МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА «ОБОГАЩЕНИЕ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ»

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

для проведения практических занятий по дисциплине вариативной части учебного плана по выбору студента

«ОСНОВЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ»

для обучающихся уровня профессионального образования «специалист» по направлению подготовки 21.05.04 «Горное дело» специализации «Обогащение полезных ископаемых» всех форм обучения

РАССМОТРЕНО
на заседании кафедры
Обогащения полезных ископаемых
Протокол № 2 от 04.02.2020 г.

УТВЕРЖДЕНО
на заседании Учебно-издательского
совета ДОННТУ
Протокол № 2 от 26.02.2020 г.

Донецк
2020

УДК 622.7:001.8(076)
ББК 72:33.4я73
М54

Рецензент:
Новиков Александр Олегович – доктор технических наук, профессор кафедры «Разработка месторождений полезных ископаемых» ГОУВПО «ДОННТУ».

Составитель:
Самойлик Виталий Григорьевич – кандидат технических наук, доцент кафедры «Обогащение полезных ископаемых» ГОУВПО «ДОННТУ».

М54 **Методические рекомендации для проведения практических занятий по дисциплине вариативной части учебного плана по выбору студента «Основы научных исследований»** [Электронный ресурс] : для обучающихся уровня профессионального образования "специалист" по направлению подготовки 21.05.04 "Горное дело" специализации "Обогащение полезных ископаемых" всех форм обучения / ГОУВПО «ДОННТУ», Каф. обогащения полезных ископаемых ; сост. В. Г. Самойлик. – Электрон. дан. (1 файл: 402 Кб). – Донецк : ДОННТУ, 2020. – Систем. требования: Acrobat Reader.

Методические рекомендации для проведения практических занятий по дисциплины разработаны с целью оказания помощи обучающимся в усвоении теоретического материала и получении практических навыков по дисциплине «Основы научных исследований». Цель преподавания дисциплины – подготовка специалиста, обладающего знаниями теоретических и практических основ научных исследований, умеющего самостоятельно ставить перед собой научную задачу и определять наиболее эффективные методы её решения. Определены цель, содержание и порядок проведения практических работ, направленных на освоение методов научных исследований. Выполнение практических работ ориентировано на знание студентами статистических методов планирования экспериментов и оценки экспериментальных данных.

УДК 622.7:001.8(076)
ББК 72:33.4я73

Введение

Формой существования и развития науки является научное исследование. В Федеральном законе Российской Федерации от 23 августа 1996 г. «О науке и государственной научно-технической политике» научно-исследовательская деятельность определена как деятельность, направленная на получение и применение новых знаний.

Цель научного исследования - определение конкретного объекта и всестороннее, достоверное изучение его структуры, характеристик, связей на основе разработанных в науке принципов и методов познания, а также получение полезных для деятельности человека результатов, внедрение в производство с дальнейшим экономическим эффектом.

Объектом научного исследования являются материальная или идеальная системы, а предметом - структура системы, взаимодействие ее элементов, различные свойства, закономерности развития.

Результаты научных исследований оцениваются тем выше, чем выше научность сделанных выводов и обобщений, чем достовернее они и эффективнее. Они должны создавать основу для новых научных разработок. Одним из важнейших требований, предъявляемых к научному исследованию, является научное обобщение, которое позволит установить зависимость и связь между изучаемыми явлениями и процессами и сделать научные выводы. Чем глубже выводы, тем выше научный уровень исследования.

Целью практических работ по курсу «Основы научных исследований» является изучение статистических методов планирования экспериментов и оценки экспериментальных данных при исследованиях полезных ископаемых и технологических процессов обогащения.

Для качественного проведения практических работ необходима тщательная самоподготовка студентов, включающая:

- предварительное изучение соответствующих инструкций по правилам техники безопасности и неукоснительное их соблюдение в процессе выполнения практических работ;
- освоение теоретического материала по рекомендуемой литературе и конспекту лекций;
- изучение методических указаний к конкретной практической работе, уяснение цели, задачи и методики выполнения работы;
- ознакомление с требованиями, предъявляемыми к отчету по практической работе и подготовка необходимых таблиц для записи результатов исследований.

Работы выполняются индивидуально или группами по 2-3 человека. В начале занятий преподаватель контролирует готовность студентов к проведению текущей практической работы и принимает отчеты по предыдущей.

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1

ПОЛНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

1. Общие положения

Исследования полезных ископаемых различными методами сопряжено с проведением большого количества экспериментов для определения степени влияния различных факторов на эффективность разделения.

Традиционный подход к осуществлению активного эксперимента, согласно которому варьировался один фактор, а остальные поддерживались на постоянном уровне, во многих случаях не эффективен, так как при этом не учитывалось взаимное влияние факторов, возмущающее действие среды и наличие обратных связей. Кроме того, при традиционном подходе требовалось проведение большого числа опытов, а надёжность и достоверность результатов, компактность их представления были очень невысоки.

Планирование эксперимента предполагает постановку опытов по некоторой ранее составленной схеме (матрице), которая обладает специальными свойствами. Планирование эксперимента предусматривает применение математических методов на всех этапах: при анализе априорной информации, планировании эксперимента, обработке его результатов и принятии решений в конце работы (для интерпретации полученных данных).

Факторное планирование позволяет оценивать линейные эффекты взаимодействия при большом числе независимых переменных и получать модели, связывающие зависимую и независимые переменные.

2. Цель работы

Отработка методики планирования экспериментов при помощи полного факторного эксперимента.

3. Содержание работы

В полном факторном эксперименте (ПФЭ) для каждого фактора выбирается определённое число уровней и затем осуществляются все возможные их комбинации. В факторных экспериментах варьируют одновременно всеми переменными. Недостатком ПФЭ является необходимость постановки большого числа опытов, так как с ростом числа факторов число опытов растёт по степенному закону:

$$N = k^n, \qquad (1.1)$$

где N - число опытов; k - число факторов; n - число уровней каждого фактора.

Все возможные комбинации варьирования двух факторов на двух уровнях будут исчерпаны при постановке четырёх опытов ($N = 2^2$), а трёх факторов на двух уровнях - при постановке восьми опытов ($N = 2^3$). Геометрическая интерпретация ПФЭ показана на рис. 3.1.

План экспериментов формально представляется матрицей, где каждая строка соответствует одному опыту и определяет его условия. При реализации матрицы каждый фактор может принимать только два значения - «верхнее» и «нижнее». Знаки «+1» или «–1» обозначают, на каком уровне находятся значения факторов («+1» - на верхнем уровне, «–1» - на нижнем уровне).

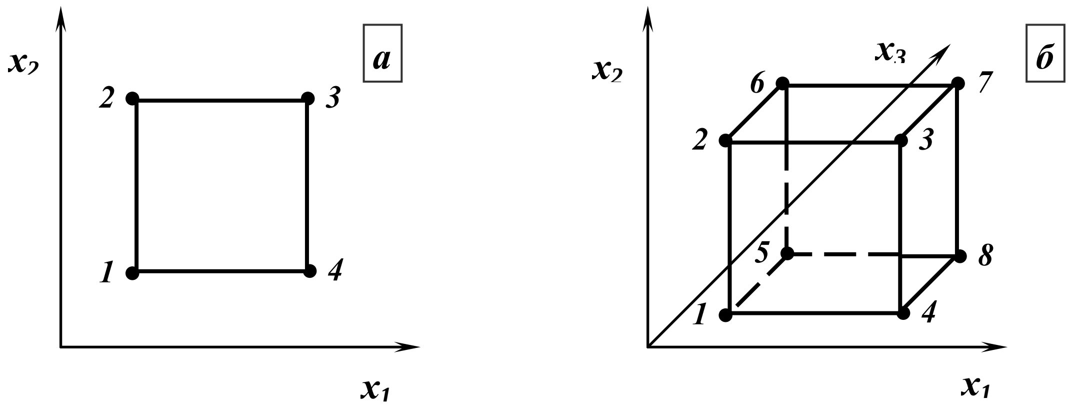

Рисунок 1.1 - Геометрическая интерпретация полного факторного эксперимента: а - план типа 2^2; б - план типа 2^3

При заполнении матрицы руководствуются правилом: частота смены знака (уровня) каждого следующего фактора вдвое меньше предыдущего. Если в матрице перебраны все возможные комбинации значений факторов, то матрица представляет полный факторный эксперимент «ПФЭ».

Матрица полного факторного эксперимента при трёх факторах приведена в табл. 1.1. Число строк матрицы - $N = 2^3 = 8$. В матрице условно не показаны «1», но они там незримо присутствуют.

Таблица 1.1

Полный факторный эксперимент для трёх независимых переменных (планирование типа 2^3)

№ опыта	Факторы			Параметр оптимизации
	X_1	X_2	X_3	Y
1	-	-	-	y_1
2	+	-	-	y_2
3	-	+	-	y_3
4	+	+	-	y_4
5	-	-	+	y_5
6	+	-	+	y_6
7	-	+	+	y_7
8	+	+	+	y_8

Перед экспериментом (реализацией матрицы планирования) задаются основными уровнями факторов (в натуральных единицах: %, г/л, кг/т и т.д.) и интервалами варьирования для каждого фактора. Основной уровень обозначают: X_{oi}, интервал варьирования - Δx. Кодовое обозначение основного, верхнего и нижнего уровней соответственно «0», «+1» и «-1».

