

**ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**Кафедра строительство зданий, подземных сооружений и
геомеханика**

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ
по дисциплине**

ГЕОМЕХАНИКА

Для студентов направлений подготовки 21.05.04 «Горное дело»

Рассмотрено
на заседании кафедры
«Горная геомеханика»
Протокол № 1 02. 2016 г.

Утверждено
на заседании учебно-издательского
совета ДонНТУ
Протокол № 1 от 03.2016 г

г. Донецк – 2016

УДК 551.24.02

Конспект лекций по курсу «ГЕОМЕХАНИКА» (для студентов направлений подготовки 21.05.04 «Горное дело») / Сост. Марийчук И.Ф., Купенко И.В. – Донецк: ДонНТУ, 2016, 275 с.

Рецензент профессор, д.т.н. Петренко Ю.А.

Приведены основные уравнения теории упругости анизотропного тела в криволинейных координатах, теории оболочек, состоящих из произвольного числа анизотропных слоев, новая теория анизотропных оболочек и пластин, учитывающих явления поперечного сдвига.

Показана сложность этих уравнений в частных производных высокого порядка для решения задач по исследованию напряженно-деформируемого состояния основных подземных объектов, обладающих переменной жесткостью и неоднородными граничными условиями: непосредственной кровли, горной выработки, закрепленной анкерами, охранных сооружений (целиков), стволов и т. д.

Изложен один из основных методов решения краевых задач горной геомеханики, в частности, по исследованию механических процессов в массиве горных пород – вариационный метод (метод Ритца и Бубнова-Галеркина).

Значительная часть исследований посвящена определению механических характеристик трещиноватых пород и физического моделирования геомеханических процессов в массиве горных пород.

Приведены примеры исследований напряженно-деформированного состояния некоторых подземных объектов.

Конспект лекций может быть использован студентами горных вузов и факультетов, аспирантами и научными сотрудниками при выполнении научных исследований в горном деле.

ВВЕДЕНИЕ

По мере развития горной промышленности во всех странах происходит процесс постепенного истощения месторождений полезных ископаемых с благоприятными горно-геологическими условиями. В связи с этим, в эксплуатацию вводятся месторождения со сложными горно-геологическими условиями, перекрытые мощными толщами обводненных и неустойчивых пород, в которых вскрытие, подготовка и эксплуатация требует применения комплекса специальных мероприятий, которые могут быть разработаны на основании применения современных методов исследований.

Физические процессы, изучаемые горной наукой, отличаются большой сложностью. Это связано с большими трудностями, как при аналитических исследованиях, так и при непосредственных наблюдениях в натуральных условиях.

Весьма важные проблемы возникают при подземной разработке месторождений полезных ископаемых на больших глубинах. Недостаточно изучены такие вопросы, как газовыделение (внезапные выбросы пород, угля и газа), проявления давления (горные удары, высыпания), повышения температуры рудничного воздуха, теплообмен в горных выработках и т.д.

Наряду с дальнейшим более тщательным изучением физико-механических и особенно реологических свойств пород, а также с учетом их трещиноватости необходимо широкое теоретическое исследование, а также на моделях физических процессов перемещений, деформаций и напряжений пород для установления общих закономерностей теории горного давления с целью прогнозирования внезапных выбросов и разработки предупредительных мероприятий.

Такие вопросы, как устойчивость горных выработок, в том числе закрепленных анкерами, определения областей и направлений выделения метана, пожароопасных зон в массивах горных пород, а также с учетом их трещиноватости можно решить на основании теории упругости при исследовании их напряженно-деформированного состояния.

Основные подземные объекты: непосредственную кровлю, горную выработку, охранные сооружения, стволы и т.д. можно представить в виде отдельных трехмерных систем: многослойных пластин и оболочек, состоящих из анизотропных горных пород со сложными граничными условиями.

Точные решения задач о напряженно-деформированном состоянии, описываемых в дифференциальном виде таких сложных систем невозможно, поэтому в работе изложены основные численные методы решения задач, используемых на современном этапе развития теории упругости, одним из которых является вариационный метод.

Таким образом, в данной работе рассмотрены теоретические методы при исследованиях напряженно-деформированного состояния некоторых подземных объектов, математическое и физическое моделирование геомеханических процессов, которые, в частности, применяются для изучения процессов горного производства.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

1.1. Некоторые сведения о криволинейных координатах в пространстве

Как известно, положение какой-либо точки M в пространстве однозначно может быть определено ее радиусом-вектором r относительно некоторой неподвижной точки O . В прямоугольных – декартовых координатах для r имеем

$$r = xi + yj + zk \quad (1.1)$$

где i, j, k – единичные векторы.

В общем случае, в задачах теории оболочек выгодно положение какой-либо точки M , имеющей радиус-вектор r , определить не тремя декартовыми координатами x, y, z , а тремя какими-либо другими величинами α, β, γ , которые однозначно определяют положение точки M в пространстве и называются криволинейными координатами и как функции в декартовых координатах имеют вид

$$\begin{aligned} \alpha(r) &= \alpha(x, y, z) \\ \beta(r) &= \beta(x, y, z) \\ \gamma(r) &= \gamma(x, y, z) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Обратно, так как радиус-вектор r любой точки M пространства является вполне определенным, когда заданы α, β, γ , то он является функцией от этих независимых переменных, следовательно, и компоненты этого радиуса-вектора будут функциями криволинейных координат

$$x = x(\alpha, \beta, \gamma), \quad y = y(\alpha, \beta, \gamma), \quad z = z(\alpha, \beta, \gamma). \quad (1.3)$$

Согласно (1.2), предполагая $\alpha(r) = \text{const}$, $\beta(r) = \text{const}$, $\gamma(r) = \text{const}$, получим три семейства поверхностей. Через каждую точку M пространства проходит по одной поверхности из каждого такого семейства: эти поверхности называются координатными поверхностями. Линии пересечения координатных поверхностей называются координатными линиями (рис.1.1).

В указанной триортогональной системе криволинейных координат для квадрата линейного элемента пространства имеем

$$ds^2 = H_1^2 d\alpha^2 + H_2^2 d\beta^2 + H_3^2 d\gamma^2, \quad (1.4)$$

где $H_1 = H_1(\alpha, \beta, \gamma)$, $H_2 = H_2(\alpha, \beta, \gamma)$,

$H_3 = H_3(\alpha, \beta, \gamma)$ в общем случае ортогональных криволинейных координат являются функциями переменных α, β, γ и называются коэффициентами Ляме.

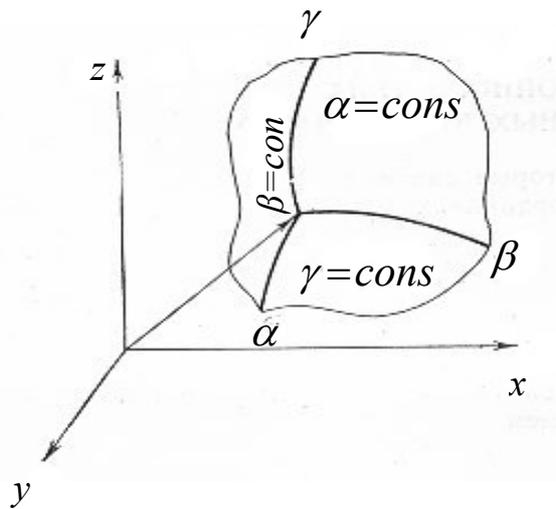


Рис.1.1. Координатные линии и поверхности тела

При заданных соотношениях (1.3) для данной системы координат коэффициенты Ляме определяются посредством следующих формул:

$$H_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2, \quad H_2^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2, \\ H_3^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \gamma}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \gamma}\right)^2. \quad (1.5)$$

Например, в цилиндрических координатах при $\alpha = R, \beta = \varphi, \gamma = z$, когда соотношения (1.3) имеют вид (рис.1.2)

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi, \quad z = z,$$

из (1.5) для коэффициентов Ляме получим

$$H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = 1.$$

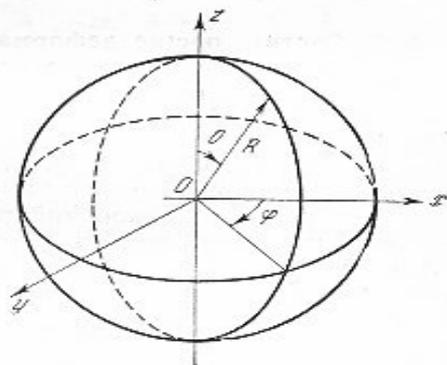
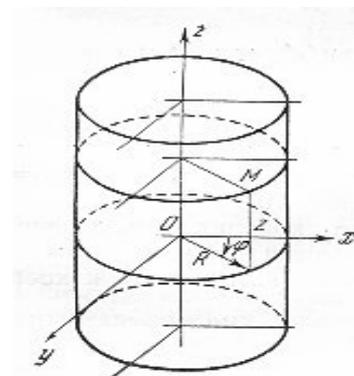


Рис.1.2. Цилиндрические координаты Рис.1.3. Сферические координаты

В сферических координатах (рис.3) при $\alpha = R, \beta = \theta, \gamma = \varphi$, когда соотношения (1.3) имеют вид

$$x = R \sin \theta \cos \varphi, y = R \sin \theta \sin \varphi, z = R \cos \theta,$$

из (1.5) имеем

$$H_1 = 1, H_2 = R, H_3 = R \sin \theta.$$

В декартовых прямоугольных координатах x, y, z формула для квадрата линейного элемента имеет вид

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

в силу чего для коэффициентов Ляме имеем

$$H_1 = H_2 = H_3 = 1.$$

1.2 Составляющие деформации и дифференциальные уравнения равновесия в триортогональной системе криволинейных координат

Пусть сплошное тело, отнесенное к триортогональной системе координат α, β, γ , под действием каких-либо сил критериевой деформации. Тогда какая-либо точка M , принадлежащая телу и имеющая координаты α, β, γ , получит перемещение, которое может быть представлено следующими тремя проекциями вектора полного перемещения на направления касательных к координатным линиям α, β, γ

$$u_\alpha = u_\alpha(\alpha, \beta, \gamma), u_\beta = u_\beta(\alpha, \beta, \gamma), u_\gamma = u_\gamma(\alpha, \beta, \gamma). \quad (1.6)$$

Все эти величины называются перемещения точки M . За положительные примем перемещения $u_\alpha, u_\beta, u_\gamma$, направленные в сторону положительных изменений соответствующих переменных α, β, γ .

Деформационное состояние сплошного трехмерного тела в окрестности точки M характеризуется шестью составляющими деформации.

Из этих составляющих три, которые обозначаются через $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_\gamma$, представляют соответственно относительные деформации удлинения по трем взаимно перпендикулярным направлениям α, β, γ , а остальные три, которые обозначаются

через $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\varepsilon_{\beta\gamma}$, $\varepsilon_{\gamma\alpha}$, представляют соответственно деформации сдвига, происходящие в трех взаимно перпендикулярных плоскостях, являющихся касательными плоскостями в точке M к трем взаимно перпендикулярным координатным поверхностям

$$\lambda = \text{const}, \quad \alpha = \text{const}, \quad \beta = \text{const}.$$

Составляющие деформации ε_α , ε_β , ... $\varepsilon_{\gamma\alpha}$ связаны с перемещениями u_α , u_β , u_γ из точки I посредством следующих формул:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} u_\beta + \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial \gamma} u_\gamma; \\ \varepsilon_\beta &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_\beta}{\partial \beta} + \frac{1}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_\gamma + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} u_\alpha; \\ \varepsilon_\gamma &= \frac{1}{H_3} \frac{\partial u_\gamma}{\partial \gamma} + \frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha} u_\alpha + \frac{1}{H_3 H_2} \frac{\partial H_3}{\partial \beta} u_\beta; \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{H_1} u_\alpha \right) + \frac{H_3}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{H_2} u_\beta \right); \\ \varepsilon_{\beta\gamma} &= \frac{H_2}{H_3} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{1}{H_2} u_\beta \right) + \frac{H_3}{H_2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{H_3} u_\gamma \right); \\ \varepsilon_{\gamma\alpha} &= \frac{H_3}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{H_3} u_\gamma \right) + \frac{H_1}{H_3} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{1}{H_1} u_\alpha \right); \end{aligned} \quad (1.8)$$

Напряженное состояние в какой-либо точке M сплошного трехмерного тела, как известно, характеризуется тензором напряжений, который определяется девятью компонентами. Из этих компонентов три являются нормальными напряжениями, которые действуют по трем взаимно перпендикулярным направлениям координатных линий α , β , γ , и шесть – касательными напряжениями, действующими в трех взаимно перпендикулярных плоскостях, являющихся касательными плоскостями в точке M к трем взаимно перпендикулярным координатным по-

верхностям (рис. 1.4) $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$, $\lambda = \text{const}$. В силу парности касательных напряжений число независимых напряжений равно не девяти, а шести.

σ_α , σ_β , σ_γ – нормальные напряжения, подстрочные индексы которых показывают направления внешней нормали к той площадке, к которой данные напряжения относятся.

$\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$, $\tau_{\alpha\gamma} = \tau_{\gamma\alpha}$, $\tau_{\beta\lambda} = \tau_{\lambda\beta}$ – касательные напряжения, первые подстрочные индексы которых показывают направление, в котором действует данное касательное напряжение, а вторые индексы – направления внешней нормали к

площадке, к которой приложено данное напряжение.

Все напряжения считаются положительными, если они, будучи приложенными к площадкам с положительными внешними нормальными, действуют по направлению соответствующих положительных внешних нормалей (рис. 1.4).

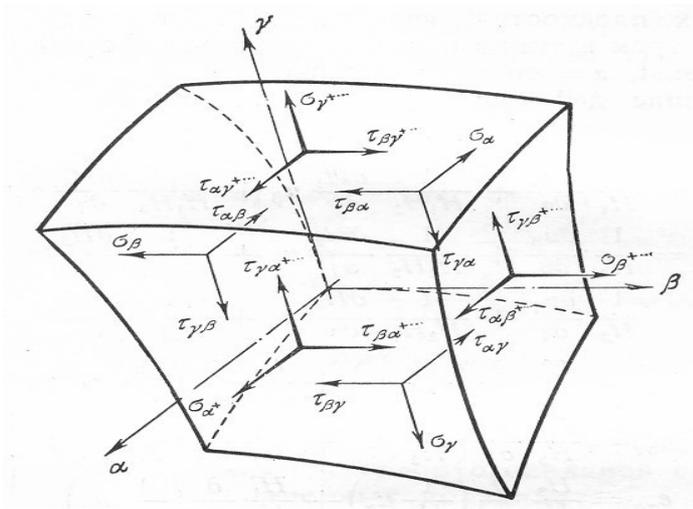


Рис. 1.4. Напряжения в трехмерном теле

Если рассмотренное сплошное трехмерное тело находится в равновесии, то условия равновесия дифференциального элемента тела в продольно выбранной триортогональной системе криволинейных координат представляются следующими тремя дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha}(H_2 H_3 \sigma_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta}(H_1 H_3 \tau_{\alpha\beta}) + \frac{\partial}{\partial \gamma}(H_1 H_2 \tau_{\alpha\gamma}) - \\ - \sigma_\beta H_3 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} - \sigma_\gamma H_2 \frac{\partial H_3}{\partial \alpha} + \sigma_{\beta\alpha} H_3 \frac{\partial H_1}{\partial \beta} + \\ + \tau_{\gamma\alpha} H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \gamma} + P_\alpha H_1 H_2 H_3 = 0, \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \beta} (H_3 H_1 \sigma_\beta) + \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_2 H_1 \tau_{\beta\gamma}) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_2 H_3 \tau_{\beta\alpha}) - \\
& \quad - \sigma_\gamma H_1 \frac{\partial H_3}{\partial \beta} - \sigma_\alpha H_3 \frac{\partial H_1}{\partial \beta} + \tau_{\gamma\beta} H_1 \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} + \\
& \quad + \tau_{\alpha\beta} H_3 \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} + P_\beta H_1 H_2 H_3 = 0, \quad (1.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \gamma} (H_1 H_2 \sigma_\gamma) + \frac{\partial}{\partial \alpha} (H_3 H_2 \tau_{\gamma\alpha}) + \frac{\partial}{\partial \beta} (H_3 H_1 \tau_{\gamma\beta}) - \\
& \quad - \sigma_\alpha H_2 \frac{\partial H_1}{\partial \gamma} - \sigma_\beta H_1 \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} + \tau_{\alpha\gamma} H_2 \frac{\partial H_3}{\partial \alpha} + \\
& \quad + \tau_{\gamma\beta} H_1 \frac{\partial H_3}{\partial \beta} + P_\gamma H_1 H_2 H_3 = 0, \quad (1.11)
\end{aligned}$$

где $P_\alpha = P_\alpha(\alpha, \beta, \gamma)$, $P_\beta = P_\beta(\alpha, \beta, \gamma)$, $P_\gamma = P_\gamma(\alpha, \beta, \gamma)$ представляют соответствующие проекции объемной силы на направления касательных к координатным линиям α, β, γ .

1.3. Криволинейная анизотропия. Обобщенный закон Гука

Пусть рассматриваемое нами упругое однородное тело является криволинейно анизотропным, т.е. эквивалентными, с точки зрения упругих свойств, являются не параллельные направления, проведенные через различные точки тела, а направления, которые подчиняются иным закономерностям. Выбирая систему криволинейных координат так, чтобы в каждой точке упруго-эквивалентные направления совпадали с координатными направлениями, замечаем, что бесконечно малые элементы, выделенные в разных точках тела тремя парами координатных поверхностей, будучи анизотропными, обладают одинаковыми упругими свойствами.

Считаем, что рассматриваемое сплошное упругое тело испытывает малые деформации и подчиняется обобщенному закону Гука. В общем случае однород-

$\nu_{\beta\alpha}, \nu_{\gamma\beta}, \nu_{\alpha\gamma}, \nu_{\alpha\beta}, \nu_{\beta\gamma}$ – коэффициенты Пуассона, характеризующие поперечное сжатие при растяжении в направлении осей координат (первый индекс показывает направление поперечного сжатия, второй – направление действия силы);

$\mu_{\gamma\alpha, \beta\gamma}, \mu_{\alpha\beta, \beta\gamma}, \dots, \mu_{\beta\gamma, \alpha\beta}$ – коэффициенты Ченцова, характеризующие сдвиги в плоскостях, касательных к координатным поверхностям, вызванные касательными напряжениями, действующими в плоскостях, касательных к другим координатным поверхностям;

$\eta_{\beta\gamma, \alpha}, \eta_{\gamma\alpha, \alpha}, \dots, \eta_{\beta\alpha, \gamma}$ – коэффициенты взаимного влияния первого рода, которые характеризуют сдвиги в плоскостях, касательных к координатным поверхностям, вызванные нормальными напряжениями;

$\eta_{\alpha, \beta\gamma}, \eta_{\beta, \beta\gamma}, \dots, \eta_{\gamma, \alpha\beta}$ – коэффициенты взаимного влияния второго рода, которые характеризуют изменения в направлении координат, вызванные касательными напряжениями.

Приведенные выше в сгруппированном виде коэффициенты упругости a_{ik} представлены по классификации, предложенной П. Бехтеревым (римские цифры указывают номера групп).

Для упругого потенциала, отнесенного к единице объема тела имеем

$$\begin{aligned} \bar{V} = & \frac{1}{2} a_{11} \sigma_{\alpha}^2 + \sigma_{\alpha} (a_{12} \sigma_{\beta} + a_{13} \sigma_{\gamma} + a_{14} \tau_{\beta\gamma} + a_{15} \tau_{\alpha\gamma} + a_{16} \tau_{\alpha\beta}) + \\ & + \frac{1}{2} a_{22} \sigma_{\beta}^2 + \sigma_{\beta} (a_{23} \sigma_{\gamma} + a_{24} \tau_{\beta\gamma} + a_{25} \tau_{\gamma\alpha} + a_{26} \tau_{\alpha\beta}) + \\ & + \frac{1}{2} a_{33} \sigma_{\gamma}^2 + \sigma_{\gamma} (a_{34} \tau_{\beta\gamma} + a_{35} \tau_{\gamma\alpha} + a_{36} \tau_{\alpha\beta}) + \\ & + \frac{1}{2} a_{44} \tau_{\beta\gamma}^2 + \tau_{\beta\gamma} (a_{45} \tau_{\gamma\alpha} + a_{46} \tau_{\alpha\beta}) + \\ & + \frac{1}{2} a_{55} \tau_{\gamma\alpha}^2 + \tau_{\gamma\alpha} a_{56} \tau_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} a_{66} \tau_{\alpha\beta}^2. \end{aligned} \quad (1.13)$$

На основании (1.12) \bar{V} можно представить и в билинейной форме

$$\bar{V} = \frac{1}{2} (\sigma_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} + \sigma_{\beta} \varepsilon_{\beta} + \sigma_{\gamma} \varepsilon_{\gamma} + \tau_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} + \tau_{\gamma\alpha} \varepsilon_{\gamma\alpha} + \tau_{\beta\gamma} \varepsilon_{\beta\gamma}) \quad (1.14)$$

Потенциальная энергия деформации для всего тела определяется интегрированием \bar{V} по всему объему тела

$$V = \iiint \bar{V} H_1 H_2 H_3 d\alpha d\beta d\gamma \quad (1.15)$$

Если имеется какая-либо симметрия во внутреннем строении материала анизотропного тела, то в упругих свойствах его обнаруживается некоторая упругая симметрия, т. е. существуют симметричные направления, относительно которых упругие свойства материала оказываются одинаковыми; в этом случае симметричные направления называются эквивалентными.

