МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Донецкий национальный технический университет»

КАФЕДРА «ОХРАНА ТРУДА И АЭРОЛОГИЯ»

А.Л. Кавера

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ В ГОРНОМ ПРОИЗВОДСТВЕ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

Специальность: 21.05.04 «Горное дело»
Специализация: Технологическая безопасность и горноспасательное дело

РАССМОТРЕНО
на заседании кафедры
«Охрана труда и аэрология»
30 августа 2023 г. Протокол № 1

Донецк – 2023

УДК 519.85

Математические методы и модели в горном производстве: конспект лекций / сост.: А.Л. Кавера – Донецк: ДонНТУ, 2023. – 56 с.

В конспекте лекций излагаются общие вопросы, связанные с моделированием и методологией исследований. Конспект рекомендуется для подготовки студентов по специальности «Горное дело» со специализацией «Технологическая безопасность и горноспасательное дело».

Составил: А.Л. Кавера, к.т.н.

Рецензент: К.Н. Лабинский, д.т.н.

СОДЕРЖАНИЕ:

1. МЕТОДОЛОГИЯ НАУЧНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Человеку присущи стремление к истине и способность критически оценивать существующие точки зрения. Только, обладая надежным научным методом, можно сделать объективные и обоснованные выводы, которые будут заслуживать внимания.

Термин «методология» означает учение о методах познания. Но в научной литературе встречаются разные толкования понятия «методология». Наиболее распространены среди них философские толкования, где методология рассматривается как философское учение о методах познания и практике, или преобразовании действительности. Методология призвана выполнить две основные функции:

– получение нового знания и представление этого знания посредством понятий, критериев, законов, теорий, гипотез;

– организация использования новых знаний в практической деятельности.

Задачей методологии является выяснение, конструирование и преобразование схем деятельности, интегрированных в повседневный человеческий опыт. Смысл методологии – это внутренняя организация процесса познания, практического преобразования объективной реальности и обеспечения программ деятельности рациональным построением.

Понятие «методология» и понятие «метод» в некоторых научных школах считают идентичными, хотя отечественная наука четко разграничивает эти понятия. Метод – способ организации практического и теоретического освоения действительности, обусловленный закономерностями развития объекта. Метод – это ячейка научного исследования. От того, осознал ученый метод исследования или нет, сумел подобрать необходимые методы – зависит конечный результат опытной работы. Исходя из значимости метода проведения научно-исследовательской работы, рассмотрим его место в этой работе.

Научное исследование – это творческий процесс, здесь не существует заранее определенных методов познания. Но было бы неверным считать, что содержание методов формируется произвольно, по своему усмотрению исследователем. Определяется метод через практическое взаимодействие субъекта (исследователя) с объектом исследования. Но одного практического взаимодействия субъекта и объекта для эффективного использования метода недостаточно. Требуются объективные знания об объекте исследования. Такие знания зафиксированы в теориях, поэтому использование их наполняет метод идеями, принципами, подходами. Из-за взаимодействия субъекта и объекта с теоретическими знаниями, последние попадают в метод, таким образом метод становится тем элементом научного исследования, вокруг которого объединяются теория, практика, субъект и объект (рис. 1.1).

Современная система научных методов многообразна. Все методы, в зависимости от того в узкой или более широкой научной сфере, их можно применить, делятся на три основные группы: общефилософские, общенаучные и конкретнонаучные методы. Но несмотря на принадлежность к той или иной группе, в процессе исследования методы взаимодействуют, дополняя друг друга, направляясь на получение новых знаний (рис. 1.2).

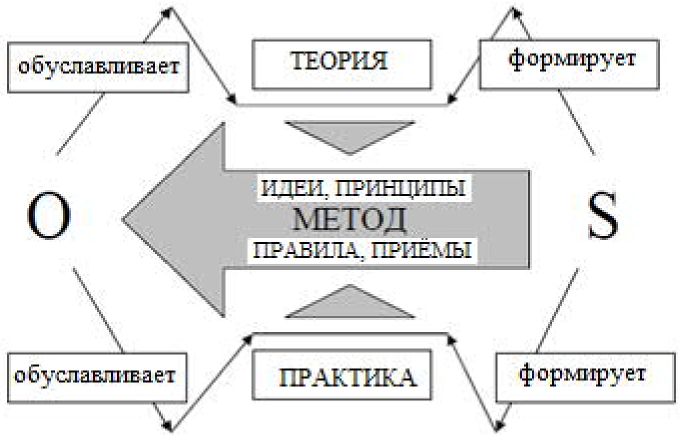

Рис. 1.1 – Формирование научного метода

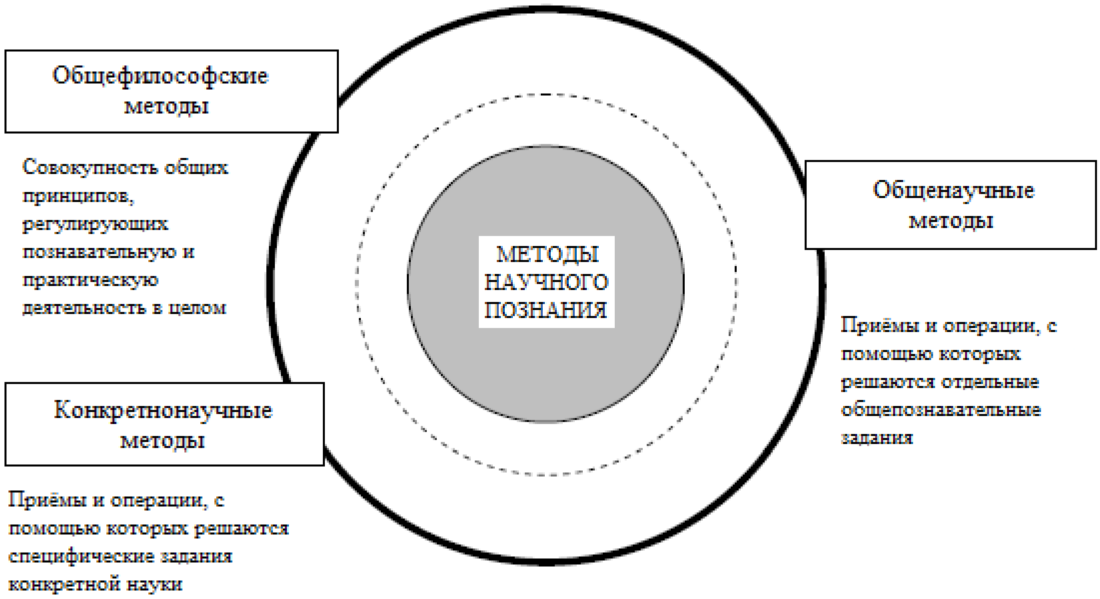

Рис. 1.2 – Классификация методов по степени их обобщения

Первые шаги овладения навыками научно-исследовательской работы, как правило, вызывают ряд вопросов, наиболее часто связанных с методологией научного познания. Чтобы легче разобраться в многогранных вопросах методологии, рассмотрим отдельно фундаментальную (философскую), общенаучную и конкретнонаучную методологию.

Фундаментальная или философская методология – это высший уровень методологии науки, определяющий общую стратегию построения процесса познания. Эта методология используется при исследовании во всех областях деятельности и на всех этапах конкретного познавательного процесса. Социальное предназначение фундаментальной методологии состоит в том, чтобы найти новые мировоззренческие ориентиры путем критического анализа действительности и формирования на этой основе новых подходов к решению проблемы мировосприятия.

Общенаучная методология используется большинством наук, но в отличие от философской методологии не на всех этапах познавательного процесса, а только на конкретно определенных для раскрытия определенных сторон или свойств предмета. Она основывается на теоретических концепциях и располагает методами познания. Рассмотрим общенаучные методы познания, наиболее часто применяемые в практике научных исследований (рис. 1.3).

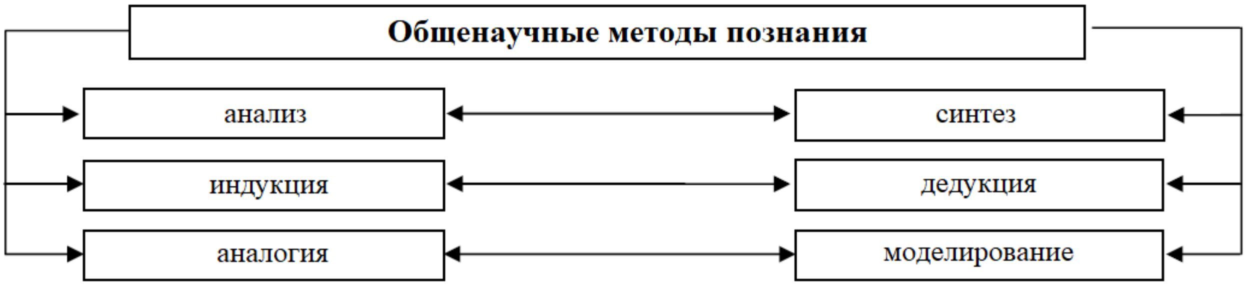

Рис. 1.3 – Методы общенаучного познания

Анализ – метод исследования, сущность которого состоит в том, что предмет исследования расчленяется на составные части и каждая из этих частей исследуется отдельно. Метод теоретического анализа в исследованиях позволяет рассматривать явления и процессы деятельности в различных соотношениях, выделять наиболее существенные признаки, свойства, связи. Благодаря теоретическому анализу появляется возможность благодаря мышлению, памяти, представлению охватить одновременно большое количество фактов, выявляя возможные связи.

Синтез – этот метод исследования противоположный анализу и позволяет осуществлять объединение элементов (частей) объекта, который был расчленен в процессе анализа, устанавливая связи между частями и давая возможность познать объект исследования, как единое целое. Методы анализа и синтеза взаимосвязаны. В научных исследованиях их используют, как правило, одновременно. Ведь после выполнения аналитической работы возникает потребность в синтезе, интеграции результатов анализа, создании общей системы. Именно, используя метод синтеза, мы имеем возможность воспроизвести предмет исследования, как систему связей, взаимодействия с акцентированием внимания на наиболее существенные компоненты.

Индукция – это метод познания, согласно которому из частных фактов и явлений выводятся общие принципы и закономерности, то есть при использовании этого метода логика мышления развивается от конкретного к общему. Метод индукции особенно эффективно используется в тех исследованиях, в основу которых положен опыт, эксперимент и наблюдение, предоставляющие возможность сбора эмпирических фактов. Изучая эти факты, исследователь устанавливает явления, которые носят повторяющийся характер и на этом основании выстраивает индуктивное умозаключение.

Дедукция – это метод познания, с помощью которого частные положения выводятся из общих, то есть метод перехода от общих представлений к частным. Дедукция отличается от индукции прямопроходящим движением мысли. Метод дедукции основывается на общем суждении.

Аналогия – это метод научного познания, с помощью которого достигаются знания об одних предметах или явлениях на основании их схожести с другими. Умозаключение по аналогии – это когда знания о каком-либо объекте переносятся на другой менее исследованный предмет, но схожий с первым по существенным свойствам и качествам. Благодаря наглядности, свойственной методу аналогии и позволяющей сравнить и вырисовать в воображении подобные качества, свойства изучаемого объекта, этот метод получил широкое применение в науке.

Моделирование – это метод научного познания, который заключается в замене изучаемого объекта его моделью, по которой определяют или уточняют характеристики оригинала. Обязательным условием модели является то, что она должна содержать существенные черты реального объекта. Моделирование активно используется как в теоретическом (умственные, логические, мнимые, математические модели), так и в эмпирическом (физические, вещественные, действующие модели) исследовании. Моделирование считается достаточно эффективным средством прогнозирования влияния внешних факторов на изучаемое явление и принятие конкретных решений. Модель должна конструироваться исследователем таким образом, чтобы операции отражали основные характеристики объекта исследования (основные элементы структуры, их взаимосвязь, функциональные параметры и др.), важные для достижения цели исследования.

Модель не может быть полностью адекватна изучаемому объекту, эта адекватность будет относительной и будет касаться в основном цели, поставленной исследователем. Модель конструируется на основе предварительного изучения объекта и выделения его существенных характеристик, теоретического анализа основных параметров и сопоставления полученных результатов, с характеристиками реального объекта. Если результаты теоретического анализа основных параметров не совпадают с характеристиками реального объекта, происходит корректировка модели.

Использование моделирования вызвано тем, что существуют такие качества объекта исследования, которые нельзя понять путем непосредственного изучения. Поэтому исследователи прибегают к искусственному воспроизведению подобных явлений в такой форме, которая удобна для наблюдения и изучения.

Конкретнонаучная методология выполняет синтетическую функцию внутри конкретных наук в условиях их взаимодействия. Особенно важное значение указанное взаимодействие приобретает тогда, когда речь идет об исследованиях на междисциплинарном уровне.

Эффективность любого исследования существенно зависит от общих и конкретнонаучных принципов и подходов.

Ведущим принципом любого научного исследования является методологический **принцип объективности**. Он выражается во всестороннем учете факторов, порождающих то или иное явление, в нахождении адекватных исследовательских подходов и средств, позволяющих получить истинное знание об объекте. Этот принцип предполагает исключение возможности применения субъективизма, односторонности и предвзятости в подборе и оценке фактов. Принцип объективности требует обоснованности исходных данных, логичности исследовательских действий, их последовательности и на этой основе через достоверные факты достижения достоверных выводов. Эффективность принципа объективности в значимой степени зависит от того, как исследователю удалось выделить и оценить все вероятные варианты решения, выявить все точки зрения на изучаемый вопрос.

Важным методологическим принципом является **принцип сущностного анализа**. Соблюдение этого принципа связано с соотнесением в изучаемых явлениях, общего, особенного и единичного, проникновением в их внутренние структуры, раскрытием законов их существования и функционирования условий и факторов их развития, возможностей целенаправленного их изменения. Этот принцип предполагает движение исследовательской мысли от описания к объяснению, а от него к прогнозированию развития явления и процессов. Многофакторность и многообразие влияний, требуют выделения основных факторов, определяющих развитие процесса. Кроме того, следует установить иерархию взаимосвязей и взаимовлияний основных и второстепенных факторов, то есть воспроизвести структуру явления или процесса. Например, изучая, какие факторы влияют на утомляемость шахтеров, мы увидим, что на каждого человека, в зависимости от возраста, характера, опыта, одни и те же факторы по-разному влияют. Принцип сущностного анализа предполагает раскрытие противоречий в предмете исследования, прослеживание взаимосвязи и взаимозависимости количественных и качественных изменений, движения к более высоким уровням развития с сохранением всего положительного.

Принцип единства логического и исторического, требующий в каждом исследовании совмещать изучение истории объекта в его современном состоянии, а также перспективы его развития. Исторический анализ возможен только с позиции определенной научной концепции, основанной на представлениях о структуре и функциях тех или иных элементов и отношений, а теоретический анализ невозможен без изучения генезиса (происхождения, становления) объекта.

Принцип ведущей роли практики. Воспринимая практику, как сознательную деятельность человека по преобразованию природы и общества, фундаментальный критерий отражения действительности, мы должны констатировать, что научно-исследовательские работы, связанные с практикой, проверенные практикой, более эффективно решают научные проблемы. Все это позволяет утверждать, что практика является основой развития познания.

Инструментарием, который позволяет создавать различные теории и концепции, выступают такие элементы теоретического исследования, как **методологические подходы**. В истории развития науки не редки случаи, когда некоторые подходы, возникшие на междисциплинарном уровне, со временем сворачиваются до предмета (экология, кибернетика, семиотика), а иногда подход развивается, перерастая в общенаучный или фундаментальный (как это произошло с общей теорией систем). Определение подходов к исследованию проблемы, направленно на решение стратегических, а не тактических задач исследования. Рассмотрим главные **общенаучные подходы**.

