УДК 517.91+004.9

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

З.Е. Филер, А.И. Музыченко
Кировоградский государственный педагогический университет им. В. Винниченко
Государственная лётная академия Украины

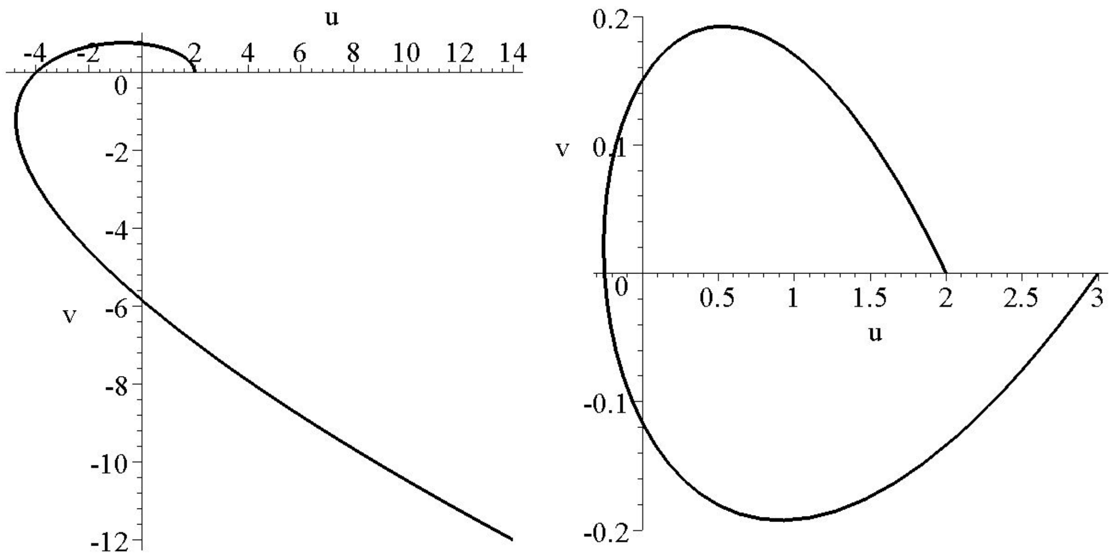
Рассматривается устойчивость линейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями с постоянными и периодическими коэффициентами и запаздываниями. Разработаны методы, алгоритмы и программы исследования устойчивости, реализованные в Maple. Разработанные программы выдают сообщение об устойчивости, а при необходимости – визуализацию соответствующих годографов.

Введение. Критерии устойчивости линейных систем были разработаны Э. Раусом и А. Гурвицам еще в XIX ст. В 1936 г. советским ученым А.В. Михайловым и американским физиком Г. Найквистом разработаны «частотные» критерии устойчивости. Для их применения необходимо искать характеристический полином, и они рассчитаны на «ручные» вычисления. Лишь критерий Михайлова переносится на системы с запаздываниями. С появлением ЭВМ становится актуальным их программная реализация.

1. **Критерий Михайлова и его финитизация.** Рассмотрим дифференциальное уравнение $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_1 y' + a_0 y = 0$. Его характеристическое уравнение $f(\lambda) \equiv \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_1\lambda + a_0 = 0$. Критерий Михайлова геометрически формулируется для годографа функции $f(i\omega)$ так: если при изменении ω от 0 до $+\infty$ радиус-вектор поворачивается на угол $\Phi = n\pi/2$ против часовой стрелки, то система *асимптотически устойчива*. Существует и алгебраическая формулировка этого критерия: корни вещественной $u(\omega) = \operatorname{Re} f(i\omega)$ и мнимой $v(\omega) = \operatorname{Im} f(i\omega)$ частей функции $f(i\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ чередуются, то есть между двумя последовательными корнями одной функции располагается точно один корень другой.