Когда анизотропное тело обладает упругой симметрией, то уравнение обобщенного закона Гука упрощается. Приведем некоторые наиболее важные случаи упругой симметрии

1. Плоскость упругой симметрии. Пусть в каждой точке тела имеется плоскость, обладающая тем свойством, что любые два направления, симметричные относительно этой плоскости эквивалентны в отношении упругих свойств. Предполагая, что координата γ в каждой точке криволинейно анизотропного тела перпендикулярна к плоскости упругой симметрии (т.е. плоскость симметрии в каждой точке параллельна к координатной поверхности $\gamma = \text{const}$), уравнения обобщенного закона Гука имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= a_{11}\sigma_\alpha + a_{12}\sigma_\beta + a_{13}\sigma_\gamma + a_{16}\tau_{\alpha\beta}; \\ \varepsilon_\beta &= a_{12}\sigma_\alpha + a_{22}\sigma_\beta + a_{23}\sigma_\gamma + a_{26}\tau_{\alpha\beta}; \\ \varepsilon_\gamma &= a_{13}\sigma_\alpha + a_{23}\sigma_\beta + a_{33}\sigma_\gamma + a_{36}\tau_{\alpha\beta}; \\ \varepsilon_{\beta\gamma} &= a_{44}\tau_{\beta\gamma} + a_{45}\tau_{\alpha\gamma}; \\ \varepsilon_{\gamma\alpha} &= a_{45}\tau_{\beta\gamma} + a_{55}\tau_{\alpha\gamma}; \\ \varepsilon_{\alpha\beta} &= a_{16}\sigma_\alpha + a_{26}\sigma_\beta + a_{36}\sigma_\gamma + a_{66}\tau_{\alpha\beta}; \end{aligned} \quad (1.16)$$

В этом случае число независимых упругих постоянных a_{jk} равно тринадцати.

Уравнения (1.16) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}
\varepsilon_\alpha &= \frac{1}{E_1} \sigma_\alpha - \frac{\nu_{12}}{E_2} \sigma_\beta - \frac{\nu_{13}}{E_3} \sigma_\gamma + \frac{\eta_{1,12}}{G_{12}} \tau_{\alpha\beta}; \\
\varepsilon_\beta &= \frac{\nu_{21}}{E_1} \sigma_\alpha + \frac{1}{E_2} \sigma_\beta - \frac{\nu_{23}}{E_3} \sigma_\gamma + \frac{\eta_{2,12}}{G_{12}} \tau_{\alpha\beta}; \\
\varepsilon_\gamma &= \frac{\nu_{31}}{E_1} \sigma_\alpha - \frac{\nu_{32}}{E_2} \sigma_\beta + \frac{1}{E_3} \sigma_\gamma + \frac{\eta_{3,12}}{G_{12}} \tau_{\alpha\beta}; \\
\varepsilon_{\beta\gamma} &= \frac{1}{G_{23}} \tau_{\beta\gamma} + \frac{\mu_{23,31}}{G_{13}} \tau_{\alpha\gamma}; \\
\varepsilon_{\alpha\gamma} &= \mu_{31,12} \frac{1}{G_{23}} \tau_{\beta\gamma} + \frac{1}{G_{13}} \tau_{\alpha\gamma}; \\
\varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{\eta_{12,1}}{E_1} \sigma_\alpha + \frac{\eta_{12,2}}{E_2} \sigma_\beta + \frac{\eta_{12,3}}{E_3} \sigma_\gamma + \frac{1}{G_{12}} \tau_{\alpha\beta}
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Здесь и в дальнейшем буквенные индексы технических постоянных заменяются цифровыми: α на 1, β – на 2 и γ – на 3.

Технические постоянные в (1.17) обозначены

E_1, E_2, E_3 – модули Юнга соответственно по направлениям α, β, γ ;

G_{23}, G_{13}, G_{12} – модули сдвига для плоскостей, в каждой точке параллельных к координатным поверхностям $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$, $\lambda = \text{const}$;

$\nu_{21}, \nu_{32}, \nu_{13}, \nu_{23}, \nu_{31}$ – коэффициенты Пуассона, характеризующие поперечное сжатие при растяжении в направлении осей координат (первый индекс показывает направление поперечного сжатия, второй – направление действия силы);

$\mu_{31,23}, \mu_{12,23}, \dots, \mu_{23,12}$ – коэффициенты Ченцова, характеризующие сдвиги в плоскостях, касательных к координатным поверхностям, вызванные касательными напряжениями, действующими в плоскостях, касательных к другим координатным поверхностям;

$\eta_{23,1}, \eta_{31,1}, \dots, \eta_{21,3}$ – коэффициенты взаимного влияния первого рода, которые характеризуют сдвиги в плоскостях, касательных к координатным поверхностям, вызванные нормальными напряжениями;

$\eta_{1,23}, \eta_{2,23}, \dots, \eta_{3,12}$ — коэффициенты взаимного влияния второго рода, которые характеризуют изменения в направлении координат, вызванные касательными напряжениями.

Направления, перпендикулярные к плоскости упругой симметрии, называются главными направлениями упругости. В рассматриваемом случае упругой симметрии через каждую точку тела проходит одно главное направление.

2. Три плоскости упругой симметрии. Пусть через каждую точку тела проходит три взаимно ортогональных плоскости упругой симметрии. Предположим, что в каждой точке криволинейно анизотропного тела эти плоскости перпендикулярны к соответствующим ортогональным координатным направлениям α, β, γ (т.е. все три плоскости упругой симметрии в каждой точке тела параллельны к координатной поверхности $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$, $\lambda = \text{const}$), имеем следующие уравнения обобщенного закона Гука:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= a_{11}\sigma_\alpha + a_{12}\sigma_\beta + a_{13}\sigma_\gamma; & \varepsilon_{\beta\gamma} &= a_{44}\tau_{\beta\gamma}; \\ \varepsilon_\beta &= a_{12}\sigma_\alpha + a_{22}\sigma_\beta + a_{23}\sigma_\gamma; & \varepsilon_{\gamma\alpha} &= a_{55}\tau_{\gamma\alpha}; \\ \varepsilon_\gamma &= a_{13}\sigma_\alpha + a_{23}\sigma_\beta + a_{33}\sigma_\gamma; & \varepsilon_{\alpha\beta} &= a_{66}\tau_{\alpha\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

В этом случае число независимых упругих постоянных a_{ik} равно девяти.

Уравнение (1.18) могут быть представлены и следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{1}{E_1}\sigma_\alpha - \frac{\nu_{12}}{E_2}\sigma_\beta - \frac{\nu_{13}}{E_3}\sigma_\gamma; & \varepsilon_{\beta\gamma} &= \frac{1}{G_{23}}\tau_{\beta\gamma}; \\ \varepsilon_\beta &= -\frac{\nu_{21}}{E_1}\sigma_\alpha + \frac{1}{E_2}\sigma_\beta - \frac{\nu_{23}}{E_3}\sigma_\gamma; & \varepsilon_{\gamma\alpha} &= \frac{1}{G_{13}}\tau_{\gamma\alpha}; \\ \varepsilon_\gamma &= -\frac{\nu_{31}}{E_1}\sigma_\alpha - \frac{\nu_{32}}{E_2}\sigma_\beta + \frac{1}{E_3}\sigma_\gamma; & \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{G_{12}}\tau_{\alpha\beta}; \end{aligned} \quad (1.19)$$

Здесь в силу симметрии уравнений (1.19) существуют зависимости

$$E_2\nu_{21} = E_1\nu_{12}, \quad E_3\nu_{32} = E_2\nu_{23}, \quad E_1\nu_{13} = E_3\nu_{31} \quad (1.20)$$

Тело, у которого в каждой точке имеется три взаимно перпендикулярные плоскости упругой симметрии, называется ортогонально анизотропным или орто-тропным.

3. Плоскость изотропии. Пусть через каждую точку тела проходит плоскость, в которой все направления упруго эквивалентны. Предполагая, что в криволинейно анизотропном теле координата γ в каждой точке перпендикулярна к плоскости изотропии (т.е. плоскость изотропии в каждой точке параллельна к координатной поверхности $\gamma = \text{const}$), имеем следующие уравнения обобщенного закона Гука:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= a_{11}\sigma_\alpha + a_{12}\sigma_\beta + a_{13}\sigma_\gamma; & \varepsilon_{\beta\gamma} &= a_{44}\tau_{\beta\gamma}; \\ \varepsilon_\beta &= a_{12}\sigma_\alpha + a_{11}\sigma_\beta + a_{13}\sigma_\gamma; & \varepsilon_{\gamma\alpha} &= a_{44}\tau_{\gamma\alpha}; \\ \varepsilon_\gamma &= a_{13}(\sigma_\alpha + \sigma_\beta) + a_{33}\sigma_\gamma; & \varepsilon_{\alpha\beta} &= 2(a_{11} - a_{12})\tau_{\alpha\beta}. \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

В этом случае число независимых упругих постоянных a_{ik} равно пяти.

Уравнение (1.21) могут быть представлены и следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{1}{E}(\sigma_\alpha + \nu\sigma_\beta) - \frac{\nu'}{E'}\sigma_\gamma; & \varepsilon_{\beta\gamma} &= \frac{1}{G'}\tau_{\beta\gamma}; \\ \varepsilon_\beta &= \frac{1}{E}(\sigma_\beta + \nu\sigma_\alpha) - \frac{\nu'}{E'}\sigma_\gamma; & \varepsilon_{\gamma\alpha} &= \frac{1}{G'}\tau_{\gamma\alpha}; \\ \varepsilon_\gamma &= \frac{\nu'}{E'}(\sigma_\alpha + \sigma_\beta) + \frac{1}{E'}\sigma_\gamma; & \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Здесь E – модуль Юнга для направлений в плоскости изотропии;

E' – модуль Юнга для направлений, перпендикулярных к плоскости изотропии;

ν – коэффициент Пуассона, характеризующий сужение в плоскости изотропии при растяжении в этой же плоскости;

ν' – коэффициент Пуассона, характеризующий сужение в плоскости изотропии при растяжении в направлении, перпендикулярном к этой же плоскости;

G' – модуль сдвига для плоскостей, нормальных к плоскости изотропии;

$G = E/r(1 + \nu)$ – модуль сдвига для плоскостей, параллельных плоскости изотропии.

Тело, обладающее указанными упругими свойствами, называется трансверсально изотропным. В рассматриваемом случае упругой симметрии направление,

перпендикулярное к плоскости изотропии, и все направления в этой плоскости, являются главными.

4. Полная симметрия – изотропное тело. Здесь все направления эквивалентны, и любая плоскость в любой точке тела есть плоскость упругой симметрии. Уравнение обобщенного закона Гука имеют вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha} &= \frac{1}{E}[\sigma_{\alpha} - \nu(\sigma_{\beta} + \sigma_{\gamma})]; & \varepsilon_{\beta\gamma} &= \frac{1}{G}\tau_{\beta\gamma}; \\ \varepsilon_{\beta} &= \frac{1}{E}[\sigma_{\beta} - \nu(\sigma_{\gamma} + \sigma_{\alpha})]; & \varepsilon_{\gamma\alpha} &= \frac{1}{G}\tau_{\gamma\alpha}; \\ \varepsilon_{\gamma} &= \frac{1}{E}[\sigma_{\gamma} - \nu(\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta})]; & \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{G}\tau_{\alpha\beta}.\end{aligned}\tag{1.23}$$

Из (1.13) и (1.10) легко получить выражения потенциальной энергии \bar{V} и V в любом частном случае анизотропии.

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ АНИЗОТРОПНЫХ СЛОИСТЫХ ОБОЛОЧЕК

2.1. Основные понятия, исходные соотношения и гипотезы

Рассмотрим многослойную тонкую оболочку постоянной общей толщины h_1 , собранную из произвольного числа однородных анизотропных слоев постоянной толщины t_i (рис.2.1).

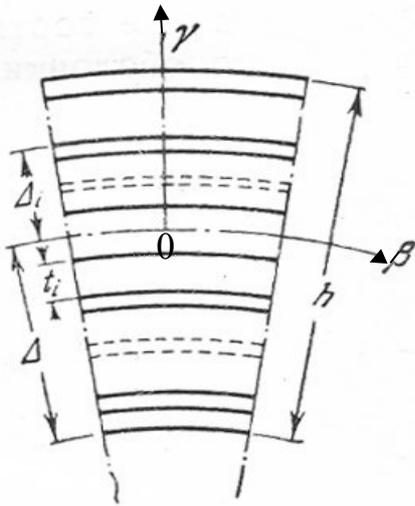


Рис. 2.1. Схема многослойной оболочки

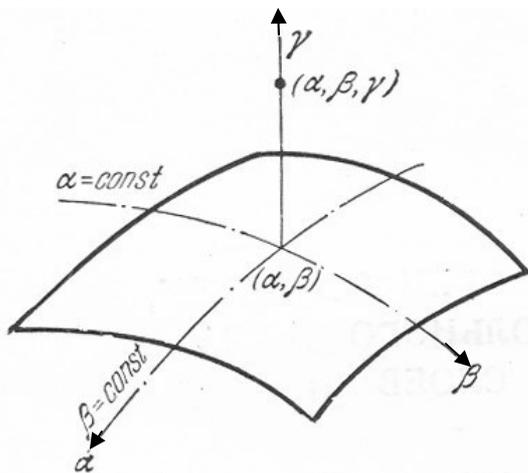


Рис.2.2. Координатная поверхность

Предполагается, что в каждой точке каждого слоя оболочки имеется лишь одна плоскость упругой симметрии, параллельная координатной поверхности оболочки; координатная поверхность параллельна внешним поверхностям оболочки и проходит внутри какого-либо слоя.

Пусть α и β являются криволинейными ортогональными координатами, совпадающими с линиями главной кривизны координатной поверхности оболочки, и γ , будучи нормальной к координатным линиям $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$. является прямолинейной и представляет расстояние по нормали от точки $[\alpha, \beta]$ координатной поверхности до точки (α, β, γ) оболочки (рис.2.2). Допустим, что все слои оболочки при деформации остаются упругими, т.е. подчиняются обобщенному

закону Гука и работают совместно, без скольжения.

В выбранной триортогональной системе координат для коэффициентов Ляме имеем

$$H_1 = A(1 + k_1\gamma), \quad H_2 = B(1 + k_2\gamma), \quad H_3 = 1, \quad (2.1)$$

где $A = A(\alpha, \beta)$ и $B = B(\alpha, \beta)$ являются коэффициентами первой квадратичной формы координатной поверхности, $k_1 = k_1(\alpha, \beta)$, $k_2 = k_2(\alpha, \beta)$ – главные кривизны координатной поверхности оболочки на линиях соответственно $\beta = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$.

Для компонентов деформаций i -го слоя оболочки имеем

$$\varepsilon_\alpha^i = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u_\alpha^i}{\partial \alpha} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \beta} u_\beta^i + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \gamma} u_\gamma^i; \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_\beta^i = \frac{1}{H_2} \frac{\partial u_\beta^i}{\partial \beta} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} u_\alpha^i + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \gamma} u_\gamma^i; \quad (2.3)$$

$$\varepsilon_\gamma^i = \frac{\partial u_\gamma^i}{\partial \gamma}; \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^i = \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{H_1} u_\alpha^i \right) + \frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{H_2} u_\beta^i \right); \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_{\beta\gamma}^i = H_2 \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{1}{H_2} u_\beta^i \right) + \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial \beta} u_\gamma^i; \quad (2.6)$$

$$\varepsilon_{\alpha\gamma}^i = H_1 \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{1}{H_1} u_\alpha^i \right) + \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial \alpha} u_\gamma^i. \quad (2.7)$$

Основной предпосылкой для построения теории тонких анизотропных слоистых оболочек является гипотеза недеформированных нормалей. Она формулируется так: нормальный к координатной поверхности прямолинейный элемент оболочки после деформации остается прямолинейным, нормальным к деформированной координатной поверхности оболочки и сохраняет свою длину, а также нормальными напряжениями σ_γ^i на площадках, параллельных координатной поверхности тонкой оболочки, можно пренебречь по сравнению с другими напряжениями.

Принимая гипотезу недеформированных нормалей, в теории оболочек вносится погрешность, которая будет порядка h/k_i , однако есть случаи, когда эта погрешность значительно больше.

Допуская обычную для инженерного расчета относительную погрешность 5 %, тонкими считаются такие оболочки, у которых $\max(h/k_j) \leq \frac{1}{20}$ и одновременно $\max(h/a) \leq \varepsilon$, где a – минимальный линейный размер оболочки в координатной поверхности, ε – малая величина (например, для изотропной оболочки $\sim 0,1$). Второе условие заимствовано из теории пластин, является обязательным. Так как если тонкую оболочку определять только с точки зрения отношения толщины оболочки к минимальному радиусу кривизны координатной поверхности (первое условие), то она с точки зрения теории пластин (второе условие) может оказаться толстой, и принятое основное предположение станет неприемлемым.

Данное выше определение тонкой оболочки носит несколько условный характер, так как если толщину оболочки рассмотреть с точки зрения возможности применения гипотезы недеформируемых нормалей, то приведенное геометрическое определение тонкой оболочки в случае анизотропных слоистых оболочек будет нуждаться в существенных коррективах, о чем будет сказано ниже.

2.2. Перемещения, деформации и напряжения в слоях

Геометрическая гипотеза о деформированных нормалях, данная для всего пакета оболочки в целом, освобождает нас от необходимости рассмотрения перемещений и деформаций каждого слоя в отдельности.

Имея деформации удлинения и сдвига, а также параметры, характеризующие изменение кривизны и кручения координатной поверхности оболочки, можно определить деформации и перемещения любого слоя оболочки.

Пользуясь основной гипотезой, можно записать следующие равенства:

$$\varepsilon_\gamma = 0, \quad \varepsilon_{\beta\gamma} = 0, \quad \varepsilon_{\alpha\gamma} = 0, \quad (2.8)$$

или для отдельного слоя оболочки

$$\varepsilon_{\gamma}^i = 0, \quad \varepsilon_{\beta\gamma}^i = 0, \quad \varepsilon_{\alpha\gamma}^i = 0, \quad (2.9)$$

которые равномерны допущению о том, что деформация оболочки в целом происходит без деформаций сдвига $\varepsilon_{\beta\gamma}$, $\varepsilon_{\alpha\gamma}$ в плоскости нормальных сечений и без деформаций удлинения ε_{γ} по толщине оболочки.

В связи с этим, имеем

$$\frac{\partial u_{\gamma}^i}{\partial \gamma} = 0, \quad u_{\gamma}^i = w^i(\alpha, \beta) = w(\alpha, \beta), \quad (2.10)$$

т.е. нормальное перемещение u_{γ}^i точки какого-либо слоя оболочки не зависит от координаты γ . Нормальные перемещения всех точек нормального элемента имеют постоянное значение и равняются нормальному перемещению $w = w(\alpha, \beta)$ той точки координатной поверхности, которая образуется при перемещении данной нормали с координатной поверхностью оболочки.

Для тангенциальных перемещений i -го слоя оболочки имеем

$$u_{\alpha}^i = (1 + k_1\gamma)u - \frac{\gamma}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha}; \quad (2.11)$$

$$u_{\beta}^i = (1 + k_2\gamma)v - \frac{\gamma}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta}, \quad (2.12)$$

где $u = u(\alpha, \beta)$, $v(\alpha, \beta)$ тангенциальные перемещения соответствующей точки координатной поверхности оболочки.

Таким образом, формулами (2.10 – 2.12) устанавливается геометрическая модель деформированного состояния оболочки, а деформации имеют вид

$$\varepsilon_{\alpha}^i = \varepsilon_1 + \gamma\chi_1; \quad (2.13)$$

$$\varepsilon_{\beta}^i = \varepsilon_2 + \gamma\chi_2; \quad (2.14)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^i = \varepsilon_{12} + \gamma\tau, \quad (2.15)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}$ – относительные деформации удлинений и сдвига координатной поверхностью оболочки;

χ_1, χ_2, τ – изменения кривизны координатной поверхностью оболочки,
 χ_1, χ_2 – деформации сдвига, τ – относительная деформация кручения).

Пользуясь основной гипотезой, пренебрегая напряжениями σ_γ^i из обобщенного закона Гука, получим

$$\sigma_\alpha^i = B_{11}^i \varepsilon_1 + B_{12}^i \varepsilon_2 + B_{16}^i \varepsilon_{12} \gamma (B_{11}^i \chi_1 + B_{12}^i \chi_2 + B_{16}^i \tau); \quad (2.16)$$

$$\sigma_\beta^i = B_{22}^i \varepsilon_2 + B_{12}^i \varepsilon_1 + B_{26}^i \varepsilon_{12} \gamma (B_{22}^i \chi_2 + B_{12}^i \chi_1 + B_{26}^i \tau); \quad (2.17)$$

$$\tau_{\alpha\beta}^i = B_{16}^i \varepsilon_1 + B_{26}^i \varepsilon_2 + B_{66}^i \varepsilon_{12} \gamma (B_{16}^i \chi_1 + B_{26}^i \chi_2 + B_{66}^i \tau), \quad (2.18)$$

где для коэффициентов B_{jk} имеем

$$B_{11}^i = \frac{a_{22}^i a_{66}^i - (a_{26}^i)^2}{\Omega_i}; \quad B_{22}^i = \frac{a_{11}^i a_{66}^i - (a_{16}^i)^2}{\Omega_i};$$

$$B_{12}^i = \frac{a_{16}^i a_{26}^i - a_{11}^i a_{26}^i}{\Omega_i}; \quad B_{66}^i = \frac{a_{11}^i a_{12}^i - (a_{12}^i)^2}{\Omega_i}; \quad (2.19)$$

$$B_{16}^i = \frac{a_{12}^i a_{26}^i - a_{22}^i a_{16}^i}{\Omega_i}; \quad B_{16}^i = \frac{a_{12}^i a_{26}^i - a_{22}^i a_{16}^i}{\Omega_i};$$

$$\Omega_i = [a_{11}^i a_{22}^i - (a_{12}^i)^2] a_{66}^i + 2a_{12}^i a_{16}^i a_{26}^i - a_{11}^i (a_{26}^i)^2 - a_{22}^i (a_{16}^i)^2. \quad (2.20)$$

2.3. Уравнения неразрывности деформаций координатной поверхности

Между шестью параметрами $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \omega, x_1, x_2, \tau$, которые характеризуют деформацию координатной поверхности оболочки, существует три дифференциальных соотношения, справедливых при любых значениях перемещений u, v и w .