Тогда для матрицы (табл. 1.1) условия проведения первого, второго и третьего опытов (значения факторов):

$$X_1 = X_{o1} - \lambda_1 \qquad X_2 = X_{o2} - \lambda_2 \qquad X_3 = X_{o3} - \lambda_3$$

$$X_1 = X_{o1} + \lambda_1 \qquad X_2 = X_{o2} - \lambda_2 \qquad X_3 = X_{o3} - \lambda_3$$

$$X_1 = X_{o1} - \lambda_1 \qquad X_2 = X_{o2} + \lambda_2 \qquad X_3 = X_{o3} - \lambda_3$$ и т.д.

Полный факторный эксперимент для трёх факторов позволяет раздельно оценить основные эффекты *A, B, C*, эффекты взаимодействия первого порядка *AB, AC, BC* и эффект взаимодействия второго порядка *ABC*.

Выбор нулевой точки (центра эксперимента) соответствует оптимальным значениям факторов на основе априорной информации, опыта экспериментатора и результатов обогащения аналогичных полезных ископаемых. При выборе интервала варьирования Δx руководствуются следующим:

- все значения факторов в матрице должны быть реализованы, то есть должны находиться в области существования этих факторов;

- величина интервала от «+1» до «-1» должна существенно превышать ошибку фиксирования данного фактора;

- интервал варьирования данного фактора должен обеспечивать влияние на выходные параметры процесса.

При постановке эксперимента опыты следует рандомизировать. Рандомизация заключается в случайном выборе очерёдности постановки опытов. Для случайного выбора номеров опытов можно использовать таблицу случайных чисел или лотерею. Рандомизацию применяют для исключения возможной систематической ошибки опытов и придания её случайного характера.

Функцию отклика моделируется полиномом первого порядка с учётом парных взаимодействий факторов:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3.$$

Благодаря ортогональности планов ПФЭ, их симметричности коэффициенты уравнения регрессии определяются по формулам:

$$b_0 = N^{-1} = \sum_{u=1}^{N} \bar{y}_u\,; \qquad (1.2)$$

$$b_i = N^{-1} \sum_{u=1}^{N} \bar{y}_u x_{iu}\;; \qquad i, j = 1,2,\ldots,n\,; \qquad (1.3)$$

$$b_{ij} = N^{-1}\sum_{u=1}^{N}\bar{y}_u x_{iu} x_{ju}\ ; \qquad i \neq j; \tag{1.4}$$

$$b_{ijk} = N^{-1}\sum_{u=1}^{N}\bar{y}_u x_{iu} x_{ju} x_{ku}\ ; \qquad i \neq j \neq k, \tag{1.5}$$

где x_{ijk} - элементы матрицы планирования (+1 или -1), в которой *ij* - номер фактора, а *u* - номер опыта.

Различные знаки при коэффициентах свидетельствуют о том, что влияние одного коэффициента слабеет при росте другого. Если коэффициенты имеют один знак, то совместное изменение факторов оказывает большее влияние на функцию отклика, чем индивидуальное изменение каждого фактора.

Пример.

На обогатительной фабрике были проведены исследования процесса фильтрования магнетитового концентрата. Изучали влияние содержания твёрдого в пульпе (X_1 = 30 - 60%), величины разряжения (X_2 = 0,03 - 0,09 МПа) и частоты вращения дисков (X_3 = 0,2 - 0,5 мин$^{-1}$) на удельную производительность вакуум-фильтра (Y, т/ч · м^2).

Решение.

Для планирования эксперимента был использован ПФЭ типа 2^3, который позволил оценить все линейные эффекты и все их взаимодействия. Матрица планирования и результаты экспериментов приведены в табл. 1.2.

Функцию отклика моделируется полиномом первого порядка с учётом парных взаимодействий факторов:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3.$$

Коэффициенты уравнения регрессии определяются по формулам:

$$b_0 = N^{-1} = \sum_{u=1}^{N}\bar{y}_u\ ; \qquad b_0 = 1,21\ ;$$

$$b_i = N^{-1}\sum_{u=1}^{N}\bar{y}_u x_{iu}\ ; \qquad b_1 = -0,099\ ; \quad b_2 = 0,129\ ; \quad b_3 = -0,179\ ;$$

$$b_{ij} = N^{-1}\sum_{u=1}^{N}\bar{y}_u x_{iu} x_{ju}\ ; \qquad b_{12} = -0,019\ ; \quad b_{13} = 0,024\ ; \quad b_{23} = -0,054\ ;$$

$$b_{ijk} = N^{-1}\sum_{u=1}^{N}\bar{y}_u x_{iu} x_{ju} x_{ku}\ ; \qquad b_{123} = -0,001\ .$$

Уравнение регрессии принимает вид:

Таблица 1.2 - Матрица планирования и результаты эксперимента

Интервал варьирования. № опыта	Уровни факторов			Взаимодействия факторов				Опытные данные		Расчёт
	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	$\bar{y}$	$S_y^2 \cdot 10^3$	$\hat{y}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Основной уровень $x_i = 0$	45	0,06	0,4							
Интервал варьирования Δx	15	0,03	0,2							
Верхний уровень $x_i = +1$	60	0,09	0,6							
Нижний уровень $x_i = -1$	30	0,03	0,2							
№ опыта:										
1	+	+	+	+	+	+	+	1,01	2,2	1,01
2	–	+	+	–	–	+	–	1,20	5,5	1,21
3	+	–	+	–	+	–	–	0,90	7,4	0,85
4	–	–	+	+	–	–	+	1,01	9,1	1,05
5	+	+	–	+	–	–	–	1,43	18,6	1,47
6	–	+	–	–	+	–	+	1,71	3,2	1,67
7	+	–	–	–	–	+	+	1,10	0,9	1,11
8	–	–	–	+	+	+	–	1,31	10,1	1,30

Примечание. В столбце 9 приведены средние значения функции отклика $\bar{y}$ (удельная производительность вакуум-фильтра, т/ч·м^2); в столбце 10 - дисперсия воспроизводимости опытных данных в каждой серии опытов (m = 6); в столбце 11 - результаты расчёта удельной производительности фильтра по полученным уравнениям.

$$\hat{y} = 1{,}21 - 0{,}099x_1 + 0{,}129x_2 - 0{,}179x_3 - 0{,}019x_1x_2 +$$
$$+ 0{,}024x_1x_3 - 0{,}054x_2x_3 - 0{,}001x_1x_2x_3.$$

Проводится проверка гипотезы об однородности выборочных дисперсий воспроизводимости.

Критерий Кохрена $G_{табл.}$ со степенями свободы: $f_1 = m - 1 = 6 - 1 = 5$, $f_2 = N = 8$ и степенью риска $\alpha = 0{,}05$: $G_{табл.} = 0{,}4387$ (приложение 1).

при $$G = \frac{S^2_{y\max}}{\sum_1^n S_y^2} = 0{,}326 \prec G_{табл}$$

гипотеза об однородности не отвергается.

Рассчитывается оценка дисперсии воспроизводимости со степенью свободы $f = f_1 \cdot f_2 = 5 \cdot 8 = 40$:

$$S^2 = \left(\sum_1^n S_y^2\right) / N = 57 \cdot 10^{-3} / 8 = 7{,}125 \cdot 10^{-3}\ .$$

Значимость коэффициентов регрессии проверяют с помощью критерия Стьюдента. Коэффициент значим, если $|b_i| \geq tS_{bi}$.

$$S_{bi} = \sqrt{S^2 / Nm} = \sqrt{7{,}125 / 8 \cdot 6} = 0{,}0121.$$

При $\alpha = 0{,}05$ и $f = N(m-1) = 40$: $t = 2{,}0211$ (приложение 2).

$$b_{кр} = tS_{bi} = 2{,}0211 \cdot 0{,}0121 = 0{,}0244\,.$$

Таким образом, коэффициенты b_{12}, b_{13} и b_{123} принимаются незначимыми и уравнение регрессии принимает вид:

$$\hat{y} = 1{,}21 - 0{,}099x_1 + 0{,}129x_2 - 0{,}179x_3 - 0{,}054x_2x_3.$$

Проверка адекватности модели:

$$S^2_{ад} = m^{-1}(N-d)^{-1}\sum_{u=1}^{N}(y_u - \bar{y}_u)^2 = [\,6 \cdot (8-5)\,]^{-1} \cdot 100{,}8 \cdot 10^{-3} = 5{,}6 \cdot 10^{-3}\ .$$

Адекватность проверяется по критерию Фишера. При уровне значимости $1 - \alpha = 95\%$ и степенях свободы $f_1 = N - d = 3$ и $f_2 = N(m - 1) = 40$ критерий Фишера $F_{кр} = 2{,}84$ (приложение 3).

Отношение $F = S^2_{ад} / S^2 = 5{,}6 \cdot 10^{-3} / 7{,}125 \cdot 10^{-3} = 0{,}79 \prec F_{кр}$.

Модель признается адекватной.

4. Задание для расчета

Варианты исходных данных для расчета приведены в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Варианты исходных данных по полному факторному эксперименту

Наименование	Номер варианта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Уровни факторов										
x_1	40	42	41	48	46	43	44	47	41	46
Δx_1	15	10	12	10	15	14	15	11	12	13
x_2	0,06	0,05	0,08	0,07	0,05	0,08	0,06	0,07	0,06	0,08
Δx_2	0,02	0,03	0,01	0,02	0,02	0,02	0,02	0,01	0,03	0,01
x_3	0,4	0,6	0,3	0,5	0,3	0,4	0,3	0,5	0,4	0,5
Δx_3	0,2	0,1	0,2	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1
Опытные данные										
y_1	1,02	0,99	1,0	0,98	1,01	0,97	1,03	1,01	0,98	0,99
y_2	1,18	1,19	1,22	1,17	1,21	1,16	1,21	1,20	1,22	1,19
y_3	0,89	0,90	0,92	0,88	0,94	0,86	0,91	0,93	0,87	0,91
y_4	1,00	1,02	0,99	0,97	1,01	1,02	0,99	0,98	1,01	1,02
y_5	1,42	1,38	1,39	1,40	1,41	1,37	1,44	1,39	1,39	1,42
y_6	1,72	1,68	1,70	1,71	1,69	1,67	1,73	1,68	1,69	1,71
y_7	1,09	1,07	1,12	1,11	1,09	1,08	1,10	1,12	1,11	1,09
y_8	1,30	1,29	1,27	1,32	1,31	1,28	1,33	1,30	1,29	1,31

5. Содержание отчета

- описание методики проведения ПФЭ;
- исходные данные для построения математической модели процесса;
- методика расчета математической модели и проверка её адекватности;
- результаты расчётов.