Хронологический (исторический) подход позволяет исследовать развитие процессов и событий в хронологической последовательности. Изучение исторического опыта, определение этапов становления и развития объекта исследования с момента возникновения до времени изучения проблемы ученым, значительно обогащает научное исследование, повышает уровень достоверности его результатов, указывает на компетентность и объективность исследователя.

Терминологический подход. Любое теоретическое исследование требует представления, анализа и уточнения терминов и понятий, используемых в исследовании. В основе этого подхода положено не только изучение истории становления и анализ терминов и обозначаемых ими понятий, но и разработка, уточнение, углубление понятийного аппарата, установление подчиненности и взаимосвязи понятий, составляющих основу научного исследования.

Системный подход. Современная общенаучная методология использует такую же теоретическую концепцию, как системный подход. Сущность его заключается в комплексном исследовании сложных объектов (систем), изучение которых не ограничивается особенностями составляющих их элементов, а связано прежде всего с акцентированием внимания исследователя на характер взаимодействия между элементами. С позиции системного подхода можно рассмотреть любую область. Ориентация на системный подход наиболее оправдана тогда, когда исследуется сущность явления или процесса.

Сущность системного подхода находит свое выражение в следующих положениях, которые могут помочь выявить свойства системных объектов:

– целостность исследования системы относительно внешней среды, то есть речь идет об изучении объекта в единстве со средой. Свойства системы не сводятся к свойствам ее элементов или их суммам. Свойства элементов зависят от принадлежности к определенной системе (рис. 1.4).

– совокупность элементов дает представление о структуре и организации системных объектов, структура конкретизирует систему в статике. Представление системы должно выражать определенную упорядоченность, взаимозависимость ее элементов.

– все элементы системы находятся в сложных связях и взаимоотношениях. Исследователь должен выделить в исследуемой системе наиболее существенные связи (так называемые системообразующие связи);

– управление и регулирование связей между элементами системы включает в себя постановку целей, выбор средств, контроль и анализ результатов.

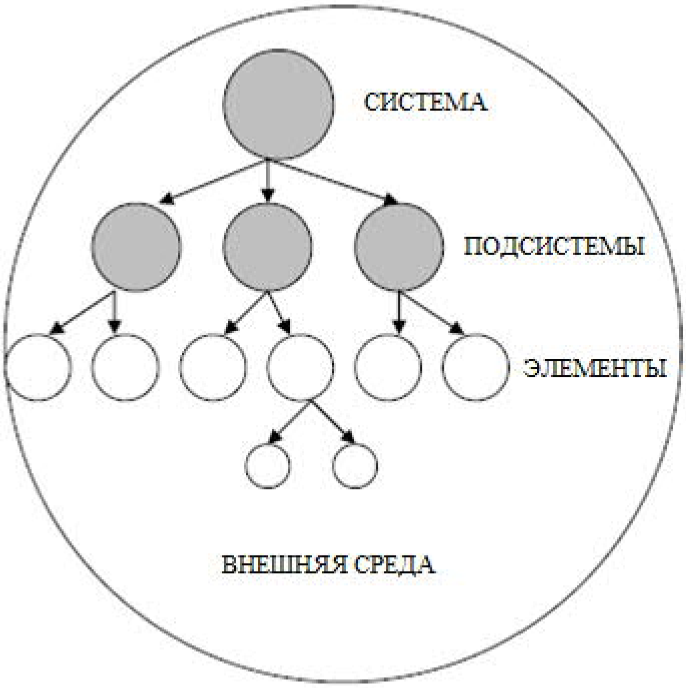

Рис. 1.4 – Схематическое изображение системы

<u>Профессионально-деятельностный</u> подход заключается в использовании при подготовке специалистов, различных видов профессиональной деятельности, способствующих совершенствованию умений и навыков этой деятельности.

<u>Праксеологический</u> подход. Праксеология – это способность выполнять действие, которое человек приобретает благодаря последовательным и целенаправленным тренировкам. Благодаря специально подобранным упражнениям, выполнение действий постепенно приближается к автоматизму,

менее нуждаясь в контроле со стороны разума. Это позволяет значительно увеличить скорость и улучшить качество исполнения.

Экзистенциально-гуманистический подход, сформировавшийся на основе гуманистической психологии. Это направление признает своим главным предметом личность, как уникальную целостную систему, являющуюся открытой возможностью самоактуализации, присущей только человеку, в основу которой положено изучение человека, основанного на предположении, что он человек существо свободное, способное нести ответственность за свои поступки и их последствия.

Рефлексивно-инновационный подход – способен не только обеспечивать активное приобретение профессиональных навыков будущего специалиста, а также является одним из условий развития рефлексивных и творческих возможностей специалиста, способность находить смысл и определенность в многомерности фактов и явлений.

Информационный подход. Сущность его заключается в том, что при изучении любого процесса или явления в природе или обществе, обязательно обнаруживаются информационные аспекты, иными словами, все объекты, процессы и явления, по сути своей являются информационными, поскольку связаны с созданием, накоплением, обменом или использованием информации.

Культурологический подход позволяет исследовать социальные, педагогические, психологические и другие объекты и явления через призму феномена культуры, которая рассматривается, как многоуровневая иерархическая система. Культурологический подход побуждает исследователей к анализу предмета исследования, как культурного феномена.

Формальный подход. Сущность его состоит в том, что основные теоретические положения тех или иных процессов или явлений предоставляются в виде формул с использованием символьных систем (часто математики). Такой подход позволяет устанавливать определенные закономерности между фактами, которые с первого взгляда якобы не имеют связей.

2. МЕТОДЫ ЭМПИРИЧЕСКОГО И ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Когда речь заходит об эмпирических и теоретических методах исследований, мы должны осознавать, что эти методы основываются и взаимодействуют с общефилософской, общенаучной и конкретнонаучной методологиями. Особенно тесное взаимодействие эмпирического и теоретического уровней исследования наблюдается в общенаучной и конкретнонаучной методологии (рис. 2.1).

Рис. 2.1 – Взаимодействие конкретнонаучных и общенаучных методов

В структуре научного познания выделяют два уровня знания – эмпирический и теоретический. Соответственно каждый из этих уровней имеет свой специфический вид познавательной деятельности: эмпирическое и теоретическое исследование. Эмпирическое и теоретическое исследование направлены на изучение одного и того же явления, но представление в знаниях о нем будет разным.

Эмпирический и теоретический уровни нельзя отделять друг от друга. Именно их единство позволяет добиться объективности в исследовании. Хотя следует отметить, что эмпирический и теоретический уровни наделены определенной автономией. Теоретический уровень отличается от эмпирического тем, что на нем происходит научное объяснение фактов, полученных на эмпирическом уровне. Именно здесь на основе полученных фактов выстраиваются идеальные объекты. На этом уровне исследователь имеет возможность оперировать составляющими модели изучаемого объекта, которые образовались на сознательном уровне, в то время как на эмпирическом уровне он имеет дело с реальными объектами. Иными словами, особенность исследования теоретически заключается в том, что исследуемый объект имеет возможность развиваться якобы самостоятельно, без непосредственного контакта с реальной действительностью, средствами мыслительных действий исследователя.

Совокупность эмпирических знаний становится определенным знанием о действительности только тогда, когда они систематизированы и представлены с позиции определенных теоретических представлений. А это указывает на то, что эмпирический уровень научных знаний обязательно включает определенную теоретическую трактовку действительности.

Теоретическое исследование. Приступая к теоретическому уровню исследования, научный работник должен получить инструментарий теоретического познания (рис. 2.2), что позволит более структурированно и эффективно пройти этот этап. Основу содержания теоретического исследования составляют структурные элементы, в которые входят: научная идея, гипотеза, теория, факты, категории, аксиомы и т.д.

Рис. 2.2 – Теоретические основы науки

Осознание этих структурных элементов теоретического уровня исследования поможет ученому более уверенно чувствовать себя в процессе аргументации или доказывания определенных теоретических положений. Исходя из важности овладения данным инструментарием, приведем основные из этих элементов.

Научная идея – интуитивное объяснение явления без промежуточной аргументации и осознания всей совокупности связей.

Гипотеза – предсказание причины, вызывающей последствие.

Теория – форма научного знания, дающая целостное представление о закономерностях и существенных связях действительности.

Факты – знание об объекте или явлении, достоверность которого доказана.

Категории – наиболее общие и фундаментальные понятия, отражающие существенные связи действительности.

Аксиомы – положения, принимаемые без логического доказывания.

Постулаты – утверждения, принимаемые в рамках какой-то научной теории за истинное и играющие роль аксиом.

Принципы – основные исходные положения какой-либо теории, науки или мировоззрения.

Понятие – мысли, в которых обобщаются и обособляются предметы какого-то класса (вида) по определенным общим признакам.

Положения – сформулированные мнения, высказанные в форме научного утверждения.

Суждения – мысли, высказываемые посредством повествовательного предложения, которые могут быть истинными и ложными.

Законы – необходимые устойчивые отношения между повторяющимися явлениями в природе и обществе.

Состав теоретических методов познания предполагает глубинный анализ фактов, абстрагирование от всего побочного (обнаружение процесса в «чистом» виде), раскрытие существенных закономерностей, объяснение взаимосвязи внешних процессов с внутренними, образование теоретических моделей явления, использование гипотез и т.д.

Метод **абстрагирования** предполагает мысленное отделение любого свойства или признака предмета от других признаков, свойств, связей с целью более глубокого и детального изучения предмета исследования через изолирование его от влияния других предметов, свойств, признаков. Чтобы проникнуть в сущность явления, исследуемого научным работником, выявить его специфические черты, необходимо выделить предмет изучения в «чистом виде», то есть мы должны отвергнуть все побочные воздействия, абстрагироваться от многочисленных связей и отношений, мешающих увидеть наиболее важные характеристики, интересующие исследователя.

На теоретическом уровне исследования, важное значение приобретают **идеализация** и мысленный эксперимент. Идеальный объект – это основа для проведения теоретического эксперимента, который готовится и проводится по аналогии с эмпирическим, в ходе которого объект исследования превращается в идеализированный предмет. Теоретический или, как его еще называют, мнимый эксперимент – это создание исследователем с помощью мысленных операций идеального объекта, который в дальнейшей работе должен сравниваться с действительностью и дает возможность предсказать те ситуации, которые могут иметь место в реальном эксперименте.

Воображаемый эксперимент – это теоретическая модель реальной экспериментальной ситуации, но, в отличие от реального эксперимента, здесь исследователь оперирует не реальными предметами и условиями, а их воображаемыми образами. Этот метод, как правило, используется на этапе планирования и осознания экспериментальной работы. Результатом применения метода мысленного эксперимента может стать создание модели или структуры изучаемого явления.

Еще одним методом теоретического уровня исследования, который часто используется учеными, является **классификация**. Этот метод способствует определению уровня однородности изучаемых элементов. Как правило, он используется на начальных стадиях исследования, с целью упорядочения и классификации изучаемых явлений.

Недостатками теоретических методов является то, что они не оказывают непосредственного влияния на явления и процессы, за которыми наблюдает ученый. Однако они позволяют выявить общие черты, повторяющиеся процессы, взаимодействие отдельных составляющих, скрытые закономерности. Знания, выявляемые с помощью теоретических методов исследования – это теоретические знания, объективность которых проверяется не эмпирическим путем, а с помощью доказательства.

Теоретический уровень зависит от мировосприятия исследователя, ведь под каким углом зрения будет рассматриваться исследуемый объект, на какие факторы будет акцентироваться внимание и т.д. находится в прямой зависимости от приобретенного личностного опыта исследователя. Этот уровень выстраивается целенаправленно для того, чтобы объяснить объективную реальность и его основной целью является описание, систематизация и объяснение многих фактов, предоставленных исследователю практикой жизни.

Эмпирическое исследование. Наблюдение – система фиксации и регистрации свойств, связей объекта исследования и предварительная классификация полученных фактов. Наблюдение как метод познания, позволяет получить первичную информацию об объекте исследования в виде совокупности эмпирических утверждений. При благоприятных условиях этот метод обеспечивает достаточно разностороннюю информацию для накопления и фиксации научных фактов, которые могут стать основой будущих теоретических и практических действий. Но для этого наблюдение должно быть:

– спланированным, согласно четко поставленным задачам;

– целенаправленным только на те явления и процессы, которые являются целью исследования;

– систематическим, то есть наблюдение за исследуемым явлением должно быть постоянным, фиксация полученных данных происходит по определенной системе;

– активным в отношении исследователя, находящегося в поиске проявлений нужных черт и явлений.

Целью наблюдения является не только восприятие явлений на чувственном уровне, но прежде всего. осознание выявленных фактов. Результатом наблюдения должен стать анализ приобретенного фактического материала, установление взаимосвязей между фактами и высказывание предположений. Наблюдение может быть направлено на изучение динамики процесса, изменений объекта в течение определенного времени. Такое наблюдение осуществляется в разные сроки, а полученные результаты сравниваются. Наблюдая за тем или иным явлением, исследователь может ошибаться (воздействие случайных факторов, ошибка при снятии показаний измерительных приборов и др.), поэтому результаты наблюдения не являются достоверными знаниями. Поэтому основой научного знания являются не данные, полученные в процессе наблюдения, а эмпирические факты.

Тестирование – метод диагностики, использующий стандартизированные вопросы или задачи, подчиненные определенной шкале оценки. Поэтому выбирая этот метод следует учитывать, что:

– выбор теста определяется, во-первых, целью тестирования; во-вторых, степенью его надежности и достоверности;

– интерпретация результатов тестирования определяется системой теоретических допущений и шкалой оценивания по предмету исследования;

– проведение тестирования должно происходить согласно предоставленной инструкции.

Измерение – представляет собой систему фиксации и регистрации количественных характеристик изучаемого объекта. Метод измерения находит отражение в математическом воспроизведении количественных и качественных характеристик объекта в процессе проведения эксперимента. Ценность этого метода состоит в том, что он дает точные количественные показатели объекта изучения.

3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ИССЛЕДОВАНИЯХ

Решение задач математическим методом состоит в создании математической модели. Математическая формулировка задачи может быть представлена в виде чисел, геометрического образа, функций, систем уравнений и т.п. Описание объекта может быть представлено с помощью непрерывной или дискретной, детерминированной или статистической функции или другими математическими формами. Математическая модель – это система математических отношений, формул, функций, уравнений, системы уравнений, описание тех или иных сторон объекта, явления или процесса.

Первый этап математического моделирования – постановка задачи, определение объекта и цели моделирования. Следующий этап – установление пределов области воздействия изучаемого объекта. Затем следует выбор типа математической модели. При этом устанавливается: линейность или нелинейность, динамичность или статичность, стационарность или нестационарность, а также степень детерминированности объекта или процесса (*детерминированность – свойство алгоритма, предусматривающее, что в нем все указания должны быть четкими и однозначными: значения величин, получаемые в конкретный момент времени, должны определяться, значениями величин, полученными в предыдущие моменты времени*).

Линейность устанавливается по характеру статической характеристики изучаемого объекта. Статическая характеристика – это связь между величиной внешнего воздействия на объект и максимальной величиной его реакции на внешнее действие. Выходная характеристика системы – изменение выходного сигнала системы во времени. Нелинейность статической характеристики и наличие запаздывания внешнего действия – признаки нелинейности объекта.

Применение линейной модели позволяет использовать принципы суперпозиции. Этот принцип утверждает, что, когда на систему действует несколько входных сигналов, каждый из них фильтруется системой так, словно никакие другие сигналы на нее не действуют.

Динамичность или статичность осуществляется в соответствии с анализом состояния объекта во времени. Может оказаться, что при малых промежутках времени объект является статическим, а при больших – динамическим, то есть одно состояние переходит в другое. Поэтому важен выбор отрезков времени, в течение которых выполняется измерение. При выборе типа модели вероятностного объекта важно установить его стационарность. О стационарности или нестационарности вероятностных объектов судят по изменению во времени параметров закона распределения случайных величин. При описании квазидетерминированных объектов может использоваться теория дифференциальных уравнений с коэффициентами соответствующими определенным законам.