В общем виде имеем три дифференциальных соотношения относительно шести компонентов деформаций координатной поверхности оболочки

$$B \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} (x_2 - x_1) - \frac{A}{2} \frac{\partial \tau}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} \tau + k_2 \frac{\partial A}{\partial \beta} \omega +$$

$$+ k_1 \left[A \frac{\partial \omega}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} \omega - B \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \right] = 0, \quad (2.21)$$

$$A \frac{\partial x_1}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} (x_1 - x_2) - \frac{B}{2} \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \tau + k_1 \frac{\partial B}{\partial \alpha} \omega +$$

$$+ k_2 \left[B \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \omega - A \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \right] = 0, \quad (2.22)$$

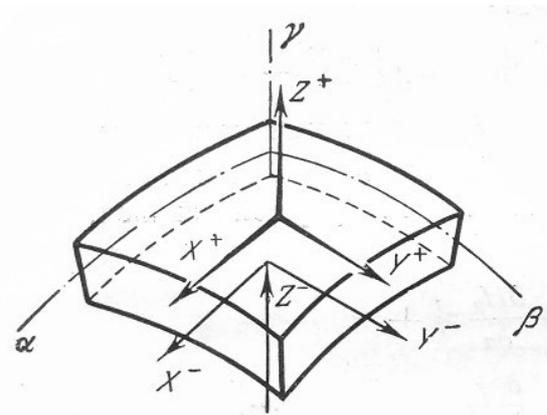
$$k_2 x_1 + k_1 x_2 + \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{A} \left[B \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - \frac{A}{2} \frac{\partial \omega}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} \omega \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{B} \left[A \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - \frac{B}{2} \frac{\partial \omega}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} \omega \right] \right\}. \quad (2.23)$$

Функции ε_1 , ε_2 , ω , x_1 , x_2 , τ , удовлетворяющие этим уравнениям, характеризуют такое деформированное состояние оболочки, при котором координатная поверхность остается сплошной, не претерпевая разрывов. В силу этого (2.21)–(2.23) называют условиями неразрывности координатной поверхности.

Эти условия для оболочки произвольной формы впервые были получены А.Л. Гольденвейзером.

2.4. Условия контакта смежных слоев



При формулировке основных понятий было сказано, что слои оболочки работают совместно без скольжения. В силу этого напряжения и перемещения отдельных слоев на поверхностях слоев должны удовлетворять следующим условиям контакта (рис. 2.1 и 2.3):

$$\text{при } \gamma = \Delta_i$$

Рис.2.3. Схема оболочки с контактом смежных слоев

$$u_{\alpha}^i = u_{\alpha}^{i+1}, \quad u_{\beta}^i = u_{\beta}^{i+1}, \quad u_{\gamma}^i = u_{\gamma}^{i+1}; \quad (2.24)$$

$$\tau_{\alpha\gamma}^i = \tau_{\alpha\gamma}^{i+1}; \quad \tau_{\beta\gamma}^i = \tau_{\beta\gamma}^{i+1}; \quad \sigma_{\gamma}^i = \sigma_{\gamma}^{i+1}; \quad (2.25)$$

Кроме этого, напряжения крайних слоев должны удовлетворять условиям на внешних поверхностях оболочки

при $\gamma = \Delta$

$$\sigma_{\gamma}^1 = -Z^{-}, \quad \tau_{\alpha\gamma}^1 = -X^{-}, \quad \tau_{\beta\gamma}^1 = -Y^{-};$$

при $\gamma = (h - \Delta)$

$$\sigma_{\gamma}^{m+n} = Z^{+}, \quad \tau_{\alpha\gamma}^{m+n} = X^{+}, \quad \tau_{\beta\gamma}^{m+n} = Y^{+},$$

где X^{-}, \dots, Z^{+} – соответствующие компоненты векторов интенсивности поверхностных нагрузок;

1, $(m + n)$ – номера крайних слоев.

2.5. Внутренние силы, моменты и уравнения равновесия

В дальнейшем нам нужно, кроме напряжений, использовать статически эквивалентные им внутренние силы и моменты, которые действуют на площадках главных нормальных сечений оболочки.

Из условий статической эквивалентности для внутренних тангенциальных $(T_1, T_2, S_{12}, S_{21})$ и поперечных (N_1, N_2) сил, а также для изгибающих (M_1, M_2) и крутящих (H_{12}, H_{21}) моментов, отнесенных к единице длины дуг соответствующих координатных линий, имеем (рис. 2.1, 2.4, 2.5)

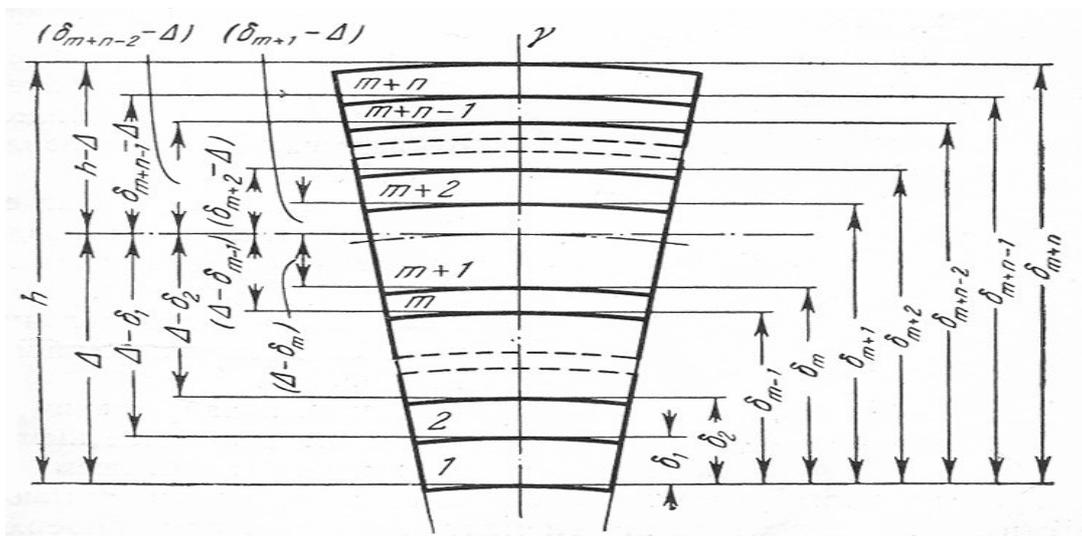


Рис. 2.4. Параметры слоистой оболочки

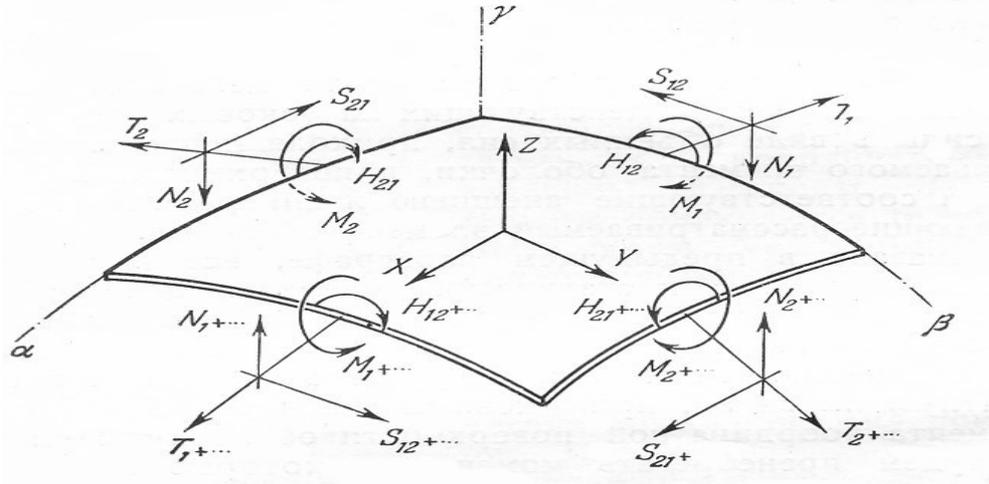


Рис. 2.5. Усилия и моменты, возникающие в оболочке

На рис. 2.4 ($m+n$) число всех слоев оболочки; m – число слоев ниже координатной поверхности оболочки, n – число остальных слоев. Если координатная поверхность оболочки расположена внутри какого-либо слоя, то под n подразумевается число слоев выше координатной поверхности плюс один, а если же координатная поверхность совпадает с какой-либо поверхностью контакта, то под n подразумевается число слоев выше координатной поверхности.

Тангенциальные силы и моменты согласно рис. 2.5 являются положительными и определяются из уравнений

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \frac{1}{B} \sum_{S=1}^{m+n} \int \sigma_{\alpha}^S H_2 d\gamma, & T_2 &= \frac{1}{A} \sum_{S=1}^{m+n} \int \sigma_{\beta}^S H_1 d\gamma; \\
 S_{12} &= \frac{1}{B} \sum_{S=1}^{m+n} \int \tau_{\alpha\beta}^S H_2 d\gamma, & S_{21} &= \frac{1}{A} \sum_{S=1}^{m+n} \int \tau_{\beta\alpha}^S H_1 d\gamma; \\
 N_1 &= \frac{1}{B} \sum_{S=1}^{m+n} \int \tau_{\alpha\gamma}^S H_2 d\gamma, & N_2 &= \frac{1}{A} \sum_{S=1}^{m+n} \int \tau_{\beta\gamma}^S H_1 d\gamma; \\
 M_1 &= \frac{1}{B} \sum_{S=1}^{m+n} \int \sigma_{\alpha}^S \gamma H_2 d\gamma, & M_2 &= \frac{1}{A} \sum_{S=1}^{m+n} \int \sigma_{\beta}^S \gamma H_1 d\gamma; \\
 H_{12} &= \frac{1}{B} \sum_{S=1}^{m+n} \int \tau_{\alpha\beta}^S \gamma H_2 d\gamma, & H_{21} &= \frac{1}{A} \sum_{S=1}^{m+n} \int \tau_{\beta\alpha}^S \gamma H_1 d\gamma.
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Пределы интегрирования: нижние $\delta_{S-1} - \Delta$, верхние $\delta_S - \Delta$.

Уравнения равновесия анизотропной слоистой оболочки имеют вид

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial BT_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} T_2 + \frac{\partial AS_{12}}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} S_{12} + ABk_1 N_1 = -ABX; \\
& \frac{\partial AT_2}{\partial \beta} - \frac{\partial A}{\partial \beta} T_1 + \frac{\partial BS_{12}}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} S_{12} + ABk_2 N_2 = -ABY; \\
& -(k_1 T_1 + k_2 T_2) + \frac{1}{AB} \left(\frac{\partial BN_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial AN_2}{\partial \beta} \right) = -Z; \\
& \frac{\partial BM_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial AH_{21}}{\partial \beta} + \frac{\partial A}{\partial \beta} H_{12} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_2 = ABN_1; \\
& \frac{\partial AM_2}{\partial \beta} + \frac{\partial BH_{12}}{\partial \alpha} + \frac{\partial B}{\partial \alpha} H_{21} - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_1 = ABN_2; \\
& S_{12} - S_{21} + \frac{H_{12}}{R_1} - \frac{H_{21}}{R_2} = 0.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

где R_1, R_2 – радиусы кривизны координатной поверхности.

2.6. Потенциальная энергия деформации

Уравнение для потенциальной энергии деформации многослойной оболочки имеют вид

$$\begin{aligned}
V = & \frac{1}{2} \iint [C_{11}\varepsilon_1^2 + 2C_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2 + C_{22}\varepsilon_2^2 + C_{66}\varepsilon_{12}^2 + 2C_{16}\varepsilon_{12}\varepsilon_1 + 2C_{16}\varepsilon_{12}\varepsilon_{21}] AB d\alpha d\beta + \\
& + \iint [K_{11}\varepsilon_1\chi_1 + K_{12}(\varepsilon_1\chi_2 + \varepsilon_2\chi_1) + K_{22}\varepsilon_2\chi_2 + K_{66}\varepsilon_{12}^2 + K_{16}(\varepsilon_1\tau + \varepsilon_{12}\chi_1) + \\
& + K_{26}(\varepsilon_2\tau + \varepsilon_{12}\chi_2)] AB d\alpha d\beta + \frac{1}{2} \iint [D_{11}\chi_1^2 + 2D_{12}\chi_1\chi_2 + D_{22}\chi_2^2 + D_{66}\tau^2 + \\
& + 2D_{16}\tau\chi_1 + 2D_{26}\tau\chi_2] AB d\alpha d\beta,
\end{aligned} \tag{2.28}$$

где коэффициенты C_{jk}, K_{jk}, D_{jk} имеют вид

$$\begin{aligned}
C_{jk} &= \sum_{S=1}^{m+n} B_{jk}^S (\delta_S - \delta_{S-1}); \\
K_{jk} &= \frac{1}{2} \sum_{S=1}^{m+n} B_{jk}^S [(\delta_S^2 - \delta_{S-1}^2) - 2\Delta(\delta_S - \delta_{S-1})]; \\
D_{jk} &= \frac{1}{3} \sum_{S=1}^{m+n} B_{jk}^S [(\delta_S^3 - \delta_{S-1}^3) - 3\Delta(\delta_S^2 - \delta_{S-1}^2) + 3\Delta^2(\delta_S - \delta_{S-1})].
\end{aligned} \tag{2.29}$$

В частном случае, когда координатная поверхность оболочки совпадает с нижней поверхностью оболочки, Δ превращается в нуль (рис.2.4), в связи с чем существенным образом упрощаются выражения (2.29), т.е.

$$\begin{aligned} C_{jk} &= \sum_{S=1}^{m+n} B_{jk}^S (\delta_S - \delta_{S-1}); \\ K_{jk} &= \frac{1}{2} \sum_{S=1}^{m+n} B_{jk}^S (\delta_S^2 - \delta_{S-1}^2); \\ D_{jk} &= \frac{1}{3} \sum_{S=1}^{m+n} B_{jk}^S (\delta_S^3 - \delta_{S-1}^3). \end{aligned} \quad (2.30)$$

В уравнении (2.28) первая составляющая представляет потенциальную энергию удлинений и сдвигов, третья – изгибов и кручений, а второе – взаимное влияние изгибов, кручений. удлинений и сдвигов.

Коэффициенты C_{jk}, K_{jk}, D_{jk} называются жесткостями:

C_{11}, C_{12} – жесткости растяжения – сжатия по координатным линиям $\beta = \text{const}, \alpha = \text{const}$;

C_{66} – жесткость сдвига в плоскости, касательной к координатной поверхности;

C_{66}, C_{26} – побочные жесткости растяжения – сжатия и сдвига, характеризующие влияние удлинений по координатным линиям $\beta = \text{const}, \alpha = \text{const}$ на сдвиг в касательной плоскости;

D_{11}, D_{22} – жесткости изгиба вокруг осей, касательных к координатным линиям $\alpha = \text{const}, \beta = \text{const}$;

D_{66} – жесткость кручения;

D_{16}, D_{26} – побочные жесткости изгиба и кручения, характеризующие влияние изгибов осей, касательных к координатным линиям $\alpha = \text{const}, \beta = \text{const}$ на кручение;

K_{11}, K_{12} – жесткости взаимного влияния растяжения и изгиба, характеризующие взаимное влияние растяжения и изгиба по линиям $\beta = \text{const}, \alpha = \text{const}$;

K_{66} – жесткость взаимного влияния кручения и сдвига;

K_{16}, K_{26} – побочные жесткости взаимного влияния изгибов на сдвиг и удлинений на кручение, соответственно.

2.7. Соотношения упругости

Уравнения, которые устанавливают связь между внутренними усилиями и деформациями координатной поверхности оболочки, называются соотношениями упругости. Для общего случая многослойной анизотропной оболочки они имеют вид

$$\begin{aligned}
 T_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{16}\varepsilon_{12} + K_{11}\chi_1 + K_{12}\chi_3 + K_{16}\tau; \\
 T_2 &= C_{22}\varepsilon_2 + C_{12}\varepsilon_1 + C_{26}\varepsilon_{12} + K_{22}\chi_2 + K_{12}\chi_1 + K_{26}\tau; \\
 S_{12} &= C_{66}\varepsilon_{12} + C_{16}\varepsilon_1 + C_{26}\varepsilon_2 + K_{66}\tau + K_{16}\chi_1 + K_{26}\chi_2 + \\
 &\quad + K_2(K_{66}\varepsilon_{12} + K_{16}\varepsilon_1 + K_{26}\varepsilon_2 + D_{66}\tau + D_{16}\chi_1 + D_{26}\chi_2); \\
 S_{21} &= C_{66}\varepsilon_{12} + C_{16}\varepsilon_1 + C_{26}\varepsilon_2 + K_{66}\tau + K_{16}\chi_1 + K_{26}\chi_2 + \\
 &\quad + K_1(K_{66}\varepsilon_{12} + K_{16}\varepsilon_1 + K_{26}\varepsilon_2 + D_{66}\tau + D_{16}\chi_1 + D_{26}\chi_2); \\
 M_1 &= D_{11}\chi_1 + D_{12}\chi_2 + D_{16}\tau + K_{11}\varepsilon_1 + K_{12}\varepsilon_2 + K_{16}\varepsilon_{12}; \\
 M_2 &= D_{22}\chi_2 + D_{12}\chi_1 + D_{26}\tau + K_{22}\varepsilon_2 + K_{12}\varepsilon_1 + K_{26}\varepsilon_{12}; \\
 H_{12} &= D_{66}\tau + D_{12}\chi_1 + D_{26}\chi_2 + K_{66}\varepsilon_{12} + K_{16}\varepsilon_1 + K_{26}\varepsilon_2; \\
 H_{21} &= D_{66}\tau + D_{12}\chi_1 + D_{26}\chi_2 + K_{66}\varepsilon_{12} + K_{16}\varepsilon_1 + K_{26}\varepsilon_2.
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

Уравнения для N_1 и N_2 не будем приводить, так как при наличии известных соотношений упругости M_j и H_j эти поперечные силы могут быть получены из четвертого и пятого уравнений равновесия (2.27).

2.8. Граничные условия

В реальных шахтных объектах можно встретиться с самыми разнообразными типами опор оболочек и это многообразие решений опор невозможно представить в виде каких-либо математических моделей – граничных условий. В связи с этим приведем лишь некоторые возможные варианты граничных условий.

Ради краткости записи граничных условий приводим лишь для края, который определяется координатной линией $\alpha = \alpha_0 = \text{const}$.

1. Однородные граничные условия:

а) свободный край

$$T_1 = 0, \quad S_{12} + \frac{H_{12}}{R_2} = 0, \quad N_1 + \frac{1}{B} \frac{\partial H_{12}}{\partial \beta} = 0, \quad M_1 = 0; \quad (2.32)$$

б) шарнирно-закрепленный край

$$\dot{I}_1 = 0, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0; \quad (2.33)$$

в) шарнирный, свободный в тангенциальном направлении край

$$T_1 = 0, \quad M_1 = 0, \quad w = 0, \quad v = 0; \quad (2.34)$$

$$\text{или } S_{12} + \frac{H_{12}}{R_2} = 0, \quad M_1 = 0, \quad w = 0, \quad u = 0; \quad (2.35)$$

г) шарнирный, свободный в нормальном направлении край

$$M_1 = 0, \quad N_1 + \frac{1}{B} \frac{\partial H_{12}}{\partial \beta} = 0, \quad u = 0, \quad v = 0; \quad (2.36)$$

д) абсолютно заделанный край

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \varphi = -\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_1} = 0. \quad (2.37)$$

В последнем соотношении φ – угол поворота нормали координатной поверхности оболочки вокруг касательной к линии $\alpha = \alpha_0 = \text{const}$.

2. Неоднородные граничные условия:

а) нагруженный край

$$T_1 = T_1^*, \quad S_{12} + \frac{H_{12}}{R_2} = S_{12}^*, \quad (2.38)$$

$$N_1 + \frac{1}{B} \frac{\partial H_{12}}{\partial \beta} = N_1^*, \quad M_1 = M_1^*,$$

где T_1^* , S_{12}^* , N_1^* , M_1^* – усилия, приложенные к краю (в частном случае некоторые из них могут быть равны нулю).

б) шарнирный, неподвижно опертый край загружен моментом

$$M_1 = M_1^*, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0; \quad (2.39)$$

в) шарнирный, свободный в тангенциальном направлении край загружен моментом и тангенциальной силой

$$T_1 = T_1^*, \quad \dot{I}_1 = M_1^*, \quad w = 0, \quad v = 0; \quad (2.40)$$

$$\text{или } S_{12} + \frac{H_{12}}{R_2} = S_{12}^*, \quad M_1 = M_1^*, \quad w = 0, \quad u = 0; \quad (2.41)$$

г) шарнирный, свободный в нормальном направлении край загружен моментом и поперечной силой

$$M_1 = M_1^*, \quad N_1 + \frac{1}{B} \frac{\partial H_{12}}{\partial \beta} = N_1^*, \quad u = 0, \quad v = 0; \quad (2.42)$$

д) смещенный край

$$u = u^*, \quad v = v^*, \quad w = w^*, \quad \varphi = \varphi^*, \quad (2.43)$$

где u^* , v^* , w^* , φ^* , – заданные перемещения и угол поворота края оболочки.