Недостатком критерия является необходимость рассмотрения бесконечного интервала изменения ω. Авторы предлагают *финитизацию* критерия с помощью замены $\omega = t/(1-t)$, $t \in [0;1)$ и умножения многочлена на $(1-t)^n$. При этом годограф будет иметь форму конечной спирали, радиус-вектор точек которой в случае асимптотической устойчивости делает вокруг точки. О поворот на угол $\Phi = n\pi/2$. На рис. 1 изображены годографы для уравнения

$3y^{(4)}(t)+2y'''(t)+9y''(t)+2y'(t)+2=0$; на рис. 1а — нефинитизированный годограф, на рис 1б — финитизированный.



а) б)

Рис. 1.

2. **Устойчивость систем с периодической матрицей.** Анализ устойчивости неавтономных систем вида $dy_i/dt=\Phi_i(t,y_1,y_2,...,y_n)$, *i=1,2,…, n,* в ряде случаев сводится к анализу устойчивости линейных систем с периодической матрицей. Когда известна матрица монодромии, или ее можно построить, выяснение устойчивости системы можно свести к использованию рассмотренного выше критерия Михайлова.

Рассмотрим систему вида

$$dx/dt=A(t)x \qquad (1)$$

с Т - периодической матрицей *A(t)*: $A(t+T)\equiv A(t)$, *(T>0)*. Если *X(t)* — нормированная фундаментальная матрица решений системы (1), то на основе тождества $\dot{X}(t)\equiv A(t)X(t)$, *X(0)=E,* имеем $X(t+T)\equiv X(t)B$.

Матрица *B* называется *матрицей монодромии* системы.

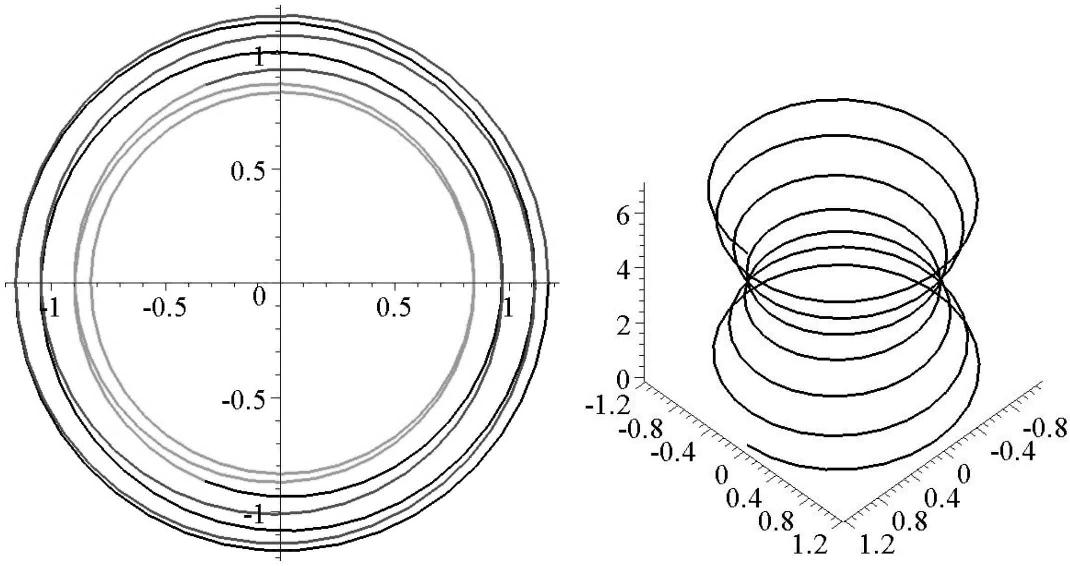
Для *асимптотической устойчивости* периодической системы (1) необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения ρ матрицы монодромии *B* лежали внутри единичного круга $|\rho|<1$ [1].

Для исследования устойчивости матрицу монодромии ищем с помощью численных методов по определению, используя численное интегрирование задачи Коши на отрезке длиной в период. Возможно использование методов Эйлера или более точного – Рунге-Кутты.

Можно предложить другой метод установления устойчивости с помощью непосредственного применения принципа аргумента для функции $f(\rho)=\det(B-\rho E)$. Если при обходе по окружности единичного радиуса $\rho = e^{i\alpha}$ при изменении α от 0 до 2π, аргумент $\arg f(\rho)$ изменится на $2\pi n$, то система с матрицей монодромии B устойчива асимптотически (так как все корни уравнения $\det(B - \rho E) = 0$ лежат в единичном круге).