Контрольные вопросы

1. Назовите основные особенности полного факторного эксперимента.
2. В чём суть рандомизации опытов и для чего её применяют?
3. О чём свидетельствуют различные знаки при коэффициентах математической модели процесса?
4. Как проводится проверка гипотезы об однородности выборочных дисперсий воспроизводимости?
5. По какому критерию проводится проверка адекватности полученной модели процесса?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2

ДРОБНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

1. Общие положения

Использование полного факторного эксперимента не всегда целесообразно, так как с одной стороны необходимо большое число опытов, с другой стороны на первом этапе исследования не требуется высокая точность уравнений аппроксимирующей поверхности. Поэтому чаще используют дробный факторный эксперимент (ДФЭ).

Обычно планы дробного факторного эксперимента (ДФЭ) обозначают 2^{n-p}. Из множества n факторов отбирают p вспомогательных и n - p основных факторов, для которых строят полный факторный план. Этот план потом дополняют p столбцами, соответствующими оставшимся факторам.

Способ построения каждого из p столбцов определяется генераторами плана ДФЭ – произведениями основных факторов. В случае плана 2^{n-p} должно быть p генераторов.

В случае ДФЭ с планом 2^{3-1} генератор может быть равен $x_3 = x_1x_2$. Полученный план (табл. 2.1) является полурепликой (половиной) полного факторного плана. При этом все свойства полного факторного эксперимента сохранены.

Таблица 2.1

Дробный факторный эксперимент для трёх независимых переменных (планирование типа 2^{3-1})

№ опыта	Факторы			Параметр оптимизации
	x_1	x_2	$x_3 = x_1x_2$	$У$
1	-	-	+	y_1
2	-	+	-	y_2
3	+	+	+	y_3
4	+	-	-	y_4

Матрица ДФЭ представляет собой 1/2, 1/4, 1/8 и т.д. реплику, в которой столбец одного из эффектов получают перемножением столбцов других эффектов.

Для оценок коэффициентов и анализа моделей с использованием ДФЭ и ПФЭ применяют одни и те же формулы.

2. Цель работы

Отработка методики планирования экспериментов при помощи дробного факторного эксперимента.

3. Содержание работы

План экспериментов формально представляется матрицей, где каждая строчка соответствует одному опыту и определяет его условия. При реализации матрицы каждый фактор может принимать только два значения – "верхнее" и "нижнее". Знаки "+" или "-" обозначают, на каком уровне находятся значения факторов ("+" – на верхнем уровне, "-" – на нижнем).

При заполнении матрицы можно руководствоваться правилом: частота смены знака последующего фактора в два раза меньше предыдущего.

Перед экспериментированием (реализацией матрицы планирования) задаются основными уровнями факторов (в натуральных единицах: %, г/л, кг/т и т.д.) и шагами варьирования для каждого фактора. Основной уровень обозначают: X_{oi}, шаг варьирования – λ_i .

Тогда для матрицы условия проведения первого опыта (значения факторов):

$$X_1 = X_{o1}+\lambda_1,\quad X_2 = X_{o2}+\lambda_2,\quad X_3 = X_{o3}+\lambda_3,\quad X_4 = X_{o4}+\lambda_4,\quad X_5 = X_{o5}+\lambda_5;$$

для второго опыта:

$$X_1 = X_{o1}-\lambda_1,\quad X_2 = X_{o2}+\lambda_2,\quad X_3 = X_{o3}+\lambda_3,\quad X_4 = X_{o4}+\lambda_4,\quad X_5 = X_{o5}-\lambda_5;$$ и т.д.

Матрица ДФЭ 2^{5-2} приведена в таблице 2.2.

В результате обработки матрицы можно получить уравнение:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5 .$$

Значения коэффициентов уравнения определяются по формуле:

$$b_i = \sum y_j \cdot x_{ij}/N,$$

где b_i – коэффициенты уравнения; y_j – значения функции отклика j-того опыта; x_{ij} – значение (знак) i-того фактора в j-том опыте; N – число опытов.

Для b_0 все x_{0j} = +1.

После вычисления среднего значения функции нулевых опытов определяется ошибка опытов:

$$S_в^2 = \sum(y_{0i} - y_{ср})^2/f,$$

где $S_в$ – дисперсия воспроизводимости опытов; y_{0i} - значения функции отклика *i*-того нулевого опыта; $y_{ср}$ - среднее значение функции нулевых опытов; $f = N_0 - 1$ – число степеней свобод, N_0 – число нулевых опытов.

Определяется ошибка коэффициентов по формуле:

$$S_b^2 = S_в^2/N,$$ где N – число опытов ДФЭ.

Для нашего примера N = 8.

Таблица 2.2

Дробный факторный эксперимент для трёх независимых переменных (планирование типа 2^{5-2})

Показатели	Фактор					Функция отклика, y_j	Расчетное значение, $y_j^{р.}$
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5		
Основной уровень							
Интервал варьирования							
Верхний уровень							
Нижний уровень							
Опыт:							
1	+	+	+	+	+		
2	-	+	+	+	-		
3	+	-	+	-	-		
4	-	-	+	-	+		
5	+	+	-	-	-		
6	-	+	-	-	+		
7	+	-	-	+	+		
8	-	-	-	+	-		
Нулевые опыты	0	0	0	0	0		
	0	0	0	0	0		
	0	0	0	0	0		
	0	0	0	0	0		

Определяется предельное значение значимого коэффициенты при доверительной вероятности Р = 95% и числе степеней свободы ошибки f = 4-1=3.

$$b_{i\ пред.} = t \cdot S_b,$$

где t – критерий Стьюдента (приложение 2).

Значимыми считаются коэффициенты уравнения, для которых справедливо выражение:

$$b_i > b_{i\ пред.}$$

С использованием значимых коэффициентов составляется уравнение математической модели процесса и вычисляются расчетные значения функции отклика $y_j^{р.}$ для каждого опыта. Данные заносятся в последнюю колонку таблицы 2.2.

Определяется остаточная дисперсия по формуле:

$$S_{ост}^2 = \sum(y_j - y_j^{р.})^2/f,$$

где y_j – значение функции отклика, полученное в j-том опыте; $y_j^{р.}$ – расчетное значение функции отклика в j-том опыте; f = N - k -1 – число степеней свободы; k – число коэффициентов в уравнении.

Проверяется адекватность полученной модели по формуле:

$$F = S_{ост}^2 / S_в^2,$$

где F – критерий Фишера.

Если $F < F_{табл.}$ модель считается адекватной.

Значение $F_{табл.}$ при доверительной вероятности 95% и числе степеней свободы f_1 и f_2 (соответственно большей и меньшей дисперсий) приведены в приложении 3.

4. Задание для расчета

Составить план 2^{5-2} для пяти реагентов с нулевыми уровнями и интервалами варьирования, представленными в табл. 2.3. Значения функции отклика (извлечение ε), полученные при проведении флотационных опытов, приведены в табл. 2.4.

Найти модель, оценить значимость коэффициентов и адекватности модели.

Таблица 2.3

Значения факторов и интервалы варьирования

Вариант	Нулевой уровень факторов					Интервал варьирования факторов				
	X_{o1}	X_{o2}	X_{o3}	X_{o4}	X_{o5}	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
1	5	20	40	60	100	1	4	5	10	20
2	6	20	40	80	100	2	4	6	10	20
3	5	15	35	75	90	1	3	5	8	15
4	7	18	36	85	96	1	3	4	10	15
5	8	19	35	65	90	1	4	5	10	20
6	6	21	38	80	95	1	3	6	12	15
7	8	25	40	90	120	2	5	5	15	20
8	10	20	50	90	110	2	5	10	15	20
9	8	25	50	80	100	2	4	8	10	20
10	10	30	50	100	120	2	5	10	15	25

Таблица 2.4

Значения функции отклика

Вари ант	Значения функции отклика											
	ε_1	ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6	ε_7	ε_8	ε_0	ε_0	ε_0	ε_0
1	60	50	70	60	80	50	40	60	56,5	63,5	62	58
2	60	52	70	65	72	55	54	60	60	61	62	58
3	65	51	65	62	68	58	61	52	61	60	62	60
4	65	55	63	62	68	58	62	52	61	60	62	60
5	65	50	63	62	68	57	62,5	52	61	60	62	59
6	64	51	63	63	67	57	62,5	52	60,5	59	61	58
7	62	56	68	60	69	57	58	57	61	59	60	58
8	66	58	70	60	69	55	58	56	62	59	60	59
9	60	53	67	59	70	56	50	58	60	59	62	57
10	61	50	70	59	72	57	51	59	61	58	60	57

5. Содержание отчета

- описание методики проведения ДФЭ;
- исходные данные для построения математической модели процесса;
- методика расчета математической модели и проверка её адекватности;
- результаты расчётов.