Неоднородные граничные условия могут быть и смешанными. В этом случае необходимо следить, чтобы заданные усилия и перемещения не противоречили друг другу.

Аналогичным образом могут быть записаны и граничные условия для края, который определяется координатной линией $\beta = \beta_0 = \text{const}$.

В случае, когда оболочка вовсе не имеет граничного контура (полностью замкнутая оболочка) или граничный контур определяется лишь по линии одной координаты (частично замкнутая оболочка), то граничные условия по направлению замкнутых координат теряют свои обычные формулировки и заменяются условиями периодичности с периодом, обеспечивающим однозначность перемещений в любой точке рассматриваемой замкнутой линии координат.

Приведенные результаты могут быть обобщены на случай сопряжения края рассматриваемой оболочки с каким-либо упругим бортовым элементом (балка, пластина, оболочка и т.д.).

2.9. Частные случаи анизотропии материала слоев оболочки

Рассмотрим изменения основных соотношений теории слоистых анизотропных оболочек в частных случаях анизотропии материала их слоев.

1 Оболочки, составленные из ортотропных слоев.

В этом случае главные направления упругости в каждой точке каждого слоя совпадают с направлениями координат α, β, γ , т.е. в каждой точке слоя одна из плоскостей упругой симметрии параллельна координатной поверхности оболочки, а остальные две перпендикулярны координатным линиям $\alpha = \text{const}, \beta = \text{const}$.

Тогда для упругих постоянных i -го слоя оболочки имеем

$$\begin{aligned} a_{11}^i &= \frac{1}{E_1^i}, & a_{22}^i &= \frac{1}{E_2^i}, & a_{66}^i &= \frac{1}{G_{12}^i}, \\ a_{12}^i &= \frac{\nu_2^i}{E_2^i} = -\frac{\nu_1^i}{E_1^i}, & a_{16}^i &= 0, & a_{26}^i &= 0. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Для коэффициентов B_{jk} из (2.19, 2.20) имеем

$$\begin{aligned} B_{11}^i &= \frac{E_1^i}{1 - \nu_1^i \nu_2^i}, & B_{22}^i &= \frac{E_2^i}{1 - \nu_1^i \nu_2^i}, & B_{66}^i &= G_{12}^i \\ B_{12}^i &= \frac{\nu_2^i E_1^i}{1 - \nu_1^i \nu_2^i} = \frac{\nu_1^i E_2^i}{1 - \nu_1^i \nu_2^i}, & B_{16}^i &= B_{26}^i = 0_{12} \end{aligned} \quad (2.45)$$

для основных напряжений из (2.16 – 2.18) получим

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha^i &= \frac{E_1^i}{1 - \nu_1^i \nu_2^i} [\varepsilon_1 + \nu_2^i \varepsilon_2 + \gamma(\chi_1 + \nu_2^i \chi_2)], \\ \sigma_\beta^i &= \frac{E_2^i}{1 - \nu_1^i \nu_2^i} [\varepsilon_2 + \nu_1^i \varepsilon_1 + \gamma(\chi_2 + \nu_1^i \chi_1)], \\ \tau_{\alpha\beta}^i &= G_{12}^i (\varepsilon_{12} + \gamma\tau). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Формулы для определения жесткостей (2.29) остаются без изменений, при этом значения B_{jk} надо принимать из условий, что

$$C_{16} = C_{26} = 0, \quad K_{16} = K_{26} = 0, \quad D_{16} = D_{26} = 0.$$

Тогда получим следующие соотношения упругости

$$\begin{aligned} T_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + K_{11}\chi_1 + K_{12}\chi_2; \\ T_2 &= C_{22}\varepsilon_2 + C_{12}\varepsilon_1 + K_{22}\chi_1 + K_{12}\chi_1; \\ S_{12} &= C_{66}\varepsilon_{12} + K_{66}\tau + K_2(K_{66}\varepsilon_{12} + D_{66}\tau); \\ S_{21} &= C_{66}\varepsilon_{12} + K_{66}\tau + K_1(K_{66}\varepsilon_{12} + D_{66}\tau); \\ M_1 &= D_{11}\chi_1 + D_{12}\chi_2 + K_{11}\varepsilon_1 + K_{12}\varepsilon_2; \\ M_2 &= D_{22}\chi_2 + D_{12}\chi_1 + K_{22}\varepsilon_1 + K_{12}\varepsilon_1; \\ H_{12} &= H_{21} = D_{66}\tau + K_{66}\varepsilon_{12}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

и выражения для потенциальной энергии

$$\begin{aligned} V &= \iint \left\{ \frac{1}{2} [C_{11}\varepsilon_1^2 + 2C_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2 + C_{22}\varepsilon_2^2 + C_{66}\varepsilon_{12}^2] + [K_{11}\varepsilon_1\chi_1 + K_{12}(\varepsilon_1\chi_2 + \varepsilon_2\chi_1)] + \right. \\ &\quad \left. + K_{22}\varepsilon_2\chi_2 + K_{66}\varepsilon_{12}\tau \right\} + \frac{1}{2} (D_{11}\chi_1^2 + 2D_{12}\chi_1\chi_2 + D_{22}\chi_2^2 + D_{66}\tau^2) \} ABd\alpha d\beta, \end{aligned} \quad (2.48)$$

Выражения деформаций и изменений кривизны, кручения, уравнения равновесия и неразрывности деформаций остаются без изменений.

2. Оболочки, составленные из изотропных слоев.

Пусть оболочка составлена из различных изотропных слоев. В этом случае для упругих постоянных i -го слоя оболочки имеем

$$\begin{aligned} a_{11}^i = a_{22}^i &= \frac{1}{E^i}, \quad a_{66}^i = \frac{1}{G^i} = \frac{2(1+\nu)}{E^i}, \\ a_{12}^i &= \frac{\nu^i}{E^i}, \quad a_{16}^i = a_{26}^i = 0 \end{aligned} \quad (2.49)$$

Для коэффициентов B_{jk} имеем

$$B_{11}^i = B_{22}^i = \frac{E^i}{1-(\nu^i)^2}, \quad B_{66}^i = B_{22}^i = \frac{E^i}{2(1+\nu^i)}, \quad (2.50)$$

$$B_{12}^i = \frac{\nu^i E^i}{1 - (\nu^i)^2}, \quad B_{16}^i = B_{26}^i = 0.$$

Основные напряжения в слоях оболочки определяются из выражений

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha}^i &= \frac{E^i}{1 - (\nu^i)^2} [\varepsilon_1 + \nu^i \varepsilon_2 + \gamma(\chi_1 + \nu^i \chi_2)], \\ \sigma_{\beta}^i &= \frac{E^i}{1 - (\nu^i)^2} [\varepsilon_2 + \nu^i \varepsilon_1 + \gamma(\chi_2 + \nu^i \chi_1)], \\ \tau_{\alpha\beta}^i &= \frac{E^i}{2(1 + \nu^i)} (\varepsilon_{12} + \gamma\tau). \end{aligned} \quad (2.51)$$

При этом

$$c_{11} = c_{22}, \quad k_{11} = k_{22}, \quad D_{11} = D_{22}. \quad (2.52)$$

Формулы внутренних усилий и выражений потенциальной энергии остаются без изменений, причем надо учитывать лишь новые значения жесткостей.

Здесь неизменными также остаются выражения для деформаций и изменений кривизны, кручения, уравнения равновесия и неразрывности деформаций.

3. Оболочки, составленные из трансверсально изотропных слоев

Рассмотрим три случая

а) Пусть главные направления упругости в каждой точке каждого слоя совпадают с направлениями координатных линий $\beta = const$. В этом случае надо пользоваться соотношениями, данными для оболочки, составленной из ортотропных слоев, при этом надо полагать для каждого слоя

$$E_1^i = (E^1)^i, \quad E_2^i = E^i, \quad G_{12}^i = (G^1)^i, \quad \nu_1 = \nu^1, \quad \nu_2 = \frac{E}{E^1} \nu^1. \quad (2.53)$$

б) Пусть главные направления упругости в каждой точке слоев совпадают с направлениями координатных линий $\alpha = const$. В этом случае также надо пользоваться соотношениями для ортотропной оболочки, причем

$$E_1^i = E^i, \quad E_2^i = (E^1)^i, \quad G_{12}^i = (G^1)^i, \quad \nu_{12} = \nu^1, \quad \nu_1 = \frac{E}{E^1} \nu^1. \quad (2.54)$$

в) Главные направления упругости в каждой точке слоев нормальны к координатной поверхности оболочки. В этом случае надо пользоваться соотношениями для оболочки, составленной из различных изотропных слоев, при этом надо полагать

$$E_1^i = E_2^i = E^i, \quad G_{12}^i = G, \quad \nu_1 = \nu_2 = \nu. \quad (2.55)$$

2.10. Оболочки, составленные из нечетного числа слоев, симметрично расположенных относительно координатной поверхности

Рассмотрим оболочки, составленные из нечетного числа $(2m + 1)$ однородных анизотропных слоев. Слои оболочки имеют одинаковые толщины и физико-механические свойства. Координатная поверхность является срединной поверхностью как для среднего слоя, так и всей оболочки в целом.

В силу симметрии имеем (см. рис. 2.4)

$$\begin{aligned} m + n = 2m + 1, \quad \Delta - \delta_m = \delta_{m+1} - \Delta = h_{m+1}, \\ h_1 = h_{2m+1} = \Delta, \quad \delta_S - \delta_{S-1} = h_S - h_{S+1}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

При этом из (2.29) для жесткостей оболочки получим

$$\begin{aligned} C_{jk} &= 2[B_{jk}^{m+1}h_{m+1} + \sum_{s=1}^m B_{jk}^s (h_s - h_{s-1})]; \\ D_{jk} &= \frac{2}{3}[B_{jk}^{m+1}h_{m+1}^3 + \sum_{s=1}^m B_{jk}^s (h_s^3 - h_{s-1}^3)]; \\ k_{jk} &= 0. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Для соотношений упругости и потенциальной энергии соответственно получим

$$\begin{aligned} T_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{16}\varepsilon_{12}; \quad T_2 = C_{22}\varepsilon_2 + C_{12}\varepsilon_1 + C_{26}\varepsilon_{12}; \\ S_{12} &= C_{66}\varepsilon_{12} + C_{16}\varepsilon_1 + C_{26}\varepsilon_2 + k_2(D_{66}\tau + D_{12}\chi_1 + D_{26}\chi_2); \\ S_{21} &= C_{66}\varepsilon_{12} + C_{16}\varepsilon_1 + C_{26}\varepsilon_2 + k_2(D_{66}\tau + D_{12}\chi_1 + D_{26}\chi_2); \\ M_1 &= D_{11}\chi_1 + M_{12}\chi_2 + D_{16}\tau; \quad M_2 = D_{22}\chi_2 + M_{12}\chi_1 + D_{26}\tau; \\ H_{12} &= H_{21} = D_{66}\tau + D_{16}\chi_1 + D_{26}\chi_2. \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned}
V = & \frac{1}{2} \iint (C_{11}\varepsilon_1^2 + 2C_{12}\varepsilon_1\varepsilon_2 + C_{22}\varepsilon_2^2 + C_{66}\varepsilon_{12}^2 + 2C_{16}\varepsilon_{12}\varepsilon_1 + 2C_{26}\varepsilon_{12}\varepsilon_2) AB d\alpha d\beta + \\
& + \frac{1}{2} \iint (D_{11}\chi_1^2 + 2D_{12}\chi_1\chi_2 + D_{22}\chi_2^2 + D_{66}\tau^2 + 2D_{16}\tau\chi_1 + 2D_{26}\tau\chi_2) AB d\alpha d\beta. \quad (2.59)
\end{aligned}$$

В каждом конкретном случае в эти выражения необходимо подставлять те или иные выражения для жесткостей оболочки.

2.11. О соотношениях упругости

Исходя из гипотезы недеформируемых нормалей, следует, что независимо от расположения координатной поверхности оболочки все внутренние силы и моменты в общем случае зависят от деформаций удлинений и сдвига, так и от параметров изменений кривизны ее координатной поверхности.

В связи с этим, безразлично, какое расположение имеет исходная координатная поверхность оболочки. Поэтому интересно выяснить то расположение координатной поверхности оболочки, для которого все жесткости взаимного влияния K_{jk} превращаются в нуль, и для многослойной оболочки получаются наиболее простые соотношения упругости.

Полагая $K_{jk}=0$, из (2.29) получим

$$\text{при } \Delta = \Delta_{11} = \frac{\sum_{s=1}^{m+n} B_{11}^s (\delta_s^2 - \delta_{s-1}^2)}{2 \sum_{s=1}^{m+n} B_{11}^s (\delta_s - \delta_{s-1})}, \quad K_{11}=0 \quad (2.60)$$

$$\text{при } \Delta = \Delta_{22} = \frac{\sum_{s=1}^{m+n} B_{22}^s (\delta_s^2 - \delta_{s-1}^2)}{2 \sum_{s=1}^{m+n} B_{22}^s (\delta_s - \delta_{s-1})}, \quad K_{22}=0 \quad (2.61)$$

$$\text{при } \Delta = \Delta_{66} = \frac{\sum_{s=1}^{m+n} B_{66}^s (\delta_s^2 - \delta_{s-1}^2)}{2 \sum_{s=1}^{m+n} B_{66}^s (\delta_s - \delta_{s-1})}, \quad K_{66}=0 \text{ и т.д.} \quad (2.62)$$

Рассматривая эти выражения, замечаем, что в общем случае анизотропии слоев оболочки все значения $\Delta = \Delta_{jk}$ отличны друг от друга. Отсюда следует, что в общем случае анизотропной слоистой оболочки, когда не ставятся какие-либо ограничения на упругие характеристики материалов слоев оболочки, нет единого расположения координатной ее поверхности, для которого все жесткости взаимного влияния K_{jk} превращаются в нуль.

При единой координатной поверхности оболочки все жесткости взаимного влияния K_{jk} превратятся в нуль, если поставить условие

$$\Delta = \Delta_{11} = \Delta_{22} = \Delta_{66} = \Delta_{12} = \Delta_{16} = \Delta_{26}, \quad (2.63)$$

но это условие ставит существенные ограничения на другие характеристики материалов слоев оболочки.

Для примера рассмотрим двухслойную оболочку (рис. 2.6)

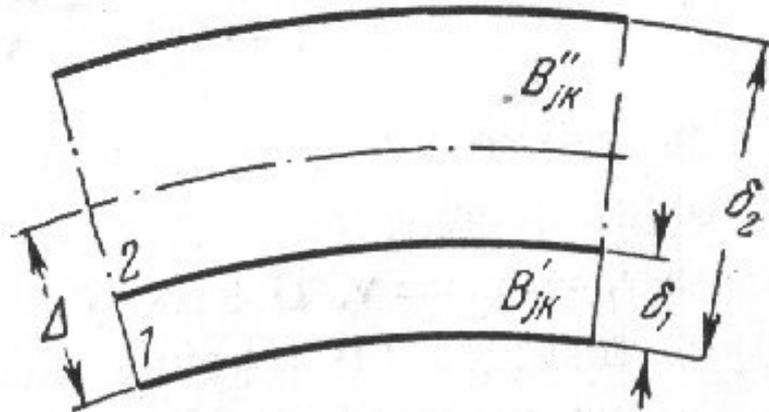


Рис. 2.6. Двухслойная оболочка

Полагая $m + n = 2$, $B_{jk}^1 = B'_{jk}$, $B_{jk}^2 = B''_{jk}$ из (2.63) получим

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{B'_{11}\delta_1^2 + B''_{11}(\delta_2^2 - \delta_1^2)}{B'_{11}\delta_1 + B''_{11}(\delta_2 - \delta_1)} = \frac{B'_{22}\delta_1^2 + B''_{22}(\delta_2^2 - \delta_1^2)}{B'_{22}\delta_1 + B''_{22}(\delta_2 - \delta_1)} = \dots \\ &= \frac{B'_{26}\delta_1^2 + B''_{26}(\delta_2^2 - \delta_1^2)}{B'_{26}\delta_1 + B''_{26}(\delta_2 - \delta_1)}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Отсюда следует, что равенства (2.64) будут иметь место, если

$$\frac{B'_{11}}{B''_{11}} = \frac{B'_{22}}{B''_{22}} = \dots = \frac{B'_{26}}{B''_{26}}, \quad (2.65)$$

что является существенным ограничением для поставленной задачи.

В частном случае изотропной оболочки из (2.45) для упругих характеристик слоев имеем

$$\begin{aligned} B'_{11} = B'_{22} &= \frac{E_1}{1 - \nu_1^2}, & B'_{12} &= \nu_1 B'_{11}, & B'_{66} &= \frac{E_1}{2(1 + \nu_1)}, \\ B''_{11} = B''_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_2^2}, & B''_{12} &= \nu_2 B''_{11}, & B''_{66} &= \frac{E_2}{2(1 + \nu_2)}, \end{aligned} \quad (2.66)$$

где E_1, E_2 – модули упругости соответственно первого и второго слоев;

ν_1, ν_2 – коэффициенты Пуассона первого и второго слоев.

Подставляя B_{jk} из (2.66) в (2.65), получим

$$\frac{E_1(1 - \nu_2^2)}{E_2(1 - \nu_1^2)} = \frac{\nu_1 E_1(1 - \nu_1^2)}{\nu_2 E_2(1 - \nu_2^2)} = \frac{2E_1(1 + \nu_2)}{2E_2(1 + \nu_1)}. \quad (2.67)$$

Отсюда следует, что эти равенства имеют место лишь при условии равенства коэффициентов Пуассона слоев оболочки, т.е. когда $\nu_1 = \nu_2 = \nu$.

В этом случае легко получить значения Δ , определяющее положение координатной поверхности оболочки, для которого жесткости K_{jk} превращаются в нули, т.е.

$$\Delta = \frac{E_1 \delta_1^2 + E_2 (\delta_2^2 - \delta_1^2)}{E_1 \delta_1 + E_2 (\delta_2 - \delta_1)}. \quad (2.68)$$

Таким образом, приходим к заключению, что в общем случае многослойной оболочки при отсутствии ограничения (2.63) не существует такого расположения координатной ее поверхности, когда и для многослойной оболочки получаются соотношения упругости типа (2.47) при $K_{jk} = 0$.

2.12. Вычисления жесткостей для произвольных направлений

Упругие постоянные a_{jk} , а следовательно коэффициенты B_{jk} , анизотропного тела при переходе от одной системы координат к другой изменяются.

Рассмотрим плоское напряженное состояние анизотропной пластины, материал которой в каждой точке имеет одну плоскость упругой симметрии, параллельную к срединной ее плоскости, которая совпадает с совмещенными координатными плоскостями $\alpha\beta$ и $\alpha'\beta'$.

Пусть координатные системы $(\alpha\beta\gamma)$ и $(\alpha'\beta'\gamma')$ получаются друг от друга путем поворота на некоторый угол φ вокруг оси γ . Тогда получим следующие формулы преобразования:

$$\begin{aligned}
 B'_{11} &= B_{11} \cos^4 \varphi + 2(B_{12} + 2B_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \\
 &+ B_{22} \sin^4 \varphi + 2(B_{16} \cos^2 \varphi + B_{66} \sin^2 \varphi) \sin 2\varphi; \\
 B'_{22} &= B_{11} \cos^4 \varphi + 2(B_{12} + 2B_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \\
 &+ B_{22} \sin^4 \varphi - 2(B_{16} \sin^2 \varphi + B_{66} \cos^2 \varphi) \sin 2\varphi; \\
 B'_{12} &= B_{12} + [B_{11} + B_{22} - 2(B_{12} + 2B_{66})] \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \\
 &+ (B_{26} - B_{16}) \cos 2\varphi \sin 2\varphi; \\
 B'_{66} &= B_{66} + [B_{11} + B_{22} - 2(B_{12} + 2B_{66})] \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \\
 &+ (B_{26} - B_{16}) \cos 2\varphi \sin 2\varphi; \\
 B'_{16} &= \frac{1}{2} [B_{22} \sin^2 \varphi - B_{11} \cos^2 \varphi + (B_{12} + 2B_{66}) \cos 2\varphi] \sin 2\varphi + \\
 &+ B_{16} \cos^2 \varphi (\cos^2 \varphi - 3 \sin^2 \varphi) + B_{26} \sin^2 \varphi (3 \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi); \\
 B'_{26} &= \frac{1}{2} [B_{22} \cos^2 \varphi - B_{11} \sin^2 \varphi - (B_{12} + 2B_{66}) \cos 2\varphi] \sin 2\varphi + \\
 &+ B_{16} \sin^2 \varphi (3 \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + B_{26} \cos^2 \varphi (\cos^2 \varphi - 3 \sin^2 \varphi).
 \end{aligned} \tag{2.69}$$

Следовательно, имея значения B_{jk} для каждого слоя с помощью формул (2.69) можно найти значения B'_{jk} в новой системе координат для каждого рассматриваемого слоя. Подставляя значения $[B'_{jk}]^s$ в формулы (2.69), найдем значения жесткостей C'_{jk} , K'_{jk} и D'_{jk} в системе координат $(\alpha', \beta', \gamma')$.

2.13. Приближенная теория анизотропной пластинки, учитывающая явления поперечного сдвига

Вышеприведенная теория справедлива для решения плоских задач о напряженно-деформированном состоянии тонких слоистых анизотропных (изотропных) оболочек (пластин), т.е. без учета явления поперечного сдвига. Такие подземные объекты как непосредственная кровля, охранные сооружения, стволы и т.д. могут быть рассмотрены в виде трехмерных систем, как наиболее адекватным к реальным. Поэтому приведем основное уравнение для определения напряженно-деформированного состояния, в частности анизотропных пластины, учитывающее явление поперечного сдвига.