Геометрически кривая $F(\alpha) = f(e^{i\alpha})$ при этом сделает n оборотов. Эту кривую можно также рассматривать как годограф системы (1). Для матрицы $A(t)$ 7-го порядка покажем соответствующий годограф $F(\alpha)$ на рис. 2.

Построение этого годографа не обязательно, мы его приводим для наглядности.



а) б)

Рис. 2.

На рис. 2а изображен плоский годограф; на рис. 2б — его пространственный вариант; координата z пропорциональна α.

3. Устойчивость систем с постоянными запаздываниями

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и запаздываниями $\tau_{n-k,j}$.

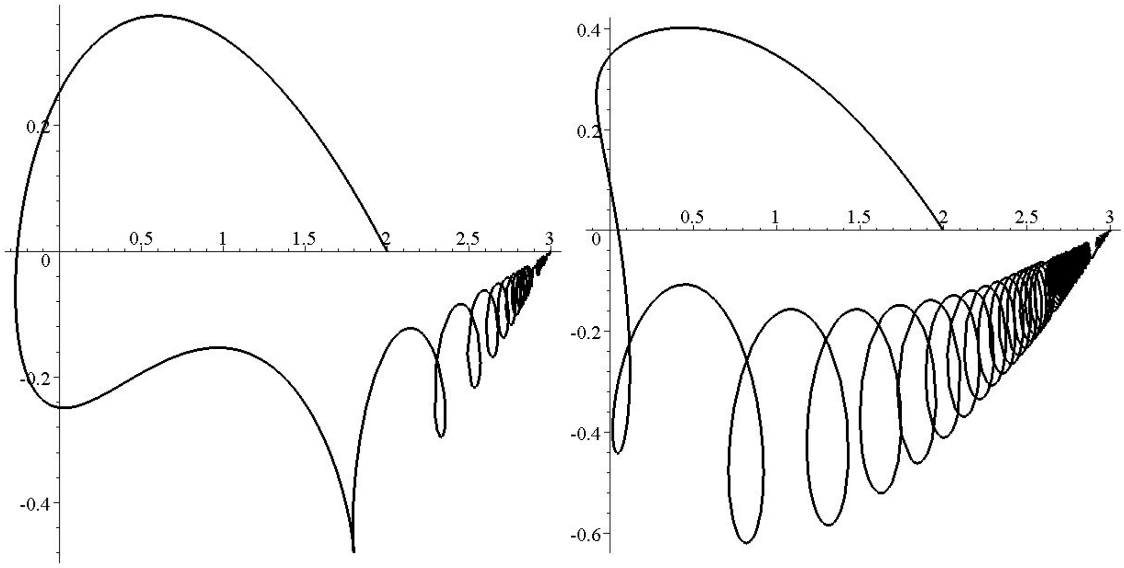
$$y(n) + \sum_{k=1}^{n}\left[a_{n-k}y^{(n-k)}(t) + \sum_{j=1}^{m}\left(b_{n-k,j}y^{(n-k)}\left(t - \tau_{n-k,j}\right)\right)\right] = 0.$$

Поиск его решения в виде $y(t) = e^{\lambda t}$ приводит к характеристическому квазиполиному и трансцендентному уравнению, имеющему бесконечное множество корней:

$$f(\lambda) \equiv \lambda^n + \sum_{k=1}^{n}\left[a_{n-k}\lambda^{n-k} + \sum_{j=1}^{m_{n-k}} b_{n-k}e^{-\lambda\tau_{n-k,j}}\right] = 0. \qquad (2)$$

Для уравнения (2) алгебраические критерии не удается модернизировать, разработанный для уравнения без запаздываний, критерий Михайлова дает заключение об устойчивости решений соответствующего дифференциального уравнения с запаздываниями.

