УДК 681.3

АЛГОРИТМ РОЗКЛАДАННЯ ГРАФІВ

Т.О. Гришанович
Київський національний університет ім.Т.Шевченка, факультет кібернетики

Описано алгоритм розкладання графа за допомогою його кістяків та наведено приклад роботи такого алгоритму для неорієнтованого ненавантаженого графа.

Сучасний стан програмування важко уявити без теоретико – графових алгоритмів. Сюди в першу чергу відносять задачі, пов'язані з представленням програм у вигляді теоретико – графових моделей, найважливішою з яких є графова. Особливо важливе місце вони займають при моделюванні процесів та явищ.

Різноманітне застосування графів пов'язане із тим, що вони являються природним засобом пояснення складних ситуацій на інтуїтивному рівні. Таким чином теорія графів із академічної дисципліни все більше перетворюється у засіб, володіння яким стає вирішальним для застосування комп'ютера у багатьох прикладних областях. [3]

Крім того, слід вказати на такі сфери застосування граф – моделей, як ефективне використання обчислювальних ресурсів системи, організація великих масивів інформації, збільшення степеня паралелізму програми, підвищення ефективності роботи багатопроцесорних і багатомашинних систем. Розв'язання цих та інших задач привело до появи великої кількості граф – моделей, пов'язаних як з параметрами та структурами даних, так і з обчислювальними системами.

Однією із важливих задач на графах є задача розкладання або розфарбовування. При розкладанні графів звертаються до двох задач: розфарбування вершин та ребер. [4] Розкладання ребер графа полягає у приписуванні цим ребрами таких кольорів, що жодних два суміжних ребра не мають однакового кольору. Такий розподіл кольорів називають власним розфарбуванням ребер. Аналогічно означають і розкладання вершин графа, коли усі його суміжні вершини мають різні кольори. У цьому випадку говорять про власне розфарбування вершин графа. Реберно-хроматичним числом графа називають найменше число кольорів, необхідне для власного розфарбування ребер графа. Вершинно-хроматичне число або хроматичний індекс означають як найменшу кількість кольорів, необхідну для власного розфарбування вершин графа.

Проблема розкладання вершин полягає у відшуканні хроматичного числа заданого графа. Основною проблемою при відшуканні хроматичного числа графа є те, що компоненти розбиттів або декомпозицій в існуючих напрямках теорії графів мають бути зв'язними, в той час як компоненти оптимальних розкладань, як правило, виявляються незв'язними. Це значно затрудняє застосування традиційних методів теорії графів для розв'язання задач розкладання. [5]

У праці «Розкладання графів» були запропоновані наступні способи розкладання графів: індуктивний, розкладання за незалежними множинами, розкладання за кістяками, розкладання за узагальненими циклами та променями. [6] Саме побудові алгоритму розкладання графів за допомогою їх кістяків на основі запропонованого методу та його реалізації і присвячена наша робота.

Нехай Gr(V, U) – неорієнтований зв'язний ненавантажений граф. Алгоритм побудови розбиття графа за допомогою кістяків матиме наступний вигляд:

1. Побудувати кістяк графа. Врезультаті отримаємо кістяк Tr (V, U′).
2. Виділити кореневу вершину. Визначити частковий порядок $\leq$ на множині V вершин графа за таким правилом: $v_i \leq v_j$ тоді і тільки тоді, коли найкоротший шлях від вершини v_j до кореневої вершини проходить через v_i.
3. Перевірити чи отриманий кістяк є нормальним, тобто чи усі суміжні вершин дерева є порівнюваними у частковому порядку, визначеному кореневою вершиною.
4. Якщо кістяк нормальний, то застосувати до графа розфарбування $\chi(v_i)=d(v_i, x) \bmod r$,
   де $d(v_i, x)$ – мінімальна відстань від кореневої вершини x до вершини v_i, r – кількість кольорів, якими можні розфарбувати граф; $r\leq\rho(v)+1$, де $\rho(v)$ – максимальний серед степенів вершин графа. [1]
5. Якщо кістяк не є нормальними, то знайдуться дві вершини v_i та v_j, що не порівнювані у частковому порядку, визначеному деревом Tr (V, U′).
   1) Визначити відстані $d(v_i, x)$ та $d(v_j, x)$.
   2) Якщо $d(v_i, x) \geq d(v_j, x)$, тоді вибрати вершину $v_к$ таку, що $(v_j, v_к)$ належить U′ та $d(v_к, x) = d(v_j, x)-1$.
   3) Видалити ребро $(v_j, v_к)$ та додати ребро (v_j, v_i).
   4) Якщо $d(v_i, x) \leq d(v_j, x)$, то повторити вищеописану операцію для вершини v_i.
   5) Отримаємо кістяк Tr (V, U′′).
6. Перейти до кроку №3.

