в системе xu

$$\dot{x}_c = r \Omega_z \sin(\alpha + \theta), \quad \dot{y}_c = -r \Omega_z \cos(\alpha + \theta). \quad (10.2)$$

Абсолютная скорость точки C в проекциях на неподвижные оси X, Y при

$$\vec{R}_c = (R - r)[\vec{i} \cos(\alpha + \theta) + \vec{j} \sin(\alpha + \theta)]$$

есть

$$\begin{pmatrix} V_{cx}^* \\ V_{cy}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \end{pmatrix} + (R - r) \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z \\ \omega_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \theta) \\ \sin(\alpha + \theta) \end{pmatrix},$$

или в раскрытом виде

$$V_{cx}^* = [r\Omega_z - (R - r)\omega_z] \sin(\alpha + \theta),$$

$$V_{cy}^* = -[r\Omega_z - (R - r)\omega_z] \cos(\alpha + \theta),$$

а подставляя сюда вместо Ω_z его определение согласно (10.1) и $\omega_z = \dot{\theta}$, получим для квадрата абсолютной скорости точки C выражение

$$(V_c^*)^2 = (R - r)^2 (\dot{\alpha} + \dot{\theta})^2. \quad (10.3)$$

Абсолютную угловую скорость шара найдем как состоящую из компоненты переносной скорости $\omega_z = \dot{\theta}$ и относительной Ω_z , то есть по формуле:

$$\Omega_z^* = \dot{\theta} - \dot{\alpha} \frac{R - r}{r}. \quad (10.4)$$

Теперь не представляет труда записать кинетическую энергию шара:

$$T = \frac{m}{2} (R - r)^2 (\dot{\alpha} + \dot{\theta})^2 + \frac{J}{2} \left(\dot{\theta} - \frac{R - r}{r} \dot{\alpha} \right)^2, \quad (10.5)$$

где m – масса шара, $J = 0,4mr^2$ – его центральный момент инерции, причем здесь считается обобщенной координатой шара угол α .

Потенциальная энергия шара обусловлена только силой тяжести mg . Как следует из рис. 10.1, б –

$$U = -mg(R - r) \cos(\alpha + \theta). \quad (10.6)$$

При качении шара по внутренней поверхности барабана на него действует сила трения F , которая по модулю равна произведению реакции нормального давления шара на внутреннюю поверхность барабана N и коэффициента трения качения f , то есть $|F| = Nf$. В свою очередь N определяется величиной центробежной силы $m(R - r)(\dot{\alpha} + \dot{\theta})^2$, действующей при качении шара, и проекцией силы тяжести на нормаль к поверхности барабана $mg \cos(\alpha + \theta)$. Таким образом,

$$|F| = mf \left[(R - r)(\dot{\alpha} + \dot{\theta})^2 + g \cos(\alpha + \theta) \right].$$

При безотрывном качении шара правая часть этого выражения всегда положительна и обращается в ноль только в момент отрыва шара от поверхности барабана (это состояние шара будет рассмотрено позже).

Направление силы трения F зависит от направления относительной угловой скорости шара Ω_z в подвижной системе xu , определяемой

формулой (10.1). Следовательно, для силы трения, приложенной к шару, имеет место соотношение $F = mf \left[(R-r)(\dot{\alpha} + \dot{\theta})^2 + g \cos(\alpha + \theta) \right] \text{sgn} \Omega_z$, или

$$F = -mf \left[(R-r)(\dot{\alpha} + \dot{\theta})^2 + g \cos(\alpha + \theta) \right] \text{sgn} \dot{\alpha},$$

где использовано общепринятое обозначение: знак функции $\dot{\alpha}$ равен $\text{sgn} \dot{\alpha}$. При этом обобщенной силой будет момент силы F относительно центра вращения барабана O , то есть

$$Q = -mf R \left[(R-r)(\dot{\alpha} + \dot{\theta})^2 + g \cos(\alpha + \theta) \right] \text{sgn} \dot{\alpha}, \quad (10.7)$$

так как сила F приложена к шару в точке его контакта с барабаном.

Итак, функция Лагранжа катящегося без проскальзывания шара при посредстве выражений (10.5) и (10.6) есть

$$L = \frac{m}{2} (R-r)^2 (\dot{\alpha} + \dot{\theta})^2 + \frac{J}{2} \left(\dot{\theta} - \frac{R-r}{r} \dot{\alpha} \right)^2 + mg(R-r) \cos(\alpha + \theta). \quad (10.8)$$

Выражения (10.8) и (10.7) дают возможность записать уравнение движения шара в форме

$$\begin{aligned} m(R-r)^2 (\ddot{\alpha} + \ddot{\theta}) - J \frac{R-r}{r} \left(\ddot{\theta} - \frac{R-r}{r} \ddot{\alpha} \right) + mg(R-r) \sin(\alpha + \theta) = \\ = -mf R \left[(R-r)(\dot{\alpha} + \dot{\theta})^2 + g \cos(\alpha + \theta) \right] \text{sgn} \dot{\alpha}. \end{aligned}$$

Для удобства дальнейших выкладок введем в качестве обобщенной координаты центра инерции шара угол $\varphi = \alpha + \theta$, как показано на рис. 10.1, б. Тогда с учетом того обстоятельства, что при равномерной скорости вращения барабана $\ddot{\theta} \equiv 0$, полученное уравнение примет вид

$$(mr^2 + J) \left(\frac{R-r}{r} \right)^2 \ddot{\varphi} + mf R \left[(R-r) \dot{\varphi}^2 + g \cos \varphi \right] \text{sgn}(\dot{\varphi} - \dot{\theta}) + mg(R-r) \sin \varphi = 0.$$

Наряду с условной циклической частотой свободных качений шара по внутренней поверхности барабана $\omega = \sqrt{g/(R-r)}$ введем безразмерные параметры

$$\lambda = \frac{mr^2}{mr^2 + J} \approx 0,714, \quad \varepsilon = f \frac{R}{R-r},$$

и «безразмерное время» $\tau = \omega t$. При этом будем иметь

$$\ddot{\varphi} + \lambda \varepsilon (\dot{\varphi}^2 + \cos \varphi) \text{sgn}(\dot{\varphi} - \dot{\theta}) + \lambda \sin \varphi = 0, \quad (10.9)$$

где $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$ и $\dot{\theta}$ означают соответствующие производные уже по переменной τ .

Уравнение (10.9) с заданными начальными условиями при $t=0$ справедливо до тех пор, пока $\dot{\varphi}^2 + \cos \varphi > 0$, то есть когда нормальная реакция $N > 0$. В момент же времени $t=t_0$ (или $\tau=\tau_0$), при котором оказывается $\dot{\varphi}^2 + \cos \varphi = 0$ или $N=0$, шар отрывается от поверхности барабана и далее движется по параболической траектории, которая описывается в неподвижной координатной системе XU уравнениями

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = g, \quad \frac{d^2 Y}{dt^2} = 0, \quad (10.10)$$

с начальными условиями при $t = t_0$:

$$\left. \begin{aligned} X(t_0) &= (R - r) \cos \varphi_0, & Y(t_0) &= (R - r) \sin \varphi_0, \\ \dot{X}(t_0) &= -(R - r) \dot{\varphi}_0 \sin \varphi_0, & \dot{Y}(t_0) &= (R - r) \dot{\varphi}_0 \cos \varphi_0, \end{aligned} \right\} \quad (10.11)$$

где φ_0 и $\dot{\varphi}_0$ – соответствуют значениям φ и $\dot{\varphi}$ в момент отрыва шара при $t = t_0$, то есть эти параметры являются некоторыми константами.