Цель и задачи, которые ставят при математическом моделировании, играют довольно большую роль при выборе типа модели. Практические задачи требуют простого математического аппарата, а фундаментальные – более сложного, допускают прохождение иерархических математических моделей, начиная от чистофункциональных и заканчивая моделями, использующими твердоустановленные закономерности и структурные параметры. При выборе модели нужно учесть анализ обзора результатов исследований других авторов. Этот анализ позволяет установить непрерывность или дискретность изучаемого показателя и объекта в целом. В непрерывных объектах все сигналы представляют собой непрерывную функцию времени. В дискретных объектах все сигналы квантуются во времени и по амплитуде.

Установка непрерывности объекта позволит использовать для его моделирования дифференциальные уравнения. Дискретность объекта позволяет использовать для математического моделирования теории автоматов.

Для описания сложных объектов с большим количеством параметров возможно разбиение объектов на отдельные элементы, между которыми устанавливаются связи на разных уровнях иерархий. Особое место на этапе выбора типа математической модели занимает описание преобразования входных сигналов в выходные характеристики объекта.

Выбор типа модели динамического объекта сводится к сложным дифференциальным уравнениям. Модель динамического объекта может быть построена и в классе алгебраических функций. Однако такой подход ограничен, поэтому для полноты модели предпочтение следует отдавать моделям, построенным в классе дифференциальных уравнений.

Если исследуемые переменные являются лишь функциями времени, то для моделирования используются обычные дифференциальные уравнения, если переменные являются функциями пространственных координат, то для описания таких объектов необходимо пользоваться уравнениями в частных производных. Методология моделирования динамических систем в классе дифференциальных уравнений существенно зависит от схемы взаимодействия объекта со средой и степени знания входа и выхода объекта.

При отсутствии априорной информации о входах и выходах объекта дифференциальные уравнения, моделирующие динамику объекта, составляются на основе предположений или знаний о свойствах и структуре объекта. Универсального способа составления дифференциального уравнения нет, можно только употреблять некие общие подходы к составлению уравнений первого порядка. Геометрические или физические задачи приводят к одному из трех видов уравнений:

– дифференциальное уравнение в дифференциалах,
– дифференциальное уравнение в производных,
– простые интегральные уравнения с последующим превращением их в дифференциальные уравнения.

Чтобы получить из множества возможных решений одно, удовлетворяющее только изучаемому процессу, необходимо задать дополнительные условия дифференциального уравнения. Условия, раскрывающие все особенности данного уравнения, называют условиями однозначности. Они характеризуются следующими признаками: геометрией системы (форма и размеры тела), физическими свойствами тела (теплопроводность, влажная проводимость, упругость и т.д.), начальными условиями, т.е. состоянием системы в начальный момент, предельными условиями, т.е. условиями взаимодействия системы на границе с окружающей средой. Начальные и граничные условия называют краевыми.

Процесс выбора математической модели объекта заканчивается предварительным контролем. При этом осуществляются следующие виды контроля: размерностей, порядков, характера зависимостей, экстремальных ситуаций, граничных условий, математической замкнутости, физического содержания, устойчивости модели.

Контроль размерностей сводится к проверке выполнения правила, согласно которому можно приравнивать и суммировать величины одинаковой размерности.

Контроль порядков, направлен на упрощение модели. При этом определяется порядок суммирования величин, а явно малые слагаемые отбрасываются.

Контроль характера зависимостей сводится к проверке направления и скорости смены одних величин при смене других. Направление и скорость, вытекающие из математической модели, должны соответствовать физическому содержанию задачи.

Контроль экстремальных ситуаций сводится к проверке наглядного содержания решения при приближении параметров модели к нулю или бесконечности.

Контроль граничных условий состоит в том, что проверяется соответствие математической модели предельным условиям, вытекающим из содержания задачи. При этом проверяется, действительно ли граничные условия поставлены и учтены при построении искомой функции и что функция на самом деле удовлетворяет этому условию.

Контроль математической замкнутости сводится к проверке того, что математическая модель дает однозначное решение.

Контроль устойчивости модели состоит в проверке того, что изменения исходных данных в рамках существующих данных о реальном объекте, не приведут к существенному изменению решения.

Вторым этапом решения задач математическими методами является выбор метода исследования модели. При выборе метода руководствуются принципом соответствия внешнего и внутреннего правдоподобия, который аналогичен известному правилу приближенных вычислений: степень точности вычислений должна соответствовать степени точности исходных данных, выбор метода исследования тем эффективнее, чем больше сведений о конечном решении задачи. Такие сведения могут быть получены путём прикладных исследований модели или ее элементов.

Знание качественных и количественных характеристик искомого решения помогает при выборе точности исследования. В случае трудностей с аналитическими решениями используются приближенные методы: графический метод, метод хорд, метод касательных, метод итераций. Аналитические методы, как правило, позволяют успешно решать только относительно простые задачи. Вместе с тем все чаще возникает необходимость использования сложных дифференциальных уравнений или их систем со сложными начальными и предельными условиями. Их решение весьма сложно.

4. ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

Оптимизация (optimus – наилучший) – выбор решения, обеспечивающего наилучшие результаты функционирования системы. Система, для которой показатель ее качества имеет экстремальное значение (минимум или максимум), является оптимальной. Математические методы оптимизации служат основным инструментом теории принятия решений и исследования операций.

Критерий оценки достижения поставленной цели называют **показателем эффективности**, критерием оптимальности или оптимизации. Совокупность параметров системы, при которых обеспечивается экстремум критерия оптимизации, называют оптимальными параметрами.

Целевая функция – зависимость критерия оптимизации от независимых переменных (параметров) задачи.

Правильной постановкой задачи оптимизации является требование достижения максимума (минимума) одного критерия при ограничениях на значения остальных параметров, последнее служит необходимым условием задачи оптимизации. В качестве достаточного условия задачи оптимизации нужно, во-первых, располагать ресурсами оптимизации. Это значит, что объект оптимизации должен обладать определенными степенями свободы, т.е. управляющими воздействиями, за счет которых можно менять его состояние. Во-вторых, объект оптимизации должен иметь количественную оценку (критерий оптимизации). Примером неправильной постановки задачи оптимизации может служить требование одновременного достижения нескольких противоречивых максимумов.

Оптимизация процессов горного производства может быть направлена на получение наиболее дешевого продукта или продукции с высокими показателями качества, наилучшими условиями охраны труда и санитарии, охраны окружающей среды при комплексном использовании полезного ископаемого. Однако не любая выходная величина может служить критерием оптимизации. Критерий обладает следующими **свойствами**: оценивается числом; показатели количества и качества процесса изменяются монотонно (за исключением особых случаев, когда критерий принимает лишь два значения – 0 и 1) по следующему закону – чем больше, тем лучше, или наоборот.

Критерием не может быть величина, значение которой должно иметь некоторый зафиксированный уровень, отклонения от которого в ту или иную сторону недопустимы по физическому или технологическому содержанию процесса.

Выходных показателей процесса, удовлетворяющих перечисленным условиям, обычно несколько. Трудность состоит в выборе главного и наиболее важного показателя – критерия оптимизации. В тех случаях, когда имеет место многокритериальная задача, а таких задач большинство, существуют особые методы их решения. Главная проблема решения многокритериальной задачи – сведение ее к однокритериальной, так как, в принципе, одновременно достичь экстремальных значений нескольких критериев нельзя. Неправильно требовать, например, минимума затрат на добычу полезного ископаемого при минимуме энергоемкости и трудоемкости.

Процесс решения любой задачи на основе оптимизационной модели можно разделить на следующие этапы:

– постановка задачи;
– составление математической оптимизационной модели;
– выбор метода и разработка алгоритма решения;
– подготовка информации и вычисление оптимального решения;
– анализ и проверка полученного решения;
– разработка рекомендаций по использованию результатов.

Выделение этих этапов в известной мере условно, так как они теснейшим образом связаны между собой. Например, при составлении математической модели нередко приходится уточнять постановку задачи и постоянно иметь в виду возможность использования того или иного стандартного метода поиска оптимального решения. Но тем не менее, каждый из этих этапов имеет свои начальные условия, результат и определенную методику.

Результатом этапа постановки является формально записанная задача с полностью определенной целью операции. Напомним, что цель операции содержит критерии оптимальности и граничные условия.

Для достижения этого результата необходимо: уяснить и словесно сформулировать задачу; выбрать критерии оптимальности; установить граничные условия; формально записать задачу и утвердить эту постановку.

В процессе уяснения и словесного описания задачи необходимо ответить на следующие вопросы.

Какой результат ожидается получить?

Чем его измерить?

Какие средства отпускаются для достижения результата, их источники?

Какими показателями измеряются эти средства?

Какой эффект ожидается получить и за счет чего?

Чем можно измерить эффект?

5. ПРИНЯТИЕ СТРАТЕГИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Линейное программирование – вид математического моделирования, который служит для поиска оптимального варианта распределения ограниченных ресурсов между конкурирующими работами. Оно получило развитие после Второй мировой войны, и область его применения расширилась параллельно с развитием компьютерной индустрии, поскольку его практическое применение требует больших вычислительных мощностей. Любая экономическая задача, связанная с максимизацией или минимизацией (то есть оптимизацией) линейной целевой функции и выраженная в форме комплекса линейных неравенств (например, ограничений по рабочей силе, материалам, капиталу или другим ресурсам), будет задачей линейного программирования.

Линейное программирование с большим успехом используется для решения многих задач:

1. Определение набора продуктов, соответствующих данным ограничениям при минимальных затратах (например, задачи по составлению марочной смеси горючего или набора продуктов питания, отвечающих определенным диетическим требованиям.

2. Определение оптимальных производственных линий и производственных процессов (например, задачи, в которых действуют ограничения на производственные мощности (размер завода или на машинное время) и где принимаются решения о выпуске продукции при наличии ограничений на ресурсы).

3. Определение оптимальных маршрутов перевозок (например, производственные предприятия и склады, расположены вдали друг от друга и руководство компании стремиться минимизировать свои затраты на перевозки продукции с места производства на склад).

Возможность ошибок уменьшается, если данные сводятся в удобную для работы форму.

Пример

Химический завод получил заказ на производство 50000 т специальной смеси из трех компонентов, состав которой имеет следующие ограничения:

компонент 1: 1000 руб. за т, не больше 15000 т; (1)

компонент 2: 1200 руб. за т, не менее 7500 т; (2)

компонент 3: 1400 руб. за т, не менее 10000 т. (3)

Нужно определить: какое количество каждого компонента должно использоваться для минимизации стоимости продукта?

Форма постановки такой задачи выглядит следующим образом:

Пусть x_1= количество т компонента 1;

x_2= количество т компонента 2;

x_3= количество т компонента 3.

Нужно минимизировать

$$Z=1000\,x_1+1200\,x_2+1400\,x_3 \quad (4)$$

при условии, что

$$x_1+x_2+x_3\geq 50000; \tag{5}$$
$$x_1\leq 15000; \tag{6}$$
$$x_2\geq 7500; \tag{7}$$
$$x_3\geq 10000; \tag{8}$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3\geq 0. \tag{9}$$

Уравнения (1), (2) и (3) определяют переменные x_1, x_2, x_3 в пределах количества компонентов 1, 2 и 3 вида соответственно. Эти количества, конечно, не могут быть меньше нуля. Уравнение (4) утверждает, что цель данной задачи состоит в минимизации стоимости набора компонентов. (Стоимость компонента высчитывается путем умножения его количества на стоимость его единицы. Суммируя стоимость всех компонентов, получаем полную стоимость набора.) Уравнение (5) указывает, что полный вес смеси должен быть не менее 50000 т. Уравнение (6) утверждает, что должно быть использовано не более 15000 т компонента 1. Уравнение (7) устанавливает, что должно быть использовано не менее 7500 т компонента 2. Уравнение (8) утверждает, что должно быть использовано не менее 10000 т компонента 3. Уравнение (9) формально утверждает, что эти переменные будут положительными.

Приведенная постановка задачи соответствует формату, заложенному в пакете приложений ЭВМ для решения задач линейного программирования. После ввода данные обрабатываются компьютерной программой, результатом использования которой является решение задачи. Для нашей задачи решением являются следующие величины:

$$x_1=15000,\ x_2=25000,\ x_3=10000.$$

Линейное программирование может быть использовано только для решения задач, имеющих все четыре представленные ниже характеристики:

- комплекс неотрицательных независимых переменных;
- одна и только одна цель, являющаяся функцией переменных (например, минимизация затрат или максимизация прибыли);
- наличие ограничений, накладывающих границы на достижение цели. Обычно они имеют вид верхнего или нижнего предела для системы переменных;
- линейный характер количественных соотношений.

В приведенном примере есть три переменных, так что задача должна быть решена симплексным методом. Симплексный метод может быть также использован для решения задачи вручную, однако он лучше подходит для постановки решения задачи на ЭВМ. Если есть только две переменные, можно использовать графический метод.

6. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Графический метод практически не используется для решения реальных задач линейного программирования, однако очень полезен для объяснения базовых концепций, методов и элементарной геометрии линейного программирования.

Графически легко решаются задачи с одной или двумя оптимизируемыми переменными. В этом случае решение сводится к построению и анализу точек пересечения ряда линий на плоскости. Задачи с тремя переменными требуют изображения и анализа линий пересечения поверхностей в трехмерном пространстве, что весьма сложно с графической точки зрения, а большее число переменных делает задачу графически неразрешимой.

Графическое решение включает следующие операции:

- в прямоугольных координатах, соответствующих оптимизируемым переменным, строят области решений всех ограничений;
- определяют пересечение областей решения всех ограничений, которое представляет собой множество допустимых решений задачи;
- строят ряд линий равного уровня целевой функции, покрывающих область допустимых решений;
- по линиям уровня находят точку оптимума целевой функции на области допустимых решений.

Пример

Предприятие «Эмульсол» специализируется на изготовлении двух видов эмульсий (Э1 и Э2) для гидрокрепей, применяемых в очистных забоях угольных шахт. Для производства 1 м^3 Э1 требуется 4 кг специальной присадки и 1 час работы, а реализация этой эмульсии приносит 4 тыс. у.е. прибыли. Для производства 1 м^3 Э2 требуется 3 кг специальной присадки и 2 часа работы, а реализация этой эмульсии приносит 5 тыс. у.е. прибыли. Фирма имеет всего один комплекс оборудования для производства, который эксплуатируется по 40 часов в неделю. Допустимый расход присадки составляет 120 кг в неделю. Сколько эмульсии марки Э1 и Э2 нужно изготовить за неделю, чтобы максимизировать прибыль предприятия?

Решение:

Шаг 1. Определение переменных.

Пусть

x_1 – объем эмульсии Э1, производимой за день, м^3;

x_2 – объем эмульсии Э2, производимой за день, м^3.

Шаг 2. Определение целевой функции.

Каждый 1 м^3 эмульсии Э1 приносит 4 тыс. у.е. прибыли, а каждый 1 м^3 эмульсии Э2 – 5 тыс. у.е. Цель Z, заключающаяся в максимизации прибыли, выражается как

$$Z=4x_1+5x_2.$$

Шаг 3. Определение ограничений.

А) ограничение временем.

Изготавливая эмульсию, предприятие будет работать максимум 40 часов в неделю. Оно может работать меньше, но не больше. Каждый 1 м^3 эмульсии Э1 требует 1 часа работы, а каждый 1 м^3 эмульсии Э2 – 2 часа. Соответственно

$$x_1+2x_2\leq 40.$$

Б) ограничение материалами.