Контрольные вопросы

1. Назовите основные особенности дробного факторного эксперимента.
2. Для чего проводятся нулевые опыты?
3. Как проводится проверка гипотезы об однородности выборочных дисперсий воспроизводимости?
4. По какому критерию проводится проверка адекватности полученной модели процесса?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3

МЕТОД КРУТОГО ВОСХОЖДЕНИЯ

1. Общие положения

Рассмотренное в предыдущих двух работах факторное планирование, как правило, не позволяет определить рациональные технологические режимы изучаемого процесса. Однако, выбор преимущественных факторов и оценка их значимости по коэффициентам линейной регрессии позволяет спланировать следующие эксперименты для достижения оптимальной области кратчайшим путём.

Определение параметров, соответствующих этой оптимальной области, осуществляется методом крутого восхождения.

2. Цель работы

Отработка методики поиска оптимума методом крутого восхождения.

3. Содержание работы

Выбор преобладающих факторов и оценка их значимости по коэффициентам регрессии линейной модели позволяет спланировать последующие эксперименты для достижения оптимальной области кратчайшим способом. Эта задача решается путём учета знаков при коэффициентах. Например, если

$$y = b_0 + b_1x_1 - b_2x_2 + b_3x_3 - b_4x_4 + b_5x_5,$$

то для увеличения y необходимо увеличивать x_1, x_3, x_5 и уменьшать x_2, x_4.

При опытах крутого восхождения важно правильно выбрать величину шага. Необходимо изменять факторы пропорционально их коэффициенту регрессии и в сторону, соответствующую знаку коэффициента. Для этого вычисляется расчетный коэффициент:

$$k_p = 1/\left|b_{i\,max}\right|,$$

где $b_{i\ max}$ – максимальное значение значимого коэффициента линейной модели.

Шаг крутого восхождения по любому фактору в натуральных единицах можно вычислить по формуле:

$$\Delta X_{i\,н} = k_p \cdot b_i \cdot \lambda_i,$$

где λ_i – интервал варьирования i-того фактора.

Опыты крутого восхождения начинаются от основного уровня. Значения значимых факторов в первом опыте определяются по формуле:

$$X_i = X_{oi} + \Delta X_{i\,н}.$$

Значения незначимых факторов (для коэффициентов которых справедливо неравенство $b_i < b_{i\,пред.}$) фиксируются на нижнем уровне.

После вычисления значения факторов в каждом опыте записываются условия опытов крутого восхождения в виде табл. 3.1.

Таблица 3.1

Опыты крутого восхождения

Опыты	Фактор					Функция отклика, y_j
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
1						
2						
3						
4						

Пример.

Необходимо определить оптимальные условия флотации руды.

В качестве исходных данных для оптимизации приняты результаты исследований, выполненные в работе 2 с помощью ДФЭ 2^{5-2} (табл. 3.2).

Таблица 3.2

Результаты проведения ДФЭ 2^{5-2}

Фактор	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
Основной уровень	5	20	40	60	100
Интервал варьирования	1	4	5	10	20
Коэффициент регрессии	3,75	-	-	-6,25	-6,25

Решение.

Анализируя полученные коэффициенты регрессии линейной модели процесса (табл. 3.2), можно сделать вывод, что для достижения оптимальной области необходимо увеличивать значения фактора X_1 и уменьшать значения факторов X_4 и X_5.

За базовый принят фактор X_5, имеющий максимальное значение коэффициента регрессии. Рабочий шаг по X_5 принимаем $\Delta X_5 = -20$.

Определяем расчётный коэффициент:

$$k_p = 1/\left| b_{i\,max} \right| = 1/\left| -6{,}25 \right| = 0{,}16.$$

Вычисляем шаг крутого восхождения для значимых факторов:

$\Delta X_1 = k_p \cdot b_1 \cdot \lambda_1 = 0{,}16 \cdot 3{,}75 \cdot 1 = 0{,}6;$

$\Delta X_4 = k_p \cdot b_4 \cdot \lambda_4 = 0{,}16 \cdot (-6{,}25) \cdot 10 = -10.$

Остальные факторы фиксируем на основном уровне.

Следовательно, при крутом восхождении в первом опыте факторы будут иметь значения 5,6; 20; 40; 50 и 80 (табл. 3.3).

Таблица 3.3

Результаты, полученные при оптимизации флотации методом крутого восхождения

Опыты	Фактор					Функция отклика, y_j
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	
1	5,6	20	40	50	80	75
2	6,2	20	40	40	60	78
3	6,8	20	40	30	40	84
4	7,4	20	40	20	20	72

Реализация экспериментов в точках 2 и 3 метода крутого восхождения позволила существенно улучшить процесс: достичь извлечения 84%. Следующий шаг привёл к ухудшению показателей флотации.

Таким образом, методом крутого восхождения были определены оптимальные условия процесса флотации: расходы реагентов - соответственно 6,8; 20; 40; 30 и 40 г/т. Определение оптимальных условий флотации с учётом пяти факторов потребовало постановки 16 опытов (12 опытов по ДФЭ 2^{5-2} и 4 опытов крутого восхождения).

<u>4. Задание для расчета</u>

Определить оптимальные условия флотации руды.

В качестве исходных данных для оптимизации принять результаты исследований, выполненные в работе 2 с помощью ДФЭ 2^{5-2}.

Значения функции отклика, полученные в опытах крутого восхождения, приведены в табл. 3.4.

Таблица 3.4

Значения функции отклика, полученные в опытах крутого восхождения

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_1	74	75	74	76	77	74	74	77	76	77
y_2	76	77	80	78	79	80	76	77	80	79
y_3	78	78	81	82	81	81	78	78	82	81
y_4	74	72	76	84	84	76	74	74	77	83
y_5	72	-	-	76	75	-	72	-	-	76

5. Содержание отчета

- расчёт шага крутого восхождения для различных факторов;
- описание методики проведения опытов крутого восхождения;
- определение оптимальных параметров процесса методом крутого восхождения;
- результаты расчётов.

Контрольные вопросы

1. Что является основой для опытов крутого восхождения?
1. Для чего вычисляется расчётный коэффициент?
2. На основании чего выбирается базовый фактор в методе крутого восхождения?
3. Как определяется шаг крутого восхождения для значимых факторов?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4

СИМПЛЕКС-МЕТОД

<u>1. Общие положения</u>

Сущность симплексного метода состоит в том, что первая серия экспериментов ставится так, чтобы точки, которые отвечают условиям проведения опытов, создавали правильный (регулярный) симплекс в многомерном пространстве. Правильный симплекс ─ это множество n + 1 равноудалённых друг от друга точек в n-мерном пространстве. Для n = 2 это равносторонний треугольник, для n = 3 ─ тетраэдр и т.д.

Правильный симплекс с центром в начале координат в n-мерном пространстве задаётся матрицей:

$$\begin{pmatrix} -k & -k_2 & \ldots & -k_{n-1} & -k_n \\ R_1 & -k_2 & \ldots & -k_{n-1} & -k_n \\ 0 & R_2 & \ldots & -k_{n-1} & -k_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & k_{n-1} & -k_n \\ 0 & 0 & \ldots & R_{n-1} & -k_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & R_n \end{pmatrix} \qquad (4.1)$$

где $k_i = 1/\sqrt{2i(i+1)}$; $R_i + 1/\sqrt{2(i+1)}$; $i = 1, 2, \ldots, n$.

В матрице каждая строка соответствует одному из опытов серии. В столбцах указаны кодированные значения факторов при единичной длине ребра симплекса. Например, для двухмерного пространства $k_1 = 0{,}5$; $R_1 = 0{,}5$; $k_2 = 0{,}2887$; $R_2 = 0{,}4082$. Вершины начального симплекса имеют такие координаты: (0,5; -0,2887); (0,5; -0,2887); (0; 0,4082).

Перед проведением экспериментов необходимо выбрать интервал варьирования каждого фактора и принять его равным единице. После построения исходного симплекса и проведения опытов результаты анализируют и выбирают вершину симплекса, в которой получено наименьшее значение целевой функции (при поиске максимума).

Для движения к оптимуму необходимо поставить опыт в точке, которая является зеркальным отражением точки с минимальным значением функции отклика относительно противоположной грани симплекса.

Для определения условий проведения опыта в отражённой точке используют формулу:

$$x_{N+1} = \frac{2}{n} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n+1} (x_i) - x_{min} \right] - x_{min}, \tag{4.2}$$

где x_{N+1} – координата новой точки; x_{min} – координата точки, соответствующей худшему результату; $\sum_{i=1}^{n+1}(x_i)$ – сумма координат всех точек симплекса.

На рис. 4.1 иллюстрируется движение правильного симплекса к экстремуму поверхности отклика, представленной линиями равного значения критерия эффективности двухфакторного процесса (факторы X_1 и X_2). Условия этих первых опытов берутся из области значений факторов, соответствующих наиболее благоприятным из известных режимов оптимизируемого процесса.