Уравнения (10.10) с условиями (10.11) имеют решения в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= gt - (R - r) \dot{\varphi}_0 \sin \varphi_0, & \frac{dY}{dt} &= (R - r) \dot{\varphi}_0 \cos \varphi_0, \\ \frac{X}{R - r} &= \frac{(\omega t)^2}{2} - t \dot{\varphi}_0 \sin \varphi_0 + \cos \varphi_0, & \frac{Y}{R - r} &= [t \dot{\varphi}_0 \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0]. \end{aligned} \right\} \quad (10.12)$$

Наконец, при некотором $t = t_1$ шар ударяется о поверхность барабана и далее снова движется совместно с ним. Считается, что удар шара о барабан является неупругим, то есть шар одной из точек своей поверхности как бы мгновенно «прилипает» к внутреннему ободу барабана (более сложные модели упругого взаимодействия шара с металлоконструкцией барабана здесь не рассматриваются). В рамках принятой концепции момент времени $t = t_1$ находится с помощью (10.12) из очевидного уравнения

$$\left[(\omega t_1)^2 / 2 - t_1 \dot{\varphi}_0 \sin \varphi_0 + \cos \varphi_0 \right]^2 + [t_1 \dot{\varphi}_0 \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0]^2 = 1,$$

а начальный угол φ_1 второй фазы качения шара по барабану определяется также с использованием (10.12) как

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{t_1 \dot{\varphi}_0 \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0}{(\omega t_1)^2 / 2 - t_1 \dot{\varphi}_0 \sin \varphi_0 + \cos \varphi_0}.$$

Соответствующую этому значению φ_1 величину угловой скорости $\dot{\varphi}_1$ найдем согласно очевидному выражению

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{\dot{X}(t_1) \cos \varphi_1 - \dot{Y}(t_1) \sin \varphi_1}{R - r},$$

что с использованием (10.12) приводит к формуле

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_0 \cos \varphi_0 \cos \varphi_1 - (\omega t_1 - \dot{\varphi}_0 \sin \varphi_0) \sin \varphi_1.$$

Таким образом, начиная с момента времени $t = t_1$ шар вступает в свою вторую фазу движения, и снова наступает момент отрыва, последующего удара, и так может повторяться сколь угодно долго. На рис. 10.2 изображены, так сказать, стробоскопические кадры последовательных положений шара через одинаковые промежутки времени.

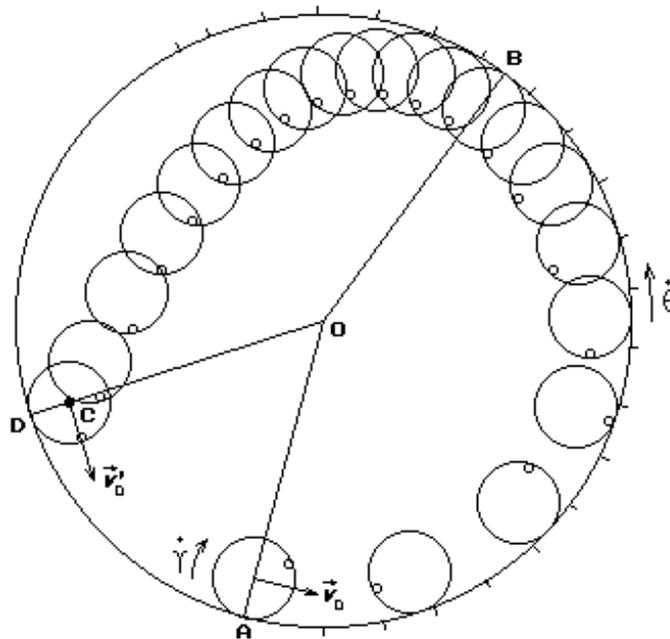


Рис. 10.2. Кадры последовательных положений шара

Необходимо заметить, что периодическая повторяемость фаз качения и падения шара имеет место при строго определенных сочетаниях параметров системы $\omega, \varepsilon, \dot{\theta}$. В противном случае шар может совершать лишь незатухающие колебания относительно равновесного состояния, и он не сможет «взобраться» на достаточную высоту, чтобы свершился акт падения. Но ведь именно этот акт и является решающим для дробления материала.

Кроме того, при некоторых, достаточно больших, значениях угловой скорости барабана $\dot{\theta}$, центробежная сила прижатия шара к внутренней поверхности барабана становится настолько большой, что шар просто не может оторваться от барабана, следовательно, и не выполняет возложенных на него обязанностей.

Задача инженера поэтому и состоит в назначении таких величин параметров $\omega, \varepsilon, \dot{\theta}$, чтобы добиться устойчивого регулярно повторяющегося цикла движения для достижения требуемой эффективности мельницы.

Лекция 11.

Математическое моделирование рабочего процесса молотковой дробилки

Била (молоток или стержень, ударяющийся о загружаемый в дробилку материал) – представляет собой классический пример физического маятника с ротационной подвеской.

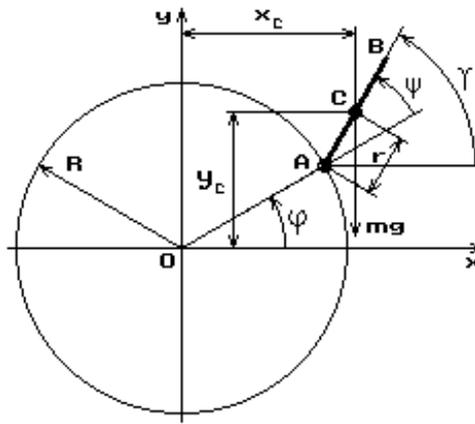


Рис. 11.1. Схематическое изображение движущейся би́лы молотковой дробилки

На рис. 11.1 изображена одна би́ла молотковой дробилки AB , которая в точке A шарнирно соединена с вращающимся ротором-бидержателем (или просто ротором), и под действием центробежных сил находится в состоянии динамического равновесия, совершая колебания (либрации) относительно луча OA .

Рассмотрим этот процесс подробно. Предполагая использование уравнений Лагранжа для описания динамического состояния рассматриваемой системы, определим координаты центра тяжести данного молотка (точка C на отрезке AB) в обозначенном на рис. 11.1 координатном репере xOy :

$$x_c = r \cos(\varphi + \psi) + R \cos \varphi, \quad y_c = r \sin(\varphi + \psi) + R \sin \varphi, \quad (11.1)$$

где φ — текущий угол поворота ротора; ψ — угол либрации би́лы; R — радиус ротора; r — расстояние от шарнира A до центра тяжести би́лы C .

Из соотношений (11.1) устанавливаем, что

$$\dot{x}_c = -r(\dot{\varphi} + \dot{\psi}) \sin(\varphi + \psi) - R\dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \dot{y}_c = r(\dot{\varphi} + \dot{\psi}) \cos(\varphi + \psi) + R\dot{\varphi} \cos \varphi,$$

с помощью чего находим квадрат модуля скорости центра тяжести би́лы

$$V_c^2 = r^2(\dot{\varphi} + \dot{\psi})^2 + R^2\dot{\varphi}^2 + 2rR(\dot{\varphi} + \dot{\psi})\dot{\varphi} \cos \psi. \quad (11.2)$$

Таким образом, полная кинетическая энергия вращающегося ротора с одной би́лой определится с использованием (11.2) следующим выражением

$$T = \frac{m_{\bar{o}}}{2} \left[r^2(\dot{\varphi} + \dot{\psi})^2 + R^2\dot{\varphi}^2 + 2rR(\dot{\varphi} + \dot{\psi})\dot{\varphi} \cos \psi \right] + \frac{J_{\bar{o}}}{2}(\dot{\varphi} + \dot{\psi})^2 + \frac{J_p}{2}\dot{\varphi}^2,$$

где $m_{\bar{o}}$, $J_{\bar{o}}$ — соответственно масса и центральный момент инерции би́лы, J_p — приведенный момент инерции ротора вместе с приводом. То же самое запишем в более компактном виде —

$$T = \frac{m_{\bar{o}}r^2 + J_{\bar{o}}}{2}(\dot{\varphi} + \dot{\psi})^2 + \frac{m_{\bar{o}}R^2 + J_p}{2}\dot{\varphi}^2 + m_{\bar{o}}rR(\dot{\varphi} + \dot{\psi})\dot{\varphi} \cos \psi. \quad (11.3)$$

Потенциальная энергия билы, благодаря изменяющейся координате у его центра инерции в поле тяготения [см. (11.1)], имеет форму

$$U = m_{\delta} g y_c = m_{\delta} g [r \sin(\varphi + \psi) + R \sin \varphi], \quad (11.4)$$

С помощью (11.3) и (11.4) функцию Лагранжа представим в виде

$$L = \frac{m_{\delta} r^2 + J_{\delta}}{2} (\dot{\varphi} + \dot{\psi})^2 + \frac{m_{\delta} R^2 + J_p}{2} \dot{\varphi}^2 + m_{\delta} r R (\dot{\varphi} + \dot{\psi}) \dot{\varphi} \cos \psi - m_{\delta} g [r \sin(\varphi + \psi) + R \sin \varphi]. \quad (11.5)$$

Заметим, что функция (11.5) имеет касательство лишь для отдельно взятой билы. В действительности же таких бил в дробилке достаточно много, располагаемых равномерно по окружности ротора и по его длине. В связи с этим в общем случае функция Лагранжа будет иметь более сложный вид, по сравнению с (11.5), однако в структурном отношении принципиальных отличий все же нет, что дает основание ограничиться рассмотрением одной билы.