Предприятие имеет максимум 120 кг присадки в неделю, что тратится на производство как эмульсии Э1, так и эмульсии Э2. Каждый 1 м^3 эмульсии Э1 нуждается в 4 кг присадки, а каждый 1 м^3 эмульсии Э2 – в 3 кг. Соответственно

$$4x_1+3x_2\leq 120.$$

Шаг 4. Ввод ограничений на значение переменных.

Физически невозможно произвести отрицательное количество эмульсии марки Э1 и Э2.

Соответственно

$$x_1,\ x_2\geq 0.$$

Шаг 5. Построение осей графика.

Отметим горизонтальную ось x_1, а вертикальную ось – x_2. Эти оси определяют пределы неотрицательных ограничений. Все точки, лежащие выше горизонтальной оси и справа от вертикальной оси, будут удовлетворять этим ограничениям.

Ограничение временем выражается неравенством $x_1+2x_2\leq 40$. Если x_2=0, то $x_1\leq$40 и x_1=40 дает точку пересечения с осью X. Если x_1=0, то $x_2\leq$20 и x_2=20 дает точку пересечения с осью Y. Тогда линия $x_1+2x_2=40$, проведенная между двумя этими точками пересечения, даст верхний предел затемненной области (рис. 6.1). Все точки, лежащие в данной области, включая точки на этой линии, будут удовлетворять ограничению по времени.

Рис. 6.1 – Ограничение временем

Ограничение материалами выражается неравенством $4x_1+3x_2\leq 120$. Если x_2=0, то $x_1\leq$30 и x_1=30 дает точку пересечения с осью X. Если x_1=0, то $x_2\leq$40 и x_2=40 дает точку пересечения с осью Y. Мы проводим линию $4x_1+3x_2=120$ между этими точками пересечения (рис. 6.2). Линия ограничения по материалам пересекает линию ограничения по времени в точке с координатами (24; 8), а затемненная площадь называется областью допустимых решений.

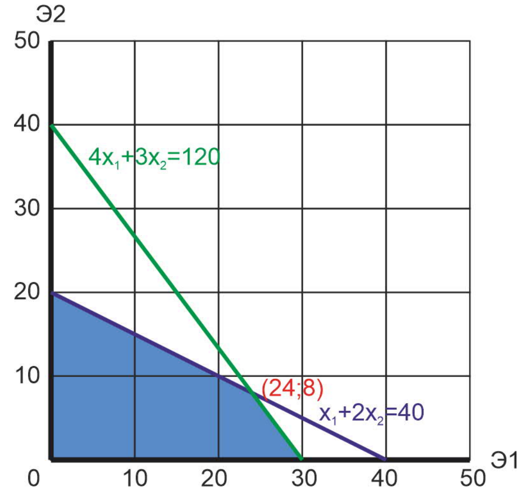

Рис. 6.2 – Область допустимых решений, удовлетворяющая всем ограничениям

Эти координаты можно найти, решив одновременно два уравнения:

$x_1+2x_2=40$ и $4x_1+3x_2=120$ $x_1=24$, $x_2=8$.

Очевидно, что существует огромное количество комбинаций, удовлетворяющих всем ограничениям: фактически их число бесконечно, в связи с чем нет необходимости рассматривать любую из возможных комбинаций внутри затемненной области, поскольку оптимальное решение нужно искать в одном из углов или в крайних точках.

На рис. 6.3 проиллюстрирован базовый принцип решения задач линейного программирования: проводя параллельные линии, выражающие разные уровни целевой функции $Z=4x_1+5x_2$, мы получим решение в углу области допустимых решений.

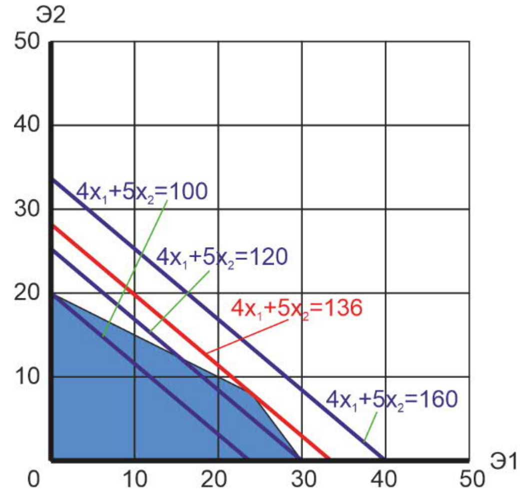

Рис. 6.3 – Разные уровни целевой функции

В начале координат все ограничения будут удовлетворены, но значение целевой функции будет равно нулю. По мере параллельного движения целевой функции с начала координат прибыли увеличиваются. В точке (0; 20) все ограничения будут удовлетворены, а прибыль составит 100 тыс. у.е. Она может быть повышена при переходе к точке (30; 0). Здесь все ограничения также будут удовлетворены, а прибыль составит 120 тыс. у.е. Это решение еще не будет оптимальным, поскольку прибыль можно увеличить, если перейти в точку (24; 8), где пересекаются две линии ограничений. Здесь прибыль составит 136 тыс. у.е. и будет максимальной. Если мы удалимся от начала координат, то ограничения больше не будут удовлетворяться, то есть ни одна часть линии целевой функции не будет лежать в области допустимых решений. Это показывает линия $4x_1+5x_2=160$.

Следует отметить, что задача линейного программирования не обязательно имеет единое решение. Если целевая функция будет параллельна одной из границ ограничений, то любая точка на этом пределе будет оптимальной, давая бесконечное число решений. Вторым предельным случаем может быть отсутствие решения задачи в сформулированном виде. Так, например, если задано минимальное количество единиц выпускаемой продукции, а ресурсное ограничение недостаточно для производства такого минимального количества, то задача не будет иметь решения. Симплексный метод, как будет показано далее, дает способ выявления задач, не имеющих решения или имеющих бесконечное количество решений.

7. РЕШЕНИЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ СИМПЛЕКСНЫМ МЕТОДОМ

Симплексный метод (симплекс-метод) – это вычислительная процедура, основанная на принципе последовательного улучшения решений при переходе от одной базисной точки (базисного решения) к другой. При этом значение целевой функции улучшается.

Количественное решение задачи линейного программирования симплексным методом вручную или на ЭВМ имеет два главных преимущества:

• позволяет получить решение задачи с тремя и более переменными, так как метод не ограничен трехмерным пространством;

• значения дополнительных переменных в конечной форме уравнения дают очень важную информацию для принятия решения.

Поскольку методика решения задачи не зависит от количества переменных в ней, для объяснения симплексного метода мы используем модель с двумя переменными, решенную ранее графически. Для этого мы внесем небольшие изменения в постановку неотрицательных ограничений.

Цель: максимизировать $Z=4x_1+5x_2$ при условии $x_1+2x_2\le 40$; $4x_1+3x_2\le 120$;

$$x_1+0x_2\ge 0$$

$$0x_1+x_2\ge 0$$

Первый шаг в решении этой задачи состоит в том, чтобы превратить неравенства в уравнение. Эта трансформация достигается за счет введения дополнительных неотрицательных переменных, предназначенных для того, чтобы перекрыть разницу между неравенством и уравнением, вводя дополнения в неравенство. Если данное ограничение определяет верхний предел (знаком неравенства будет «≤»), то каждая такая дополнительная переменная представляет собой количество используемого ресурса, которое не использовано и вводится с коэффициентом *+1*. Если такое ограничение определяет нижний предел (знаком неравенства будет «≥»), то каждая дополнительная переменная будет представлять величину, на которую использование имеющегося ресурса может превысить ограничение, и она вводится с коэффициентом *-1*. В нашем примере нижний предел выражается исключительно неотрицательными ограничениями, соответственно ввод дополнительных переменных дает следующую конструкцию:

$$x_1+2x_2+s_1=40;$$

$$4x_1+3x_2+s_2=120;$$

$$x_1+0x_2-s_3=0;$$

$$0x_1+x_2-s_4=0.$$

Для решения задачи симплексным методом требуется каноническое построение матрицы дополнительных переменных $n\times n$, где n равно количеству ограничений. Каноническое построение матрицы имеет место, когда каждое число главной диагонали матрицы $n\times n$ равно $+1$. В нашем случае мы имеем для дополнительных переменных матрицу 4×4, но она не будет канонической, поскольку два ее коэффициента будут отрицательными.

Решение задачи состоит в том, чтобы каждому из таких уравнений добавить искусственную переменную с коэффициентом *+1*:

$$x_1+2x_2+s_1=40;$$
$$4x_1+3x_2+s_2=120;$$
$$x_1+0x_2-s_3+A_1=0;$$
$$0x_1+x_2-s_4+A_2=0.$$

Теперь у нас есть каноническое построение. Кроме матрицы ограничений, искусственные переменные вводятся также в целевую функцию с очень большим коэффициентом M. Если мы максимизируем функцию, то этот большой коэффициент M берется со знаком «минус», если минимизируем, то со знаком «плюс». Так модифицированная целевая функция приобретает вид

$$Z=4x_1+5x_2-MA_1-MA_2.$$

Теперь мы имеем неопределенную систему из четырех уравнений с восемью неизвестными: x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4, A_1, A_2. Разница между количеством переменных и количеством уравнений делает их однозначное решение невозможным. Выполняемый вручную или с использованием ЭВМ симплексный метод дает решение задачи для n переменных, где n равно количеству ограничений. Каждый раз набор этих переменных изменяется за счет замены одной переменной другой. Этот процесс называется **итерацией**. На каждой итерации мы получаем базисно допустимое решение, то есть такое решение, удовлетворяющее всем ограничениям и требованию, что число базисных переменных не должно превышать числа ограничений. Симплексный метод изменяет базисные допустимые решения за счет ряда операций по строкам в табличном формате. Для того чтобы начать решение симплексным методом, присвоим нулевые значения функциональным переменным x_i, чтобы получить начальное базисно допустимое решение. Первоначальная таблица (итерация 0) имеет вид, представленный в табл. 6.1.

Таблица 6.1 – Начальная симплексная таблица (итерация 0)

	C_j	4	5	0	0	0	0	$-M$	$-M$		
C_b	Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	A_1	A_2	b_i	b_i/a_{ie}
0	s_1	1	2	1	0	0	0	0	0	40	
0	s_2	4	3	0	1	0	0	0	0	120	
$-M$	A_1	1	0	0	0	-1	0	1	0	0	
$-M$	A_2	0	1	0	0	0	-1	0	1	0	
	Z_j	$-M$	$-M$	0	0	M	M	$-M$	$-M$	0	
	C_j-Z_j	$M+4$	$M+5$	0	0	$-M$	$-M$	0	0		

Вторая строка содержит заголовки столбцов, включая все переменные задачи. Строка C_j содержит коэффициенты переменных целевой функции. Они остаются постоянными во всех итерациях. Коэффициенты переменных ограничений показаны в ячейках матрицы $n\times m$, где n равно числу ограничений (четыре в нашем случае), а m равно общему числу переменных, включая функциональные переменные, дополнительные переменные и искусственные переменные (восемь столбцов в нашем случае). Каждую ячейку матрицы можно обозначить как a_{ij}, где индекс i относится к строке, а j указывает столбец. Правую границу матрицы составляет столбец, обозначенный как b_i. Он содержит правые части ограничений. Назначение столбца, обозначенного как b_i/a_{ie}, будет пояснено позже.

Столбец «базис» показывает, какие базовые переменные входят в текущее базовое допустимое решение. Каждая базовая переменная в своем столбце будет иметь коэффициент *1*. Слева от столбца «базис» находится столбец C_b, куда введены коэффициенты входящих в целевую функцию базисных переменных. Дополнительные переменные включаются в целевую функцию с нулевыми коэффициентами, искусственные переменные – с коэффициентами плюс или минус M в зависимости от того, будем ли мы максимизировать или минимизировать целевую функцию. В этом случае мы ее максимизируем, так что знаком будет минус.

Каждая ячейка строки Z_j содержит изменения в целевой функции в результате ввода одной переменной, указанной в заголовке столбца. Таким образом,

$$Z_j = \sum_{i=1}^{n} C_b a_{ij} .$$

В исходной таблице Z_1 вычисляется как $0(1)+0(4)+(-M)(1)+(-M)(0)=-M$; Z_2 вычисляется как $0(2)+0(3)+(-M)(0)+(-M)(1)=-M$. Остальные столбцы, включая столбец b_i, вычисляются аналогично. Значение Z в столбце b_i дает текущее значение целевой функции. В исходной таблице это значение равно нулю, поскольку все функциональные переменные приравнены к нему.

Строка C_j-Z_j содержит критерии оптимального решения. Если мы максимизируем целевую функцию, то решение будет оптимальным, когда все C_j-Z_j будут нулевыми или отрицательными, а если минимизируем, то решение будет оптимальным, когда все C_j-Z_j будут нулевыми или положительными. В данном случае мы максимизируем функцию, и в строке C_j-Z_j присутствуют два положительных элемента. Это значит, что мы не вышли на оптимум и потому должны выбрать новый базис.

Выбор нового базиса. Переход к новому базису осуществляется путем замены определенной базовой переменной некоторой небазисной, при этом одна переменная вводится в базис, а другая выводится из него. Сначала выбирается вводимая переменная, и это должна быть та, которая быстрее всего наращивает значение Z. Ее определяет наибольшее положительное число в строке C_j-Z_j. В нашем примере она будет находиться в столбце x_2, как это было отмечено вертикальной стрелкой в матрице, представленной в табл. 2.2.

Величина, на которую может быть увеличена Z при введении переменной, ограничена значением выводимой переменной, которая может быть уменьшена до нуля, но не может стать отрицательной. Граница прироста от вводимой переменной будет равна отношению b_i к коэффициенту вводимой переменной a_{ie}, где индекс e указывает на столбец вводимой переменной. Это выражение называется *min*-отношением. Если a_{ie} равно нулю, то *min*-отношение будет стремиться к бесконечности. Если a_{ie} отрицательное, то *min*-отношение также будет отрицательным или нулевым, в зависимости от значения b_i. В любом из этих случаев оно не определяет вводимую переменную. Для каждой строчки существует одно min-отношение. Для данного примера min-отношение помещено в столбец b_i/a_{ie}, как показано в матрице, представленной в табл. 6.2, однако оно может не входить в распечатку, полученную в результате использования компьютерной программы.

Таблица 6.2 – Выбор вводимых и выводимых переменных

	C_j	4	5	0	0	0	0	$-M$	$-M$		
C_b	Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	A_1	A_2	b_i	b_i/a_{ie}
0	s_1	1	2	1	0	0	0	0	0	40	20
0	s_2	4	3	0	1	0	0	0	0	120	40
$-M$	A_1	1	0	0	0	-1	0	1	0	0	∞
$-M$	A_2	0	**1**	0	0	0	-1	0	1	0	$\leftarrow 0$
	Z_j	$-M$	$-M$	0	0	M	M	$-M$	$-M$	0	
	C_j-Z_j	$M+4$	$M+5$	0	0	$-M$	$-M$	0	0		

Выводимая переменная определяется наименьшей положительной величиной min-отношения. В нашем примере это будет A_2, что показано горизонтальной стрелкой. Этот элемент, лежащий на пересечении столбца x_2 со строкой A_2, называется направляющим элементом. Поскольку мы хотим ввести переменную x_2 в базис, направляющий элемент должен измениться до единицы. Это осуществляется путём деления всех элементов строки (в нашем случае это четвертая строка) на значение направляющего элемента. Все остальные элементы в столбце направляющего элемента должны быть сведены к нулю с помощью операций над строками, выполняемыми в следующем порядке.

В строке s_1 значение коэффициента при x_2 равно 2. Поэтому каждый элемент новой строки x_2 (получившийся путем деления на значение направляющего элемента) умножаем на 2 и полученное значение высчитываем из соответствующего элемента строки s_1. Для других строк делаем аналогично, только вместо умножения на 2 делаем умножение соответственно на 3 и 0.

