УДК 519.6

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПЕРЕМЕННОГО ШАГА НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЖЕСТКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Я.А. Куприй, О.А. Дмитриева
Донецкий национальный технический университет

В данной работе рассматривается эффективность использования переменного шага при решении жестких дифференциальных уравнений неявным методом Рунге-Кутта и методом Розенброка.

С течением времени усложняются задачи, решаемые с использованием дифференциальных уравнений и их систем, а также растут требования к точности получаемых решений. Увеличение объема вычислений, необходимых для решения дифференциальных уравнений, описывающих поведение реальных систем, привело к актуализации задачи ускорения таких вычислений. Среди методов сокращения времени, необходимого для нахождения решения дифференциального уравнения, выделяют алгоритмические и аппаратные методы.

Одним из возможных алгоритмических методов повышения эффективности численного решения дифференциальных уравнений является использование переменного шага. Особенно данный прием актуален при решении жестких дифференциальных уравнений, которые особенно чувствительны к размеру шага.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение (1):

$$\begin{aligned} & f\left(x, y, y', ..., y^{(m)}\right) = 0 \\ & y(x_0) = y_0, \\ & ... \\ & y^{(m-1)}(x_0) = y_0^{(m-1)}, \end{aligned} \tag{1}$$

где f – некоторая функция, связывающая независимую переменную x, искомую функцию y(x) и ее производные до m-го порядка включительно.

Для решения уравнения (1) будем использовать сетку значений переменной x с шагом h [1].

В [2] предлагается использовать следующий механизм контроля шага:

$$h_{new} = h * \min(facmax, \max(facmin, fac*(tol/err)^{1/(p+1)})), \qquad (2)$$

где facmax и facmin – максимальный и минимальный коэффициенты увеличения шага;
fac – гарантийный фактор, может быть равен 0,8, 0,9, $(0,25)^{1/(p+1)}$ или $0,38^{1/(p+1)}$;
tol – допустимая погрешность;
err – фактическая погрешность;
p – порядок метода.

В [3] данный алгоритм управления шагом применяется для решения жестких задач 3-х стадийным неявным методом Рунге-Кутты пятого порядка и 6-стадийного метода Розенброка четвертого порядка.

S-стадийный неявный метод Рунге-Кутта определяется следующими формулами:

$$\begin{aligned} g_i &= y_0 + h\sum_{js=1}^{s} a_{ij} f\left(x_0 + c_j h, g_j\right) \quad i = 1,\ldots s, \\ y_1 &= y_0 + h\sum_{j=1}^{s} b_j f\left(x_0 + c_j h, g_j\right) \end{aligned} , \qquad (2)$$

где a_{ij}, b_i и c_j – определяющие коэффициенты метода.

Для 3-х стадийного неявного метода Рунге-Кутты пятого порядка, основанного на квадратурных формулах Радо, коэффициенты равны:

$$a = \begin{bmatrix} \frac{88 - 7\sqrt{6}}{360} & \frac{296 - 169\sqrt{6}}{1800} & \frac{-2 + 3\sqrt{6}}{225} \\ \frac{296 + 169\sqrt{6}}{1800} & \frac{88 + 7\sqrt{6}}{360} & \frac{-2 - 3\sqrt{6}}{225} \\ \frac{16 - \sqrt{6}}{36} & \frac{16 + \sqrt{6}}{36} & \frac{1}{9} \end{bmatrix};$$

$$b = \begin{bmatrix} \frac{16 - \sqrt{6}}{36} & \frac{16 + \sqrt{6}}{36} & \frac{1}{9} \end{bmatrix};$$

$$c = \left[\frac{4-\sqrt{6}}{10} \quad \frac{4+\sqrt{6}}{10} \quad 1 \right]^T.$$

Метод Розенброка, состоящий из s стадий определяется следующими формулами:

$$k_i = hf\left(y_0 + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} k_j \right) + hJ \sum_{j=1}^{i} \gamma_{ij} k_j, \quad i = 1, \ldots, s,$$

$$y_1 = y_0 + \sum_{j=1}^{s} \beta_j k_j \qquad (3)$$

$$J = f'(y_0)$$

где α_{ij}, β_i и γ_{ij} – определяющие коэффициенты метода.

Численные эксперименты проводились по следующей схеме:

1) решение задачи с использованием переменного шага, определение количества вычислений функции (fn) и числа шагов (step);
2) определение размера шага, необходимого для решения уравнения на заданном интервале с количеством вычислений функции и числом шагов, не превышающих аналогичные показатели для метода с переменным шагом;
3) вычисление метода с постоянным шагом.

Результаты применения этих методов при постоянном и переменном шаге приведены в таблице.

	Неявный метод Рунге-Кутта		Метод Розенброка	
	Переменный шаг	Постоянный шаг	Переменный шаг	Постоянный шаг
$y'_1=y_2$; $y'_2=((1-y^2_1)y_2-y_1)/10^{-6}$; $y_1(0)=2$; $y_2(0)=0$. x=0,2,…11.	fn=14125 step=1725	метод расходится	fn=12080 step=1925	метод расходится
$y'_1=-0{,}04y_1+10^4y_2y_3$; $y'_2=0{,}04y_1-10^4y_2y_3-3\cdot10^7y^2_2$; $y'_3=3\cdot10^7y^2_2$; $y_1(0)=1$; $y_2(0)=0$, $y_3(0)=0$. $x=0, 1, 10, 10^2, \ldots, 10^{11}$.	fn=1041 step=136	метод расходится	fn=881 step=146	метод расходится

Как можно увидеть из таблицы, использование переменного шага при решении жестких задач дает существенное преимущество. Однако, следует отметить, что при решении нежестких задач, преимущества такого подхода не столь очевидны. Например при решении задачи $y' = 2 \cdot (x-1) + e^{(x-1)^2} - e^y$ на интервале [-1,1], неявный метод Рунге-Кутты с переменным шагом дает решение при заданной точности 0,005 за 45 шагов, при этом выполняется 237 вычислений функций. Тот же метод, но с постоянным шагом h=0,1 дает решение за 20 шагов, при этом выполняется 194 вычисления функций.

Литература

1. Формалев В. Ф., Ревизников Д. Л. Численные методы. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 400 с.

2. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990. – 512 с.

3. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. – М.: Мир, 1999. – 685 с.

Получено 29.05.09