В уравнениях Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = Q_p, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial L}{\partial \psi} = Q_{\delta}, \quad (11.6)$$

будем считать, что Q_p – обобщенная сила взаимодействия ротора с приводом, то есть фактически $Q_p = M_{\delta e}$, где $M_{\delta e}$ – электродинамический момент, развиваемый двигателем (в данном случае силами «вредных» сопротивлений пренебрегаем); Q_{δ} – обобщенная сила, действующая на билу при ее соприкосновении с дробимым материалом (считаем, что эта сила нам известна, хотя в действительности ее природа во многом еще не изучена).

Проделаем теперь необходимые операции дифференцирования функции (11.5), диктуемые уравнениями Лагранжа (11.6), в результате чего получим:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = (m_{\delta} r^2 + J_{\delta})(\dot{\varphi} + \dot{\psi}) + (m_{\delta} R^2 + J_p)\dot{\varphi} + m_{\delta} r R (2\dot{\varphi} + \dot{\psi}) \cos \psi,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = (m_{\delta} r^2 + J_{\delta})(\dot{\varphi} + \dot{\psi}) + m_{\delta} r R \dot{\varphi} \cos \psi,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -m_{\delta} g [r \cos(\varphi + \psi) + R \cos \varphi],$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi} = -m_{\delta} g r \cos(\varphi + \psi) - m_{\delta} r R (\dot{\varphi} + \dot{\psi}) \dot{\varphi} \sin \psi.$$

Подстановка же этих выражений в (11.6), приводит к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (m_{\sigma}r^2 + J_{\sigma})(\ddot{\phi} + \ddot{\psi}) + (m_{\sigma}R^2 + J_p)\ddot{\phi} + m_{\sigma}rR(2\ddot{\phi} + \ddot{\psi})\cos\psi - \\ - m_{\sigma}rR(2\dot{\phi} + \dot{\psi})\dot{\psi}\sin\psi + m_{\sigma}g[r\cos(\phi + \psi) + R\cos\phi] = M_{\delta\sigma}, \\ (m_{\sigma}r^2 + J_{\sigma})(\dot{\phi} + \dot{\psi}) + m_{\sigma}rR\dot{\phi}\cos\psi + m_{\sigma}gr\cos(\phi + \psi) + m_{\sigma}rR\dot{\phi}^2\sin\psi = Q_{\sigma}. \end{aligned} \right\} \quad (11.7)$$

Рассмотрим случай, когда привод дробилки способен обеспечивать равномерное вращение ротора с частотой $\Omega = const$, несмотря на всевозможные динамические состояния бил (в механике принято считать, что в этом случае привод обладает неограниченной мощностью). Тогда в системе (11.7) следует положить $\phi = \Omega t$, $\dot{\phi} = \Omega$, $\ddot{\phi} \equiv 0$, а сами уравнения при этом примут форму

$$(m_{\sigma}r^2 + J_{\sigma})\ddot{\psi} + m_{\sigma}rR\ddot{\psi}\cos\psi - m_{\sigma}rR(2\Omega + \dot{\psi})\dot{\psi}\sin\psi + m_{\sigma}g[r\cos(\Omega t + \psi) + R\cos\Omega t] = M_{\delta\sigma}, \quad (11.8)$$

$$(m_{\sigma}r^2 + J_{\sigma})\dot{\psi} + m_{\sigma}gr\cos(\Omega t + \psi) + m_{\sigma}rR\Omega^2\sin\psi = Q_{\sigma}. \quad (11.9)$$

Уравнение (11.9) описывает либрации билы в поле гравитационных и центробежных сил, а (11.8), по сути дела, при известной функции либрации $\psi = \psi(t)$ показывает, как изменяется во времени момент двигателя $M_{\delta\sigma}$ с неограниченной мощностью в рамках принятой гипотезы. Так, если $\psi(t)$ является некоторой гармонической функцией с циклической частотой ω , то $M_{\delta\sigma}$, оказывается, имеет, по крайней мере, две гармоники с частотой ω и Ω . Основываясь на таком представлении, с помощью соотношения (11.8) можно определить эффективную, или потребляемую, мощность привода.

Обратимся к уравнению (11.9) и предположим, что угол либрации билы ψ настолько мал, что $\cos\psi \approx 1$, а $\sin\psi \approx \psi$. В таком случае

$$\cos(\Omega t + \psi) \approx \cos\Omega t - \psi\sin\Omega t,$$

и уравнение (11.9) приобретает вид

$$(m_{\sigma}r^2 + J_{\sigma})\dot{\psi} + m_{\sigma}gr(\cos\Omega t - \psi\sin\Omega t) + m_{\sigma}rR\Omega^2\psi = Q_{\sigma},$$

или

$$(m_{\sigma}r^2 + J_{\sigma})\dot{\psi} + m_{\sigma}rR\Omega^2\left(1 - \frac{g}{R\Omega^2}\sin\Omega t\right)\psi = Q_{\sigma} - m_{\sigma}gr\cos\Omega t. \quad (11.10)$$

Полученное уравнение принадлежит к специальному классу уравнений Матье, которое имеет неустойчивые решения (при так называемом демультимпликационном резонансе) в том случае, когда парциальная частота либраций

$$\omega = \sqrt{\frac{m_{\sigma}rR\Omega^2}{m_{\sigma}r^2 + J_{\sigma}}} = \Omega \sqrt{\frac{R}{r} \cdot \frac{1}{1 + J_{\sigma}/(m_{\sigma}r^2)}} \quad (11.11)$$

совпадает или почти совпадает с частотой $\Omega/2$, то есть при $\Omega \approx 2\omega$. Таким образом, с использованием формулы (11.11) запишем условие возникновения параметрического резонанса колебаний билы:

$$\frac{4R}{r} = \frac{1}{1 + J_{\sigma} / (m_{\sigma} r^2)}.$$

Вопрос о том, нужно ли отстраиваться от параметрического резонанса или, наоборот, надо стремиться сделать билы «резонансными», пока остается открытым и требует специальных исследований.

Полученные дифференциальные уравнения в общей форме (11.7) позволяют решить задачу об устойчивости движения бил при возможных формах импульсного или ударного взаимодействия с дробимым материалом, что позволит найти технические решения повышения эффективности молотковых дробилок.

Лекция 12.

Основы виброизоляции транспортно-технологических машин

Многие технологические процессы неизбежно связаны с вибрацией. Если вибрация и не является необходимым атрибутом машины (например, таких, как виброгрохот), то она так или иначе проявляет себя, если машина содержит в себе быстро вращающиеся детали, которые из-за неизбежного дебаланса являются источником вибраций.

Вибрации оказывают вредное физиологическое воздействие на обслуживающий персонал, а также могут быть причиной усталостных разрушений элементов конструкций, с которыми данная машина имеет непосредственный контакт.

Одним из простейших и эффективных способов уменьшения вибрационного воздействия является виброизоляция машины как один из способ снижения так называемой виброактивности. Принцип действия виброизолятора основан на поглощении части энергии колебаний машины специальным демпфирующим устройством, состоящим из упруго деформируемого звена и диссипативного элемента. Этим самым можно добиться значительного уменьшения динамических нагрузок, передаваемых окружающим конструкциям.

Существует множество серийно изготавливаемых типов виброизоляторов, и задача инженера состоит в правильном выборе параметров виброизолятора, исходя из особенностей конкретной машины.

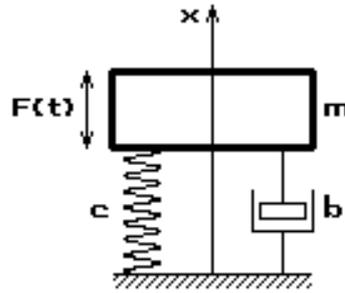


Рис. 12.1. Схематическое изображение упруго-вязкого демпфера

В связи с этим рассмотрим машину, на которую действует периодически возмущающая сила $F(t)$, а саму машину массой m будем считать установленной на виброизоляторах, которые собственно и служат для изоляции ее от фундамента. Схематически виброизолятор представляется в виде упругого элемента с коэффициентом жесткости C и поглотителя энергии с коэффициентом диссипации энергии b , схематически изображенным в виде поршня в цилиндре (см. рис. 12.1), что является общепринятой мнемоникой теории колебаний.

Вынужденные колебания такой системы описываются неоднородным дифференциальным уравнением

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + Cx = F(t). \quad (12.1)$$

Пусть $F(t)$ представляет собой гармоническую функцию типа

$$F(t) = F_0 \cos vt, \quad (12.2)$$

где F_0 – амплитуда вынуждающей силы, ν – частота внешнего возмущения.