Для ортотропной пластинки:

а) расстояния по нормали (γ) между двумя точками пластинки до и после деформации остаются неизменными;

б) нормальные напряжения σ_γ на площадках, параллельных срединной плоскости, могут быть пренебрежены по сравнению с прочими напряжениями;

в) при определении деформаций $e_{\alpha\gamma}$ и $e_{\beta\gamma}$ считаем, что касательные напряжения $\tau_{\alpha\gamma}$ и $\tau_{\beta\gamma}$ не отличаются от соответствующих напряжений ($\tau_{\alpha\gamma}^0$ и $\tau_{\beta\gamma}^0$), найденных при наличии гипотезы недеформируемых нормалей, т.е. от соответствующих напряжений классической теории изгиба анизотропных пластинок.

В силу принятых предположений для напряжений имеем

$$\tau_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \gamma^2 \right) \Phi_0, \quad \tau_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \gamma^2 \right) \Psi_0, \quad (2.70)$$

$$\tau_{\alpha\beta} = B_{66} e_{\alpha\beta},$$

$$\sigma_\alpha = B_{11} e_\alpha + B_{12} \varepsilon_\beta, \quad \sigma_\beta = B_{22} \varepsilon_\beta + B_{12} e_\alpha, \quad (2.71)$$

где

$$\Phi_0 = - \left[B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial \alpha^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial \alpha \partial \beta^2} \right], \quad (2.72)$$

$$\Psi_0 = - \left[B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial \beta^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial \beta \partial \alpha^2} \right], \quad (2.73)$$

w_0 – нормальное перемещение соответствующей ортотропной пластины, найденное при наличии гипотезы недеформируемых нормалей. Здесь предполагается $X^\pm = 0, Y^\pm = 0$.

Для перемещений, деформаций и напряжений имеем

$$u_\alpha = -\gamma \frac{\partial w}{\partial \alpha} + I_0 a_{55} \Phi_0, \quad u_\beta = -\gamma \frac{\partial w}{\partial \beta} + I_0 a_{44} \Psi_0, \quad (2.74)$$

для нормального перемещения имеем

$$\left. \begin{aligned} e_\alpha &= -\gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + I_0 a_{55} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha}, & e_\beta &= -\gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + I_0 a_{44} \frac{\partial \Psi_0}{\partial \beta}, \\ e_{\alpha\beta} &= -2\gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} + I_0 \left(a_{55} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \beta} + a_{44} \frac{\partial \Psi_0}{\partial \alpha} \right), \end{aligned} \right\} \quad (2.75)$$

$$\sigma_\alpha = -\gamma \left(B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right) + I_0 \left(B_{11} a_{55} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha} + B_{12} a_{44} \frac{\partial \Psi_0}{\partial \beta} \right), \quad (2.76)$$

$$\sigma_\beta = -\gamma \left(B_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right) + I_0 \left(B_{22} a_{44} \frac{\partial \Psi_0}{\partial \beta} + B_{12} a_{55} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \alpha} \right), \quad (2.77)$$

$$\tau_{\alpha\beta} = -B_{66} \left[2\gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} + I_0 \left(a_{55} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \beta} + a_{44} \frac{\partial \Psi_0}{\partial \alpha} \right) \right], \quad (2.78)$$

где $I_0 = \frac{\gamma}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{\gamma^2}{3} \right)$.

Для внутренних сил и моментов получим

$$M_1 = - \left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right) + \frac{h^2}{10} \left(D_{11} a_{55} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \alpha} + D_{12} a_{44} \frac{\partial \psi_0}{\partial \beta} \right), \quad (2.79)$$

$$M_2 = - \left(D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right) + \frac{h^2}{10} \left(D_{22} a_{44} \frac{\partial \psi_0}{\partial \beta} + D_{12} a_{55} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \alpha} \right), \quad (2.80)$$

$$H = -2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{h^2}{10} D_{66} \left(a_{55} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \beta} + a_{44} \frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha} \right), \quad (2.81)$$

$$N_1 = \frac{h^3}{12} \varphi_0, \quad N_2 = \frac{h^3}{12} \psi_0. \quad (2.82)$$

Разрешающее дифференциальное уравнение относительно одной искомой функции w :

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial \beta^4} = Z_2 + \\ + \frac{h^2}{10} \left\{ a_{55} \left[D_{11} \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \beta^2} \right] \varphi_0 + \right. \\ \left. + a_{44} \left[D_{22} \frac{\partial^3}{\partial \beta^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3}{\partial \beta \partial \alpha^2} \right] \psi_0 \right\}, \quad (2.83) \end{aligned}$$

где $Z_2 = Z^+ + Z^-$.

Запишем его в несколько преобразованном виде

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial \beta^4} = \\ = Z_2 - \frac{h^2}{120} \left\{ a_{55} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \left[B_{11}^2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial \alpha^4} + 2B_{11}(B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (B_{12} + 2B_{66})^2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial \beta^2} \Big] + a_{44} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \left[B_{22}^2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial \beta^4} + \right. \\
& \left. + 2B_{22}(B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial \beta^2 \partial \alpha^2} + (B_{12} + 2B_{66})^2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial \alpha^4} \right] \Big\}. \quad (2.84)
\end{aligned}$$

Таким образом, в этом варианте теории задача поперечного изгиба ортотропной пластинки свелась к определению лишь функции $w(\alpha, \beta)$ (функция $w_0(\alpha, \beta)$ и тем самым функция $\varphi_0(\alpha, \beta)$ и $\psi_0(\alpha, \beta)$ известны из классической теории изгиба анизотропной пластинки). Эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению четвертого порядка (2.84) или (2.83), которые своими левыми частями ничем не отличаются от левой части известного уравнения классической теории изгиба анизотропной пластинки, и граничным условиям, которые тоже ничем не отличаются от граничных условий классической теории. Для примера приведем однородные граничные условия для четырех случаев (см. 2.8):

а) свободный край

$$M_n = 0, \quad N_n + \frac{\partial H_{nt}}{\partial s} = 0;$$

б) шарнирно закрепленный край

$$w = 0, \quad M_n = 0;$$

в) заделанный край (закреплен элемент срединной поверхности)

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0;$$

г) заделанный край (закреплен вертикальный элемент края)

$$w = 0, \quad \left(\frac{\partial u_{nt}}{\partial \gamma} \right)_{\gamma=0} = 0.$$

В случае, когда пластинка цилиндрически анизотропна, по предлагаемой здесь теории имеем следующие расчетные формулы и уравнения:

основные расчетные напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_r = -\gamma \left[B_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + v_\Theta B_r \left(\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \Theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] + \\ + \frac{1}{2} \left(\gamma \frac{h^2}{4} - \frac{\gamma^3}{3} \right) \left[B_r a_r \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + v_\Theta \frac{\varphi_0}{r} \right) + v_\Theta B_r a_\Theta \frac{\partial \psi_0}{r \partial \Theta} \right], \end{aligned} \quad (2.85)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\Theta = -\gamma \left[\left(B_\Theta \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \Theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + v_r B_\Theta \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] + \\ + \frac{1}{2} \left(\gamma \frac{h^2}{4} - \frac{\gamma^3}{3} \right) \left[B_\Theta a_\Theta \frac{\partial \psi_0}{r \partial \Theta} + v_r B_\Theta a_r \left(\frac{\varphi_0}{r} + v_r \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.86)$$

$$\tau_{\Theta r} = -\gamma 2 B_k \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{r \partial \Theta} \right) + \frac{1}{2} \left(\gamma \frac{h^2}{4} - \frac{\gamma^3}{3} \right) \left[a_r \frac{\partial \varphi_0}{\partial \Theta} + a_\Theta \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial r} - \frac{\psi_0}{r} \right) \right], \quad (2.87)$$

внутренние изгибающие и крутящие моменты

$$\begin{aligned} M_r = -D_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - v_\Theta D_r \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \Theta^2} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \\ + \frac{h^2}{10} \left[D_r a_r \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + v_\Theta \frac{\varphi_0}{r} \right) + v_\Theta D_r a_\Theta \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial \Theta} \right], \end{aligned} \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned} M_\Theta = -D_\Theta \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \Theta^2} + \frac{\partial w}{\partial r} \right) - v_r D_\Theta \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \\ + \frac{h^2}{10} \left[D_\Theta a_\Theta \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_0}{\partial \Theta} + D_\Theta a_r \left(\frac{\varphi_0}{r} + v_r \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.89)$$

$$H = D_k \left\{ -2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w}{r \partial \Theta} \right) + \frac{h^2}{10} \left[a_r \frac{\partial \varphi_0}{\partial \Theta} + a_\Theta \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial r} - \frac{\psi_0}{r} \right) \right] \right\} \quad (2.90)$$

и наконец, разрешающее уравнение задачи

$$\begin{aligned}
& D_r \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + 2D_{r\Theta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \Theta^2} + D_{\Theta} \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \Theta^4} + \\
& + 2D_r \frac{1}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - 2D_{r\Theta} \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial r^2 \partial \Theta^2} - D_{\Theta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \\
& + 2(D_{\Theta} + D_{r\Theta}) \frac{1}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \Theta^2} + D_{\Theta} \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} = \\
& = Z_2 + \frac{h^2}{10} \left\{ a_r \left[D_r \left(\frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r^2} + \frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial r^3} \right) + D_{r\Theta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial r \partial \Theta^2} + \right. \right. \\
& + D_{\Theta} \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \Theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + \frac{\varphi_0}{r^3} \right) \left. \right] + a_{\Theta} \left[D_{r\Theta} \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial r^2 \partial \Theta} + \right. \\
& \left. \left. + D_{\Theta} \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial \Theta^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r \partial \Theta} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi_0}{\partial \Theta} \right) \right] \right\}. \tag{2.91}
\end{aligned}$$

Во всех этих формулах и уравнениях для функций φ_0 и ψ_0 имеем

$$\begin{aligned}
\varphi_0 = & - \left[B_r \left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} \right) + B_{\Theta r} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \Theta^2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} - \frac{w_0}{r} \right) - \right. \\
& \left. - B_{\Theta} \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \Theta^2} \right) \right], \tag{2.92}
\end{aligned}$$

$$\psi_0 = - \left[B_{r\Theta} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2 \partial \Theta} + B_{\Theta} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\frac{\partial w_0}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \Theta^2} \right) \right]. \tag{2.93}$$

Предлагаемую здесь теорию можно несколько улучшить. Дело в том, что, не вводя никаких существенных осложнений, можно освободиться от предположения о пренебрежительности σ_γ по сравнению с прочими напряжениями; тогда для расчетных напряжений получим

$$\sigma_{\alpha} = -\gamma \left(B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right) + I_0 \left(B_{11} a_{55} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \alpha} + B_{12} a_{44} \frac{\partial \psi_0}{\partial \beta} \right) - A_1 \left[Z_1 + \left(\frac{3\gamma}{2h} - 2 \frac{\gamma^3}{h^3} \right) Z_2 \right], \quad (2.94)$$

$$\sigma_{\beta} = -\gamma \left(B_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right) + I_0 \left(B_{22} a_{44} \frac{\partial \psi_0}{\partial \beta} + B_{12} a_{55} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \alpha} \right) - A_2 \left[Z_1 + \left(\frac{3\gamma}{2h} - 2 \frac{\gamma^3}{h^3} \right) Z_2 \right], \quad (2.95)$$

$$\tau_{\alpha\beta} = -B_{66} \left[2\gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} + I_0 \left(a_{55} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \beta} + a_{44} \frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha} \right) \right], \quad (2.96)$$

где $Z_1 = \frac{Z^+ - Z^-}{2}$.

Для моментов и поперечных сил имеем

$$M_1 = - \left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \right) + \frac{h^2}{10} \left(D_{11} a_{55} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \alpha} + D_{12} a_{44} \frac{\partial \psi_0}{\partial \beta} \right) - \frac{h^2}{10} A_1 Z_2, \quad (2.97)$$

$$M_2 = - \left(D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \right) + \frac{h^2}{10} \left(D_{22} a_{44} \frac{\partial \psi_0}{\partial \beta} + D_{12} a_{55} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \alpha} \right) - \frac{h^2}{10} A_2 Z_2, \quad (2.98)$$

$$H = -2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{h^2}{10} D_{66} \left(a_{55} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \beta} + a_{44} \frac{\partial \psi_0}{\partial \alpha} \right), \quad (2.99)$$

$$N_1 = \frac{h^3}{12} \varphi_0, \quad N_2 = \frac{h^3}{12} \psi_0. \quad (2.100)$$

и, наконец, разрешающее дифференциальное уравнение задачи

$$\begin{aligned}
& D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial \beta^4} = \\
& = Z_2 + \frac{h^2}{10} \left\{ a_{55} \left[D_{11} \frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial \alpha^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial \beta^2} \right] + a_{44} \left[D_{22} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial \beta^3} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial \beta \partial \alpha^2} \right] \right\} - \frac{h^2}{10} \left(A_1 \frac{\partial^2 Z_2}{\partial \alpha^2} + A_2 \frac{\partial^2 Z_2}{\partial \beta^2} \right). \quad (2.101)
\end{aligned}$$

Рассматривая формулы для расчетных величин (5.27)-(5.33) и разрешающее уравнение (5.34) уточненного варианта теории, замечаем, что они от соответствующих формул (5.8)-(5.14) и разрешающего уравнения (5.16) неупрощенной теории отличаются лишь членами, которые содержат множители A_1 и A_2 , которая имеют вид

$$A_1 = a_{13}B_{11} + a_{23}B_{12}; \quad A_2 = a_{13}B_{12} + a_{23}B_{22}. \quad (2.102)$$

В вышеприведенных уравнениях приведены механические характеристики: модули упругости E и коэффициенты Пуассона ν для сплошных сред. Однако горные породы обладают трещиноватостью, поэтому ее учет представляет теоретический и практический интерес, что изложено в следующем разделе.

3. ДЕФОРМИРУЕМОСТЬ МАССИВОВ ТРЕЩИНОВАТЫХ ГОРНЫХ ПОРОД

3.1. Некоторые сведения о трещиноватости массивов горных пород

Среди многочисленных вопросов, подлежащих выяснению в ходе инженерно-геологических изысканий при проектировании и строительстве шахт, одним из наиболее важных и вместе с тем трудных является оценка деформируемости трещиноватых массивов горных пород, используемых в качестве скальных оснований инженерных сооружений.

Для получения численных значений модуля упругости массивов горных пород выполняются обширные и крайне трудоемкие эксперименты по непосредственному определению этой характеристики с помощью плоских штампов, заноренных камер и т.п. Однако реальная ценность этих результатов в общем относительно невелика. Дело даже не только и не столько в высокой стоимости и продолжительности экспериментов по определению модуля упругости пород в натуре, хотя и это обстоятельство достаточно важно. Очевиден и тот факт, что никакое точечное испытание не моделирует поведение скального основания в целом. Известно также, что в настоящее время не существует надежного метода экстраполяции результатов мелкомасштабных испытаний на большие объемы массива горных пород. Поэтому единственным способом определения модуля упругости скального основания в целом или отдельных его участков является аналитический. Для этого необходим научно обоснованный метод расчета величины модуля упругости, который в то же время должен быть достаточно простым для практического использования и основываться на данных, получаемых в ходе обычных инженерно-геологических изысканий и, в частности, описаниях трещиноватости массива.

Излагаемый метод расчета модулей упругости скального основания базируется на экспериментальной закономерности, заключающейся в том, что основная часть упругости скальных контактов в трещинах прямо пропорциональна дей-

ствующим напряжениям и обратно пропорциональна модулю упругости материала контактов. При этом зависимость модуля упругости трещиноватого скального основания от числа трещин, их раскрытия и прочих факторов является существенно нелинейной.

Определение модуля упругости горных пород первоначально проводилась для накопления фактических данных на образцах в лабораторных условиях. Особенно широкие исследования в этом направлении велись в инженерных училищах Германии, Австрии и Швейцарии. Достаточно упомянуть работы Баушингера, Графа, Мюллера, Флейшера, Штокке. В СССР аналогичные работы проводились в Донецком политехническом институте, Всесоюзном научно-исследовательском маркшейдерском институте – Г.Н. Кузнецовым, Геологическом институте АН СССР – Б.В. Залесским, Б.П. Беликовым и во многих других организациях.

Однако вскоре практика выявила систематическое расхождение результатов лабораторных определений модуля упругости горных пород с получаемыми в натуре. Это расхождение было настолько существенным, что от лабораторных исследований деформируемости горных пород для получения исходных данных для расчетов подземных сооружений любых типов и арочных плотин пришлось полностью отказаться и перейти к исследованию пород в условиях их естественного залегания. Широкое распространение получили косвенные (геофизические) методы и прямые – способы занаторенных камер, штампов и прессиометрический. Получаемые в натуре величины модуля упругости, как правило, оказываются в несколько раз меньшими, чем определяемые на образцах. Общеизвестным стало положение, что основной причиной расхождения между натурными и лабораторными результатами является влияние макротрещиноватости горных пород. Именно поэтому в ряде научно-исследовательских и проектных организаций получили широкое развитие исследования деформируемости трещиноватых материалов на моделях.

Эти работы имели целью выявить общие закономерности снижения величин деформации как функции трещиноватости. Кроме того, был предпринят ряд попыток теоретически осмыслить явления, происходящие при деформации трещи-

новатых материалов, построить механико-математическую модель трещиноватой среды и дать расчетные формулы, связывающие трещиноватость с модулем упругости квазисплошного материала. Попытки построения модели трещиноватого массива имеют большое принципиальное значение, так как все без исключения натурные определения модуля упругости скального основания хотя и вовлекают в работу объемы горных пород неизмеримо большие, чем образцы в лабораторных исследованиях, но все же по сравнению с размерами строящихся сооружений должны рассматриваться как мелкомасштабные.

Эти попытки не привели к цели главным образом потому, что в них недостаточно полно учитывались геологические особенности строения реальных массивов.

Допустим, что требуется определить расчетом давление на крепь некоторой подготовительной выработки, пройденной в трещиноватом массиве горных пород, или перемещения и эпюру контактного давления по подошве фундамента, опирающегося на скальное основание. Допустим также, что методы решения этих задач для идеального, т.е. сплошного (нетрещиноватого) однородного изотропного или анизотропного массива известны, имеется необходимая вычислительная техника, и трудности расчета могут не приниматься во внимание. В отношении трещиноватости мы также располагаем всеми данными: достоверно известны пространственное расположение трещин, их число, расстояние между трещинами, ширина их раскрытия, механические свойства заполнителя трещин, механические свойства ненарушенного материала и т.п. Короче, допустим, что мы располагаем исчерпывающими исходными данными и любой вычислительной техникой. Требуется найти, используя соответствующий математический аппарат, давление на крепь или перемещения и распределение давлений под фундаментом.

Для этого необходимо решить так называемую контактную задачу, так как ответ на поставленные вопросы находится из условия равенства перемещений крепи и точек поверхности выработки или фундамента и основания.

Повторим еще раз: если бы массив горных пород был сплошным, т.е. нетрещиноватым, то решение контактных задач не представляло бы никаких прин-

ципиальных затруднений при любом виде зависимости между напряжениями и деформациями. Действительно, проинтегрировав тем или иным способом дифференциальные уравнения равновесия при заданных граничных условиях, мы бы получили выражения для компонентов напряжения как однозначные непрерывные функции координат, а затем обычными приемами нашли бы и искомые перемещения на контактных поверхностях. Наличие трещиноватости в корне меняет положение. Трещиноватый скальный массив не может рассматриваться как сплошная среда, так как напряжения и перемещения в нем не являются непрерывными функциями координат, и следовательно, весь прекрасно разработанный математический аппарат механики сплошных сред становится бесполезным.

Возникшее принципиальное затруднение нельзя преодолеть путем решения задачи для сплошной среды с конечным числом разрезов-трещин. Такой путь практически бесперспективен, так как задача становится пространственной, а многообразие природных условий заведомо не позволит создать достаточно общий алгоритм для решения даже простейших задач. Поэтому в настоящее время используется другой подход, состоящий в следующем. Реальный трещиноватый массив заменяется эквивалентным по деформируемости сплошным массивом, т. е. массивом, модуль (или модули) упругости которого подбираются таким образом, чтобы перемещения на контактных поверхностях массива и сооружения были бы одинаковы для реального и эквивалентного массивов. Именно эта задача и ставится при инженерно-геологических изысканиях, а ее решение ищется с помощью экспериментов в натуре или моделирования. В рамках настоящего исследования будет дан аналитический метод определения деформируемости трещиноватого массива как функции параметров трещиноватости. Точнее, будет дан метод определения расчетом характеристик эквивалентного по деформируемости сплошного массива, и именно в этом смысле и надо понимать термин «деформируемость массива горных пород».

Сделаем еще несколько предварительных замечаний. Подобрать сплошной массив, эквивалентный трещиноватому одновременно по деформируемости и по распределению напряжений в удаленных от границ внутренних областях, разуме-

ется, невозможно. Более того, чтобы перемещения на соответствующих границах были одинаковы, необходимо, чтобы картина распределения напряжений в эквивалентном массиве существенно отличалась от реальной. На тех же поверхностях, где требуется определение перемещений, как в эквивалентном, так и в реальном массивах будут действовать совершенно одинаковые напряжения, которые и могут быть найдены в ходе решения соответствующей контактной задачи. Таким образом, задача учета влияния трещиноватости на деформируемость скальных массивов сводится к определению параметров эквивалентного по деформируемости сплошного массива. Как будет показано ниже, эквивалентный сплошной массив существенно анизотропен и характеризующие его значения модулей упругости находятся в определенной однозначной зависимости от модулей упругости ненарушенной горной породы (т.е. породы без трещин), а также некоторых комбинаций параметров, определяющих пространственное положение трещин, их число и ширину раскрытия.