Таким же образом вычисляются и значения столбца b_i.

В строке A_1 значение коэффициента при x_2 уже равно нулю, так что нам нет необходимости вводить какие-либо изменения при решении задачи вручную. Компьютер, конечно, выполнит умножение новой строки x_2 на 0 и вычтет полученное значение от строки A_1.

Новая таблица, полученная в результате таких операций над строками, показана в матрице, представленной в табл. 6.3. Эта таблица показывает, что значение C_b для строки x_2 равно 5. Это будет коэффициентом при x_2 в целевой функции. Он используется для вычисления новых значений строк Z_j и C_j-Z_j. Столбец b_i показывает, что Z остается равным нулю, что означает отсутствие увеличения целевой функции.

Таблица 6.3 – Таблица после первой итерации

	C_j	4	5	0	0	0	0	$-M$	$-M$		
C_b	Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	A_1	A_2	b_i	b_i/a_{ie}
0	s_1	1	0	1	0	0	2	0	-2	40	40
0	s_2	4	0	0	1	0	3	0	-3	120	30
$-M$	A_1	**1**	0	0	0	-1	0	1	0	0	←0
5	x_2	0	1	0	0	0	-1	0	1	0	∞
	Z_j	$-M$	5	0	0	M	-5	$-M$	5	0	
	C_j-Z_j	$M+4$	0	0	0	$-M$	5	0	$-M-5$		
		↑									

Вертикальная стрелка (↑) указывает на x_1 как на вводимую переменную для последующей итерации, поскольку она имеет наибольшее значение в строке C_j-Z_j. Вычислив *min*-отношение, получим выводимую переменную: A_1. Направляющий элемент снова равен единице. После второй итерации получим матрицу, представленную в табл. 6.4.

Таблица 6.4 – Таблица после второй итерации

	C_j	4	5	0	0	0	0	$-M$	$-M$		
C_b	Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	A_1	A_2	b_i	b_i/a_{ie}
0	s_1	0	0	1	0	1	**2**	-1	-2	40	←20
0	s_2	0	0	0	1	4	3	-4	-3	120	40
4	x_1	1	0	0	0	-1	0	1	0	0	∞
5	x_2	0	1	0	0	0	-1	0	1	0	-0
	Z_j	4	5	0	0	-4	-5	4	5	0	
	C_j-Z_j	0	0	0	0	4	5	$-M-4$	$-M-5$		
							↑				

Для третьей итерации вводится s_4 и выводится s_1. Результат этой итерации показан в матрице, представленной в табл. 6.5.

Таблица 6.5 – Таблица после третьей итерации

	C_j	4	5	0	0	0	0	$-M$	$-M$		
C_b	Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	A_1	A_2	b_i	b_i/a_{ie}
0	s_4	0	0	0,5	0	0,5	1	-0,5	-1	20	40
0	s_2	0	0	-1,5	1	**2,5**	0	-2,5	0	60	←24
4	x_1	1	0	0	0	-1	0	1	0	0	-0
5	x_2	0	1	0,5	0	0,5	0	-0,5	0	20	40
	Z_j	4	5	2,5	0	-1,5	0	1,5	0	100	
	C_j-Z_j	0	0	-2,5	0	1,5	0	$-M-1{,}5$	$-M$		
						↑					

На следующей итерации вводится s_3 и выводится s_2. Ее результат показан в матрице, представленной в табл. 6.6.

Поскольку все переменные в строке C_j-Z_j будут нулевыми или отрицательными, это означает, что получено оптимальное решение при значении Z, равном 136. Значение базисных переменных в оптимальном решении можно найти в столбце b_i. Значения других небазисных переменных в оптимальном решении будут равны нулю. Соответственно решением будет $[x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4, A_1, A_2]$=[24, 8, 0, 0, 24, 8, 0, 0]. Из этого следует, что все имеющиеся ресурсы времени и присадки будут израсходованы для производства 24 м^3 эмульсии Э1 и 8 м^3 эмульсии Э2 и принесут общую прибыль – 136 тыс. у.е.

Таблица 6.6 – Таблица после четвертой итерации

	C_j	4	5	0	0	0	0	$-M$	$-M$		
C_b	Базис	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	A_1	A_2	b_i	b_i/a_{ie}
0	s_4	0	0	0,8	-0,2	0	1	0	-1	8	
0	s_3	0	0	-0,6	0,4	1	0	-1	0	24	
4	x_1	1	0	-0,6	0,4	0	0	0	0	24	
5	x_2	0	1	0,8	-0,2	0	0	0	0	8	
	Z_j	4	5	1,6	0,6	0	0	0	0	136	
	C_j-Z_j	0	0	-1,6	-0,6	0	0	$-M$	$-M$		

При решении задач симплексным методом могут возникнуть определенные затруднения.

Минимизация. Минимизация целевой функции эквивалентна максимизации ее отрицательных значений. К примеру, минимизация функции $Z=3x_1+5x_2$, эквивалентная максимизации функции $Z'=-3x_1-5x_2$. Есть два пути решения этого алгоритма, и любой из них может быть введен в компьютерную программу. Для этого необходимо:

1. Преобразовать критерии оптимальности таким образом, чтобы выбрать переменные, имеющие наибольшие отрицательные значения C_j-Z_j в качестве вводимых переменных, и закончить их ввод, когда все значения C_j-Z_j будут равны нулю или будут положительными. Значения C_j-Z_j наибольшие по модулю отрицательные значения, так как только в этом случае выбирается переменная, которая быстрее других уменьшает целевую функцию. В случае выбора наибольшего отрицательного значения результат будет противоположным.

2. Изменить целевую функцию с Z на Z', то есть превратить знак при C_j в противоположный и вести их расчет в обычном порядке.

Равенства. Затруднения с начальными ограничениями заключаются в том, что они уже равенства и, соответственно, уравнения не содержат дополнительных переменных.

В этом случае отсутствует очевидное базисное допустимое решение, с которого следует начинать решение задачи симплексным методом. Вывод будет тем же, что и тогда, когда неравенства имеют знак «≥», то есть в строку C_j добавляется искусственная переменная с коэффициентом *1* и в целевую функцию с коэффициентом $-M$, если она максимизируется, или $+M$, если она минимизируется.

8. НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Предположение о возможности описать зависимости между управляемыми переменными с помощью линейных функций далеко не всегда адекватно природе моделируемого объекта. Например, в повседневной жизни мы постоянно сталкиваемся с тем, что цена товара может зависеть от объема партии товара. Аналогичные замечания могут быть сделаны и по поводу технологических ограничений: расход определенных видов сырья и ресурсов происходит не линейно, а скачкообразно (в зависимости от объема производства). Попытки учесть эти факторы приводят к формулировке более общих и сложных оптимизационных задач. Изучение методов их решения составляет предмет научной области, получившей названия нелинейного программирования.

В отличие от задачи линейного программирования, в задаче программирования нелинейного оптимум не обязательно лежит на границе области, определенной ограничениями. Иначе говоря, задача состоит в выборе таких неотрицательных значений переменных, подчиненных системе ограничений в форме неравенств, при которых достигается максимум (или минимум) данной функции. При этом не оговариваются формы ни целевой функции, ни неравенств. Могут быть разные случаи:

- целевая функция нелинейная, а ограничения линейны;
- целевая функция линейна, а ограничения (хотя бы одно из них) нелинейные;
- и целевая функция, и ограничения нелинейные.

Задача нелинейного программирования встречается в естественных науках, технике, экономике, математике, в сфере деловых отношений и в науке управления государством. Так в задаче о распределении ограниченных ресурсов максимизируют либо эффективность, либо, если изучается потребитель, потребление при наличии ограничений, которые выражают условия недостатка ресурсов. В такой общей постановке математическая формулировка задачи может оказаться невозможной, но в конкретных применениях количественный вид всех функций может быть определен непосредственно. Например, шахта ведет добычу угля. Эффективность производства здесь оценивается прибылью, а ограничения интерпретируются как наличная рабочая сила, промышленные запасы угля, производительность оборудования и т.д.

Результаты решения задачи нелинейного программирования являются подспорьем при принятии решений. Полученное решение является, естественно, рекомендуемым, поэтому необходимо исследовать предположения и точность постановки задачи нелинейного программирования, прежде чем принять окончательное решение.

Нелинейные задачи сложны, часто их упрощают тем, что приводят к линейным. Для этого условно принимают, что на том или ином участке целевая функция возрастает или убывает пропорционально изменению независимых переменных. Такой подход называется методом кусочнолинейных приближений, он применим, однако, лишь к некоторым видам нелинейных задач.

Универсального метода для решения нелинейных задач нет и, по-видимому, может не быть, поскольку они чрезвычайно разнообразны. Особенно трудно решаются многоэкстремальные задачи.

В течение последних десятилетий из нелинейного программирования выделились самостоятельные разделы:

- выпуклое программирование,
- квадратичное программирование,
- целочисленное программирование,
- стохастическое программирование,
- динамическое программирование и др.

Задачи выпуклого программирования – это задачи, в которых определяется минимум выпуклой функции (или максимум вогнутой), заданной на выпуклом замкнутом множестве. Эти задачи среди задач нелинейного программирования наиболее изучены.

Среди задач выпуклого программирования более подробно изучены задачи квадратичного программирования. В этих задачах целевая функция – квадратична, а ограничения – линейны.

В задачах целочисленного программирования неизвестные параметры могут принимать только целочисленные значения.

В задачах стохастического программирования в целевой функции или в функциях ограничений содержатся случайные величины, которые подчиняются законам теории вероятностей.

В задачах динамического программирования ограничения содержат как параметр время и при этом описываются дифференциальными уравнениями. Процесс нахождения решений в задачах динамического программирования является многоэтапным.

Широкий класс методов оптимизации ориентирован на решение задач оптимизации, у которых множество допустимых значений вектора варьируемых параметров является выпуклым множеством. Например, на рис. 8.1а, который иллюстрирует двумерный случай, все точки отрезка $[X_1, X_2]$ принадлежат множеству *D* и поэтому это множество выпукло. В противном случае, например, на рис. 8.1б часть [A, B] отрезка $[X_1, X_2]$ не принадлежит множеству *D*, которое поэтому не является выпуклым.

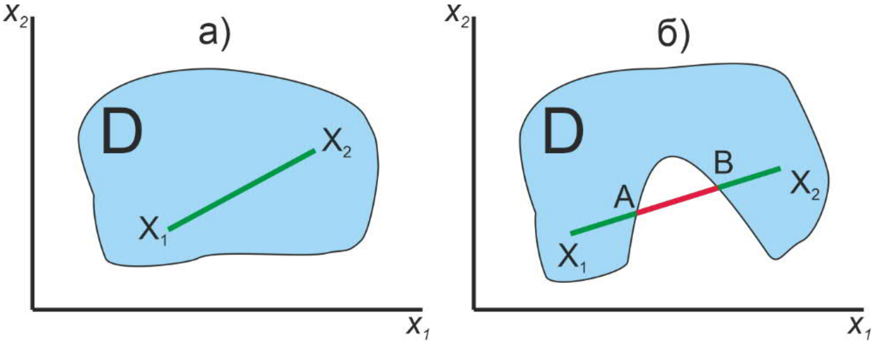

Рис. 8.1 – Пример выпуклого и не выпуклого множества

Максимум и минимум целевой функции $f(x)$ объединяются в одно понятие экстремум. Экстремальная точка функции $f(x)$ определяет либо ее максимальное, либо минимальное значение. На рис. 8.2 показаны точки максимума и минимума действительной функции одной переменной $f(x)$ на интервале [a, b]. Точки x_1, x_2, x_3, x_4 и x_6 составляют множество экстремальных точек функции $f(x)$. Здесь точки x_1, x_3 и x_6 являются точками максимума, а точки x_2 и x_4 точками минимума функции $f(x)$.

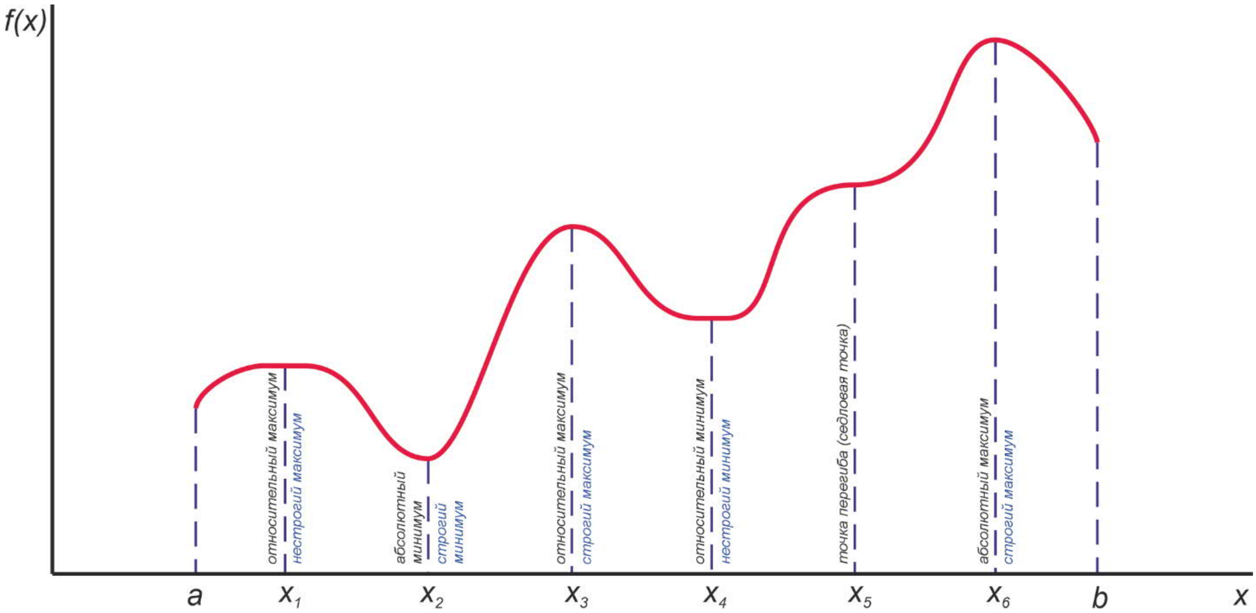

Рис. 8.2 – Экстремумы функции $f(x)$

Поскольку выполняется равенство: $f(x_6)=max\{f(x_1), f(x_3), f(x_6)\}$, то значение $f(x_6)$ является **глобальным или абсолютным максимумом**, а значения $f(x_1)$ и $f(x_3)$ – **локальными или относительными максимумами.**

Подобным образом, поскольку выполняется равенство: $f(x_2)=min\{f(x_2), f(x_4)\}$, то значение $f(x_4)$ является **локальным (относительным)**, а значение $f(x_2)$ – **глобальным (абсолютным) минимумом** функции $f(x)$.

Заметим, что хотя точка x_1 является точкой максимума функции $f(x)$, она отличается от остальных локальных максимумов функции $f(x)$ тем, что, по крайней мере, в одной точке ее окрестности значение функции $f(x)$ совпадает с $f(x_1)$. Точка x_1 по этой причине называется **нестрогим (слабым) максимумом** функции $f(x)$, в отличие, например, от точки x_3, которая является **строгим максимумом** функции $f(x)$. Нестрогий максимум, следовательно, подразумевает наличие (бесконечного количества) различных точек, которым соответствует одно и то же максимальное значение функции. Аналогичные результаты имеют место в точке x_4, где функция $f(x)$ имеет **нестрогий минимум**. Легко заметить, что первая производная функции $f(x)$ (тангенс угла наклона касательной к графику функции) равна 0 во всех ее экстремальных точках. Однако это условие выполняется и в точках перегиба и **седловых** точках функции $f(x)$ таких, например, как точка x_5, которая при этом не является точкой экстремума (максимума или минимума).