Функция $F(t)$, как было показано в восьмой лекции, может иметь природу как кинематического, так и силового возбуждения. В первом типе возбуждения амплитуда вынуждающей силы определяется амплитудой кинематического возбуждения X_0 и определяется выражением $F_0 = mX_0\omega^2$, где $\omega = \sqrt{C/m}$. При втором типе возбуждения – $F_0 = m'e\nu^2$, где m' – неуравновешенная вращающаяся масса с эксцентриситетом e . Поэтому в общем случае представим, что в уравнении (12.1) с учетом (12.2)

$$F(t) = G\Omega^2 \cos vt, \quad (12.3)$$

где G – некоторая константа, равная mX_0 или $m'e$, а Ω может равняться ω или ν в зависимости от типа возбуждений.

С введением записи (12.3) уравнение (12.1) примет вид

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = a\Omega^2 \cos vt, \quad (12.4)$$

где $\delta = \frac{b}{2m}$, $\omega^2 = \frac{C}{m}$, причем $a = X_0$ или $a = e\frac{m'}{m}$, и, как видно, параметр a имеет размерность линейных перемещений.

Обратим внимание на то обстоятельство, что, как следует из опыта и точного решения уравнения (12.4), в рассматриваемой системе по истечении сравнительно короткого промежутка времени обнаруживаются так называемые установившиеся (стационарные) колебания с постоянной амплитудой на частоте вынуждающей силы. Следовательно, решение уравнения (12.4) можно искать в форме

$$x = A \cos(\nu t - \varphi), \quad (12.5)$$

где A – амплитуда стационарных колебаний, φ – фазовый сдвиг установившихся колебаний по отношению к фазе вынужденной силы. Подстановка (12.5) в уравнение (12.4) приводит к выражению

$$- \nu^2 (\cos \nu t \cos \varphi + \sin \nu t \sin \varphi) + 2\delta \nu (\cos \nu t \sin \varphi - \sin \nu t \cos \varphi) + \omega^2 (\cos \nu t \cos \varphi + \sin \nu t \sin \varphi) = \frac{a}{A} \Omega^2 \cos \nu t,$$

которое должно тождественно выполняться при любом t . Для этого, очевидно, необходимо, чтобы коэффициенты при гармониках $\cos \nu t$ и $\sin \nu t$ одновременно и тождественно равнялись нулю. Представляя предыдущую запись в форме

$$\left(-\nu^2 \cos \varphi + 2\delta \nu \sin \varphi + \omega^2 \cos \varphi - \frac{a}{A} \Omega^2 \right) \cos \nu t - (\nu^2 \sin \varphi + 2\delta \nu \cos \varphi - \omega^2 \sin \varphi) \sin \nu t = 0,$$

можно, таким образом, утверждать, что (12.5) будет решением (12.4) в случае выполнения равенств

$$\left. \begin{aligned} (\omega^2 - \nu^2) \cos \varphi + 2\delta \nu \sin \varphi &= \frac{a}{A} \Omega^2, \\ (\omega^2 - \nu^2) \sin \varphi - 2\delta \nu \cos \varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.6)$$

Теперь задача состоит в том, чтобы решить данную систему двух уравнений относительно искомой амплитуды колебаний A и фазового сдвига φ . Для этого возведем оба эти уравнения в квадрат и результаты сложим. Тогда

$$(\omega^2 - \nu^2)^2 + (2\delta \nu)^2 = \left(\frac{a}{A} \Omega^2 \right)^2,$$

откуда сразу же находим искомую амплитуду

$$A = \frac{a \Omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - \nu^2)^2 + (2\delta \nu)^2}}. \quad (12.7)$$

Фазовый сдвиг определим из второго уравнения системы (12.6) в виде

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta \nu}{\omega^2 - \nu^2}, \quad \text{или} \quad \varphi = \operatorname{arctg} \left(\frac{2\delta \nu}{\omega^2 - \nu^2} \right). \quad (12.8)$$

Таким образом, найдено все необходимое, чтобы построить решение (12.5). Но инженера интересует не столько сама функция (12.5), сколько величина амплитуды вынужденных колебаний и фазовый сдвиг, а также зависимости этих важных физических параметров от частотных параметров

данной системы. Поэтому рассмотрим более подробно полученные выражения (12.7) и (12.8), для чего, прежде всего, введем безразмерные параметры

$$\bar{a} = \frac{A}{a}, \quad \mu = \frac{\nu}{\omega}, \quad \varepsilon = \frac{\delta}{\omega}, \quad \bar{\varphi} = \frac{\varphi}{\pi}.$$

Тогда (12.7) и (12.8) примут вид

$$\bar{a} = \frac{\Delta}{\sqrt{(1-\mu^2)^2 + (2\varepsilon\mu)^2}}, \quad \bar{\varphi} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2\varepsilon\mu}{1-\mu^2}, \quad (12.9)$$

причем здесь

$$\Delta = \begin{cases} 1 & \text{при кинематическом возбуждении,} \\ \mu^2 & \text{при силовом возбуждении.} \end{cases}$$

На рис. 12.2 и рис. 12.3 параметры \bar{a} и $\bar{\varphi}$ как функции переменной μ построены в форме графиков для некоторых значений ε . Серия подобных графиков называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) и фазо-частотной характеристикой (ФЧХ) конкретного осциллятора. Как видно, переменная μ делит плоскость существования \bar{a} и $\bar{\varphi}$ на две принципиально различные области: дорезонансную, когда $\nu < \omega$, и зарезонансную, когда $\nu > \omega$. Случай совпадения частот ($\nu = \omega$) соответствует максимальной амплитуде вынужденных колебаний и называется резонансным состоянием осциллятора или просто – резонансом. Строго говоря, резонанс, характеризующийся максимальной величиной амплитуды, наступает при $\nu = \sqrt{\omega^2 - 2\delta^2}$, что непосредственно следует из выражения (12.9) для \bar{a} . Однако при сравнительно небольших значениях коэффициента затуханий δ для инженерных оценок допустимо говорить, что резонанс имеет место при $\nu = \omega$.

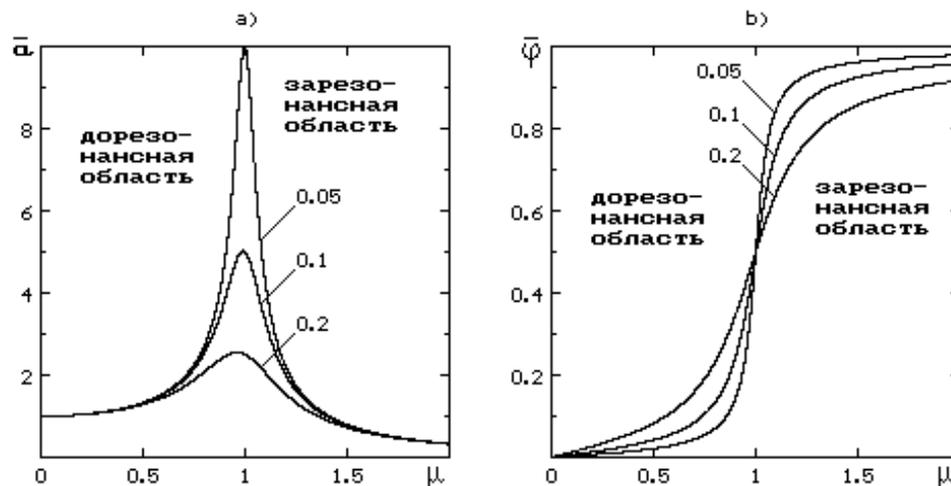


Рис. 12.2. АЧХ и ФЧХ осциллятора при кинематическом возбуждении

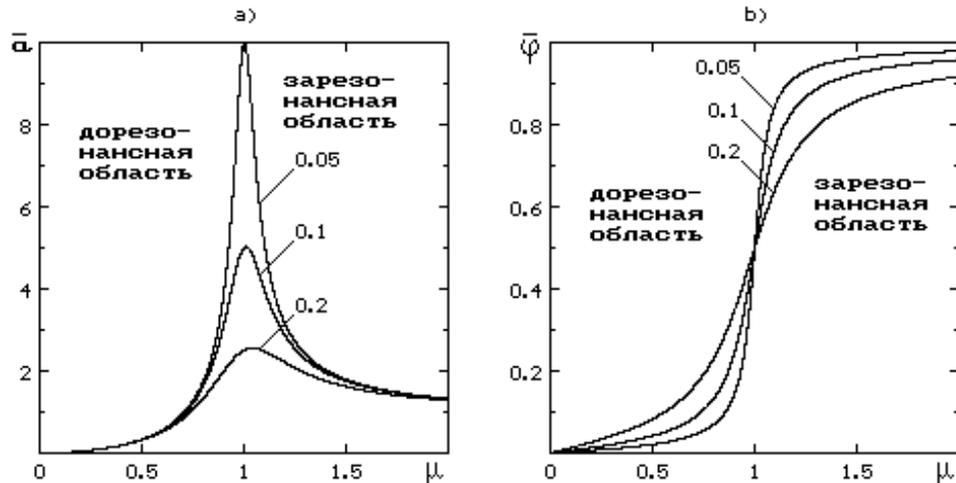


Рис. 12.3. Амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики при силовом возбуждении

Задача инженера при реализации мероприятий, связанных с применением виброизоляции, состоит в решении следующих двух основных вопросов:

- выбрать предпочтительную область работы данной конкретной машины (дорезонансную или зарезонансную), основываясь на фактической заранее измеренной частоте внешнего возбуждения;
- подобрать из имеющихся каталогов подходящий тип виброизолятора, обеспечивающего амплитуды колебаний в соответствии с нормативными требованиями.