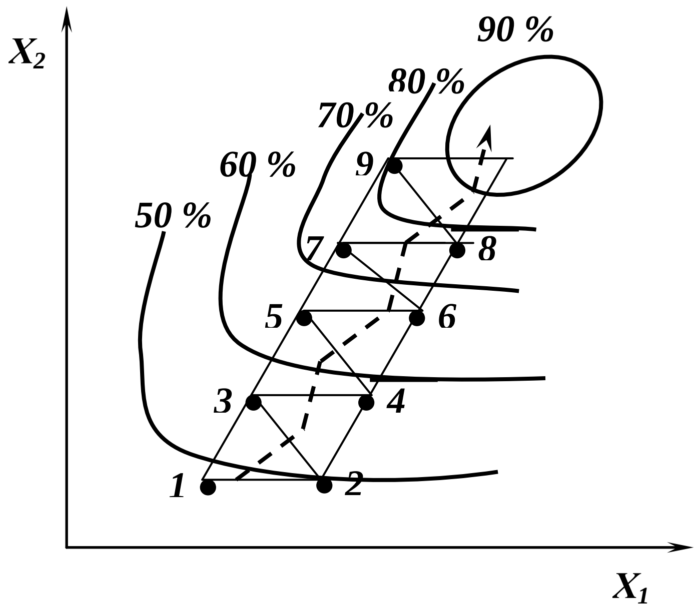

Рисунок 4.1 – Схема движения к оптимальной области симплексным методом

Опыты, поставленные в вершинах симплекса 1, 2 и 3, показали, что худшим результатом оказался опыт 1. Следующий опыт ставится в вершине 4, которая является зеркальным отражением вершины 1 и создаёт с вершинами 1 и 2 новый симплекс. Далее сопоставляются опыты в вершинах 2, 3 и 4. Худший результат (вершина 2) заменяют новой – вершиной 5, где проводится следующий эксперимент и т.д.

Если значение целевой функции в новой вершине меньше, чем в остальных, и необходимо вернуться к предыдущему симплексу, то во избежание зацикливания симплекс уменьшают в 2-4 раза и продолжают движение.

Целесообразно в каждой вершине симплекса опыты повторить несколько раз и в дальнейшем учитывать математическое ожидание функции отклика.

Если экстремум критерия оптимальности достигнут, то дальнейшее движение симплекса прекращается. Это значит, что новый шаг возвращает исследователя в предыдущую точку факторного пространства.

2. Цель работы

Отработка методики поиска оптимума с применением симплекс-метода.

3. Содержание работы

Рассмотрим методику поиска оптимальной области процесса обогащения на примере.

Пример.

Необходимо с применением симплекс-метода найти оптимальную область флотации угля (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Применение симплекс-метода для оптимизации флотации угля

№ опыта	Симплекс		Расход				Извлечение ε, %
	координаты	вершина	собиратель		вспениватель		
			кодир. ед.	г/т	кодир. ед.	г/т	
1	1, 2, 3	1	- 0,5	900	- 0,289	50,00	80
2	1, 2, 3	2	0,0	1000	0,408	47,11	83
3	1, 2, 3	3	0,5	1100	- 0,289	54,08	82
4	4, 2, 3	4	1,0	1200	0,408	47,11	86
5	4, 2, 5	5	0,5	1100	1,105	54,08	89
6	4, 6, 5	6	1,5	1300	1,105	61,05	91
7	7, 6, 5	7	1,0	1200	1,802	68,02	93
8	7, 6, 8	8	2,0	1400	1,802	68,02	92
9	7, 9, 8	9	1,5	1300	2,499	74,99	91

Решение.

Двухмерность факторного пространства позволила показать на рис. 6.2 схему движения симплекса в процессе поиска. Факторами оптимизации x_1 и x_2 являлись расходы собирателя и вспенивателя, соответственно. В качестве целевой функции было принято извлечение горючей массы в концентрат ε. Интервалы изменения расхода собирателя и вспенивателя составляют, соответственно, 200 г/т и 10 г/т. Центр плана: x_1 = 1000 г/т и x_2 = 50 г/т.

После реализации экспериментов в точках **1, 2, 3** исходного симплекса, то есть при условиях, которые заданы координатами этих точек, очевидно, что худший технологический результат ε_1 = 80% получен в точке **1**. На следующем шаге применена операция отображения координат точки **1**.

Координаты новой точки эксперимента **4** рассчитывают по формуле (6.2):

X_1=2/2[-0,5 + 0 + 0,5 – (-0,5)] – (-0,5) = 1;
X_2=2/2[-0,289 + 0,408 + (-0,289) – (-0,289)] – (-0,289) = 0,408.

В следующем симплексе с вершинами **2, 3, 4** худший результат в точке **3**. Для этого симплекса по той же формуле (4.2) определяют координаты точки **5** (X_1 = 0,5; X_2 = 1,105). Таким же образом определяют и другие точки симплекс-метода.

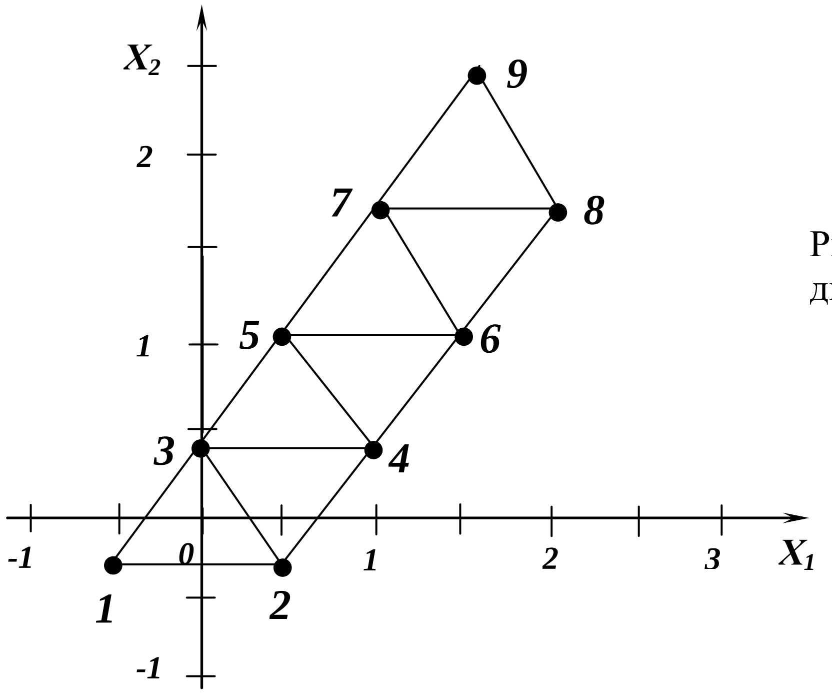

Рисунок 4.2 – Схема движения симплекса

Результат опыта в вершине **7**: ε = 93%. Продолжение исследования показывает, что приращения функции ε практически нет. Можно сделать вывод, что симплекс достиг экстремальной области. Продолжение поиска приводит к «вращению» симплекса.

Принимаем координаты максимума:

расход собирателя X_1 = 1200 г/т, расход вспенивателя X_2 = 68,02 г/т, при этом извлечение составляет ε = 93%.

4. Задание для расчета

С применением симплекс-метода найти оптимальные условия флотации угля. Факторы оптимизации x_1 и x_2 – расходы собирателя и вспенивателя, соответственно. В качестве целевой функции принято извлечение горючей массы в концентрат ε. Интервалы изменения расхода собирателя и вспенивателя составляют, соответственно, 200 г/т и 20 г/т. Центр плана: x_1 = 1500 г/т и x_2 = 100 г/т. Изобразить графически схему движения симплекса.

Данные для расчета приведены в табл. 4.2.

5. Содержание отчета

- описание сущности симплексного метода;
- иллюстрируется движение правильного симплекса к экстремуму поверхности отклика;
- определение условий проведения опыта в отражённой точке;
- определение оптимальных параметров процесса симплекс-методом;
- результаты расчётов и схема движения симплекса.

Таблица 4.2

Данные для построения симплекса

Вариант	Извлечение горючей массы в концентрат в опытах								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	80	84	83	85	87	91	92	93	90
2	82	83	81	87	85	84	89	86	85
3	83	86	85	88	90	92	94	91	87
4	76	81	80	83	86	87	88	85	83
5	79	84	82	85	87	91	93	92	91
6	84	83	81	87	85	86	89	86	85
7	82	83	84	86	87	88	89	86	85
8	76	80	79	82	84	86	88	85	83
9	83	86	85	88	90	92	94	91	89
10	81	83	82	85	87	89	92	90	88

Контрольные вопросы

1. Для каких целей используется симплекс-метод?
2. Какие координаты имеют вершины начального симплекса и как они вычисляются?
3. По какой формуле определяются условия проведения опыта в отражённой точке?
4. Какие значения имеют факторы оптимизации в центре плана?
5. По каким данным строится схема движения симплекса?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 5

ОДНОФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

1. Общие положения

Ошибка воспроизводимости экспериментов, которая оценивается с помощью дисперсии, может быть следствием не одной, а нескольких причин или операций. Так, например, при исследовании на обогатимость дисперсия результатов может складироваться из ряда компонентов: химического анализа, отбора проб и обогатительного эксперимента. Если известна величина компонентов дисперсии, совершенствуют соответствующие операции, чтобы наиболее эффективно снизить ошибку эксперимента.

При полупромышленных и промышленных испытаниях вопрос о влиянии полноты усреднения и однородности проб приобретает первостепенное значение. Важность раздельной оценки дисперсий, связанных с вариацией сортности полезного ископаемого, точностью поддержания режима обогащения и ошибкой анализа, определяется необходимостью подбора такого режима обогащения, который наряду с высокими средними показателями обеспечивает стабильность результатов при изменении качества полезного ископаемого.

Решение подобных задач составляет предмет дисперсионного анализа. С помощью дисперсионного анализа определяются дисперсии, обусловленные действием каждого фактора в отдельности и их взаимодействием, и оценивается статистическая значимость этих величин с учётом ошибки воспроизводимости.

2. Цель работы

Отработка методики оценки ошибки воспроизводимости экспериментов при научных исследованиях.