9. МЕТОД НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

К задачам оптимизации в нелинейном программировании относятся задачи безусловной и условной оптимизации.

Задачами **безусловной оптимизации** называются такие задачи, в которых задается лишь одна целевая функция $f=f(x)\rightarrow max\ (min)$ без указания ограничений и граничных условий. Эти задачи носят теоретический характер, так как на практике граничные условия задаются всегда. Поэтому в таких задачах для нахождения оптимального решения применяют методы нахождения экстремума функции. Задачами **условной оптимизации** называются такие задачи, когда, кроме целевой функции, в них задаются некоторые дополнительные условия, которые должны быть выполнены. Ограничения могут быть заданы в виде, как уравнений, так и неравенств, при этом введение ограничений либо не влияет на оптимум, либо ухудшает его, подтверждая тем самым вывод, сделанный для задач линейного программирования, что введение дополнительных условий не улучшает оптимального решения, а в ряде случаев приводит к несовместности условий.

Одним из методов, которые позволяют свести задачу нелинейного программирования к решению системы уравнений, является метод неопределенных множителей Лагранжа. Он применяется для решения задач условной оптимизации с ограничениями на переменные в форме равенств. Идея метода множителей Лагранжа состоит в сведении задачи поиска условного экстремума целевой функции

$$f(x_1, \ldots, x_n) \tag{1}$$

на множестве допустимых значений D, описываемом следующей системой уравнений:

$$g_i(x_1, \ldots, x_n)=0,\ i=1, \ldots, m \tag{2}$$

к задаче безусловной оптимизации функции:

$$L(X, \lambda)=f(x_1, x_2, \ldots, x_n) +\lambda_1\cdot g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)+\ldots+\lambda_m\cdot g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{3}$$

где $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а вектор $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ – вектор дополнительных переменных, называемых **множителями Лагранжа**. Функцию, заданную формулой (3), называют **функцией Лагранжа**.

Метод множителей Лагранжа, или просто метод Лагранжа состоит из следующих этапов:

1. Составление функции Лагранжа $L(X, \lambda)$.
2. Нахождение частных производных
$\partial L(X, \lambda)/\partial x_j,\ j=1, \ldots, n;$
$\partial L(X, \lambda)/\partial \lambda_i,\ i=1, \ldots, m.$
3. Решение системы уравнений

$$\begin{cases} \partial L(X,\lambda)/\partial x_j = 0,\ j=1,\ \ldots,n; \\ \partial L(X,\lambda)/\partial \lambda_i = g_i(X)=0, i=1,\ \ldots,m. \end{cases} \tag{4}$$

относительно переменных $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$.

4. Исследование точек, удовлетворяющих системе (4), на максимум (минимум) с помощью достаточного признака экстремума.

При нахождении экстремума функции одной переменной действуем по следующему алгоритму:

1. Находим первую производную заданной функции.

2. Приравняем её к нулю и решая полученное уравнение, находим стационарную точку.

3. Находим вторую производную заданной функции, и если она:

3.1 отрицательна, то в найденной точке исследуемая функция имеет максимум;

3.2 положительна, то в найденной точке исследуемая функция имеет минимум;

3.3 равна нулю, то необходимо исследовать производные высших порядков. При этом, если первые (n–1) ее производных равны нулю (n≥2), и n-я производная не равна нулю, то в этой точке функция имеет:

а) точку перегиба, если n – нечетное;

б) экстремальную точку, если n – четное. При этом данная экстремальная точка является точкой максимума при $f^{(n)}(y)<0$ и точкой минимума при $f^{(n)}(y)>0$.

Так, например, рассмотрим функции $f(x)=x^4$ и $g(x)=x^3$. Графики этих функций изображены на рис. 9.1.

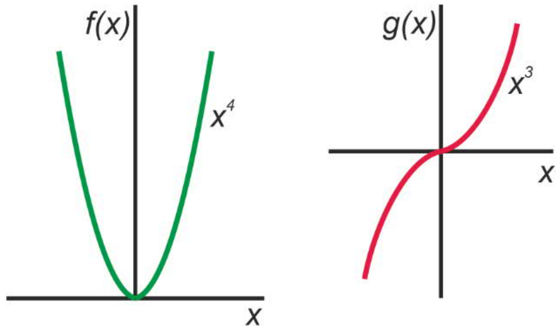

Рис. 9.1 – Графики функций $f(x)=x^4$ и $g(x)=x^3$

Первая производная $f'(x)=4x^3$. Отсюда получим уравнение: $4x^3=0$. Следовательно, $x=0$ – стационарная точка функции $f(x)$. Производные второго и третьего порядков ($f''(x)=12x^2$ и $f'''(x)=24x$) в стационарной точке ($x=0$) тоже равны нулю. Производная четвертого порядка $f^{(4)}(x)=24\neq 0$ отлична от нуля. Следовательно, $x=0$ – точка минимума функции $f(x)=x^4$, поскольку 4 – четное число и при этом $f^{(4)}(x)=24>0$.

Первая производная $g'(x)=3x^2$. Отсюда получим уравнение: $3x^2=0$. Следовательно, $x=0$ – стационарная точка функции $g(x)$. Производная второго порядка ($g''(x)=6x$) в стационарной точке ($x=0$) равна нулю. Производная третьего порядка ($g'''(x)=6$) отлична от нуля. Следовательно, $x=0$ – точка перегиба функции $g(x)=x^3$, поскольку 3 – нечетное число).

Пример использования метода множителей Лагранжа

По плану производства продукции предприятию необходимо изготовить 180 изделий. Эти изделия могут быть изготовлены двумя технологическими способами. При производстве x_1 изделий 1-м способом затраты равны

$4x_1+x_1^2$ руб., а при изготовлении x_2 изделий 2-м способом они составляют $8x_2+x_2^2$ руб. Определить сколько изделий каждым из способов следует изготовить, чтобы затраты на производство продукции были минимальными.

Решение

Целевая функция для поставленной задачи имеет вид

$f = 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 \to \min$ при условиях $x_1+x_2=180$, $x_2 \geq 0$.

1. Составляем функцию Лагранжа

$$L=(x_1, x_2, \lambda)= 4x_1 + x_1^2 + 8x_2 + x_2^2 + \lambda(180 - x_1 - x_2).$$

2. Вычисляем частные производные по x_1, x_2, λ и приравниваем их к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{dL}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{dL}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{dL}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 + 2x_1 + 0 + 0 + \lambda(0 - 1 - 0) = 0 \\ 0 + 0 + 8 + 2x_2 + \lambda(0 - 0 - 1) = 0 \\ 180 - x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 + 2x_1 - \lambda = 0 \\ 8 + 2x_2 - \lambda = 0 \\ 180 - x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

3. Решая полученную систему уравнений, находим $x_1=91$, $x_2=89$.

4. Сделав замену в целевой функции $x_2=180-x_1$, получим функцию от одной переменной, а именно

$$f_1 = 4x_1 + x_1^2 + 8(180 - x_1) + (180 - x_1)^2$$

Вычисляем

$$\frac{df_1}{\partial x_1} = 4 + 2x_1 - 8 - 2(180 - x_1) = 0 \text{ или } 4x_1-364=0,$$

откуда имеем $x_1^*=91$, $x_2^*=89$.

Таким образом, количество изделий, изготовленных первым способом равно $x_1=91$, вторым способом $x_2=89$ при этом значение целевой функции равно 17278 руб.

10. ПАРНАЯ ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИЯ

Если при нахождении регрессионной зависимости результативный признак зависит только от одного факторного признака (или среди всех факторов, влияющих на результативный признак, выделяется один важнейший), то такую зависимость называют парной регрессией. Парная регрессия может быть линейной, параболической, экспоненциальной и др. Определить вид линии регрессии можно по взаимному расположению точек, координатами которых являются факторный и результативный признаки. Так, например, исследуя зависимость плотности угля от его зольности (рис. 10.1), можно предположить как линейную связь между двумя этими признаками, так и параболическую.

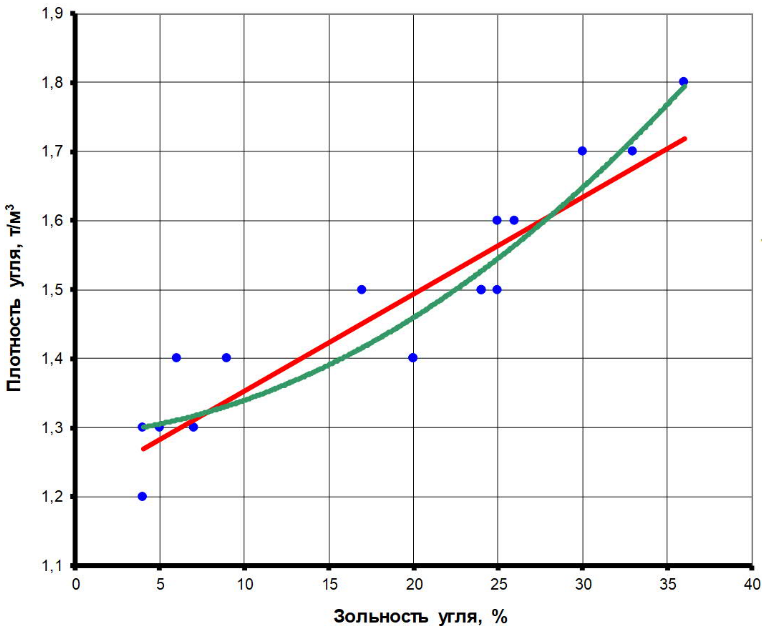

Рис. 10.1 – Зависимость плотности угля от его зольности

Если предположить, что зависимость между факторным и результативным признаком линейна, то уравнение регрессии можно записать в виде уравнения прямой

$$\hat{y} = a_0 + a_1 x\,,$$

где x – факторный признак; $\hat{y}$ – результативный признак; a_0, a_1 – параметры уравнения.

a_1 – коэффициент регрессии, представляющий собой среднее значение y в точке $x=0$, поэтому его экономическая интерпретация затруднена. Смысл этого коэффициента можно трактовать как усредненное влияние на результативный признак неучтенных (не выделенных для исследования) факторов.

a_1 – коэффициент регрессии, измеряющий среднее отношение отклонения результативного признака от его средней величины к отклонению факторного признака от его средней величины на одну единицу его измерения – вариация y, приходящаяся на единицу вариации x.

Параметры уравнения находят методом наименьших квадратов (*метод решения систем уравнений, при котором в качестве решения принимается точка минимума суммы квадратов отклонений*), то есть в основу этого метода положено требование минимальности сумм квадратов отклонений эмпирических данных y_i от выровненных $\hat{y}$:

$$\sum\left(y_i-\hat{y}\right)^2=\sum\left(y_i-a_0-a_1x_i\right)^2\to\min$$

Для нахождения минимума данной функции приравняем к нулю ее частные производные. В результате получим систему двух линейных уравнений, которая называется системой нормальных уравнений:

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i=n\cdot a_0+a_1\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\\ \sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i=a_0\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+a_1\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\end{cases}$$

Решая эту систему в общем виде, находим a_0 и a_1. Но можно воспользоваться такими формулами:

$$a_0=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2},\quad a_1=\frac{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\sum\limits_{i=1}^{n}y_i}{n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2}.$$

Параметры уравнения парной линейной регрессии иногда удобно исчислять по следующим формулам, дающим тот же результат:

$$a_1=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i-\bar{y}\right)\left(x_i-\bar{x}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2}$$

или

$$a_1=\frac{\overline{xy}-\bar{x}\cdot\bar{y}}{\overline{x^2}+(\bar{x})^2},\ a_0=\bar{y}-a_1\bar{x}.$$

Горизонтальная черта над результативным или факторным признаком указывает на его среднее значение. Следует обратить внимание, что среднее значение квадратов факторного признака и квадрат среднего значения факторного признака дают разные результаты.

Чем ближе эмпирические точки к прямой, тем теснее линейная корреляционная зависимость – тем уравнение регрессии достовернее отражает ситуацию, и тем качественнее полученная модель. И наоборот, если многие точки разбросаны вдали от прямой, то признак y зависит от x вовсе не линейно (*если вообще зависит*) и линейная функция плохо отражает реальную картину.

Оценить тесноту линейной корреляционной зависимости помогает **линейный коэффициент корреляции** (*полное название: «выборочный линейный коэффициент парной корреляции Пирсона», но возможны различные комбинации этих слов*). Он вычисляется по формуле

$$r_{yx}=\frac{\overline{xy}-\bar{x}\cdot\bar{y}}{S_yS_x},$$

где $\overline{xy}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\cdot y_i}{n}$; $\bar{x}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}$; $\bar{y}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i}{n}$; $S_y=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{n}}$; $S_x=\sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}$.

S_y, S_x – среднее квадратическое отклонения признаков (или стандартное отклонение). Находим, извлекая корни из соответствующих дисперсий.

Коэффициент корреляции может изменяться в пределах от -1 до +1 и чем он ближе по модулю к единице, тем теснее линейная корреляционная зависимость – тем ближе расположены точки к прямой, тем качественнее и достовернее линейная модель. Если он равен +1 либо -1, то речь идёт о строгой линейной зависимости, при которой все эмпирические точки окажутся на построенной прямой. И наоборот, чем он ближе к нулю, тем точки рассеяны дальше, тем линейная зависимость выражена меньше. Однако в последнем случае зависимость всё равно может быть (например, нелинейная). Для оценки тесноты связи можно использовать шкалу Чеддока (*эта шкала не единственна, в разных источниках можно встретить разные градации*):

Диапазон значений $\|r_{yx}\|$	**Линейная корреляционная зависимость y от x**
0-0,1	практически отсутствует
0,1-0,3	слабая
0,3-0,5	умеренная
0,5-0,7	заметная
0,7-0,9	сильная
0,9-0,99	очень сильная
0,99-1	практически функциональная

При этом если $|r_{yx}|>0$, то корреляционная связь прямая (с увеличением x увеличивается y), а если $|r_{yx}|<0$, то обратная (с увеличением x уменьшается y).

Коэффициент детерминации показывает долю изменения (вариации) результативного признака под действием факторного признака. Рассчитывается, как квадрат коэффициента корреляции:

$$R_{yx}^2 = r_{yx}^2 \text{ или } R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}.$$

Коэффициент эластичности показывает, насколько процентов в среднем изменяется результативный признак y при изменении факторного признака x на один процент. Для линейной модели парной регрессии он рассчитывается по формуле

$$Э_{yx} = \frac{a_1 \bar{x}}{\bar{y}}.$$

Качество модели можно оценить с помощью **средней ошибки аппроксимации**, выражаемой в процентах. Она рассчитывается по формуле

$$\bar{A} = \frac{100}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i}\right|.$$

После получения уравнения регрессии необходимо проверить его адекватность, то есть соответствие фактическим статистическим данным. С этой целью производится проверка значимости коэффициентов регрессии:

выясняется, насколько эти показатели характерны для всей генеральной совокупности, не являются ли они результатом случайного стечения обстоятельств. Для проверки значимости коэффициентов простой линейной регрессии при объеме совокупности меньше 30 единиц используется t-критерий Стьюдента. Для этого определяют фактические значения t-критерия для каждого из оцениваемых параметров и сравнивают их с табличными значение t-критерия.

Фактические значения t-критерия для каждого из оцениваемых параметров следует вычислить по формулам

$$t_{a_0} = \frac{|a_0|}{S_{a_0}},\ t_{a_1} = \frac{|a_1|}{S_{a_1}},$$

где S_{a_0} и S_{a_1} – стандартные ошибки коэффициентов уравнения регрессии, которые для линейного парного уравнения регрессии вычисляются по формулам

$$S_{a_0} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n(n-2)\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}},\ S_{a_1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{(n-2)\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}}.$$

Табличное значение $t_{табл}$ определяется по таблицам, приводимым в специальной литературе, при соответствующем уровне значимости (например, α=0,05) для степеней свободы

$$f=n-m-1,$$

где m – количество факторов в модели (для парной регрессии m=1).