Лекция 13.

Математическое моделирование процесса перехода через резонанс при пуске и торможении транспортно-технологической машины

Практически любая машина содержит, по крайней мере, один вращающийся компонент, который из-за неустранимого дебаланса представляет собой источник вибрационного возбуждения для всех других связанных с ним элементов. В установившемся режиме работы, то есть в режиме, когда такого рода источник вибраций вращается с номинальной скоростью, предусмотренной технологическим процессом, частота вынужденных колебаний, как правило, не совпадает ни с одной частотой собственных колебаний машины. В противном случае наступил бы резонанс, а при проектировании машины одной из важных инженерных задач как раз и является “отстройка” системы от резонанса. Но выход машины на номинальный режим работы неизбежно сопровождается разгоном, когда частота возбуждающих вибраций непрерывно увеличивается, и в процессе

такого изменения частоты может оказаться кратковременное совпадение ее с какой-нибудь собственной частотой, то есть система будет находиться некоторое время как бы в состоянии резонанса. Для многих машин такое явление неизбежно, и поэтому необходимо заранее знать поведение системы в режимах перехода через резонанс, чтобы не допустить аварийных ситуаций.

Рассмотрим процесс перехода через резонанс для классического одномерного осциллятора, возбуждаемого источником вибрации с переменной частотой. В лекции 8 для осциллятора с вибровозбудителем направленного действия получены выражения (8.51) и (8.52) для кинетической и потенциальной энергии, при помощи которых запишем функцию Лагранжа в форме

$$L = \frac{m}{2} \dot{z}^2 + \frac{I}{2} \dot{\varphi}^2 - m' e \dot{z} \dot{\varphi} \sin \varphi - \frac{c}{2} (z - z_0)^2 - mg z - m' g e \cos \varphi, \quad (13.1)$$

где m – общая масса осциллятора с двумя вращающимися элементами; I – суммарный момент инерции двух вращающихся элементов относительно своей оси вращения; m' – суммарная масса вращающихся элементов; e – эксцентриситет вращающейся массы; c – суммарный коэффициент жесткости упругих опор осциллятора; z – текущая координата какой-либо точки осциллятора в направлении его вибрационного перемещения, отсчитываемая в неподвижной системе координат; z_0 – координата осциллятора в том случае, когда упругие опоры оказываются недеформированными; φ – угол поворота вращающейся массы.

В представленной здесь функции Лагранжа (13.1) φ считается известной (заданной) функцией времени, поэтому слагаемыми $I \dot{\varphi}^2 / 2$ и $-m' g e \cos \varphi$ можно проигнорировать. Кроме того, в третьем слагаемом, записанном в виде

$$-m' e \dot{z} \dot{\varphi} \sin \varphi = m' e \frac{d}{dt} \left(z \frac{d \cos \varphi}{dt} \right) - m' e z \frac{d^2 \cos \varphi}{dt^2},$$

игнорируем полную производную по времени. В результате получим

$$L = \frac{m}{2} \dot{z}^2 - m' e z \frac{d^2 \cos \varphi}{dt^2} - \frac{c}{2} (z - z_0)^2 - mg z.$$

Уравнение движения запишем с помощью полученной функции Лагранжа без учета диссипации энергии –

$$m \ddot{z} + c(z - z_0) = -m' e \frac{d^2 \cos \varphi}{dt^2} - mg. \quad (13.2)$$

Произведем в (13.2) замену $z = x + z_0 - (m + 2m')g / c$, введя перемещение x массы m относительно положения ее равновесия, в результате чего

$$m \ddot{x} + c x = -m' e \frac{d^2 \cos \varphi}{dt^2},$$

а после деления на m с использованием привычных обозначений окончательно получим

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -Q_0 \frac{d^2 \cos \varphi}{dt^2} \quad (Q_0 = m'e/m) \quad (13.3)$$

В уравнении (13.3) будем считать, что угол поворота дебалансов изменяется в общем случае согласно выражению

$$\varphi(t) = \omega_{нач} t + \frac{\varepsilon}{2} t^2, \quad (13.4)$$

где $\omega_{нач}$ и ε – соответственно начальная угловая скорость дебаланса и его угловое ускорение, причем $\omega_{нач} = 0, \varepsilon > 0$ – при разгоне машины из состояния покоя, $\omega_{нач} = \omega_{ном}, \varepsilon < 0$ при торможении, начиная с номинальной скорости $\omega_{ном}$.

Для того чтобы при разгоне по закону (13.4) система проходила резонанс на частоте собственных колебаний ω , необходимо выполнение неравенства $\omega_{ном} > \omega$, а значит, время разгона $t_{раз}$ должно удовлетворять условию $t_{раз} > (\omega - \omega_{ном}) / \varepsilon$ (при $\omega_{ном} = 0$).

Решение уравнения (13.3) ищем в форме интеграла Дюамеля $x(t) = -\frac{Q_0}{\omega} \int_0^t \sin \omega'(t - \tau) \frac{d^2}{d\tau^2} \cos \varphi(\tau) d\tau$. Выполняя здесь дважды интегрирование по частям, получим с использованием элементарных тригонометрических формул

$$x(t) = -Q_0 [\cos \varphi(t) - \cos \omega t] + \frac{Q_0 \omega}{2} \{ [I_1(t) + I_2(t)] \sin \omega t + [J_1(t) + J_2(t)] \cos \omega t \} \quad (13.5)$$

где для сокращения записи введены обозначения интегралов:

$$I_{1,2} = \int_0^t \cos[\varphi(\tau) \pm \omega \tau] d\tau, \quad J_{1,2} = \int_0^t \sin[\varphi(\tau) \pm \omega \tau] d\tau, \quad (13.6)$$

Для интегрирования (13.6) вначале дадим определения двум числам

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{(\omega_{нач} + \omega)^2}{2k\varepsilon}}, \quad \alpha_2 = -k \sqrt{\frac{(\omega_{нач} - \omega)^2}{2k\varepsilon}},$$

где $k = \varepsilon / |\varepsilon|$, то есть $k > 0$ при разгоне, и $k < 0$ при торможении. Введем далее вместо τ новую переменную ξ по формуле

$$\varphi(\tau) \pm \omega \tau = k(\xi^2 - \alpha_{1,2}^2), \quad (13.7)$$

где α_1 соответствует знаку «плюс» в (13.7), а α_2 – знаку «минус». Подставив сюда вместо $\varphi(\tau)$ его определение согласно (13.4), можно получить

$$k \sqrt{\frac{\varepsilon \tau^2}{2k}} + \alpha_{1,2} = \sqrt{\xi^2}, \quad (13.8)$$

откуда, в частности, следует, что

$$d\tau = k\sqrt{\frac{2}{k\varepsilon}}d\xi. \quad (13.9)$$

В связи с введением новой переменной ξ установим и новые пределы в интегралах (13.6), для чего достаточно в (13.8) произвести подстановку $\tau = 0$ для нижнего предела и $\tau = t$ – для верхнего. При этом оказывается, что нижние пределы есть просто числа $\alpha_{1,2}$, а верхние –

$$\beta_{1,2} = k\sqrt{\frac{\varepsilon t^2}{2k}} + \alpha_{1,2}, \quad (13.10)$$

и теперь уже можно подставить (13.7) и (13.9) в (13.6), чтобы произвести интегрирование по новой переменной ξ :

$$\left. \begin{aligned} I_{1,2} &= k\sqrt{\frac{2}{k\varepsilon}} \int_{\alpha_{1,2}}^{\beta_{1,2}} (\cos \xi^2 \cos \alpha_{1,2}^2 + \sin \xi^2 \sin \alpha_{1,2}^2) d\xi, \\ J_{1,2} &= \sqrt{\frac{2}{k\varepsilon}} \int_{\alpha_{1,2}}^{\beta_{1,2}} (\sin \xi^2 \cos \alpha_{1,2}^2 - \cos \xi^2 \sin \alpha_{1,2}^2) d\xi, \end{aligned} \right\} \quad (13.11)$$

где учтено, что $k^2 = 1$, $\cos k\xi^2 = \cos \xi^2$, $\sin k\xi^2 = k \sin \xi^2$ и т.д.