Массив горных пород, по определению П.Н. Панюкова, – это часть земной коры, находящаяся в сфере инженерного воздействия, исследуемая с целью определения условий производства инженерных работ и эксплуатации сооружений и обладающая инженерно-геологической структурой, отличной от структуры соседних с ним участков земной коры.

Массивы горных пород представляют собой сложно построенные природные образования, инженерно-геологические свойства которых обуславливаются рядом геологических факторов (литолого-петрографические особенности пород, структура и напряженное состояние массива, его гидрогеологические особенности, характер и степень проявления экзогенных процессов и т.п.). Исследование массивов ведется на разных уровнях – от рассмотрения мельчайших деталей их строения, видимых в шлифах под микроскопом, и до крупнейших форм, фиксируемых на аэрофотопланах и геологических картах. Необходимый уровень рассмотрения определяется целями работы. При разведке месторождений полезных ископаемых большое внимание уделяется микроскопическому исследованию. Ведется описание минералогического состава, взаимоположения и формы отдельных ми-

неральных зерен, микротрещин, видимых в шлифах, и т.п. При сейсмологических исследованиях внимание переносится на наиболее крупные элементы массивов, имеющие протяженность в несколько километров и более. Практические инженерно-строительные задачи определяют для нас уровень рассмотрения, который в геологии называется макроскопическим.

На этом уровне рассматриваются элементы неоднородности с линейными размерами не более активной зоны сооружения и не менее размера образца, отбираемого из массива для лабораторного исследования физико-механических свойств пород. Этот диапазон размеров достаточно велик (максимальный от минимального отличается по линейному размеру в 10^4 раз), но, тем не менее, значительно уже диапазона, исследуемого геологическими методами. На макроскопическом уровне массив горных пород как геологическая среда, взаимодействующая с сооружением, представляется состоящим из двух компонентов-блоков горной породы и разделяющих их трещин.

На данном уровне рассмотрения горная порода представляется однородной средой. Неоднородность горной породы в пределах блока проявляется феноменологически и учитывается интегрально в ходе лабораторных испытаний образцов с последующей статистической обработкой результатов.

Неоднородность вещественного состава, текстуры и структуры пород приводит к тому, что прочностные и деформационные свойства породы в массиве изменяются от точки к точке и их значения являются случайными величинами, колеблющимися около некоторых средних значений, которые с помощью лабораторных исследований могут быть определены точно, что позволяет рассматривать их как константы, если точкой массива считать достаточно большой физический объем. Однако на эту в общем благоприятную картину накладывается влияние трещиноватости, которое радикально изменяет все физико-механические свойства ненарушенного трещинами массива: резко увеличивает его проницаемость, значительно снижает прочность на сдвиг и соответственно увеличивает деформируемость под нагрузкой. Для массива, состоящего из одной разновидности породы с постоянными свойствами, в зависимости от трещиноватости модуль упругости

изменяется в 10 раз и более. Трещиноватость горных пород составляет предмет специального изучения в геологии и инженерной геологии в связи со сложностью этого явления.

Изложим основные сведения о трещиноватости как факторе, оказывающем весьма сильное влияние на деформируемость массивов горных пород. С позиции механики сплошных сред трещина представляет собой поверхность раздела, на которой претерпевает разрыв вектор смещения. С точки зрения структурной геологии трещина – это пространство между стенками блоков горной породы, слагающих массив. Трещиноватостью горных пород принято называть совокупность трещин в массиве. Каждая отдельная трещина характеризуется длиной, которая фактически может быть измерена только как протяженность следа трещины на обнажении, шириной, которая может быть неоднократно измерена на следе трещины, шероховатостью и извилистостью стенок, а также положением трещины в пространстве, которое в геологии принято обозначать углом падения и азимутом направления падения. Трещины различаются также наличием или отсутствием в них заполнителей, в соответствии с чем они подразделяются на открытые (зияющие, незаполненные) и заполненные. Заполнитель в трещинах может быть представлен рыхлыми отложениями типа песчано-глинистых грунтов либо образованиями, отличающимися от пород массива по минералогическому составу, но сходными с ними по структуре и физическим свойствам. Трещины с заполнителем второго типа при большой их ширине называют жилами, а при ширине до нескольких миллиметров – залеченными трещинами.

По протяженности выделяют пять классов трещин: дефекты кристаллической решетки, микротрещины, разрывы и крупные тектонические разрывы. В соответствии со сказанным выше выбранный уровень рассмотрения массивов позволяет не обращать внимание на дефекты решетки и микротрещины, и, с другой стороны, на тектонические разрывы. Последние могут рассматриваться как трещины только в региональном плане; протяженность их может составить десятки и сотни километров и заведомо больше линейных размеров проектируемых сооружений.

Таким образом, на принятом уровне рассмотрения фактически нас будут интересовать лишь макротрещины, протяженность которых условно ограничена от 0,1 до 100 м, и разрывы, которые условно ограничены длиной от 100 м до 10 км. Кроме протяженности, макротрещины (далее для краткости их будем называть трещинами) и разрывы различаются некоторыми чертами, определяющими разное их поведение в процессе деформации массива. С протяженностью трещины или разрыва связана свобода относительного перемещения бортов. Чем длиннее разрыв, тем обычно больше относительное перемещение бортов и тем больше степень дробления горной породы, прилегающей к разрыву. Практически по трещинам наблюдаются ничтожные смещения. Трещины представляют собой полости со стенками, соприкасающимися в отдельных точках; разрывы же, благодаря значительной протяженности, допускают подвижность бортов. Порода у разрыва растрескивается, причем возникают макротрещины, оперяющие разрыв. Наличие оперения выделяет в массиве зону разрыва как зону повышенной трещиноватости и повышенной деформируемости. Если где-то в удалении от разрыва деформация массива складывается из деформации породы и деформации фоновых макротрещин, то у разрыва к этому добавляется деформация оперяющих макротрещин и деформация раздробленного материала между бортами разрыва.

Трещины по отношению к разрывам выступают как элементы второго порядка малости. Однако в процессе деформации роль их от этого не становится второстепенной. По количеству и по объему в массиве трещины преобладают над разрывами. Измерение многих тысяч длин трещин на разных массивах позволило заключить, что статистическое распределение длин трещин близко к логарифмически нормальному, а если не отбрасывать микротрещины, то к экспоненциальному. В массиве по суммарной длине преобладают макротрещины. При слабой зависимости ширины трещин от ее длины из асимметрии закона распределения длин трещин следует важный для нас вывод, что теория деформирования массива в первую очередь должна описывать деформацию макротрещин, как играющую роль в увеличении деформируемости трещиноватых массивов по сравнению с массивами нетрещиноватыми. Объем, находящийся между бортами разрыва (зона

дробления), по отношению к суммарному объему макротрещин и меньше, и менее сжимаем. Внутренняя структура зоны дробления разрыва такова, что учет сжимаемости ее может быть, видимо, без большой погрешности сведен к учету сжимаемости трещины с заполнителем.

Совокупность трещин в массиве образует пространственную решетку, или сеть трещин. Трещины в сети могут следовать параллельно либо пересекаться. Группа примерно параллельных трещин называется системой трещин. Системы широко распространены в горных породах. Фактически в систему включают не только параллельные трещины, но и трещины, пересекающиеся под острыми углами, однако тяготеющие к одному генеральному направлению. Положение трещины, как и всякой плоскости, в геологии принято обозначать двумя углами. Ориентировка системы в соответствии с этим характеризуется двумерным статистическим распределением, которое для некоторых случаев удовлетворительно описывается распределением Мизеса. В массивах, переживших сложную геологическую историю, распределение ориентировки трещин обычно более сложно.

Принято выделять по взаимной ориентировке трещин следующие сети: системные, полигональные, хаотические.

Системные сети трещин, как говорит название, образованы несколькими системами трещин. Очень часто, особенно в платформенных условиях, сеть трещин образована тремя основными системами, пересекающимися под прямыми углами. Такая сеть характерна для слоистых осадочных пород, гранитов, некоторых эффузивов и пирокластических образований. В осадочных породах одна из систем трещин следует параллельно слоям. Две другие перпендикулярны ей. При геологических исследованиях часто выделяются и другие системы трещин. Иногда, при структурном анализе, на одной складке их выделяют более 10, однако большинство представлено столь малым числом трещин, что не оказывает заметного влияния на деформируемость массива. Системы со значительной густотой трещин встречаются обычно в комбинации по три в одной точке массива, таким образом, благодаря трещиноватости массив горных пород часто представляет со-

бой в каждой отдельной точке ортотропную среду даже при наличии по массиву в целом многих систем трещин.

Другой распространенный тип сети трещин получил название полигонального. Полигональная сеть состоит из одной системы трещин и множества трещин, перпендикулярных одной общей оси, массив с такой сетью трансверсально изотропен, плоскость изотропии совпадает по ориентировке с плоскостью единственной системы трещин, сети трещин такого типа возникают при первичном растрескивании эффузивов, полуглубинных интрузивов и в других случаях, из которых важнейший – образование оперяющих трещин в окрестности тектонического разрыва. В эффузивах плоскость изотропии совпадает с направлением течения магмы – лавы, в зоне разрыва эта плоскость перпендикулярна смесителю и совпадает с направлением смещения.

Третий распространенный тип сети трещин представлен трещинами неупорядоченной ориентировки (хаотическая трещиноватость). Массив с такой сетью трещин, если он сложен разнообразностью пород, чаще всего изотропен. Хаотическая трещиноватость обычно встречается в сильно измененных породах, испытавших многократные смены полей напряжений. Метаморфические породы (гнейсы, мраморы, магматиты, сильно трещиноватые изверженные породы) нередко обладают хаотической трещиноватостью. Она возникает также на последней стадии развития массива при его выветривании. Для массивов с хаотической трещиноватостью характерно наличие как бы вложенных сетей трещин. Многочисленные тектонические разрывы следуют на близком расстоянии, создавая решетку одного уровня, а между ними блоки разбиты макротрещинами, которые образуют решетку другого уровня. Точно так же в зоне выветривания выведенные на поверхность расширенные и заполненные древние трещины образуют сравнительно редкую сеть, внутри которой размещаются многочисленные тонкие трещины выветривания.

Рассмотрим генетическую классификацию трещин. Ей уделяется много внимания в геологической литературе. Не углубляясь в вопросы механизма образования природных трещин, укажем лишь, каково может быть значение генетиче-

ского анализа сетей трещин при исследовании деформируемости. При всем разнообразии генетических классификаций многие авторы выделяют первичные, тектонические и экзогенные трещины и сети трещин. Первичные трещины, образующиеся в момент формирования породы, иначе называются литогенетическими или петрогенетическими.

Экзогенные трещины образуются на последнем этапе развития горной породы, когда процессами денудации она выведена на поверхность и испытывает воздействие агентов выветривания, прежде чем подвергнуться полному разрушению. К тектоническим относятся трещины, возникающие в породе на протяжении длительной истории ее существования после формирования первичных трещин, но до формирования экзогенных. Трещины, принадлежащие к определенному классу, обладают специфическими признаками, которые позволяют геологам при исследовании массивов выделять сети разного происхождения. Эти признаки не обладают достаточной определенностью, чтобы ими можно было воспользоваться для количественной характеристики деформируемости массива. Такая оценка может быть дана по морфологии и геометрии трещин. Однако понятие о происхождении трещин определенным образом используется при исследовании деформируемости массива. Оно дает основание для использования метода аналогий при переходе от исследованных частей массива к неисследованным. Предлагаемая ниже теория и методика определения деформируемости условием своего применения ставит знание параметров сети трещин во всем объеме активной зоны сооружения. Такой материал не может быть получен путем непосредственных измерений. Трещины слишком многочисленны, кроме того, большинство из них, даже при детальной инженерно-геологической разведке, остается недоступными для исследования. Только статистическое обобщение на массив параметров доступных частей решетки трещин может дать материал, достаточный для применения на практике излагаемых ниже положений. Такое обобщение может быть выполнено лишь на основе геологических представлений о генезисе трещин.

Условимся, что в дальнейшем изложении под массивом горных пород мы будем подразумевать тот относительно небольшой, т.е. соизмеримый с размерами

сооружения, объем горной породы, который активно взаимодействует с инженерными сооружениями и в котором локализуется 80-90 % всех деформаций, вызванных прилагаемой нагрузкой.

3.2. Определение механических характеристик

3.2.1. Системы зияющих трещин

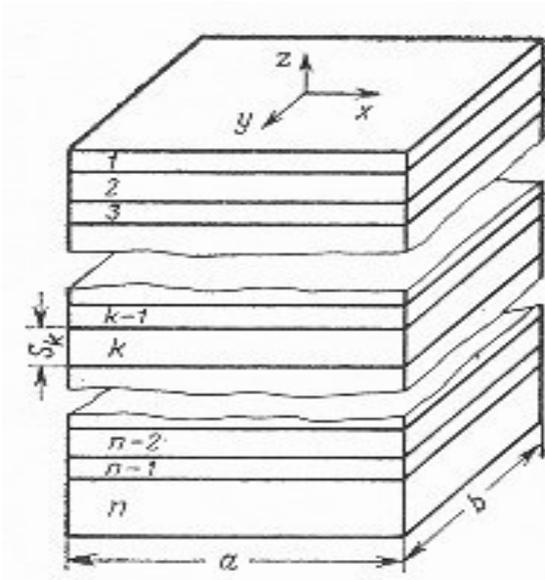


Рис. 3.1 Схема В.М. Гольдфарба и А.В. Степанова к выводу формул для определения упругих постоянных слоистых сред

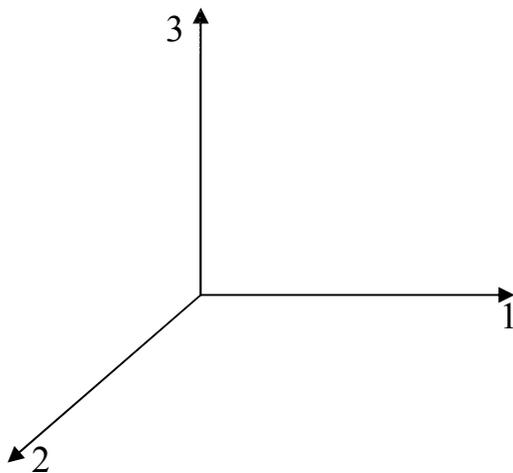


Рис. 3.2. Система координат к выводу соотношений 3.3

Рассмотрим область массива горных пород, имеющих форму прямоугольной призмы с ребром основания L и высотой H , ослабленную одной системой горизонтальных трещин, длина которых $l \geq L$. Если слой с толщиной δ , то придем к схеме, которая была представлена на рис. 3.1.

Введем следующие обозначения: направим ось 3 вертикально вверх, ось 1 – горизонтально вправо и ось 2 – нормально к плоскости чертежа (рис. 3.2).

Пользуясь введенными обозначениями, перепишем соотношения (1.12), учитывая, что скальные контакты являются изолированными друг от друга точками передачи внешней нагрузки. Поэтому в пределах слоя – трещины под действием нормального давления не возникает поперечной деформации и коэффициент Пуассона для слоя, эквивалентного зияющей трещине, $\nu_2 = 0$. Модуль деформации для этого же слоя, оче-

видно, равен $E_2 = \xi E_1$, так как скальные контакты имеют тот же вещественный состав, что и ненарушенная горная порода.

С учетом сказанного находим:

$\chi = (1 - \nu_2 - 2\nu_2^2)/(1 - \nu_2) = 1$ и, следовательно,

$$s_{11} = \frac{1}{E_1}; \quad s_{12} = -\frac{\nu_1}{E_1}; \quad s_{13} = -\frac{\nu_1}{E_1}; \quad (3.1)$$

$$s_{44} = \frac{2}{E_1}(1 + \nu_1 + \eta),$$

$$s_{33} = \frac{1}{E_1}(1 + \eta),$$

где обозначено

$$\eta = \frac{\delta E_1}{h(\xi E_1 + \sigma)}, \quad \text{или} \quad \eta = \frac{\delta}{\xi h} \quad (3.2)$$

в зависимости от того, учитывается или не учитывается изменение ширины раскрытия трещины в процессе нагружения.

Для технических приложений удобнее пользоваться не константами s_{ij} , а выражениями модулей деформации и коэффициентов Пуассона анизотропной среды через E_1, ν_1 и η . Эти выражения имеют вид:

$$\begin{aligned} E_{\text{II}} &= E_1; \\ E_{\perp} &= \frac{E_1 E_2}{E_2 + \chi k E_1} = \frac{E_1}{1 + \eta}; \\ G_{\text{II}, \perp} &= \frac{E_1 E_2}{2E_2(1 + \nu_1) + 2kE_1} = \frac{E}{2(1 + \nu_1 + \eta)}; \\ G_{\text{II}} &= \frac{E_1}{2(1 + \nu_1)}; \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\nu_{\perp, \text{II}} = \nu_{\text{II}},$$

где E_{\perp} – модуль деформации эквивалентной сплошной среды по нормали к поверхности трещин;

E_{\parallel} – модуль деформации эквивалентной сплошной среды по направлению, лежащему в плоскости трещин;

$G_{\parallel,\perp}$ – модуль сдвига в плоскости 3 – 0 – 1;

G_{\parallel} – модуль сдвига в плоскости 1 – 0 – 2, т.е. плоскости изотропии;

$\nu_{\perp,\parallel}$ – коэффициент Пуассона, определяемый как отношение поперечной деформации в плоскости 3 – 0 – 1 к продольной деформации в плоскостях трещин;

E_1, ν – модуль деформации и коэффициент Пуассона ненарушенного материала;

h – расстояние между трещинами;

δ – ширина раскрытия трещины.

Чтобы оценить, насколько велика возникающая в массиве горных пород анизотропия деформационных свойств, рассмотрим численный пример, используя типичные натурные данные по описанию трещиноватости для одного типа известняков: $E_{\parallel} = 6 \cdot 10^5$ кгс/см²; $\nu_1 = 0,2$; $\delta = 0,03$ см; $h = 40$ см и $\xi = 3 \cdot 10^{-4}$. По формулам (3.3) находим:

$$E_{\parallel} = 6 \cdot 10^5 \text{ кгс/см}^2, \quad \eta = (0,03/40 \cdot 3) \cdot 10^4 = 2,5, \quad E_{\perp} = 1,7 \cdot 10^5 \text{ кгс/см}^2; \quad (3.4)$$

$$G_{\parallel,\perp} = 0,81 \cdot 10^5 \text{ кгс/см}^2; \quad G_{\parallel} = 2,3 \cdot 10^5 \text{ кгс/см}^2; \quad \nu_{\perp,\parallel} = 0,2.$$

И так, наличие даже очень тонких трещин приводит к появлению весьма существенной анизотропии. Так, модули нормальной деформации отличаются в 3,5 раза, а модуль сдвига оказывается в одной плоскости почти в 2.9 раза меньше, чем в другой.

Повернем теперь систему координат на угол φ вокруг оси 2, как это показано на рис. 3.3. Модуль деформации по направлению φ найдется по второй формуле системы (1.6)

$$\frac{1}{E_\varphi} = s_{II} \sin^4 \varphi + s_{33} \cos^4 \varphi + (2s_{13} + s_{44}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi.$$

Внося в эту формулу значения S_{ij} , определенные соотношениями (4.1), получим

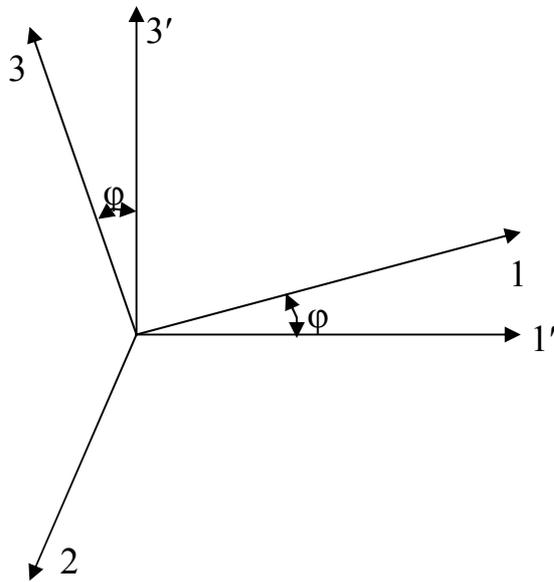


Рис. 3.3. Поворот системы координат на угол φ

$$\begin{aligned} \frac{E_1}{E_\varphi} &= \sin^4 \varphi + (1 + \eta) \cos^4 \varphi + (-2\nu_1 + 2 + 2\nu_1 + 2\eta) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi = \\ &= 1 + \eta \cos^2 \varphi (\cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi) = 1 + \eta (1 - \sin^4 \varphi). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Оси 1 и 3 не являются главными и для повернутой системы координат все остальные упругие постоянные найдутся следующим образом (3.1) в

$$\begin{aligned}
s'_{11} &= \frac{E_1}{E_{\varphi+90^\circ}} = 1 + \eta(1 - \text{Cos}^4 \varphi); \\
s'_{13} &= -\frac{1}{E_1} (\eta \text{Sin}^2 \varphi \text{Cos}^2 \varphi + \nu_1); \\
s'_{12} &= s'_{23} = -\frac{\nu_1}{E_1}; \\
s'_{55} &= \frac{2(1 + \nu_1)}{E_1} + \frac{\eta}{E_1} (2 - \text{Sin}^2 2\varphi); \\
s'_{44} &= \frac{2(1 + \nu_1)}{E_1} + \frac{2\eta}{E_1} \text{Cos}^2 \varphi; \\
s'_{66} &= \frac{2(1 + \nu_1)}{E_1} + \frac{2\eta}{E_1} \text{Sin}^2 \varphi; \\
s'_{15} &= \frac{1}{E_1} \eta \text{Cos}^2 \varphi \text{Sin}^2 2\varphi; \\
s'_{35} &= \frac{1}{E_1} \eta \text{Sin}^2 \varphi \text{Sin} 2\varphi; \\
s'_{46} &= \frac{2\eta}{E_1} \text{Sin} 2\varphi; \quad s'_{25} = 0.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Очевидно, по формулам (3.5) и (3.6) можно вычислить все модули деформации, если плоскости трещин образуют с горизонтом угол $\varphi = \theta$. С тем, чтобы в дальнейшем не оговаривать каждый раз обозначения, условимся при определении модуля деформации по вертикальному направлению записывать формулу (3.5) в виде

$$E_{\perp} = \frac{E_1}{1 + \eta(1 - \text{Sin}^4 \theta)} \tag{3.7}$$

и т.д.