Если $t_{a_1} > t_{табл}$, то оценка a_1 является статистически значимой в модели при заданном уровне значимости. Аналогично определяется значимость для параметра a_0.

Значимость коэффициента детерминации R^2 определяется с помощью критерия Фишера (F-критерия). Фактическое значение критерия Фишера ($F_{факт}$) определяется по формуле

$$F_{факт} = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{v_2}{v_1},$$

где $v_1=m$ и $v_2=n-m-1$ – число степеней свободы.

Табличное значение $F_{табл}$ определяется по таблицам, приводимым в специальной литературе, при соответствующем уровне значимости (например, α=0,05) для степеней свободы v_1 и v_2. Если $F_{факт}>F_{табл}$, то с вероятностью (1-α) делается заключение о том, что уравнение регрессии в целом статистически значимо и статистически значим коэффициент детерминации R^2.

11. МНОГОФАКТОРНАЯ ЛИНЕЙНАЯ РЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ

В многофакторных моделях результативный признак зависит от нескольких факторов. Для двухфакторной линейной регрессии эта модель имеет вид

$$\hat{y} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 .$$

Параметры модели a_o, a_1, a_2 находятся путем решения системы нормальных уравнений

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum x_1 + a_2 \sum x_2 = \sum y \\ a_0 \sum x_1 + a_1 \sum x_1^2 + a_2 \sum x_1 x_2 = \sum y x_1 \\ a_0 \sum x_2 + a_1 \sum x_1 x_2 + a_2 \sum x_2^2 = \sum y x_2 \end{cases}$$

Всегда проще для составления многофакторной модели воспользоваться специальной программой из пакета для математического анализа (например командой «Регрессия» из пакета «Анализ данных» Excel).

Важным этапом построения уравнения множественной регрессии является отбор и последующее включение в него факторных признаков. С одной стороны, чем больше факторных признаков включено в уравнение, тем оно лучше описывает явление. Однако такая модель может оказаться сложно реализуемой и требовать больших временных затрат. Сокращение размерности модели за счет исключения второстепенных, экономически и статистически несущественных факторов способствует простоте и качеству ее реализации. В то же время построение модели регрессии малой размерности может привести к тому, что такая модель будет недостаточно адекватна исследуемым явлениям и процессам.

Проблема отбора факторных признаков для построения моделей взаимосвязи может быть решена па основе интуитивно-логических или многомерных математико-статистических методов анализа. Наиболее приемлемым способом отбора факторных признаков является шаговая регрессия (шаговый регрессионный анализ). Сущность метода шаговой регрессии заключается в реализации алгоритмов последовательного включения, исключения или включения-исключения факторов в уравнение регрессии с последующей проверкой их статистической значимости.

При построении модели регрессии возможна **проблема мультиколлинеарности**, под которой понимается тесная корреляционная зависимость между факторными признаками, включенными в модель.

Выделим наиболее характерные признаки мультиколлинеарности:

1. Небольшое изменение исходных данных (например, добавление новых наблюдений) приводит к существенному изменению оценок коэффициентов модели.

2. Оценки имеют большие стандартные ошибки, малую значимость, в то время как модель в целом является значимой (высокое значение коэффициента детерминации R^2 и соответствующей F-статистики).

3. Оценки коэффициентов имеют неправильные с точки зрения теории знаки или неоправданно большие значения.

Причины возникновения мультиколлинеарности:

- изучаемые факторные признаки являются характеристикой одной и той же стороны изучаемого явления или процесса. Например, показатели объема производимой продукции и среднегодовой стоимости основных фондов одновременно включать в модель не рекомендуется, так как они оба характеризуют размер предприятия;
- факторные признаки являются составляющими элементами друг друга. Например, показатели выработки продукции на одного работающего и численность работающих одновременно в модель включать нельзя, так как в основе расчета показателей лежит один и тот же показатель – численность работающих на предприятии;
- факторные признаки дублируют друг друга (например, по экономическому смыслу).

Однозначного решения проблемы мультиколлинеарности нет. При столкновении с этой проблемой может возникнуть естественное желание отбросить «лишние» независимые переменные, которые, возможно, служат ее причиной. Однако следует помнить, что при этом могут возникнуть новые трудности. Во-первых, далеко не всегда ясно, какие переменные являются лишними в указанном смысле. Во-вторых, во многих ситуациях удаление каких-либо независимых переменных может значительно отразиться на содержательном смысле модели. На практике, обычно при обнаружении мультиколлинеарности убирают наименее значимый для анализа фактор, а затем повторяют расчеты.

Второй возможной проблемой построения многофакторной регрессионной модели может стать **проблема гетероскедастичности**.

Гетероскедастичность – это свойство исходных данных, означающее неоднородность наблюдений, выражающееся в неодинаковой (непостоянной) дисперсии случайной ошибки регрессионной модели. На графике (рис. 11.1) она проявляется в том, что с увеличением или уменьшением порядкового номера измерения увеличивается рассеивание измерений около линии тренда. Это может привести к существенным погрешностям оценок коэффициентов уравнения регрессии. Она возникает тогда, когда объекты, как правило, неоднородны.

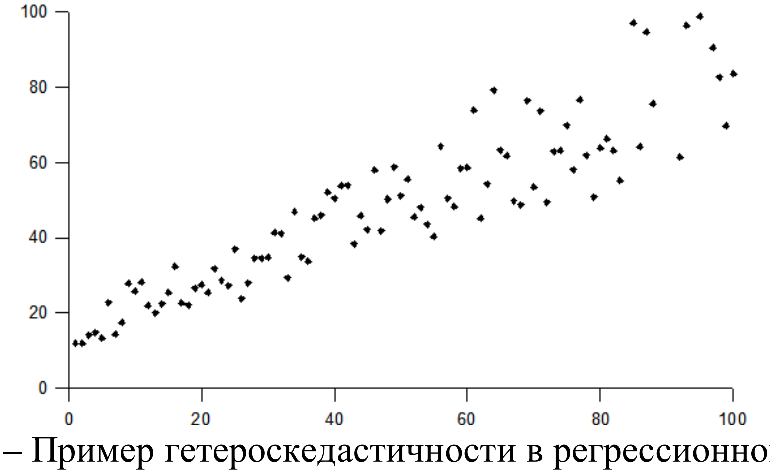

Рис. 11.1 – Пример гетероскедастичности в регрессионной модели

Существует несколько методов коррекции, решающих проблему гетероскедастичности.

1. Использование взвешенного метода наименьших квадратов. Он позволяет сделать случайные ошибки модели гомоскедастичными. В частности, если предполагается, что стандартное отклонение ошибок пропорционально некоторой переменной, то данные делятся на эту переменную, включая константу.
2. Замена исходных данных их производными, например, логарифмом, относительным изменением или другой нелинейной функцией. Этот подход часто используется в случае увеличения дисперсии ошибки с ростом значения независимой переменной и приводит к стабилизации дисперсии в более широком диапазоне входных данных.
3. Определение «областей компетенции» моделей, внутри которых дисперсия ошибки сравнительно стабильна, и использование комбинации моделей. Таким образом, каждая модель работает только в области своей компетенции, и дисперсия ошибки не превышает заданное граничное значение.

Третьей из возможных проблем построения многофакторной регрессионной модели может стать **малое количество экспериментов**, а четвертой – **наличие автокорреляции**.

Автокорреляция – это корреляционная зависимость между текущими значениями некоторой переменной и значениями этой же переменной, сдвинутыми на несколько периодов времени назад.

Автокорреляция может быть вызвана несколькими причинами, имеющими различную природу. Иногда она связана с исходными данными и вызвана наличием ошибок измерения в значениях результирующей переменной. В ряде случаев причину автокорреляции следует искать в формулировке модели. Модель может не включать фактор, оказывающий существенное воздействие на результат, влияние которого отражается на возмущениях, вследствие чего последние могут оказаться автокоррелированными. Очень часто этим фактором является фактор времени.

12. АВТОКОРРЕЛЯЦИЯ ОСТАТКОВ

Любая модель, какая бы точная она ни была, предполагает наличие остатков – отклонений теоретических значений ряда от эмпирических. Во многих случаях критерием качества моделей выступает именно анализ остатков. В зависимости от метода построения, структуры модели, ее целей, критериями качества могут выступать разные показатели. Большинство из них так или иначе соотносятся с автокорреляцией остатков.

Автокорреляция (последовательная корреляция) определяется как корреляция между наблюдаемыми показателями, упорядоченными во времени (временные ряды) или в пространстве (перекрестные данные). Автокорреляция остатков (отклонений) обычно встречается в регрессионном анализе при использовании данных временных рядов. При использовании перекрестных данных наличие автокорреляции (пространственной корреляции) крайне редко.

Иными словами, **автокорреляция** остатков (ошибок регрессии) – это нарушение предположения о независимости и одинаковой распределенности ошибок между наблюдениями в модели регрессии. Когда возникает автокорреляция ошибок, это может привести к искажению результатов анализа и неверной интерпретации статистических выводов.

Чаще встречается **положительная** автокорреляция (в основном в экономических задачах). Она в большинстве случаев вызывается направленным постоянным воздействием некоторых неучтенных в модели факторов. При положительной автокорреляции остатки изменяются монотонно с течением времени наблюдения, а при **отрицательной** – следует частое изменение знака остатка.

Суть автокорреляции поясним на примере исследования зависимости потребления питьевой воды (Y) от тяжести выполняемой физической работы (X) по ежемесячным данным. Трендовая зависимость, отражающая увеличение потребления питьевой воды с ростом тяжести выполняемой физической работы, может быть представлена линейной функцией $Y=a_0+a_1X$, изображенной на рис. 12.1. Однако фактические точки наблюдений обычно будут превышать трендовую линию в летние периоды и будут ниже ее в зимние.

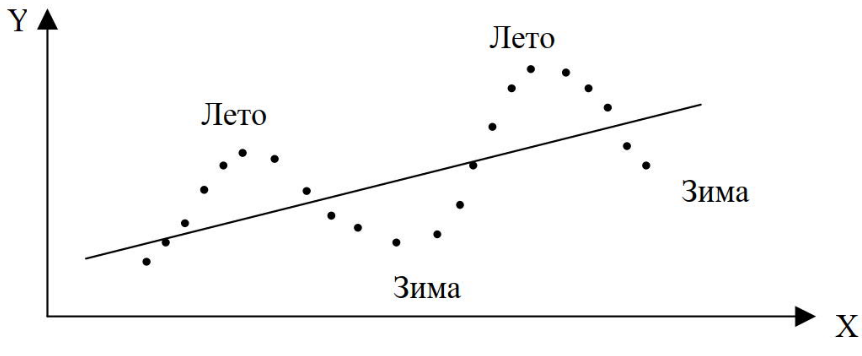

Рис. 12.1 – Пример автокорреляции в регрессионной модели

Если ту же самую зависимость между потреблением питьевой воды и тяжестью выполняемой физической работы, рассматривать по сезонным данным (только зима и лето, а не по месяцам), то за положительным отклонением будет иметь место отрицательное и наоборот, что характерно для отрицательной автокорреляции. Возможная схема рассеивания точек в этом случае будет иметь вид, как на рис. 12.2.

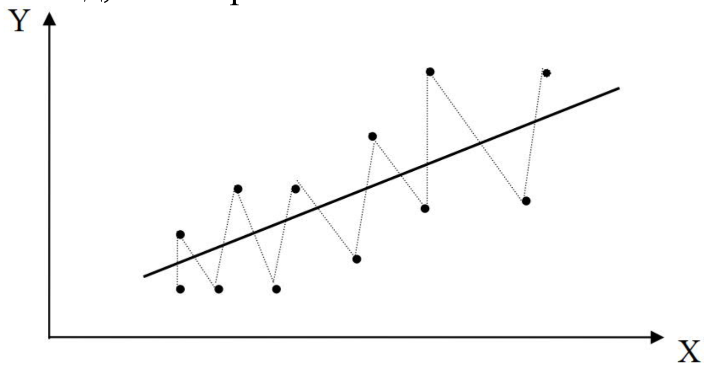

Рис. 12.2 – Пример рассеивания точек при отрицательной автокорреляции

Среди основных причин, вызывающих появление автокорреляции, можно выделить: ошибки спецификации, инерцию в изменении экономических показателей, эффект паутины, сглаживание данных.

Ошибки спецификации. Неучёт в модели какой-либо важной объясняющей переменной либо неправильный выбор формы зависимости, обычно приводит к системным отклонениям точек наблюдений от линии регрессии, что может привести к автокорреляции. Например, анализируя зависимость одной переменной от другой (рис. 12.3), вместо реальной квадратичной модели (1) была выбрана линейная модель (2). А значит, совершается ошибка спецификации. Ее можно рассматривать как неправильный выбор формы модели или, как отбрасывание значимой переменной при линеаризации указанной модели. Последствия данной ошибки выразятся в системном отклонении точек наблюдений от линии регрессии, и существенном преобладании последовательных отклонений одинакового знака над соседними отклонениями противоположных знаков. Налицо типичная картина, характерная для положительной автокорреляции.

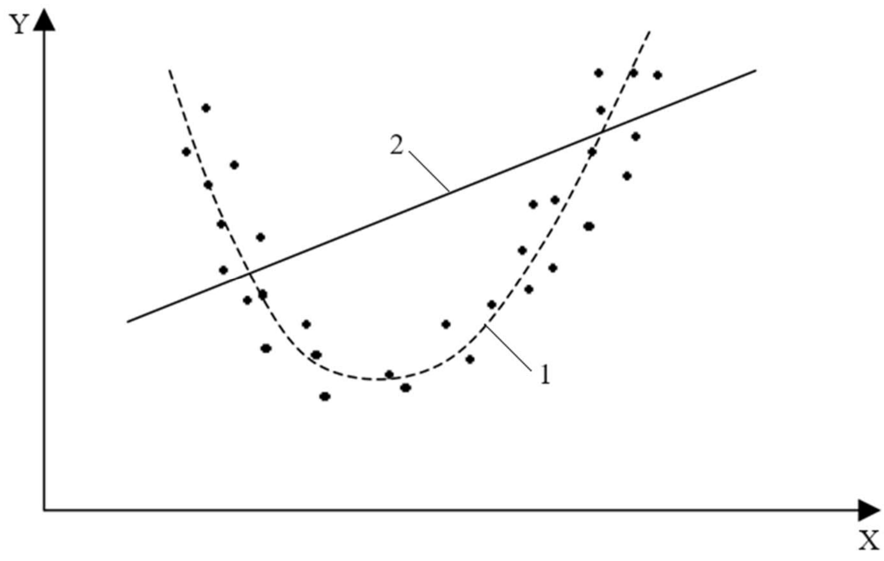

Рис. 12.3 – Пример рассеивания точек при положительной автокорреляции

Инерция. Многие экономические показатели (например, инфляция, спрос на уголь и т. п.) обладают определенной цикличностью, связанной с волнообразностью деловой активности. Эти трансформации происходит не мгновенно, а обладают определенной инертностью.

Эффект паутины. Многие экономические показатели реагируют на изменение экономических условий с запаздыванием (временным лагом). Например, предложение сельскохозяйственной продукции реагирует на изменение цены с запаздыванием (равным периоду созревания урожая). Большая цена сельскохозяйственной продукции в прошлом году вызовет (скорее всего) ее перепроизводство в текущем году, а следовательно, цена на нее снизится и т. д. В этой ситуации нельзя предполагать случайность отклонений друг от друга.

Сглаживание данных. Зачастую данные по некоторому продолжительному временному периоду получают усреднением данных по составляющим его подынтервалам (например значения абсолютного метановыделения на выемочном участке, вычисленные по эпизодическим замерам концентраций метана в горных выработках). Это может привести к определенному сглаживанию колебаний, которые имелись внутри рассматриваемого периода, что, в свою очередь, может послужить причиной автокорреляции.