Входящие в (13.11) интегралы непосредственно связаны с известными косинус-интегралом и синус-интегралом Френеля, определяемыми соответственно следующим образом:

$$C(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \cos \xi^2 d\xi, \quad S(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \sin \xi^2 d\xi. \quad (13.12)$$

Это есть специальные трансцендентные функции, хорошо изученные, табулированные, и для вычисления которых разработаны программные модули. Поэтому такими функциями можно так же свободно пользоваться, как и обычными тригонометрическими косинусами и синусами. Одним из главных свойств интегралов Френеля являются соотношения:

$$\begin{aligned} C(x) &= \pm \frac{1}{2} + \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \sin x^2 \quad \text{при } |x| \gg 1, \\ S(x) &= \pm \frac{1}{2} - \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \cos x^2 \quad \text{при } |x| \gg 1, \end{aligned}$$

то есть при достаточно больших x эти функции ведут себя как смещенные по оси ординат гармоники с амплитудной и частотной модуляцией (знак «минус» здесь берется при $x < 0$). Функции Френеля изображены на рис. 13.1.

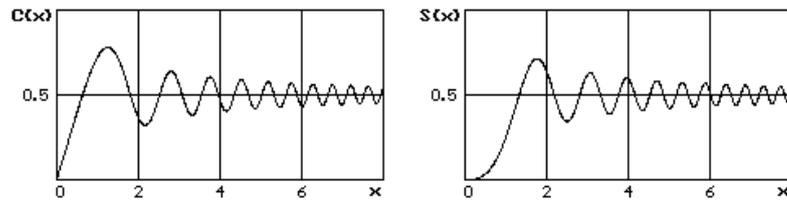


Рис. 13.1. Косинус-интеграл и синус-интеграл Френеля

Итак, в обозначениях (13.12) интегралы (13.11) запишутся в форме

$$\left. \begin{aligned} I_{1,2} &= k \sqrt{\frac{\pi}{k\varepsilon}} \left\{ [C(\beta_{1,2}) - C(\alpha_{1,2})] \cos \alpha_{1,2}^2 + [S(\beta_{1,2}) - S(\alpha_{1,2})] \sin \alpha_{1,2}^2 \right\}, \\ J_{1,2} &= \sqrt{\frac{\pi}{k\varepsilon}} \left\{ [S(\beta_{1,2}) - S(\alpha_{1,2})] \cos \alpha_{1,2}^2 - [C(\beta_{1,2}) - C(\alpha_{1,2})] \sin \alpha_{1,2}^2 \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (13.13)$$

и подстановка (13.13) в (13.5) приводит к окончательному выражению для функции $x(t)$, которое хотя и несколько громоздко, но зато есть точным решением уравнения (13.3). Это решение выпишем отдельно как

$$\frac{x(t)}{Q_0} = [A_0 \cos \omega t - B_0 \sin \omega t] + [\cos \varphi(t) + A_1(t) \cos \omega t + B_1(t) \sin \omega t], \quad (13.14)$$

где обозначено при $\lambda = \sqrt{\pi \omega^2 / (4k\varepsilon)}$:

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= 1 - \lambda [S(\alpha_1) \cos \alpha_1^2 - C(\alpha_1) \sin \alpha_1^2 + S(\alpha_2) \cos \alpha_2^2 - C(\alpha_2) \sin \alpha_2^2], \\ B_0 &= k\lambda [C(\alpha_1) \cos \alpha_1^2 + S(\alpha_1) \sin \alpha_1^2 + C(\alpha_2) \cos \alpha_2^2 + S(\alpha_2) \sin \alpha_2^2], \\ A_1(t) &= \lambda [S(\beta_1) \cos \alpha_1^2 - C(\beta_1) \sin \alpha_1^2 + S(\beta_2) \cos \alpha_2^2 - C(\beta_2) \sin \alpha_2^2], \\ B_1(t) &= k\lambda [C(\beta_1) \cos \alpha_1^2 + S(\beta_1) \sin \alpha_1^2 + C(\beta_2) \cos \alpha_2^2 + S(\beta_2) \sin \alpha_2^2] \end{aligned} \right\} \quad (13.15)$$

Как видно из (13.14), общее решение уравнения перехода через резонанс складывается из двух частей, помещенных в квадратные скобки, первая из которых описывает вынужденно-сопровождающие колебания на собственной частоте ω , а вторая часть представляет собой довольно сложную суперпозицию гармоник $\cos \varphi(t)$ [напомним, что $\varphi(t)$ есть монотонно возрастающая или убывающая положительно определенная функция], с частотно модулированными функциями типа $S(t) \cos \omega t$ и др.

Если рассмотреть выражение (13.10) для функций $\beta_{1,2}(t)$ как аргументы интегральных функций Френеля, то можно заметить, что в зависимости от разгона или замедления одна из функций (β_1 или β_2) обращается в ноль в определенные моменты времени. А так как в окрестности нуля функции $C(\beta)$ и $S(\beta)$ принимают максимальные значения (см. рис. 13.1), то в эти моменты времени и в их окрестности происходит неизбежное увеличение амплитуд колебаний системы. Указанные моменты как раз соответствуют переходу через резонанс, когда «мгновенная» частота вынуждающей силы совпадает с собственной частотой ω . Действительно,

если в (13.10) положить $\beta_{1,2}(t) = 0$, то отсюда находим $t_{рез} = -k\alpha_{1,2}\sqrt{2k/\varepsilon}$. Положительное значение $t_{рез}$ при разгоне ($k > 0$) будет лишь при подстановке сюда α_2 , и тогда

$$t_{рез} = \left| \frac{\omega_{нач} - \omega}{\varepsilon} \right|,$$

но точно такое же значение является корнем уравнения $\dot{\varphi}(t) = \omega$, где $\dot{\varphi}(t)$ есть «мгновенная» частота внешнего возбуждения.

Из выражений для переменных амплитуд (13.15) видно, что при $t = t_{рез}$ и в его окрестности результирующая амплитуда колебаний остается ограниченной, как и ограниченными являются интегральные функции Френеля. Отсюда следует, что переход через резонанс сопровождается ограниченным увеличением амплитуд, несмотря на отсутствие рассеивания энергии. И вообще, исследование процесса перехода через резонанс целесообразно производить именно без учета диссипации энергии, так как получаемые при этом амплитудные значения перемещений, а значит и нагрузки в элементах машины, хотя и будут несколько превышать ожидаемые в действительности величины, но это превышение, так сказать, идет «в запас». Иными словами, лучше получить заведомо увеличенные расчетные нагрузки, чем вычислить якобы точные, но по существу не верные результаты из-за очевидной недостоверности знаний о коэффициентах сопротивлений.

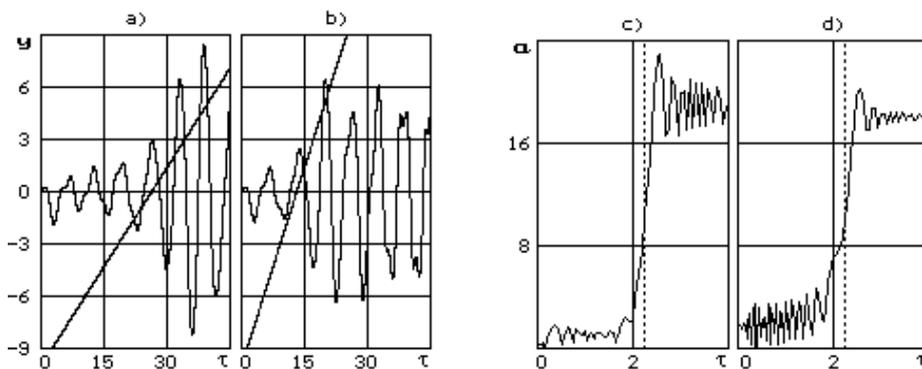


Рис. 13.2. Прямой (a,b) и обратный (c,d) переходы через резонанс

На рис. 13.2, а, b, изображены два процесса перехода колебательной системы через резонанс, полученные для безразмерного параметра $\varepsilon/\omega^2 = 0,038$ и для $\varepsilon/\omega^2 = 0,076$. На приведенных двух графиках по вертикальной оси отложены значения безразмерной функции $y = x(t)/Q_0$ в соответствии с (13.14), а по горизонтальной оси – безразмерный аргумент $\tau = \omega t$. На этих же графиках прямые наклонные линии изображают изменение функции $\dot{\varphi}(t) - \omega$. Там, где эта функция обращается в ноль, и есть точка «мгновенного» резонанса. Обращает на себя внимание тот факт, что амплитуды становятся наибольшими после прохода этой точки. Из графиков

видно, что увеличение ускорения разгона в два раза приводят к уменьшению амплитудных значений $x(t)$. Следует иметь в виду, что принятые здесь для примера величины параметра ε/ω^2 несколько завышены по сравнению с имеющими место на практике, так как реальные значения собственных частот имеют порядок 10 Гц , а угловые ускорения не превышают 10 с^{-2} . Как следует из представленных на рис. 13.2, а, б, кривых, колебания системы при переходе через резонанс имеют явно выраженный нестационарный характер.