Слід, зазначити, що для довільного скінченного графа можна отримати нормальний *x*-кореневий кістяк за скінченне число кроків.[7]

Продемонструємо роботу алгоритму на конкретному прикладі. Для зменшення кількості ітерацій при відшуканні нормального кістяка графа виберемо кількість вершин рівною 3: n=3. Граф задається матрицею суміжності (n × n), де n – кількість вершин графа. Якщо вершини v_i та v_j не з'єднані між собою ребром, то на перехресті і-го та j-го рядка розміщується число 1000, у протилежному випадку, якщо ребро (v_i, v_j) існує, - число 1. У тому випадку, коли i=j, на перехресті і-го та j-го рядка розміщується число 0.

Нехай маємо граф Gr(V, U): n=3. Його матриця суміжності має наступний вигляд:

0	1	1
1	0	1
1	1	0

1. Побудуємо кістяк графа Gr(V, U). Для цього використаємо алгоритм Пріма – Краскала. [2] Отримаємо кістяк Tr (V, U´). Він матиме наступний вигляд:

0	1	1
1	0	1000
1	1000	0
1	1000	1000

2. Виділимо кореневу вершину. Кореневою є та вершина, максимальна відстань від якої до всіх інших вершин графа рівна радіусу цього дерева. [4] Для визначення відстані між вершинами дерева використаємо алгоритм Дейкстри. [3] Для нашого дерева кореневою є вершина v_1 .

Визначимо частковий порядок ≤ на множині V вершин графа за таким правилом: $v_i \leq v_j$ тоді і тільки тоді, коли найкоротший шлях від вершини v_j до кореневої вершини проходить через v_i.

3. Перевіримо, чи отриманий кістяк Tr (V, U´) є нормальним. Розпочнемо із вершини v_2. Вершини v_2 та v_3: не порівнювані по частковому порядку, визначеному кореневою вершиною, оскільки найкоротший шлях від вершини v_3 не проходить через вершину v_2. Отже, триманий кістяк не є нормальним.

4. Визначимо відстань d(v_2, v_1) та d(v_3, v_1): d(v_2, v_1)=d(v_3, v_1)=1. Виберемо вершину v_k таку, що d($v_к$, v_1) =d(v_3, v_1)-1. У нашому випадку

цією вершиною буде v_1. Видаляємо ребро (v_3, v_1) та додаємо ребро (v_3, v_2). Отримали кістяк Tr´ (V, U´´).

5. Перевіримо, чи кістяк Tr´ (V, U´´) нормальний. Вершини v_2 та v_3 порівнювані по частковому порядку $\leq$, визначеному кореневою вершиною. Таким чином отриманий кістяк нормальний.

6. Застосуємо до графа Tr´ (V, U´´) розфарбування $\chi(v_i)=d(v_i, x) \bmod r$. Оскільки максимальний степінь графа Gr(V, U) рівний 2, то його вершини можна розфарбувати максимум $r \leq 3$ кольорами [1]:

1) $r=2$: $\chi(v_1)=0$, $\chi(v_2)=1$, $\chi(v_3)=0$.
2) $r=3$: $\chi(v_1)=0$, $\chi(v_2)=1$, $\chi(v_3)=2$.

Таким чином ми отримали розкладання графа Gr(V, U) за допомогою його кістяків.

Підтвердження ефективності алгоритму продемонстровано низкою обчислюваних експериментів з використанням розробленого програмного забезпечення.

Основною проблемою, що виникла при програмні реалізації алгоритму, полягає у визначенні кількості ітерацій побудови дерев для відшукання нормального кореневого кістяка графа. Питання було вирішено шляхом побудови допоміжного масиву, куди заносяться результати перевірки того, чи є даний x – кореневий кістяк нормальним.

Крім того, подання графа за допомогою матриці суміжності не є єдиним способом представлення графів у ЕОМ. До них також відносяться матриці інцидентності, списки суміжності, масиви дуг та двійкове представлення. [1] Тому в подальшому планується провести оцінку однієї з видів складності алгоритму, наприклад, часової, залежно від способу представлення графа.

Література

1. Асельдеров З.М. Представление и восстановление графов. – К.:Наукова думка, 1991. – 187с.
2. Горбатов В.А. Фундаментальные основы дискретной математики. М., Наука-Физматлит, 2000. – 208с.
3. Касьянов В.Н., Евстигнеев В.А. Графы в программировании: обработка, визуализация и применение.- С.Пб.:БХВ-Петербург, 2003.-1104с.
4. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. – С.Пб. и др.: Питер, 2003.- 301с.
5. Протасов І.В., Протасова К.Д. Розкладність графів: Навчальний посібник. – Видавничо – поліграфічний центр «Київський університет», 2003. – 73с.
6. Протасова К.Д. Розкладання графів: дис. канд. фіз.-мат. наук: 01.05.01/Київський національний у-т ім. Тараса Шевченко. – К., 2006. – 122 арк. - Бібліогр.: ар. 120-122.
7. Protasov I., Banakh T. Ball Structures and Colorings of Graphs and Groups// Mat.Stud.Monogr.Ser., VNTL, Lviv – 2003. – V11. 147p.

Отримано 13.05.2009