3. Содержание работы

При осуществлении дисперсионного анализа, если наблюдается действие одного фактора, задачу можно сформулировать следующим образом: пусть наблюдают m независимых нормально распределённых величин x_1, x_2, ..., x_m, и при этом предполагают, что все они имеют одно и тоже среднее квадратическое отклонение S. Над каждым переменным выполняется n наблюдений (табл. 5.1).

В задаче необходимо на уровне значимости α проверить нулевую гипотезу о равенстве групповых средних при допущении, что групповые генеральные дисперсии хотя и неизвестны, но одинаковы.

Таблица 5.1

Результаты исследований

№ испытания, i	№ аппарата (уровень фактора), j			
	1	2	3	m
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1m}
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2m}
…	…	…	…	…
n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nm}
Групповая средняя, $\bar{x}_{грj}$	$\bar{x}_{гр1}$	$\bar{x}_{гр1}$	…	$\bar{x}_{грm}$

Для решения этой задачи вводятся:

- *общая сумма* квадратов отклонений наблюдаемых значений признака от общей средней:

$$S_{общ} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x})^2 ; \tag{5.1}$$

- *факторная сумма* квадратов отклонений групповых средних от общей средней (характеризует рассеяние между группами):

$$S_{факт} = m\sum_{j=1}^{m}(\bar{x}_{грj} - \bar{x})^2 ; \tag{5.2}$$

- *остаточная сумма* квадратов отклонений наблюдаемых значений группы от своей групповой средней (характеризует рассеяние в середине группы):

$$S_{осс} = S_{общ} - S_{факт} . \tag{5.3}$$

Для вычисления общей и факторной сумм более удобны такие формулы:

$$S_{общ} = \sum_{j=1}^{m} P_j - \frac{\left[\sum_{j=1}^{m} R_j\right]^2}{mn} , \tag{5.4}$$

$$S_{факт} = \frac{\sum_{j=1}^{m} R_j^2}{n} - \frac{\left[\sum_{j=1}^{m} R_j\right]^2}{mn} , \tag{5.5}$$

где $P_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2$ - сумма квадратов наблюдаемых значений признака на уровне m_j;

$R_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}$ - сумма наблюдаемых значений признака на уровне m_j.

Если наблюдаемые значения признака являются сравнительно большими числами, то для упрощения вычислений вычитают из каждого значения одно и тоже число *C*, которое примерно равно общей средней.

Если уменьшенные значения $y_{ij} = x_{ij} - C$, то

$$S_{общ} = \sum_{j=1}^{m} Q_j - \frac{\left[\sum_{j=1}^{m} T_j\right]^2}{mn}, \qquad (5.6)$$

$$S_{факт} = \frac{\sum_{j=1}^{m} T_j^2}{n} - \frac{\left[\sum_{j=1}^{m} T_j\right]^2}{mn}, \qquad (5.7)$$

где $Q_j = \sum_{i=1}^{n} y_{ij}^2$ - сумма квадратов уменьшенных значений признака на уровне m_j;

$T_j = \sum_{i=1}^{n} y_{ij}$ - сумма уменьшенных значений признака на уровне m_j.

Факторную и остаточную сумму делят на соответствующее число степеней свободы и находят факторную и остаточную дисперсии:

$$S_{факт}^2 = \frac{S_{факт}}{m-1}, \qquad (5.8)$$

$$S_{осс}^2 = \frac{S_{осс}}{m(n-1)} . \qquad (5.9)$$

После этого сравнивают факторную и остаточную дисперсии по критерию Фишера:

$$F_{набл} = S_{факт}^2 \big/ S_{осс}^2 . \qquad (7.10)$$

Если $F_{набл} \prec F_{кр}$ - различие групповых средних незначимо.

Если $F_{набл} \succ F_{кр}$ - различие групповых средних значимо.

Если факторная дисперсия окажется меньше остаточной, то отсюда следует справедливость нулевой гипотезы о равенстве групповых средних, поэтому дальнейшие вычисления (сравнение дисперсий с помощью критерия *F*) лишние.

Пример.

При совместном анализе точности результатов флотации руды, проводимой на трёх лабораторных флотомашинах, решается вопрос: можно ли считать их систематические ошибки одинаковыми. Число флотомашин - m (m = 3) и в каждой из них проводятся одинаковые флотационные опыты n раз (n = 4).

По результатам флотационных опытов определялся индекс селективности - параметр y:

$$y = \sqrt{\varepsilon(1-R)/[R(1-\varepsilon)]},$$

где $\varepsilon = \gamma\beta/\alpha$ - извлечение полезного компонента в концентрат, доли ед.; α, β - содержание металла в исходном продукте и концентрате, доли ед.; γ - выход концентрата, доли ед.; R - извлечение породного компонента в концентрат, доли ед.

Результаты исследований приведены в табл. 5.2.

Таблица 5.2

Результаты исследований

Число опытов, n	Число уровней фактора (число флотомашин), m		
	1	2	3
1	13,5	13,0	12,1
2	13,2	12,4	12,2
3	13,1	12,6	13,4
4	13,0	12,0	13,1
Σ	58,2	50,0	50,8
Среднее	13,2	12,5	12,7

Решение.

Для упрощения вычислений вычитаем из каждого наблюдаемого значения общую среднюю $\bar{x} = (13{,}2 + 12{,}5 + 12{,}7)/3 = 12{,}8$ и переходим к уменьшенным величинам, например, $y_{11} = x_{11} - 12{,}8 = 13{,}5 - 12{,}8 = 0{,}7$ и т.д.

Составляем расчётную таблицу (табл. 5.3) и с использованием итогового столбца вычисляем общую, факторную и остаточную суммы квадратов отклонений при числе уровней фактора m = 3 и числе измерений на каждом уровне n = 4.

Выполняем расчёт следующих параметров:

*Общая сумма квадратов отклонений:

$$S_{\text{îáù}} = \sum_{j=1}^{m} Q_j - \frac{\left[\sum_{j=1}^{m} T_j\right]^2}{mn} = 2{,}96 - 0 = 2{,}96.$$

Таблица 5.3

Расчётная таблица

№ опыта	Уровни фактора						Итоговый столбец
	m_1		m_2		m_3		
	y_{i1}	y_{i1}^2	y_{i2}	y_{i2}^2	y_{i3}	y_{i3}^2	
1 2 3 4	0,7 0,4 0,3 0,3	0,49 0,16 0,09 0,04	0,2 - 0,4 - 0,2 - 0,8	0,04 0,16 0,04 0,64	- 0,7 - 0,6 0,6 0,3	0,49 0,36 0,36 0,09	
Q_j		0,78		0,88		1,30	ΣQ_j=2,96
T_j	1,6		- 1,2		- 0,4		ΣT_j=0
T_j^2	2,56		1,44		1,69		ΣT_j^2=5,69

* Факторная сумма квадратов отклонений:

$$S_{факт} = \frac{\sum_{j=1}^{m} T_j^2}{n} - \frac{\left[\sum_{j=1}^{m} T_j\right]^2}{mn} = \frac{5{,}69}{4} - 0 = 1{,}42.$$

* Остаточная сумма квадратов отклонений:

$$S_{осс} = S_{общ} - S_{факт} = 2{,}96 - 1{,}42 = 1{,}54.$$

* Факторная дисперсия:

$$S^2_{факт} = \frac{S_{факт}}{m-1} = \frac{1{,}42}{3-1} = 0{,}71.$$

* Остаточная дисперсия:

$$S_{осс}^2 = \frac{S_{осс}}{m(n-1)} = \frac{1,54}{3(4-1)} = 0,17.$$

Сравнение факторной и остаточной дисперсии с помощью критерия Фишера:

$$F_{набл} = S_{факт}^2 \big/ S_{осс}^2 = 0,71/0,17 = 4,17\,.$$

По таблице значений критерия Фишера (приложение 3) при числе степеней свободы числителя f_1 = 2, а знаменателя f_2 = 9 находим $F_{(0,95;\ 2;\ 9)}$ = 4,26.

Так как $F_{набл} \prec F_{кр}$, то нет оснований отвергать нулевую гипотезу и, соответственно, различие между групповыми средними незначимо. То есть, все группы наблюдений извлечены из одной генеральной совокупности.

4. Задание для расчёта

При помощи дисперсионного анализа оценить достоверность результатов флотации руды, проводимой на трёх лабораторных флотомашинах. Число флотомашин - *m* (*m* = 3) и в каждой из них проводятся одинаковые флотационные опыты *n* раз (*n* = 4).

Данные для расчёта приведены в табл. 5.4.

Таблица 5.4

Данные для оценки точность результатов флотации

Вариант	Значения индекса селективности для различных уровней фактора		
	1	2	3
1	13,3; 12,2; 13,1; 13,0	13,0; 12,5; 13,3; 12,6	13,4; 12,4; 13,5; 13,1
2	13,1; 12,9; 13,2; 13,2	13,1; 12,7; 13,1; 12,8	13,3; 12,7; 13,2; 12,9
3	13,0; 12,6; 13,1; 13,3	13,3; 12,9; 13,4; 12,9	13,5; 12,9; 13,0; 12,6
4	13,4; 12,7; 13,4; 13,4	13,4; 12,8; 13,1; 12,7	13,1; 12,7; 13,1; 13,0
5	13,5; 12,8; 13,1; 13,0	13,5; 12,3; 13,4; 13,0	13,2; 12,6; 12,8; 12,5
6	13,0; 12,3; 13,0; 13,1	13,0; 12,4; 13,1; 13,1	12,7; 12,1; 13,3; 13,2
7	13,1; 12,2; 13,1; 13,2	12,6; 12,5; 13,5; 13,0	13,0; 12,5; 13,4; 13,0
8	13,2; 12,5; 13,3; 13,3	13,2; 12,2; 13,2; 12,6	13,4; 12,7; 13,1; 13,1
9	13,3; 12,6; 13,5; 13,5	13,1; 12,9; 13,1; 13,2	12,5; 12,2; 13,1; 12,6
10	13,4; 12,7; 13,1; 13,1	13,3; 12,7; 13,0; 13,4	13,3; 12,4; 13,2; 13,4

5. Содержание отчета

- описание последовательности проведения дисперсионного анализа;
- исходные данные для расчёта;

- расчёт и выводы о достоверности результатов флотации.