Наряду с переходом через резонанс при разгоне (так сказать, при прямом переходе) представляет интерес рассмотреть переход через резонанс с замедлением (при обратном переходе). Эти два варианта иллюстрируют графики на рис. 13.2, с, д, построенные для параметра $\varepsilon/\omega^2 = 0,0045$. В данном случае масштаб по безразмерному времени τ уменьшен по сравнению с рис. 13.2, а, б, в сто раз. Здесь a по вертикальной оси есть огибающая максимальных положительных значений функции $x(t)/Q_0$. Вертикальные пунктирные линии являются разделительной границей дорезонансной и зарезонансной областей. Так как для рассматриваемого примера параметр ε/ω^2 почти на порядок меньше принятых на рис. 13.2, а, б, то амплитуды колебаний при переходе через резонанс увеличиваются значительно более интенсивно. Из графиков видно, что при обратном переходе через резонанс амплитуды колебаний несколько ниже, чем при прямом.

Современный инженер должен иметь в своем «арсенале» знаний и опыта программные средства моделирования перехода через резонанс той машины, с которую он проектирует или обслуживает. В особенности такие средства нужны проектировщикам, создающим образцы новой техники.

Лекция 14.

Математическое моделирование и выбор параметров динамического гасителя колебаний

Одним из эффективных способов борьбы с вибрацией, наряду с виброизоляцией, является динамическое гашение колебаний. Этот способ предусматривает наличие в данной машине некоторого дополнительного устройства с подвижной подпружиненной или свободно подвешенной массой, которая, вступая во взаимодействие с корпусом вибрирующей машины, как бы поглощает ее энергию, а сама машина остается при этом практически неподвижной.

Рассмотрим математическую модель динамики транспортно-технологической машины с динамическим гасителем колебаний. Пусть m – масса некоторой машины, которая, опираясь на упругие опоры, имеющие

коэффициент жесткости c , подвергается действию периодической силы $F(t) = F_0 \cos vt$, как это изображено на рис. 14.1. Для простоты изложения основной идеи ограничимся рассмотрением динамики исследуемой системы при отсутствии поглотителей энергии.

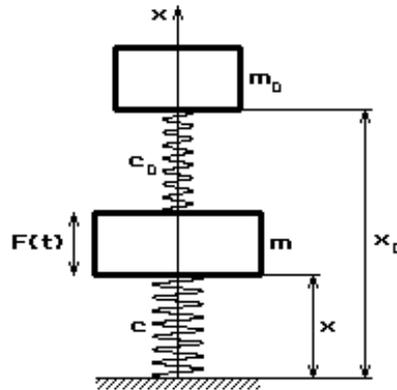


Рис. 14.1. Простейшая схема машины с динамическим гасителем колебаний

Присоединим к массе машины некоторую массу m_0 с помощью упругой связи с коэффициентом жесткости c_0 . Именно такая масса с упругой связью и есть динамический гаситель колебаний при соответствующем подборе его параметров.

Дифференциальные уравнения полученной совокупности двух масс запишем в виде следующей линейной неоднородной системы с внешним гармоническим возбуждением:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} + cx + c_0(x - x_0) &= F_0 \cos vt, \\ m_0\ddot{x}_0 + c_0(x_0 - x) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14.1)$$

Так как цель динамического гашения состоит в том, чтобы перемещения основной массы m равнялись нулю, то и положим в (14.1) $x \equiv 0$. Тогда из (14.1) следуют соотношения

$$\left. \begin{aligned} -c_0x_0 &= F_0 \cos vt, \\ m_0\ddot{x}_0 + c_0x_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (14.2)$$

Первое из этих уравнений требует, чтобы масса динамического гасителя двигалась по закону

$$x_0 = -(F_0/c_0)\cos vt.$$

Подстановка же этой функции во второе уравнение системы (14.2) приводит к равенству

$$(c_0 - m_0v^2)(F_0/c_0)\cos vt = 0,$$

откуда следует

$$\frac{c_0}{m_0} = v^2. \quad (14.3)$$

Выражение типа $\sqrt{c_0/m_0}$ в теории колебаний называется парциальной частотой. В данном случае – это парциальная частота гасителя колебаний. Выражение (14.3) означает, таким образом, что для гашения колебаний необходимо равенство парциальной частоты гасителя и частоты внешнего возмущения ν . В этом и состоит принцип динамического гашения колебаний.

При наличии в системе рассеивания энергии полностью устранить вибрацию машины не удастся. Тем не менее, настройка гасителя по формуле (14.3) все же дает возможность свести амплитуду колебаний к минимуму, причем амплитуда остаточных колебаний в этом случае оказывается пропорциональной коэффициенту рассеивания энергии в гасителе.

Рассмотренный на рис. 14.1 гаситель принадлежит к классу линейных пружинных гасителей. Еще один пример линейных гасителей, то есть гасящих продольные (линейные) колебания, приведен на рис. 14.2.

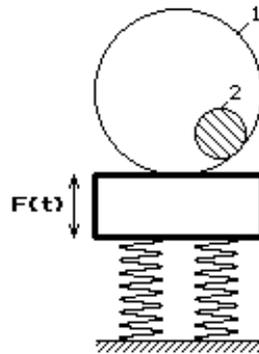


Рис. 14.2. Гаситель продольных колебаний каткового типа

Здесь на корпус машины, подверженной действию гармонической силы $F(t) = F_0 \cos \nu t$, устанавливается цилиндрическая или сферическая полость 1 с внутренним радиусом r . Внутри полости свободно перекачивается цилиндрическое или сферическое тело 2 радиусом r_0 и массой m_0 , которое и является гасителем колебаний. В данном случае автоматически обеспечивается равенство парциальной частоты гасителя и частоты внешнего возбуждения ν , что является необходимым условием для динамического гашения колебаний. Но здесь этого не достаточно. Для устранения вибрации машины необходимо обеспечить равенство центробежной силы, действующей на массу m_0 , и амплитуды внешней силы F_0 , то есть должно быть

$$m_0(r - r_0)\nu^2 = F_0. \quad (14.4)$$

Зная, таким образом, величины F_0 и ν , нетрудно подобрать требуемые параметры гасителя m_0 , r , r_0 , руководствуясь формулой (14.4).

Для гашения крутильных колебаний элементов трансмиссии эффективно используются так называемые маятниковые гасители, одна из схем которых приведена на рис. 14.3. Здесь 1 – вращающиеся элементы,

например, двигателя внутреннего сгорания; 2 – массивный диск, условно изображающий вращающиеся элементы исполнительного органа, например, это может быть даже обычный маховик; 3 – маятник массой m_0 на шарнирной подвеске длиной l , прикрепленный к диску 2 в точке C .

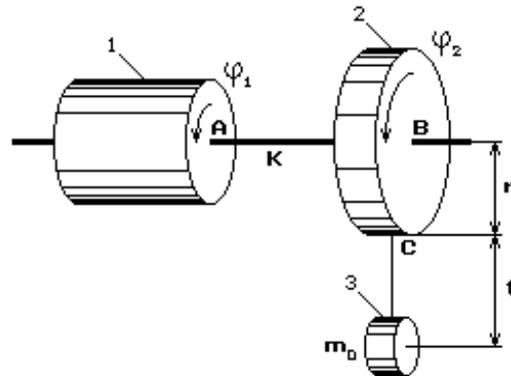


Рис. 14.3. Динамический гаситель колебаний маятникового типа

Участок вала трансмиссии между точками A и B имеет торсионную жесткость K .