Годограф при наличии существенных запаздываний перестает быть гладким, появляются петли, а потом “дрожь”, как на рис. 3. Главное, охватывает ли он точку O нужное количество раз. Для годографов уравнения $3\lambda^4 + \left(4 + 2e^{-\tau_{31}\lambda}\right)\lambda^3 + \left(7 + e^{-\tau_{21}\lambda}\right)\lambda^2 + 4\lambda + 2 = 0$: на рис. 3а $\tau_{31} = 0.8, \tau_{21} = 0.5$ – система устойчива; на рис. 3б $\tau_{31} = 3.8, \tau_{21} = 3.5$ – система неустойчива.



а) б)

Рис. 3.

Используя разложение Тейлора по степеням τ:

$$y(t-\tau) = y(t) - \tau y'(t) + \tau^2 / 2y''(t) - \ldots, \qquad (3)$$

заменим члены с запаздыванием и, сведя подобные, получим уравнение с постоянными коэффициентами. В разложении по степеням τ будем сохранять члены порядка не выше n. При этом погрешность может быть оценена первым отбрасываемым членом. Если она не превышает «допусков» коэффициентов исследуемого уравнения, то можно получить надежный вывод об устойчивости, оценив ее *запас*.

4. **Системы с периодическими запаздываниями.** Используя разложение типа (3) для запаздывания $\tau = \tau_0 + a\cos(\omega t)$, получим систему с периодическими коэффициентами без запаздывания, рассмотренную в п. 2-3. Такие системы появляются при изучении движения объектов на периодически меняющихся расстояниях от Центра управления. Величина амплитуды $a \le \tau_0$.

5. **Устойчивость систем уравнений 2-го порядка.** Рассмотрим систему уравнений

$$A\ddot{x}+Cx=0; \qquad (5.1)$$
скалярно умножая её слева на $\dot{x}$, а затем - справа и складывая произведения, получим уравнение
$$(A_1\dot{x},\dot{x})^{\bullet}+(C_1x,x)^{\bullet}=0,\ A_1=\left(A+A^T\right)/2, C_1=\left(C+C^T\right)/2. \qquad (5.2)$$
Интеграл энергии $E=(A_1\dot{x},\dot{x})+(C_1x,x)$ системы (5.1) сохраняется, если квадратичные формы (КФ) с симметрическими матрицами A_1 и C_1 знакоопределены. Для установления знакоопределённости КФ нами установлен *критерий:*

КФ (By,y) знакоопределена отрицательно $\Leftrightarrow$ система $\dot{y}=By$ асимптотически устойчива.

Доказательство вытекает из теорем Ляпунова и Четаева при использовании функций Ляпунова $V=(y,y)$ и Четаева $W=(By,y)$

Таким образом, вопрос об устойчивости системы (5.1) сводится к установлению асимптотической устойчивости систем с матрицами A_1 и C_1, рассмотренной в п.1.

Более общая система
$$A\ddot{x}+B\dot{x}+Cx=0, \qquad (5.3)$$
аналогично сводится к равенству, обобщающему (5.2):
$$(A_1\dot{x},\dot{x})^{\bullet}+(B_1\dot{x},\dot{x})+(C_1x,x)^{\bullet}=0,\ B_1=\left(B+B^T\right)/2. \qquad (5.4)$$
Из него вытекает закон изменения энергии $\frac{dE}{dt}=-(B_1\dot{x},\dot{x})$. Если КФ (B_1y,y) знакоопределена отрицательно, то энергия E убывает и система (5.3) асимптотически устойчива. Если эта КФ определена положительно, то система (5.3) неустойчива. Для знакопеременной КФ такого простого признака устойчивости построить не удается. Этот признак носит достаточный характер. Наличие в формуле (5.4) симметрической части матрицы «затуханий» B_1 свидетельствует об отсутствии влияния гироскопических членов на устойчивость.

В последнем случае приходится рассматривать устойчивость системы $\dot{z}=Dz$ порядка $2n$ с клеточной матрицей
$$D=\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}, \text{ где } d_{21}=-A^{-1}C,\ d_{22}=-A^{-1}B.$$
Это резко увеличивает объём вычислений, требуя отыскания обратной матрицы A^{-1}, умножений на неё, и удваивает размерность.

Литература

1. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.

Получено 29.05.2009