Контрольные вопросы

1. Для каких целей проводится дисперсионный анализ?
2. Как определяются факторная и остаточная дисперсии?
3. В чём суть «нулевой» гипотезы?

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6

ДВУХФАКТОРНЫЙ ДИСПЕРСИОННЫЙ АНАЛИЗ

1. Общие положения

При увеличении числа факторов, влияющих на результаты исследования, процедура дисперсионного анализа, изложенная в практической работе № 5, принципиально не меняется, однако расчеты усложняются.

2. Цель работы

Отработка методики оценки влияния различных факторов на результаты исследований при помощи двухфакторного дисперсионного анализа.

3. Содержание работы

Задача двухфакторного дисперсионного анализа связана с экспериментом, в котором одновременно действуют два фактора A и B, которые варьируют в $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{m}$ уровнях, соответственно.

Оценку воспроизводимости результатов исследований с помощью двухфакторного дисперсионного анализа рассмотрим на примере.

Пример.

Исследовались три реагентных режима флотационного процесса (фактор А) для четырёх проб полезного ископаемого (фактор В). На каждой пробе при различных режимах было проведено по два опыта. Необходимо оценить влияние этих факторов на изменение извлечения полезного компонента в концентрат. Результаты исследований приведены в расчётной табл. 6.1.

Решение.

С использованием формул (табл. 6.2) выполняем расчёт следующих параметров:

*Средние арифметические:

$$X = \sum_{a=1}^{k} X_A = \sum_{b=1}^{m} X_B = 22 + 2 + 18 = 12 + 17 + 6 + 7 = 42\,;$$

$$\sum_{a=1}^{k} X_A^2 = 484 + 4 + 324 = 812\,;$$

Таблица 6.1

Результаты опробования и расчёта

№ режима (фактор ***A***)	№ пробы полезного ископаемого (фактор ***B***)				X_A	X_B
	1	2	3	4		
	2	3	2	4		
1	2	4	3	2		
	$X_{11} = 4$	$X_{12} = 7$	$X_{13} = 5$	$X_{14} = 6$	22	484
	1	0	1	- 1		
2	2	- 1	1	- 1		
	$X_{21} = 3$	$X_{22} = - 1$	$X_{23} = 2$	$X_{24} = - 2$	2	4
	3	6	- 2	1		
3	2	5	1	2		
	$X_{31} = 5$	$X_{32} = 11$	$X_{33} = - 1$	$X_{14} = 3$	18	324
X_B	12	17	6	7	42	1764
X_B^2	144	289	36	49	518	300/160

X_A - сумма всех значений сроки А; X_B - сумма всех значений столбца В; X - сумма всех значений таблицы; n - число значений в каждой клетке.

$$\sum_{b=1}^{m} X_A^2 = 144 + 289 + 36 + 49 = 518\ ;$$

$$\sum_{a=1}^{k}\sum_{b=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{abi}\right)^2 = 4^2 + 7^2 + 5^2 + 6^2 + \ldots + (-1)^2 + 3^2 = 300\,;$$

$$\sum_{a=1}^{k}\sum_{b=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_{abi}^2 = 2^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + 1^2 + 2^2 = 160\,.$$

Таблица 6.2

Расчётные формулы

Рассеивание	Сумма квадратов	Число степеней свободы	Дисперсия
Между столбцами *A*	$S_A^2 = \frac{\sum_{a=1}^{k} X_A^2}{mn} - \frac{X^2}{km}$	$f_A = k - 1$	S_A^2 / f_A
Между строчками *B*	$S_B^2 = \frac{\sum_{b=1}^{m} X_B^2}{kn} - \frac{X^2}{km}$	$f_B = m - 1$	S_B^2 / f_B
Взаимодействие факторов *AB*	$S_{AB}^2 = \sum_{a=1}^{k}\sum_{b=1}^{m}\sum_{n=1}^{n} X - \frac{X^2}{km} - $ $-(S_A^2 + S_B^2 + S_Z^2)$	$f_{AB} = (k -$ $-1)(m-1)$	S_{AB}^2 / f_{AB}
Воспроизво-димость	$S_Z^2 = \sum_{a=1}^{k}\sum_{b=1}^{m}\sum_{n=1}^{n} X - \frac{\sum_{a=1}^{k}\sum_{b=1}^{m}\sum_{n=1}^{n} X^2}{n}$	$f_Z = km \times$ $\times (n-1)$	S_Z^2 / f_Z
Сумма	$S^2 = \sum_{a=1}^{k}\sum_{b=1}^{m}\sum_{n=1}^{n} X^2 - \frac{X^2}{kmn}$	$f = km \times$ $\times (n-1)$	S^2 / f

*Сумма квадратов, характеризующая рассеяние отдельных наблюдений под влиянием:

- фактора А:

$$S_A^2 = \frac{\sum_{a=1}^{k} X_A^2}{mn} - \frac{\left(\sum_{a=1}^{k} X_A\right)^2}{kmn} = \frac{812}{4 \cdot 2} - \frac{42^2}{3 \cdot 4 \cdot 2} = 28{,}00;$$

- фактора В:

$$S_B^2 = \frac{\sum_{b=1}^{m} X_B^2}{kn} - \frac{\left(\sum_{b=1}^{m} X_B\right)^2}{kmn} = \frac{518}{3 \cdot 2} - \frac{42^2}{3 \cdot 4 \cdot 2} = 12{,}83;$$

- случайных погрешностей:

$$S_Z^2 = \sum_{a=1}^{k}\sum_{b=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_{abi}^2 - \frac{\sum_{a=1}^{k}\sum_{b=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{abi}\right)^2}{n} = 160 - \frac{300}{2} = 10{,}00;$$

- взаимодействия факторов:

$$S_{AB}^2 = \sum_{a=1}^{k}\sum_{b=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_{abi}^2 - \frac{\left(\sum_{a=1}^{k} X_A\right)}{kmn} - \left(S_A^2 + S_B^2 + S_Z^2\right) =$$

$$= 160 - \frac{42^2}{3 \cdot 4 \cdot 2} - (28 + 12 + 10) = 36{,}50.$$

*Число степеней свободы:

$$f_A = k - 1 = 3 - 1 = 2;$$

$$f_B = m - 1 = 4 - 1 = 3;$$

$$f_{AB} = f_A \cdot f_B = 2 \cdot 3 = 6;$$

$$f_Z = km(n-1) = 3 \cdot 4 \cdot (2-1) = 12.$$

*Средневзвешенные выборочные дисперсии:

$$\bar{S}_A^2 = S_A^2 / f_A = 28/2 = 14{,}00;$$

$$\bar{S}_B^2 = S_B^2 / f_B = 12{,}83/3 = 4{,}28;$$

$$\bar{S}_{AB}^2 = S_{AB}^2 / f_{AB} = 36{,}5/6 = 6{,}10;$$

$$\bar{S}_Z^2 = S_Z^2 / f_Z = 10/12 = 0{,}83.$$

*Оценка значимости факторов А, В и АВ по величине рассчитанного критерия Фишера:

$$F_{A/Z} = \bar{S}_A^2 / \bar{S}_Z^2 = 14/0{,}83 = 16{,}87;$$

$$F_{B/Z} = \bar{S}_B^2 / \bar{S}_Z^2 = 4{,}28/0{,}83 = 3{,}55;$$

$$F_{AB/Z} = \bar{S}_{AB}^2 / \bar{S}_Z^2 = 6{,}1/0{,}83 = 7{,}35.$$

Сравниваем расчётные и табличные значения критерия Фишера и делаем выводы о значимости исследуемых факторов на флотационный процесс.

Результаты дисперсионного анализа приведены в табл. 6.3.

Таблица 6.3

Результаты дисперсионного анализа

Расхождение	S^2	f	$\bar{S}^2$	$\boldsymbol{F_p}$	$\boldsymbol{F_{99}}$
По реагентным режимам (***A***)	28,00	2	14,00	16,87	6,93
По качеству проб руды (***B***)	12,83	3	4,28	3,55	5,95
По взаимодействию (***AB***)	36,50	6	6,10	7,35	4,82
Случайное	10,00	12	0,83		
Полное	87,33				

Сравнение расчётных значений критерия Фишера (F_p) и табличного (F_{99}) показывает, что влияние фактора A и взаимодействия факторов AB значимо ($F_p > F_{99}$), фактора B - незначимо ($F_p < F_{99}$).

4. Задание для расчета

Исследовались три реагентных режима флотационного процесса (фактор A) для четырёх проб полезного ископаемого (фактор B). На каждой пробе при различных режимах было проведено по два опыта. Необходимо оценить влияние этих факторов на изменение извлечения полезного компонента в концентрат. Данные для расчета приведены в табл. 6.4.

5. Содержание отчета

- описание последовательности проведения двухфакторного дисперсионного анализа;
- исходные данные для расчёта;
- расчётные формулы;
- результаты расчёта и выводы о значимости влияния исследуемых факторов на процесс флотации.