В силу неизвестности значений параметров уравнения регрессии неизвестными будут также и истинные значения отклонений (остатков). Поэтому выводы об их независимости осуществляются на основе оценок отклонений e_t, полученных из эмпирического уравнения регрессии. Рассмотрим методы определения автокорреляции.

Графический метод. Существует несколько вариантов графического определения автокорреляции. Один из них, увязывающий отклонения e_t с моментами t их получения (их порядковыми номерами i), приведен на рис. 12.4. Это так называемые последовательно-временные графики.

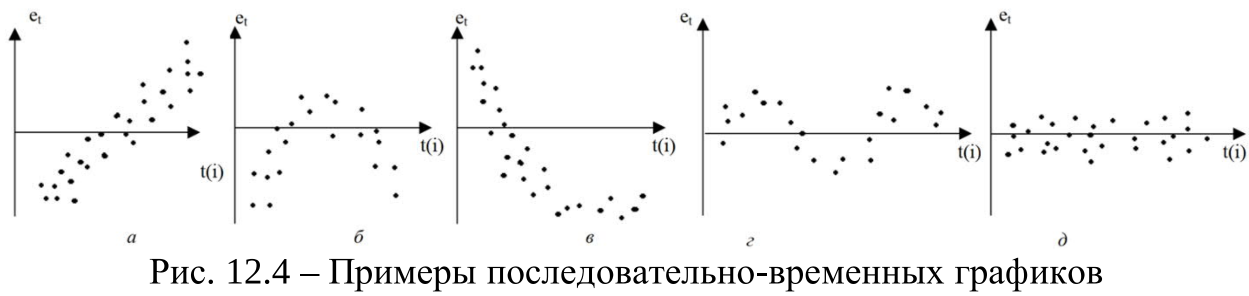

Рис. 12.4 – Примеры последовательно-временных графиков

Естественно предположить, что на рис. 12.4, а-г имеются определенные связи между отклонениями, т. е. автокорреляция имеет место. Отсутствие зависимости на рис. 12.4д, скорее всего, свидетельствует об отсутствии автокорреляции.

Метод рядов (*детально рассматривать не будем*). Следует последовательно определить знаки отклонений e_t. Например:

$$(-\,-\,-\,-\,-)(+\,+\,+\,+\,+\,+\,+)(-\,-\,-)(+\,+\,+\,+)(-).$$

Имеем пять рядов с длинами 5, 7, 3, 4 и 1.

Ряд определяется как непрерывная последовательность одинаковых знаков. Если рядов слишком мало по сравнению с количеством наблюдений, то вполне вероятна положительная автокорреляция. Если же рядов слишком много, то вероятна отрицательная автокорреляция. Далее, в зависимости от количества наблюдений, выполняется детальный анализ (*либо по определенным зависимостям, либо по таблицам, которые разработали Свед и Эйзенхарт*).

Критерий Дарбина-Уотсона. Является наиболее известным критерием обнаружения автокорреляции первого порядка (когда коррелируют случайные члены регрессии в последовательных наблюдениях). Суть его состоит в вычислении d-статистики (*в разных источниках может обозначаться по-разному, например, DW*) и на основе ее величины – осуществлении выводов об автокорреляции.

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n}\left(e_t - e_{t-1}\right)^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}.$$

Имеются таблицы критических точек распределения Дарбина-Уотсона. По ним, для заданного уровня значимости α, числа наблюдений n и количества объясняющих переменных m определяются два значения: d_l − нижняя граница и d_u − верхняя граница. Выводы осуществляют по следующей схеме:

$0 \le d < d_l$ − существует положительная автокорреляция,

$d_l \le d < d_u$ − вывод о наличии автокорреляции не определен,

$d_u \le d < (4\text{-}d_u)$ − автокорреляция отсутствует,

$(4\text{-}d_u) \le d < (4\text{-}d_l)$ − вывод о наличии автокорреляции не определен,

$(4\text{-}d_l) \le d \le 4$ − существует отрицательная автокорреляция.

Для проверки гипотезы об отсутствии автокорреляции остатков используется следующий отрезок (рис. 12.5).

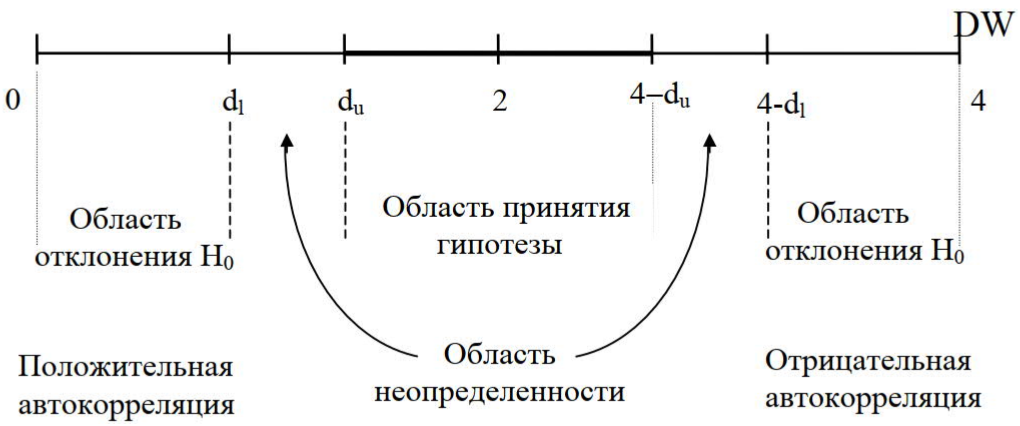

Рис. 12.5 – Проверка нулевой гипотезы (H_0) об отсутствии автокорреляции

При наличии автокорреляции остатков полученное уравнение регрессии обычно считается неудовлетворительным.

При использовании критерия Дарбина-Уотсона необходимо учитывать некоторые ограничения. Например:

1. Критерий DW применяется лишь для тех моделей, которые содержат свободный член.

2. Статистические данные должны иметь одинаковую периодичность (т. е. не должно быть пропусков в наблюдениях).

3. Критерий DW не применим для регрессионных моделей, содержащих в составе объясняющих переменных зависимую переменную с временным лагом в один период.

Основной причиной наличия случайного члена в модели являются несовершенные знания о причинах и взаимосвязях, определяющих то или иное значение зависимой переменной. Поэтому свойства случайных отклонений, в том числе и автокорреляция, в первую очередь зависят от выбора формулы зависимости и состава объясняющих переменных. Так как автокорреляция чаще всего вызывается неправильной спецификацией модели, то для ее устранения необходимо, прежде всего, попытаться скорректировать саму модель. Возможно, автокорреляция вызвана отсутствием в модели некоторой важной объясняющей переменной. Необходимо попытаться определить данный фактор и учесть его в уравнении регрессии. Также можно попробовать изменить формулу зависимости (например, линейную на гиперболическую и т. д.). Однако если все разумные процедуры изменения спецификации модели, на ваш взгляд, исчерпаны, а автокорреляция имеет место, то можно предположить, что она обусловлена какими-то внутренними свойствами ряда $\{e_t\}$. В этом случае можно воспользоваться авторегрессионным преобразованием (*не рассматривается в рамках курса*).

13. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТЕПЕНИ ВЛИЯНИЯ ФАКТОРОВ МЕТОДОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИСЧИСЛЕНИЙ

В математическом моделировании используются следующие модели зависимости результатных показателей от факторных:

- аддитивная модель: $y=x_1+x_2$;
- разностная модель: $y=x_1-x_2$;
- мультипликативная модель: $y=x_1 \cdot x_2$;
- кратная модель: $y=x_1/x_2$;
- смешанные (комбинированные) модели: $y=(x_1+x_2) \cdot x_3$; $y=(x_1 \cdot x_2)/x_3$; $y=(x_1+x_2)/x_3$; $y=x_1/(x_2+x_3)$.

Конечно, в формулах может быть и большее число факторов, чем два или три. Хотя в практических аналитических задачах их бывает не так много, что вызвано желанием упростить рассуждения.

Метод дифференциальных исчислений для определения степени влияния факторов заключается в анализе частных производных функций. Этот метод позволяет определить, как изменение одного фактора влияет на функцию при фиксированных значениях других факторов. Метод применим только для непрерывных функций и предполагает, что все факторы изменяются в малой окрестности.

В основу метода положена формула Тейлора

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta x_1 + ... + \frac{\partial y}{\partial x_n}\Delta x_n + o(\rho),$$

где x_1-x_n – факторы;
ρ – евклидова норма вектора приращения факторов;
$o(\rho)$ – функция бесконечно малая, порядка выше ρ, т.е. убывающая при $\rho \to 0$ быстрее, чем ρ.

При использовании этого метода предполагается, что общее приращение функции (результативного признака) раскладывается на слагаемые. Значение каждого из слагаемых (кроме последнего) определяется умножением соответствующей частной производной (взятой при начальных значениях факторов) на изменение фактора, по которому вычислена данная производная. Так, если функция $y=f(a,b)$ дифференцируема, то используя формулу Тейлора, ее приращение можно выразить как:

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial y}{\partial b}\Delta b + o\left(\sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2}\right),$$

где $\Delta y=y_1-y_0$ – изменение результативного показателя;
$\Delta a=a_1-a_0$ – изменение фактора a;
$\Delta b=b_1-b_0$ – изменение фактора b;
$o(\sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2})$ – остаточный член или логическая ошибка метода дифференцирования. Этот параметр мал при достаточно малых изменениях факторов, а при значительных изменениях переменных он может существенно отличаться от нуля.

Приращение функции можно записать так:

$$\Delta y = \Delta y_a + \Delta y_b + o\left(\sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2}\right).$$

Тогда

$$o\left(\sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2}\right) = \Delta y - \Delta y_a - \Delta y_b.$$

Применение метода дифференциальных исчислений рассмотрим на конкретном примере.

Пусть в прошлом (базисном) году на предприятии работало a_0=100 рабочих, среднесуточная выработка продукции одним рабочим была b_0=20 ед./чел. и общий объем выработки в сутки в среднем составлял y_0=2000 единиц. Подводя итоги в конце текущего (отчетного) года, руководство увидело, что общий объем суточной выработки увеличился и составил y_1=5000 единиц, что даже превысило желаемый уровень. Однако, стоит задаться вопросом: за счет какого из факторов и насколько произошло желаемое увеличение, и можно ли данный результат считать хорошим? Очевидно, что общий объем мог вырасти за счет увеличения производительности, и это – хорошо, но мог вырасти и за счет простого увеличения числа работающих, а отнесение такого результата к числу хороших – уже спорный вопрос. Потребуются следующие данные: количество рабочих в конце текущего (отчетного) года a_1=200 рабочих и выработка продукции одним рабочим была b_1=25 единиц. Предполагается использование мультипликативной факторной модели: $y=a \cdot b$.

Изменение численности рабочих: $\Delta a = a_1 - a_0 = 200 - 100 = 100$ чел.

Изменение среднесуточной выработки: $\Delta b = b_1 - b_0 = 25 - 20 = 5$ ед./чел.

Изменение объема суточной выработки: $\Delta y = y_1 - y_0 = 5000 - 2000 = 3000$ ед.

Влияние изменения численности рабочих на общий объем суточной выработки:

$$\Delta y_a = b_0 \Delta a = 20 \cdot 100 = 2000 \text{ ед.}$$

Влияние изменения среднесуточной выработки продукции одним рабочим на общий объем суточной выработки:

$$\Delta y_b = a_0 \Delta b = 100 \cdot 5 = 500 \text{ ед.}$$

Таким образом, за счет увеличения производительности труда результативный показатель улучшился только на 500 ед. в то время, как остальное увеличение в 2000 ед. произошло за счет простого роста числа рабочих. Учитывая, что каждому из вновь принятых нужно было платить зарплату, решать социальные вопросы, становится весьма сомнительным полученный итоговый результат увеличения общего объема суточной выработки.

Стоит обратить внимание на то, что в нашей задаче сумма влияния факторов не дает общего приращения результативного показателя:

$$\Delta y_a + \Delta y_b \neq \Delta y \quad (2000 + 500 \neq 3000).$$

Дело в том, что остаточным членом уравнения не всегда можно пренебречь. Отбрасываемое слагаемое является действительно малой величиной только при малом изменении самих факторов. А в таких моделях, как наша, получаются достаточно большие погрешности в расчетах.

Определим, чему равен остаточный член уравнения:

$$o\left(\sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2}\right) = \Delta y - \Delta y_a - \Delta y_b = \left(a_1 b_1 - a_0 b_0\right) - b_0 \Delta a - a_0 \Delta b =$$

$$= \left(a_1 b_1 - a_0 b_0\right) - b_0\left(a_1 - a_0\right) - a_0\left(b_1 - b_0\right) = a_1 b_1 - a_0 b_0 - a_1 b_0 + a_0 b_0 - a_0 b_1 + a_0 b_0 =$$

$$= a_1\left(b_1 - b_0\right) - a_0\left(b_1 - b_0\right) = \left(a_1 - a_0\right)\left(b_1 - b_0\right) = \Delta a \Delta b .$$

Таким образом, в данной задаче величина остаточного члена или т.н. неразложимого остатка равна:

$$\Delta a \Delta b = 100 \cdot 5 = 500 \text{ ед.}$$

В задачах, где выделяются качественные (у нас это b – среднесуточная выработка продукции одним рабочим) и объемные (у нас это a – численности рабочих) факторы иногда весь неразложимый остаток относят на счет только одного качественного фактора. Однако, как видим в нашем случае, это не повлияет на окончательный результат, поскольку

$$\Delta y_a > \Delta y_b + o(\rho) \ \ (2000 > 500 + 500) .$$

Следовательно, для условий нашей задачи, увеличение общего объема суточной выработки нельзя считать хорошим результатом.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гальянов А.В. Математическая обработка результатов измерений в горном деле : учебное пособие / Гальянов А.В.. — Москва, Вологда : Инфра-Инженерия, 2022. — 292 c. — ISBN 978-5-9729-0815-8. — Текст : электронный // IPR SMART : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/124188.html — Режим доступа: для авторизир. пользователей.
2. Латышев О.Г. Математические методы в горном деле : учебник / Латышев О.Г., Казак О.О.. — Москва, Вологда : Инфра-Инженерия, 2022. — 172 c. — ISBN 978-5-9729-0801-1. — Текст : электронный // IPR SMART : [сайт]. — URL: https://www.iprbookshop.ru/124186.html — Режим доступа: для авторизир. пользователей.
3. Зайцева Н.А. Математическое моделирование: Учебное пособие. – М.: РУТ (МИИТ), 2017. – 110 с. Режим доступа: http://ed.donntu.ru/books/20/cd9763.pdf Загл. с экрана. — Режим доступа: для авторизир. пользователей.
4. Щадов М.И., Огнёв И.А., Конюхов В.Ю. Математические модели в горном менеджменте: учебное пособие. – Иркутск: Изд-во ИрГТУ, 2011. – 64 с.
5. Экономико-математические методы и моделирование в планировании и управлении горным производством / С.С. Резниченко, М.П. Подольский, А.А. Ашихмин. – М.: «Недра», 1991. – 431 с.
6. Теория экономического анализа: Учебное пособие / И.П. Житная, И.В. Таций, П.Е. Житный; И.о. Восточноукр. нац. ун-т им. В. Даля. – Луганск : ВНУ им. В. Даля, 2004.– 336 с.
7. Бородич С. А. Вводный курс эконометрики: Учебное пособие − Мн.: БГУ, 2000. − 354 с.
8. Методы оптимизации: учебное пособие / Н. Л. Майорова, Д. В. Глазков; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль: ЯрГУ, 2015. – 112 с.