Как правило, двигатели внутреннего сгорания обеспечивают некоторую среднюю частоту вращения Ω , но из-за неравномерного вращения коленчатого вала угол его поворота φ_1 изменяется по закону

$$\varphi_1 = \Omega t + a \cos \nu t,$$

где a – амплитуда неравномерности вращения коленчатого вала, ν – частота его крутильных колебаний. При этом $\nu = n\Omega$ ($n=1, 2, \dots$). Неравномерность вращения коленчатого вала приводит к тому, что диск 2 также вращается неравномерно ($\varphi_2 \neq \varphi_1$), в результате чего участок вала AB подвергается действию вибрационного крутящего момента

$$M = Ka \cos \nu t.$$

Для устранения этого момента и устанавливается маятник 3, который, подвергаясь действию центробежной силы

$$F_y = m_0 \Omega^2 (r + l),$$

совершает колебания (либрации) в плоскости диска и этим самым поглощает энергию крутильных деформаций. При соответствующем выборе длины подвески l можно добиться эффективного гашения вредных крутильных колебаний. Нетрудно показать, что в этом случае парциальная частота маятникового гасителя определяется формулой

$$\omega = \Omega \sqrt{r/l}$$

[ср. это выражение с формулой (11.11) лекции 11, посвященной динамике молотковой дробилки]. Приравнивая эту частоту к частоте внешнего возбуждения ν , получим

$$\frac{r}{l} = \left(\frac{\nu}{\Omega} \right)^2,$$

а так как $v = n\Omega$, то

$$l = \frac{r}{n^2}. \quad (14.5)$$

При известном числе n (а оно определяется типом двигателя, расположением поршневых групп, количеством цилиндров и др.) по формуле (14.5) нетрудно вычислить требуемую длину подвески. Заметим, что для маятникового гасителя колебаний масса самого маятника не играет никакой роли.

Многообразие современных машин и знание принципов динамического гашения вредных вибраций дает инженеру обширное поле поисков новых эффективных технических решений в этой области.

Лекция 15.

Общие сведения о случайных процессах, протекающих в подсистемах технологических машин

Случайным процессом $x(t)$ называется некоторая функция времени t , которая в результате проводимых опытов может принять тот или иной заранее неизвестный вид. Конкретный вид, который принимает случайный процесс в результате опыта, называется его реализацией. Значение случайного процесса в некоторый момент времени является случайной величиной и называется сечением случайного процесса.

Случайный процесс называется **стационарным**, если он ведёт себя во времени однородно: т.е. характеризуется стабильным средним уровнем и однородностью колебаний мгновенных значений относительно этого среднего уровня. Математически это означает, что математическое ожидание и дисперсия процесса не зависят от времени, а коэффициент корреляции между двумя сечениями зависит только от временного сдвига между ними.

Стационарный случайный процесс называется **эргодическим**, если любая его реализация достаточной продолжительности имеет те же статистические характеристики, что и остальные. Иными словами, каждая отдельная реализация процесса является полноценным представителем всего ансамбля реализаций. Многочисленные исследования показывают, что динамические процессы, протекающие в подсистемах многих типов технологических машин в установившихся рабочих режимах, могут рассматриваться как стационарные эргодические случайные процессы.

Рассмотрим основные статистические характеристики стационарных эргодических процессов.

1) Оценка математического ожидания $\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$, где T – длина реализации.

2) Оценка корреляционной (автокорреляционной) функции

$$K_x(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} \tilde{x}(t)\tilde{x}(t+\tau)dt, \quad \text{где} \quad \tilde{x}(t) = x(t) - \bar{x}, \quad \tilde{x}(t+\tau) = x(t+\tau) - \bar{x} -$$

центрированные относительно математического ожидания значения случайного процесса, τ – временной сдвиг двух сечений реализации.

При $\tau = 0$ значение корреляционной функции равно дисперсии D_x случайного процесса $D_x = K_x(0) = \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{x}^2(t)dt$. Размерность корреляционной функции – квадрат размерности процесса. Корреляционная функция стационарного эргодического процесса не зависит от начала отсчета времени и является четной функцией τ .

3) Оценка спектральной плотности связана с корреляционной функцией взаимным интегральным преобразованием Фурье:

$$S_x(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos \omega\tau d\tau;$$

$$K_x(\tau) = \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega\tau d\omega.$$

Спектральная плотность имеет размерность квадрат размерности процесса умноженный на секунду и характеризует распределение дисперсии процесса в соответствующем частотном диапазоне. Площадь под кривой спектральной плотности равна дисперсии процесса. Для улучшения качества оценки спектральной плотности при конечных значениях длины реализации и временного сдвига используется метод взвешивания некоторыми весовыми

функциями $\lambda(t)$. При этом $S_x(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\tau_{\max}} K_x(\tau)\lambda(t) \cos \omega\tau d\tau$, где τ_{\max} –

максимальное значение временного сдвига.

4) В ряде случаев удобно пользоваться нормированными корреляционной функцией и спектральной плотностью $\rho_x(\tau) = \frac{K_x(\tau)}{D_x}$,

$$g_x(\omega) = \frac{S_x(\omega)}{D_x}.$$

Рассмотрим в качестве примера характеристики нескольких типов случайных процессов, часто встречающихся на практике:

- 1) гармонический процесс;
- 2) узкополосный случайный процесс;
- 3) широкополосный случайный процесс;
- 4) «белый шум».

Анализ корреляционной функции и спектральной плотности позволяет выявить структуру процесса и выделить скрытые колебательные составляющие. Пример – случайный процесс изменения крутящего момента в трансмиссии привода исполнительного органа очистного комбайна.

Совместные статистические характеристики двух случайных процессов, протекающих в разных подсистемах горной машины, позволяют оценить закономерности взаимодействия этих подсистем. К совместным характеристикам двух случайных процессов $x(t)$ и $y(t)$ относятся следующие:

1) Оценка взаимной корреляционной функции

$$K_{xy}(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} \tilde{x}(t)\tilde{y}(t+\tau)dt, \text{ где } \tilde{y}(t+\tau) = y(t+\tau) - \bar{y}.$$

2) Оценка взаимной спектральной плотности $S_{xy}(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\tau_{\max}} K_{xy}(\tau) \cos \omega\tau d\tau$

. Эта функция является комплексной функцией частоты и состоит из действительной части $C_{xy}(\omega)$ (синфазная составляющая) и мнимой части $Q_{xy}(\omega)$ (квадратурная составляющая). В показательной форме эта функция имеет вид $S_{xy}(\omega) = |S_{xy}(\omega)|e^{-j\Theta_{xy}(\omega)}$, где $|S_{xy}(\omega)| = \sqrt{C_{xy}^2(\omega) + Q_{xy}^2(\omega)}$ - взаимный амплитудный спектр; $\Theta_{xy}(\omega) = \arctg \frac{Q_{xy}(\omega)}{C_{xy}(\omega)}$ - взаимный фазовый спектр.

3) Оценка функции когерентности $\gamma^2_{xy}(\omega) = \frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{S_x(\omega)S_y(\omega)}$. Данная

безразмерная функция изменяется в диапазоне от 0 до 1 и играет роль коэффициента корреляции между частотными компонентами двух случайных процессов на каждой частоте. Если $\gamma^2_{xy}(\omega) = 1$, то два процесса являются полностью когерентными. Для полностью независимых процессов $\gamma^2_{xy}(\omega) = 0$.

В качестве примера рассмотрим функцию когерентности двух процессов – крутящий момент в трансмиссии привода исполнительного органа и скорость перемещения очистного комбайна. Наиболее сильно взаимодействие этих процессов проявляется на частоте 1,8 Гц ($\gamma^2_{xy}(\omega) = 0,68$). Это объясняется наличием внешних связей, обусловленных неравномерностью перемещения комбайна, которая влияет на процесс стружкообразования и нагрузки на исполнительном органе.

Используя статистические характеристики динамических процессов на входе и выходе системы, можно определять передаточные характеристики системы. Так, например, АЧХ линейной динамической системы, имеющей входной сигнал $x(t)$ и выходной $y(t)$, можно определить одним из следующих способов:

$$K(\omega) = \sqrt{\frac{S_y(\omega)}{S_x(\omega)}}, \quad K(\omega) = \frac{S_{xy}(\omega)}{S_x(\omega)}.$$

Для определения статистических характеристик непрерывных случайных процессов необходимо их представить в виде числовых массивов, т.е. выполнить аналого-цифровое преобразование. Для обработки следует принимать участки, соответствующие установившимся режимам работы, которые в наибольшей степени отвечают условиям стационарности.

Длина реализации определяется по выражению $T \geq \frac{16}{p_{\delta} f_{\min}}$, где p_{δ} - допустимая величина ошибки в определении корреляционной функции (%), f_{\min} - минимальная частота динамически значимых колебательных составляющих процесса (Гц).

Шаг квантования по времени (дискретность) определяются по выражению $\Delta t \leq \frac{1}{(5 \dots 10) f_{\max}}$, где f_{\max} - максимальная частота динамически значимых колебательных составляющих процесса (Гц).

Для определения рассмотренных статистических характеристик на ЭВМ используются различные пакеты прикладных программ.