Контрольные вопросы

1. Для каких целей проводится двухфакторный дисперсионный анализ?
2. Как определяется сумма квадратов, характеризующая рассеяние отдельных наблюдений?
3. Укажите формулу для вычисления средневзвешенных выборочных дисперсий.
4. На основании каких данных проводится оценка значимости факторов?

Таблица 6.4

Результаты опробования по трём режимам

Вариант	Значения фактора В при трёх режимах флотации		
	1	2	3
1	2; 3; 2; 4	1; 0; -1; 2	3; 6; -2; 2
	2; 4; 3; 4	0; 0; 1; 1	2; -3; 4; 5
2	4; 3; 2; 2	2; 0; -1; 1	4; 6; -2; 2
	3; 3; 4; 2	-1; 0; -1; 2	3; 6; -2; 3
3	2; 4; 2; 4	1; 2; -1; 0	3; -3; 4; 3
	4; 2; 2; 2	2; 0; -2; 1	2; 5; -2; 2
4	3; 3; 2; 3	1; 1; -1; 2	2; -3; 3; 5
	4; 2; 2; 3	0; 0; -2; 1	4; 6; -2; 1
5	3; 3; 2; 4	1; 2; -1; 0	1; -4; 4; 5
	2; 3; 3; 2	2; 0; 1; 2	3; 5; -2; 4
6	4; 4; 2; 4	1; 0; -1; -1	2; -2; 4; 3
	4; 3; 4; 2	0; 2; -1; 0	3; 4; -2; 4
7	3; 3; 2; 3	1; 0; -1; 2	1; -3; 1; 5
	4; 4; 2; 2	-1; 2; -1; 1	2; 5; -2; 5
8	3; 3; 2; 3	2; 0; 0; 1	3; -3; 4; 4
	3; 3; 2; 4	1; -1; -1; 2	3; 4; -2; 2
9	2; 3; 2; 3	1; 0; -1; 1	5; -3; 4; 4
	4; 3; 4; 2	0; 1; -1; 2	3; 3; -2; 2
10	2; 4; 2; 3	1; 2; -1; 1	2; -3; 4; 4
	4; 3; 4; 2	1; 0; -1; 2	1; 2; -2; 2

Список литературы к практическим работам

1. Теория и техника физического эксперимента при обогащении полезных ископаемых: учебное пособие / В.Г. Самойлик, А.Н. Корчевский.– Донецк: ООО «Технопарк ДонГТУ «УНИТЕХ», 2016.–205 с. http://ed.donntu.org/books/cd4599.pdf

2. Основы научных исследований [Электронный ресурс] : учебное пособие для вузов / Волгоград. гос. архит.-строит. ун-т ; сост.: О.А. Ганжа, Т.В. Соловьева. - 1 Мб. - Волгоград : ВолгГАСУ, 2013. - 1 файл. - Систем. требования: Acrobat Reader. http://ea.donntu.org/handle/123456789/34391

3. Кузнецов И.Н. Основы научных исследований [Электронный ресурс] : учебное пособие / И.Н. Кузнецов. - 800 Кб. - Москва : Изд.-торг. корпорация "Дашков и К", 2014. - 1 файл. - Систем. требования: Acrobat Reader. http://ed.donntu.org/books/cd4599.pdf

4. Гречников Ф.В. Основы научных исследований [Электронный ресурс] : учебное пособие для вузов / Ф.В. Гречников, В.Р. Каргин ; ФГАУ ВО "Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. акад. С.П. Королева (Нац. исслед. ун-т). - 1 Мб. - Самара: СГАУ, 2015. - 1 файл. - Систем. требования: Acrobat Reader. http://ea.donntu.org/handle/123456789/31490

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Критерий Кохрена *G*

Уровень значимости, $\alpha = 0{,}05$								
$\backslash f$ $k\backslash$	1	3	6	10	16	36	144	∞
2	0,9985	0,9392	0,8534	0,7880	0,7341	0,6602	0,5813	0,5000
3	0,9669	0,7977	0,6771	0,6025	0,5466	0,4748	0,4031	0,3333
4	0,9065	0,6841	0,5598	0,4884	0,4366	0,3720	0,3093	0,2500
5	0,8412	0,5981	0,4783	0,4118	0,3645	0,3066	0,2513	0,2000
6	0,7808	0,5321	0,4184	0,3568	0,3135	0,2612	0,2129	0,1667
7	0,7271	0,4800	0,3726	0,3154	0,2756	0,2278	0,1833	0,1429
8	0,6798	0,4377	0,3362	0,2829	0,2462	0,2022	0,1616	0,1250
9	0,6385	0,4027	0,3067	0,2568	0,2226	0,1820	0,1446	0,1111
10	0,6020	0,3733	0,2823	0,2353	0,2032	0,1655	0,1308	0,1000
15	0,4709	0,2758	0,2034	0,1671	0,1429	0,1144	0,0889	0,0667
20	0,3894	0,2205	0,1602	0,1303	0,1108	0,0879	0,0675	0,0500
30	0,2929	0,1593	0,1137	0,0921	0,0771	0,0604	0,0457	0,0333
40	0,2370	0,1259	0,0887	0,0713	0,0595	0,0462	0,0347	0,0250
60	0,1737	0,0895	0,0623	0,0497	0,0411	0,0316	0,0234	0,0167
120	0,0998	0,0495	0,0337	0,0260	0,0218	0,0165	0,0120	0,0083
∞	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Критерий Стьюдента *t*

Число степеней свободы, f	Уровень значимости, α			
	0,10	0,05	0,01	0,001
1	6,31	12,70	63,70	637,00
2	2,92	4,30	9,92	31,60
3	2,35	3,18	5,84	12,90
4	2,13	2,78	4,60	8,61
5	2,01	2,57	4,03	6,86
6	1,94	2,45	3,71	5,96
7	1,89	2,36	3,50	5,40
8	1,86	2,31	3,36	5,04
9	1,83	2,26	3,25	4,78
10	1,81	2,23	3,17	4,59
11	1,80	2,20	3,11	4,44
12	1,78	2,18	3,05	4,32
13	1,77	2,16	3,01	4,22
14	1,76	2,14	2,98	4,14
15	1,75	2,13	2,95	4,07
16	1,75	2,12	2,92	4,01
17	1,74	2,11	2,90	3,96
18	1,73	2,10	2,88	3,92
19	1,73	2,09	2,86	3,88
20	1,73	2,09	2,85	3,85
21	1,72	2,08	2,83	3,82
22	1,72	2,07	2,82	3,79
23	1,71	2,07	2,81	3,77
24	1,71	2,06	2,80	3,74
25	1,71	2,06	2,79	3,72
26	1,71	2,06	2,78	3,71
120	1,66	1,98	2,62	3,37
∞	1,64	1,96	2,58	3,29

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Критерий Фишера *F*

Уровень значимости, $\alpha = 0{,}01$								
f_1 / f_2	2	4	6	10	16	24	40	∞
1	4999,0	5625,0	5859,0	6056,0	6169,0	6234,0	6286,0	6366,0
2	99,00	99,25	99,33	99,40	99,44	99,46	99,48	99,50
3	30,81	28,71	27,91	27,23	26,83	26,60	26,41	26,12
4	18,00	15,98	15,21	14,54	14,15	13,93	13,74	13,46
5	13,27	11,39	10,67	10,05	9,68	9,47	9,29	9,02
6	10,92	9,15	8,47	7,87	7,52	7,31	7,14	6,88
7	9,55	7,85	7,19	6,62	6,27	6,07	5,90	5,65
8	8,65	7,01	6,37	5,82	5,48	5,28	5,11	4,86
9	8,02	6,42	5,80	5,26	4,92	4,73	4,56	4,31
10	7,56	5,99	5,39	4,85	4,52	4,33	4,17	3,91
12	6,93	5,41	4,82	4,30	3,98	3,78	3,61	3,36
14	6,51	5,03	4,46	3,94	3,62	3,43	3,26	3,00
16	6,23	4,77	4,20	3,69	3,37	3,18	3,01	2,75
Уровень значимости, $\alpha = 0{,}05$								
f_1 / f_2	2	4	6	10	16	24	40	∞
1	199,5	225,0	234,0	242,0	246,0	249,0	251,0	254,0
2	19,00	19,25	19,33	19,39	19,43	19,45	19,47	19,50
3	9,55	9,12	8,94	8,78	8,69	8,64	8,60	8,53
4	6,94	6,39	6,16	5,96	5,84	5,77	5,71	5,63
5	5,76	5,19	4,95	4,74	4,60	4,53	4,46	4,36
6	5,14	4,53	4,28	4,06	3,92	3,84	3,77	3,67
7	4,74	4,12	3,87	3,63	3,49	3,41	3,34	3,23
8	4,48	3,84	3,58	3,34	3,20	3,12	3,05	2,93
9	4,26	3,63	3,37	3,13	2,98	2,90	2,82	2,71
10	4,10	3,48	3,22	2,97	2,82	2,74	2,67	2,54
12	3,88	3,26	3,00	2,76	2,60	2,50	2,42	2,30
14	3,74	3,11	2,87	2,60	2,44	2,35	2,27	2,13
16	3,63	3,01	2,74	2,49	2,33	2,24	2,16	2,01

Примечание: f_1 – относится к большей дисперсии, f_2 – к меньшей

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
для проведения практических занятий по дисциплине вариативной части учебного плана по выбору студента «Основы научных исследований» для обучающихся уровня профессионального образования "специалист" по направлению подготовки 21.05.04 "Горное дело" специализации "Обогащение полезных ископаемых" всех форм обучения

Составитель Самойлик Виталий Григорьевич