Если систем трещин несколько (k) и каждая система имеет свои средние значения h_i, δ_i, ξ_i и т.д., то

$$E_{\perp} = \frac{E_1}{1 + \sum_1^k \eta_i (1 - \text{Sin}^4 \theta_i)}, \quad (3.8)$$

где i – индекс системы трещин;

η_i – геометрическая характеристика трещин i -й системы;

θ_i – угол, образуемый трещинами i -й системы с горизонтом.

Разумеется, в пределах каждой системы могут быть трещины с различным раскрытием, расстояния между трещинами могут быть неодинаковыми, наконец, площади скальных контактов для трещин даже одной системы также могут оказаться различными. Поэтому под η_i и θ_i следует подразумевать средние величины i -й системы. Если же осреднение невозможно, например, резко разнятся δ , то даже если эти трещины имеют близкие значения θ_i , их следует разделить на семейства. Вообще формулой (3.7) можно пользоваться и, не объединяя трещины в семейства, а суммируя столько раз, сколько трещин попадает в рассмотрение.

Модуль по ортогональному к E_{\perp} направлению найдется по формуле (3.7) при подстановке вместо θ_i углов $\theta_i + 90^\circ$, т.е. при замене $\text{Sin}^4 \theta$ на $\text{Cos}^4 \theta$.

Очевидно, что остальные упругие постоянные в случае нескольких систем трещин вычисляются по формулам (3.5), в которых значения η , помноженные на соответствующие тригонометрические функции, следует заменить суммами типа $\sum \eta \text{Sin}^2 \theta \text{Cos}^2 \theta$, $\sum \eta (2 - \text{Sin}^2 2\theta)$ и т.д. здесь уместно сделать одно замечание, важное в смысле практического использования выведенных соотношений (3.5). Если систем трещин несколько, то, как правило, постоянные $s'_{15}, s'_{35}, s'_{46}$ обращаются в нуль из-за ортогональности систем косых трещин. Поэтому оси \perp и \parallel становятся главными, а модули деформации для этого случая находятся по формулам:

$$\begin{aligned}
E_{\perp} &= \frac{E_1}{1 + \sum_1^k \eta_i (1 - \text{Sin}^4 \theta)}; \\
E_{\parallel} &= \frac{E_1}{1 + \sum_1^k \eta_i (1 - \text{Cos}^4 \theta)}; \\
G_{\perp, \parallel} &= \frac{E_1}{2(1 + \nu_1 + \sum_1^k \eta_i \text{Cos}^2 \theta_i)}; \\
G_{\parallel} &= \frac{E_1}{2(1 + \nu_1 + \sum_1^k \eta_i \text{Sin}^2 \theta_i)}; \\
\nu_{\perp, \parallel} &= \nu_1 + \sum_1^k \eta_i \text{Sin}^2 \theta_i \text{Cos}^2 \theta_i.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Приведенные выше формулы с (3.1) по (3.9) были получены как частный случай общего решения для многослойной среды. Такой путь получения частных решений является наиболее строгим, хотя и требует проведения довольно громоздких выкладок. Поэтому ниже будет показано, каким образом можно получить те же соотношения из самых элементарных рассуждений, что по нашему мнению, может быть полезным в том отношении, что в практике могут встретиться некоторые особые случаи трещиноватости, например массив может быть разбит на блоки такой формы, что будет возникать эффект расклинивания. Учет эффекта расклинивания можно будет произвести, несколько модифицируя приводимые ниже элементарные выводы основных соотношений.

Рассмотрим плоскую пластинку, пересекаемую трещиной, параллельной ее горизонтальной грани. Относительно длины трещины пока предположим, что трещина не выклинивается в пределах пластинки и не прерывается. Безразмерную площадь скальных контактов обозначим по-прежнему ξ , раскрытие трещины δ . Кроме того, будем предполагать, что в трещине отсутствует заполнитель. Наконец, примем, что указанная трещина является единственной. Все эти ограничения будут в дальнейшем сняты одно за другим, пока же они необходимы для упроще-

ния задачи. Загрузим пластинку равномерно распределенной нагрузкой σ , как показано на рис. 3.4. Укорочение пластинки в направлении оси 2 сложится из деформации материала пластинки Δh и сближения краев трещины $\Delta \delta$. Получаемое при этом уравнение ничем не будет отличаться от аналогичного уравнения для деформации составного образца:

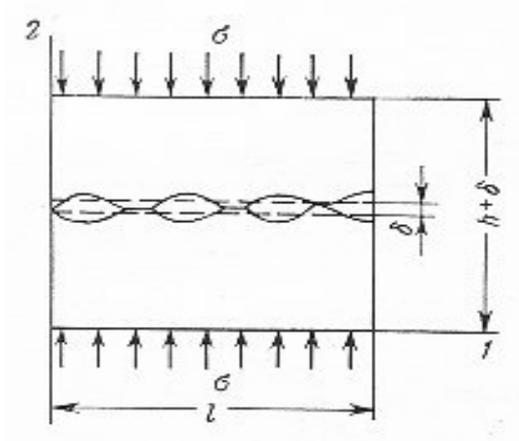


Рис. 3.4. Схема к определению E_{\perp} из рассмотрения деформаций пластинки со щелью.

$$\frac{\sigma(h + \delta)}{E_{\perp}} = \frac{\sigma h}{E_1} + \frac{\sigma \delta}{\xi E_1}. \quad (3.10)$$

Решая полученное уравнение относи-

тельно E_{\perp} , находим, что

$$E_{\perp} = \frac{\xi(h + \delta)}{\xi h + \delta} = \frac{1 + \frac{\delta}{h}}{1 + \eta} E_1,$$

где $\eta = \delta / \xi h$.

Но $1 \gg \delta / h$, и окончательно

$$E_{\perp} = \frac{E_1}{1 + \eta}.$$

При приложении равномерно распределенной нагрузки σ вдоль оси 1 получим следующие соотношения:

$$\frac{\sigma l}{E_{\parallel}} = \frac{\sigma_1 l}{E_{\perp}}; \quad \sigma_1 = \sigma \frac{h + \delta}{h}$$

откуда следует, что $E_{\parallel} \approx E_1$ при $\delta / h \ll 1$.

Наконец, прикладывая к граням пластинки парные касательные напряжения τ (рис. 3.5), можем записать, что общее среднее перемещение угловой точки образца будет равно сумме угловых деформаций, умноженных на соответствующие плечи:

$$\gamma(h + \delta) = \gamma_1 h + \gamma_2 \delta. \quad (3.11)$$

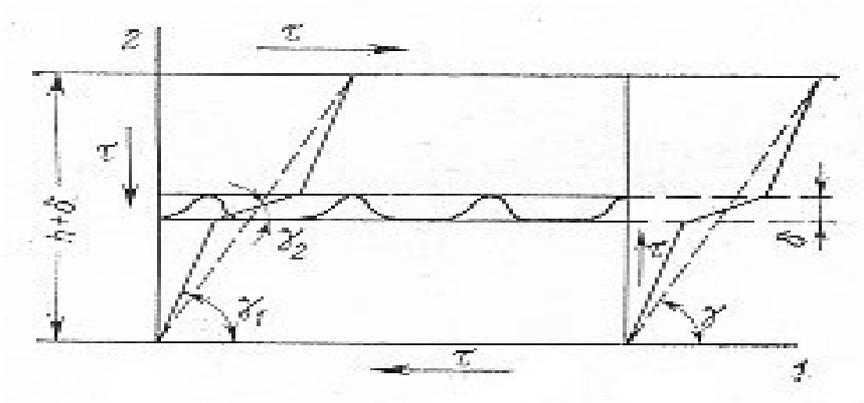


Рис. 3.5. Схема к выводу формулы для определения модуля сдвига

Для всех линейно деформируемых изотропных тел

$$\gamma = \frac{\tau}{\dot{I}}, \text{ где } \dot{I} = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Поэтому для ненарушенного материала

$$\gamma_1 = \frac{2\tau(1+\nu_1)}{E_1},$$

а для скальных контактов

$$\gamma_2 = \frac{\tau}{\xi} \cdot \frac{2}{E_1},$$

так как для этого слоя $\nu_2 = 0$.

Следовательно, выражение (4.9) можно записать в виде

$$\frac{\tau(h + \delta)}{G} = \frac{2\tau(1+\nu_1)h}{E} + \frac{2\tau\delta}{\xi E_1},$$

откуда с учетом $\delta \ll h$ получаем

$$G = \frac{E_1}{2(1+\nu_1 + \eta)}.$$

Наконец, коэффициент Пуассона при действии сжимающей нагрузки вдоль оси 2 будет, очевидно,

$$\nu_{12} = \frac{\nu}{1 + \eta},$$

так как поперечная деформация под влиянием трещины не изменяется по величине, а продольная увеличивается в $(1 + \eta)$ раз.

Если трещин несколько, то

$$E_{\perp} = \frac{E_1}{1 + \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n}$$

при условии, если $\sum \delta_i \ll h$.

3.2.2. Система трещин с заполнителем

Отдельного рассмотрения заслуживают случаи полного и частичного заполнения трещин.

Наряду с трещинами полыми, деформации которых рассматривались нами выше, в массиве горных пород встречается большое число трещин, частично или полностью заполненных минеральным заполнителем. По отношению прочностных свойств заполнителя к аналогичным свойствам вмещающей породы минеральные заполнители для наших целей целесообразно разделить на два больших класса: твердые и рыхлые. К твердым мы относим заполнители, образовавшиеся в трещинах при гидротермальных процессах. Это, как правило, мономинеральные образования, такие как кварц, кальцит, рудные минералы и т. п. Их деформационные свойства отличаются от свойств породы несущественно, и в случае, если трещина заполнена таким веществом полностью, она квалифицируется как прожилок, практически не увеличивающий деформируемость породы.

К рыхлым заполнителям мы относим тектонические брекчии и глинку трения, заполняющие тектонические трещины скалывания, и суглинисто-щебенистую смесь, заполняющую экзогенные трещины. Прочностные свойства рыхлых заполнителей на порядок и более ниже, чем прочность породы. Кроме того, опираясь на результаты многочисленных инженерно-геологических исследований, можно утверждать, что пористость рыхлых заполнителей существенно

выше пористости породы. Так, пористость тектонических заполнителей в среднем равна 20 – 30 %, а экзогенных – 30-60 %. Вблизи разломов, в их зонах дробления, рыхлыми тектоническими заполнителями бывают заполнены все сопровождающие разлом трещины, причем часто мощность заполнителя в этих трещинах достигает нескольких сантиметров. Очевидно, деформационные свойства такой зоны будут существенно отличаться от свойств остального массива.

Если заполнитель трещин имеет высокую пористость, то при действующих в массиве естественных сжимающих напряжениях края трещины удерживаются от смыкания скальными контактами. При отсутствии скальных контактов заполнитель должен был бы уплотниться, сохранив лишь минимальную пористость. Следовательно, при таком заполнителе остаются в силе все формулы, полученные для зияющих трещин.

Иначе обстоит дело, когда трещины в известняке залечены, например, кристаллическим кальцитом, который по своим механическим свойствам аналогичен известняку. В этом случае сближение краев трещин под давлением будет уже функцией не деформации скальных контактов, а деформации заполнителя.

Механические свойства тонкого слоя – заполнителя трещины – характеризуются значениями E_2 и ν_2 . Соотношения (3.1) остаются справедливыми и в этом случае, с тем, однако, отличием, что η определяется теперь как отношение

$$\eta = \frac{\delta}{h} \cdot \frac{E_1}{E_2} \quad \text{или} \quad \eta = \frac{\delta E_1}{h(E_2 + \sigma)}. \quad (3.12)$$

Если трещина наклонена к горизонту под углом θ , то для E_{\perp} имеет место соотношение

$$\frac{E_1}{E_{\perp}} = 1 + \eta(1 - \sin^4 \theta) + \frac{2\nu_2}{1 - \nu_2} \eta \cos^2 \theta (\sin^2 \theta - \nu_2), \quad (3.13)$$

аналогичное формуле (3.4) для зияющих трещин.

Для кристаллического заполнителя, т.е. для полностью залеченных трещин, $\nu_2 = 0,1 \div 0,2$, т.е. вторым членом в (3.13) можно пренебречь, и в этом случае все расчеты для заполненных трещин проводятся по формулам для систем зияющих

трещин с учетом (4.13). Интересно отметить, что для рыхлого заполнителя $\nu_2 = 0$, так как подобного рода заполнитель может уплотняться, не создавая заметного бокового давления, т.е. в этом случае опять же остаются в силе все соотношения, выведенные для систем зияющих трещин.

Итак, решение задачи об учете заполненных трещин в общем виде получено. Теперь остается установить область, в которой этим решением уместно пользоваться. Допустим, что ширина заполненной трещины $\delta = 0.05$ см. расстояние между трещинами $h = 20$ см. тогда при $E_1 / E_2 = 50$ получаем $\eta = 0,1$. Если при том же h $\delta = 0,02$ см и $E_1 / E_2 = 100$, то η также 0,1, следовательно, 10 % -ная поправка к величине модуля ненарушенного материала получается при учете заполненных трещин, если модуль материала заполнителя примерно в 50 – 100 раз меньше модуля ненарушенной породы.

Таким образом, расчет по предложенным формулам подтверждает общеизвестное положение, что твердый заполнитель, имеющий спаянный контакт с вмещающей породой, не снижает модуля упругости породы в массиве.

Рассмотрим случай крупных трещин, с раскрытием от 0,5 мм до нескольких десятков сантиметров, заполненных суглинком, брекчией или глиной трения и т.п. Такие образования уже не могут рассматриваться как скальные породы, и к ним более применимы методы и закономерности механики грунтов.

Заполнитель трещин при нормальном давлении работает так же, как грунт в компрессионном приборе, т.е. не имеет возможности бокового расширения, и при малых нагрузках уменьшение высоты слоя происходит в основном в результате изменения пористости.

Многочисленные экспериментальные исследования компрессии грунтов показывают, что деформации за счет изменения пористости в основном завершаются при давлениях менее 20 кгс/см². При больших нагрузках даже весьма рыхлые первоначально материалы ведут себя в компрессионном приборе, как тела с линейной зависимостью между напряжениями и деформациями. Следовательно, при оценке деформируемости массива, ослабленного трещиной с раскрытием δ ,

заполненной, например, суглинком с пористостью i , материал заполнителя должен быть подвергнут компрессии при расчетных нагрузках для получения зависимости между $\Delta\delta$ и σ . Эта зависимость, имеет логарифмический характер.

В самом общем виде зависимость E_{\perp} от E_1 $\Delta\delta(\sigma)$ имеет вид

$$E_{\perp} = \frac{E_1}{1 + \eta},$$

где

$$\eta = \frac{\Delta\delta(\sigma)}{h} \cdot \frac{\bar{E}_1}{\sigma},$$

и, следовательно, для каждого значения σ может быть вычислено соответствующее значение E_{\perp} . Среднее значение E_{\perp} найдем, подставив среднее значение η :

$$\bar{\eta} = \frac{E_1}{(\sigma_k - \sigma_0)h} \int_{\sigma_0}^{\sigma_k} \frac{\Delta\delta(\sigma)}{\sigma} d\sigma.$$

Если пренебречь участком первичного уплотнения заполнителя, то в качестве расчетной ширины раскрытия трещины можно принять величину $\delta_0 = \delta(1 - n)$ и значение η вычислить из соотношения

$$\eta = \frac{\delta(1 - n)}{h} \cdot \frac{E_1}{E_2},$$

где E_2 – модуль уплотненного заполнителя.

Вышеприведенную теорию можно использовать для разработки и математических моделей напряженно-деформированного состояния массивов горных пород в дифференциальном виде, если решение удовлетворяет известным уравнениям их равновесия, уравнениям совместимости деформаций и граничным условиям. Во многих случаях, как будет сказано ниже, точные решения для напряжений или перемещений получить невозможно, поэтому целесообразным является использование физического моделирования геомеханических процессов.

4. ФИЗИЧЕСКОЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ МОДЕЛЕЙ-АНАЛОГОВ

4.1. Общие сведения

Как указывалось во введении, при разработке месторождений полезных ископаемых и строительстве подземных сооружений возникают сложные инженерные задачи, связанные с напряженно-деформированным состоянием массива горных пород и проявлением различных физических процессов – давление горных пород, горные удары, выбросы и т.д. Физическая сущность указанных процессов еще недостаточно изучена, а математическое описание процессов в обобщенном виде в большинстве случаев отсутствует. В этом случае на основании теории размерности с использованием Пи-теоремы составляются уравнения связей, и подготавливается модель для проведения экспериментов.

В простейшем случае модель воспроизводит изучаемое явление с сохранением физической природы и геометрического подобия, а отличается от оригинала (натуры) лишь размерами одноименных параметров и скоростью протекания исследуемого процесса. В некоторых случаях значительно проще, удобнее и рациональнее модель изготавливать из среды, отличной по своей физической природе от оригинала (натуры). Однако и здесь модель изготавливают с соблюдением условий подобия. В этом случае изучение какого-либо явления в оригинале заменяется изучением аналогичного явления на модели. Например, вместо исследования явления конвективного теплообмена в природе исследуют на модели процесс диффузии или наоборот. По мере накопления данных о закономерностях процесса в дальнейшем составляются уже достаточно обоснованные уравнения связей, которые в критериальной форме используют для практических расчетов процесса в натуре.

Метод моделирования базируется на теории подобия. Однако в то время как теория подобия изучает свойства заведомо подобные системы, учение о моделировании призвано решать прикладную задачу, а именно: установить, каким тре-

бованиям должна удовлетворять модель, чтобы процессы, происходящие в ней, были подобны процессам, происходящим в природе.

В разработке теории подобия и моделирования первенство принадлежит русским ученым. Если заграничная практика дала сравнительно небольшое число разрозненных, относящихся к частным вопросам теории подобия, то русские ученые разработали общую теорию подобия, создав тем самым предпосылки, необходимые для построения учения о моделировании. Так, еще в 1907 г. М.В. Кирпичев дал блестящее изложение основ подобия. Уже в 1922 г. акад. Н.Н.Павловский опубликовал теорию электрогидродинамических аналогий. В 1924 г. М.В. Кирпичев начал экспериментальные исследования в области моделирования сначала тепловых, а затем и некоторых других явлений. Следует также указать на метод электрических аналогий, разработанный Л.И. Гутенмахером на основе развитой им теории С.А. Гершгорина.

Одной из первых попыток моделирования на физических моделях механических явлений в массиве горных пород являются исследования М. Файоля. В дальнейшем были разработаны теоретические основы и инженерные методы расчета физических моделей метода эквивалентных материалов проф. Г.Н.Кузнецовым, метода центробежного моделирования проф. Г.И.Покровским. Значительно развит и усовершенствован метод фотоупругости проф. В.Ф.Трумбачевым. Предложены и разработаны теоретические основы гидроинтегратора д-ром т.н. В.С.Лукьяновым.

Основоположником моделирования в горном деле по праву следует считать проф. М.М. Протодякова.

Правила моделирования. Выше указывалось, что вследствие трудностей математического характера аналитическое решение значительного числа практических задач с краевыми условиями либо вовсе невыполнимо, либо требует для своего выполнения введения упрощающих допущений. Последнее часто в значительной мере снижают практическую ценность теоретического решения. Поэтому при решении значительного числа задач приходится прибегать к эксперименту. Однако результаты единичного опыта, вообще говоря, не могут быть непосредственно распространенными на случаи, для которых краевые условия и значения

физических параметров полностью не совпадают с теми, которые имели место при экспериментальном исследовании. Такая ограниченность области применения результатов экспериментального исследования выдвигает вопрос о возможности обобщения опытных данных. Эту возможность открывает метод моделирования, позволяющий распространить результаты единичного опыта по изучению какого-либо процесса на целую группу процессов, подобных исследуемому.

На основании теории подобия было указано, что единичный процесс может быть однозначно выделен из целого класса путем присоединения к дифференциальным уравнениям, описывающим рассматриваемый класс процессов, краевых условий и задание значений физических параметров, входящих в дифференциальные уравнения, начальные и граничные условия. Но после приведения дифференциальных уравнений, начальных и граничных условий к безразмерному виду и задания численных безразмерных параметров получают систему уравнений, охватывающую группу процессов. Поэтому, если два процесса протекают в геометрически подобных системах и при этом безразмерные дифференциальные уравнения, граничные и начальные условия, описывающие оба явления, тождественно одинаковы, то рассматриваемые процессы подобны и результаты исследования одного из них могут быть распространены на второе.

На основании сказанного представляется возможным дать следующую формулировку правил моделирования.

Для того чтобы процесс в модели был подобен процессам в природе, необходимо и достаточно выполнить следующие требования:

- 1) модель должна быть геометрически подобна образцу;
- 2) процессы в модели и образце должны принадлежать к одному классу и описываться одинаковыми дифференциальными уравнениями;
- 3) начальные и граничные условия в модели должны быть реализованы таким образом, чтобы безразмерные начальные и граничные условия модели тождественно совпадали с такими же условиями в природе;
- 4) одноименные безразмерные параметры, входящие в дифференциальные уравнения, начальные и граничные условия, в модели и в природе должны быть соответственно равны.

Изложенные правила моделирования относятся к случаю, когда процессы в модели и в натуре принадлежат к одному и тому же классу. Эти правила могут быть легко распространены на случай, когда процессы, протекающие в них, удовлетворяют определению аналогии. В этом случае условие 4) должно содержать равенство не только одноименных, а и аналогичных безразмерных параметров. Так, например, если рассматривается аналогия между процессами теплопроводности и диффузии, то аналогичными будут коэффициент диффузии s и коэффициент теплопроводности λ , играющие одинаковую роль в физических уравнениях. Следовательно, правило собственно моделирования является частным случаем более общего правила аналогии.

Сделаем некоторые замечания относительно реализации краевых условий при моделировании. Все краевые условия по признаку их реализации можно разделить на две категории: управляемые и неуправляемые. Первые могут быть реализованы по желанию экспериментатора; вторые же реализуются независимо от исследователя в силу самой природы физического явления.

Например, для стационарного процесса конвективного теплообмена при течении жидкости в трубе краевые условия могут быть сформулированы следующим образом:

- 1) во входном сечении трубы имеется вполне определенное распределение скоростей и температур;
- 2) в какой-либо точке потока имеется определенное давление;
- 3) на границе раздела потока и трубы скорость жидкости равна нулю, температуры жидкости и трубы равны друг другу, а также равны друг другу тепловые потоки, входящие в трубу и выходящие из жидкости.

Нетрудно видеть, что из перечисленных граничных условий, условия 1) и 2) являются управляемые и их выполнение зависит от желания исследователя. Условия же 3) имеет место всегда и не зависит от исследователя. Что же касается начальных условий, то они всегда являются управляемыми.

Для того, чтобы безразмерные неуправляемые краевые условия в модели и натуре были тождественно одинаковыми, достаточно осуществить равенство без-

размерных одноименных параметров, входящие в соответствующие краевые условия модели и природы.

Управляемые краевые условия должны быть заданы на протяжении всех пространственных границ исследуемого процесса. Поэтому, прежде чем приступить к моделированию, необходимо сформулировать управляемые условия для природы и выбирать их таким образом, чтобы они были достаточно хорошо известны.

4.2. Метод эквивалентных материалов

Этот метод применяют для исследования вопросов, связанных с проявлением горного давления в очистных подготовительных выработках при разработке месторождений полезных ископаемых; в подземных капитальных выработках; при изучении вопросов, связанных с породами, сдвигения массивов и других физических процессов, происходящих в массивах в связи с проведением в них горных работ.

Изучение всех этих вопросов аналитическим методом и непосредственно на практике связано с большими трудностями, поэтому использование метода моделирования имеет большое теоретическое и практическое значение.

В предвоенные годы во ВНИМИ Г.Н.Кузнецовым был разработан метод моделирования, в основу которого была положена идея создания моделей горных массивов из искусственных материалов, эквивалентных по своим деформационным и плотностным свойствам горным породам при принятом масштабе моделирования. Сейчас этот метод широко используется под названием МЭМ.

Сущность метода эквивалентных материалов заключается в том, что на физических моделях с известными допущениями и при соблюдении условий подобия изучают интересующие нас физические процессы и результаты этих исследований используют для разработки теории «механизма» процесса, а также для разработки практических рекомендаций для промышленности. Например, МЭМ широко применяют для изучения процесса сдвигения пород массива при очистной выемке полезных ископаемых (рис. 4.1).

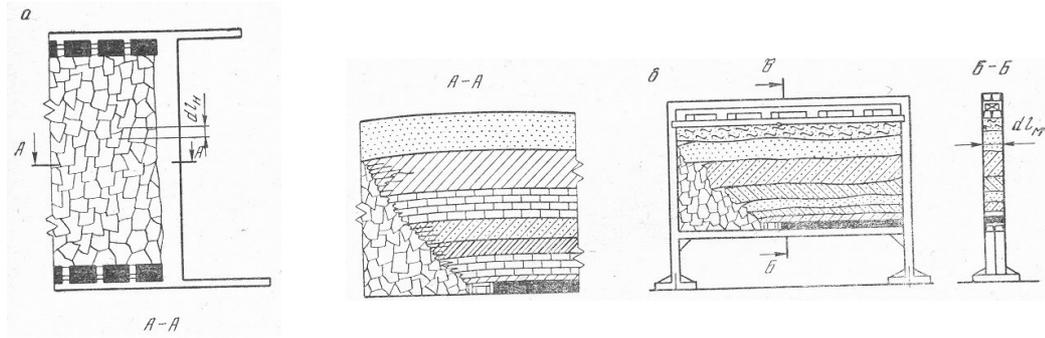


Рис. 4.1. Схема к моделированию задачи деформаций горных пород на эквивалентных материалах: *а* – образец; *б* – модель.

При достаточном удалении от штреков характер проявления давления горных пород на крепь во времени будет изменяться только в направлении движения очистного забоя. Следовательно, задача изучения давления пород в очистных выработках сводится к плоской и рассматривается для сечения А – А. На плоской модели (рис. 4.1, б) с соблюдением условий подобия воспроизводится процесс выемки полезного ископаемого, в результате которого в модели происходит процесс сдвижения пород, подобный натуре.

В основе метода лежит теория механического подобия Ньютона, которая предполагает геометрическое, кинематическое и динамическое подобия.

Геометрическое подобие. Обеспечивается в том случае, если все линейные размеры будут уменьшены в определенное постоянное число раз по сравнению с той областью природы, в которой изучается данное явление.

$$\frac{l'_H}{l'_M} = \frac{l''_H}{l''_M} = \dots = \frac{l^i_H}{l^i_M} = C_l, \quad (4.2)$$

где l'_M, l'_H – линейные размеры модели и природы, соответственно.

Кинематическое подобие будет обеспечено в том случае, если сходственные частицы, двигаясь по геометрически подобным траекториям, проходят геометрически подобные пути в промежутки времени, отличающиеся постоянным множителем, т.е.

$$\frac{\tau'_H}{\tau'_M} = \frac{\tau''_H}{\tau''_M} = \dots = \frac{\tau^i_H}{\tau^i_M} = C_\tau \quad (4.2)$$

Динамическое подобие имеет место в том случае, если массы двух сходственных частиц (соответствующим образом расположенных в пространстве и времени) отличаются друг от друга в одно и тоже число раз

$$\frac{m'_H}{m'_M} = \frac{m''_H}{m''_M} = \dots = \frac{m^i_H}{m^i_M} = C_T \quad (4.3)$$

Выразив в равенствах (4.96) массу через объем и плотность, получим

$$C_m = \frac{\ell_H^3 \rho_H}{\ell_M^3 \rho_M} \quad (4.4)$$

или

$$C_m = C_\rho C_\ell^3, \quad (4.5)$$

где

$$C_\rho = \frac{\rho_H}{\rho_M} \quad (4.6)$$

Так как множитель подобия C_ℓ задан геометрическим подобием, то для соблюдения условий динамического подобия достаточно задать соотношение плотностей,

т.е. C_ρ . Из условия механического подобия ($\frac{C_p}{C_\rho C_\ell^2 C_v^2} = 1$), выражая множители

подобия через соответствующие соотношения и произведя преобразования, будем иметь

$$\frac{\rho_H}{\rho_H \ell_H^2 v_H^2} = \frac{\rho_M}{\rho_M \ell_M^2 v_M^2} = iden = N_\ell \text{ (инвариант подобия Ньютона)} \quad (4.7)$$

Следовательно, определив параметры модели, при которых соотношения множителей подобия удовлетворяют условию (4.7), мы получим модель, динамические процессы в которой будут подобны соответствующим процессам в натуре.

Обращаясь к конкретной задаче о давлении пород на крепь подземной выработки, установим критерии подобия и множители подобия для моделирования указанного процесса методом ЭМ.

На основании вышеизложенного выделим основные силы, которые определяют характер физического процесса.

В первом приближении можно ограничиться учетом двух родов сил, а именно: внешних сил – тяжести и внутренних сил – напряжений, возникающих в породе.

Преобразуем формулу (4.7), выражающую общий закон подобия Ньютона для случая совместного действия сил тяжести и внутренних напряжений. Заменяя в формуле (4.7) значения квадратов скоростей через ускорения и длины, получим

$$\frac{P_H}{\rho_H a_H \ell_H^3} = \frac{P_M}{\rho_M a_M \ell_M^3} = \text{idem} \quad (4.8)$$

В данном случае деформация и разрушение породы происходит за счет действия сил тяжести, т.е. $a = g$.

$$\begin{aligned} \rho_M a_M &= \rho_M g_M = \gamma_M, \\ \rho_H a_H &= \rho_H g_H = \gamma_H. \end{aligned} \quad (4.9)$$

где γ – объемный вес материала.

Введем в (101) обозначение

$$\frac{p}{\ell^2} = N(\sigma), \quad (4.10)$$

под которым подразумеваем предельные напряжения: на растяжение, сжатие, сдвиг или деформационные характеристики пород.

Подставив зависимости (4.9), (4.10) в (4.8), получим

$$K = \frac{N_M}{\gamma_M \ell_M} = \frac{N_H}{\gamma_H \ell_H} = \text{idem}, \quad (4.11)$$

где K – безразмерное число, являющееся определяющим критерием подобия.

На основании полученного выражения можно установить основные требования к модели, обеспечивающие механические подобия явления. Если модель изготовить из материала природы, то будем иметь одинаковые физико-механические свойства и природы: $N_M = N_H$; $\gamma_M = \gamma_H$.

Однако смысл модулирования в данном случае заключается в том, чтобы геометрические размеры модели были меньше размеров природы, т.е. $\ell_M \neq \ell_H$.

В этом случае равенство (4.11) не имеет места. Для сохранения условий инвариантности формулы (4.11) следует полагать, что $N_M = N_H; \gamma_M \neq \gamma_H$ или $N_M \neq N_H; \gamma_M \neq \gamma_H$.

В первом случае согласно (4.11)

$$\gamma_M = \gamma_H \frac{\ell_H}{\ell_M}, \quad (4.12)$$

т.е. объемный вес материала модели должен быть значительно больше объемного веса материала натуре.

Во втором случае

$$N_M = \frac{\ell_M \gamma_M}{\ell_H \gamma_H} N_M. \quad (4.13)$$

Зная механические свойства материала натуре и задаваясь соотношениями ℓ_M/ℓ_H и γ_M/γ_H , получим значения механических свойств материала модели, которые необходимы для обеспечения подобия модели и натуре.

При изучении процесса разрушения пород в качестве определяющих характеристик механических свойств пород должны быть взяты предельные значения прочности породы при ее разрушении, которые могут быть определены путем построения огибающей кругов Мора.

Таким образом, при подборе материалов-эквивалентов в качестве определяющих характеристик прочности пользоваться совокупностью значений временного сопротивления пород на сжатие R_c и растяжения R_p или же совокупностью значений коэффициента сцепления C_o и угла внутреннего трения $\text{tg}\varphi$. В этом случае необходимо соблюдать следующие равенства:

условие подобия внешних сил

$$P_M = \frac{\gamma_M}{\gamma_H} \frac{\ell_M^3}{\ell_H^3} P_H \quad (4.14)$$

условие подобия процессов разрушения

$$R_{с.м.} \frac{\ell_{м} \gamma_{м}}{\ell_{н} \gamma_{н}} R_{с.н.};$$

$$R_{р.м.} \frac{\ell_{м} \gamma_{м}}{\ell_{н} \gamma_{н}} R_{р.н.}$$
(4.15)

или

$$C_{м} = \frac{l_{м} \gamma_{м}}{l_{н} \gamma_{н}} C_{н};$$

$$\text{tg } \alpha_{м} = \text{tg } \alpha_{н}.$$
(4.16)

Для подобия процессов механики горных пород в области упругих деформаций соблюдаются равенства

$$E_{м} = \frac{\gamma_{м}}{\gamma_{н}} \frac{\ell_{м}}{\ell_{н}} E_{н};$$

$$\mu_{м} = \mu_{н},$$
(4.17)

где E – модуль упругости; μ – коэффициент Пуассона.

Для подобия механических процессов в массиве горных пород в области пластических деформаций во всем диапазоне напряжений начальных до разрушающих без учета влияния времени должно быть соблюдено условие

$$\frac{\varepsilon_{nm}}{(\varepsilon_y + \varepsilon_n)_м} = \frac{\varepsilon_{nh}}{(\varepsilon_y + \varepsilon_n)_н}.$$
(4.18)

При этом

$$(\varepsilon_y + \varepsilon_n) = f(\sigma),$$

где $\varepsilon_n, \varepsilon_y$ – пластическая и упругая относительные деформации.

Достоинством метода эквивалентных материалов следует считать возможность воспроизводить процессы неупругого деформирования и разрушения пород массива вблизи горных выработок. Необходимо также отметить, что этот метод позволяет строить объемные модели и на их основе решать трехмерные задачи петромеханики.

Указанные обстоятельства способствовали широкому внедрению метода

эквивалентных материалов в лабораторную практику: более 150 конкретных задач горной механики решено на моделях из эквивалентных материалов, причем около 30 из них – на объемных моделях.

В то же время методу моделирования на эквивалентных материалах присущи серьезные недостатки.

1. Широкий диапазон физико-механических свойств пород, слагающих моделируемый массив, трудно воспроизвести на каком-либо типе эквивалентных материалов только за счет изменения его состава, поэтому при построении модели исследователь вынужден прибегать к целому ряду эквивалентных материалов, отличающихся по своим исходным компонентам и физико-математическим свойствам, что усложняет постановку эксперимента.

2. В большинстве случаев при изготовлении модели оказывается затруднительным, а иногда и вовсе невозможным выполнить условия подобия внешних сил, процессов разрушения и процессов деформирования (упругого и пластического) так как указанные условия подобия механических характеристик модели и природы должны удовлетворять равенствам

$$\frac{\sigma_{сж.н}}{\sigma_{сж.м}} = \frac{\sigma_{р.н}}{\sigma_{р.м}} = \frac{C_{н}}{C_{м}} = \frac{E_{н}}{E_{м}}. \quad (4.19)$$

3. Изучение деформационных процессов в окружающем выработки массиве требует сооружения моделей внушительных размеров, что сопровождается значительным повышением трудоемкости самого эксперимента.

4. Достоверность и репрезентативность результатов, полученных на моделях из эквивалентных материалов, в значительной степени зависит от технологии изготовления, поэтому даже при правильно подобранных компонентах возможны существенные погрешности.

5. Модель, обеспечивающая удовлетворительную сходимость с натурой при изучении медленно протекающих процессов, не может быть использована для моделирования динамических процессов в горном массиве в силу невыполнения всех условий подобия.

6. Закладка динамометров в модель для измерения напряжений зачастую приводит к искажению напряженно-деформационного состояния изучаемого массива.

7. Измерение смещений на мелкомасштабных моделях не может быть выполнено с достаточной точностью, т.е. чувствительность серийных измерительных устройств не обеспечивает требуемую точность измерения смещений отдельных точек массива с учетом принятого масштаба.

4.3. Методы фотомеханики

Впервые в горном деле оптико-поляризационный метод исследований был применен А.К. Зайцевым и Ф.Ю., Левинсон-Лесенгом для решения задачи о наиболее рациональной форме поперечного сечения тоннеля. Эксперименты проводились на пластинках из целлулоида с различными по форме отверстиями. Цель этих опытов – выяснить влияние отверстия и его формы на характер распределения напряжений под действием приложенной внешней нагрузки. Широкое применение для решения задач горной геомеханики получил этот метод в послевоенный период.

Оптико-поляризационный метод изучения НДС реализуется в виде методов фотомеханики, рассматривающих следующие свойства.

Фотоупругость – исследование процессов упругого деформирования материалов.

Фотопластичность – исследование процессов остаточного деформирования материалов при известных предшествующих состояниях.

Фотоползучесть – исследование поведения материалов во времени под нагрузкой.

Напряженное деформированное состояние исследуемых объектов зависит от характера внешних воздействий на них до и в момент проведения экспериментов. В задачах статической фотомеханики физические воздействия, их интенсивность и направление остаются практически неизменными в течение достаточно длительного времени; силами инерции можно пренебречь.

В задачах динамической фотомеханики, наоборот, учитывается изменение характеристик при механических воздействиях во времени и влияние сил инерции.

В основе методов фотомеханики лежит эффект двойного лучепреломления, проявляющийся в оптически чувствительных материалах под воздействием механических напряжений. При просвечивании таких материалов поляризованным светом в моделях наблюдается оптическая картина, по которой судят о напряженно-деформированном состоянии моделируемого объекта.

Допустим, что в результате проведения горизонтальной выработки в массиве горных пород произойдет нарушение силового равновесия. Вокруг выработки возникает поле напряжений (рис.4.2, а), характер которого в случае однородных изотропных пород будет оставаться постоянным для любого поперечного сечения по длине выработки. Следовательно, задача может быть представлена как плоская для сечения, перпендикулярного оси выработки, которая имеет аналитическое решение.

Для изучения напряженного состояния пород вокруг выработки изготавливают модель из оптически активного материала с соблюдением условий геометрического и силового подобия. Через модель пропускают луч поляризованного света, и на экране получают поле напряжений (рис. 4.2, б) в виде линий

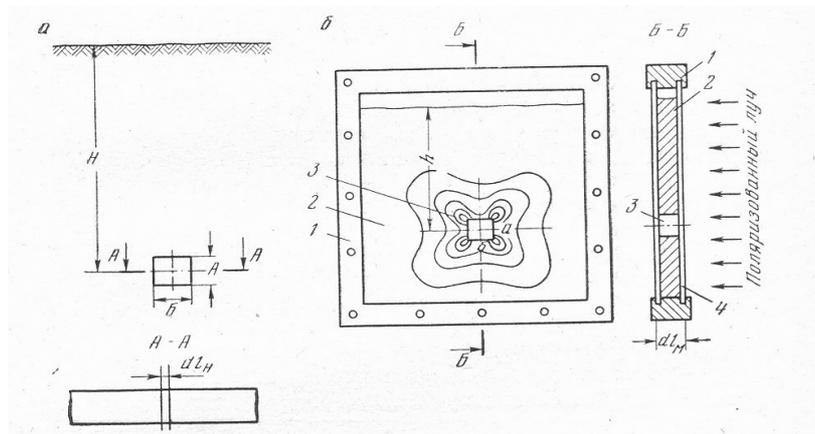


Рис. 4.2. Схема к моделированию оптическим методом задачи напряженно-го состояния пород вокруг выработки.: а – образец; б – модель; 1 – рамка модели; 2 – оптически активный материал; 3 – модель выработки; 4 – стекло.

различных цветов и оттенков. На основании этого судят о качественной характеристике поля напряжений, о направлении векторов напряжений, о концентрации напряжений и о точках или районах, наиболее опасных с точки зрения устойчивости или прочности обнажения.

Методы фотомеханики позволяют применить и объемные модели. Так, например, при изучении оптическим методом прочности бурового инструмента и разрушаемости пород широко применяют объемные модели, на основании которых становится возможным составить тензор напряжений в контактных зонах, подойти к решению вопроса о роли ядра уплотнения в процессе воздействия бурового инструмента и о влиянии предварительных выколов и свободных поверхностей в процессе разрушения породы.

Кроме того, оптический метод позволяет оценить влияние параметров удара на разрушаемость горной породы и затупления лезвия бурового инструмента на эффективность бурения, а также помогает решить вопрос об участии волн напряжений в процессе разрушения горных пород при ударном бурении.

Методы объемной фотомеханики также применяют и для исследования статической работы подземных сооружений. В круг таких задач входит исследование напряженного состояния горного массива вокруг вертикальных и горизонтальных выработок, пройденных в слоистых породах с наклонным залеганием пластов и различными физико-механическими свойствами, исследование распределения напряжений в сопряжениях различных выработок, определение напряжений в крепях и массиве при переменном сечении выработок небольшой протяженности и т.д.

Наибольшее практическое значение имеют следующие типовые задачи механики горных пород:

I тип. Определение условий сохранения и потери устойчивости элементов массивов и сооружений при различных исходных состояниях и комплексах воздействий на них, в том числе при ведении горных работ. Элементами исследуемых объектов, устойчивость которых должна быть обеспечена, являются: поверхности подземных выработок (кровли, почвы, бока), целики, потолочные камеры и кровли лав, борты карьеров, земная поверхность. Учитывают стадийность про-

цессов деформирования и разрушения элементов, предельные их состояния, а также видоизменения сочетаний условий.

II тип. Установление закономерностей взаимодействия элементов массивов между собой и с элементами сооружений, в том числе с крепями горных выработок, в зависимости от естественно-геологических условий и видов взаимодействий. Взаимодействием считается взаимозависимое изменение в пространстве и времени граничных поверхностей контакта. Вид закономерности механического взаимодействия крепи и пород, определяющий условия их совместной работы, реализуется в различных режимах, включая заданную нагрузку, заданную деформацию, взаимовлияющую деформацию, комбинированный режим.

III тип. Изучение влияния горных выработок и комплексов горных работ на окружающие породные массивы различных структур и свойств, находящиеся в различных состояниях и подвергающиеся различным воздействиям.

Основными вопросами изучения являются: установление зон опорного давления, разгрузки, сдвижений и разрушений массивов, определение очертаний и размеров защищенных зон, выяснение распространения волн напряжений, вызванных взрывами, на различные подземные и наземные объекты.

Таким образом, оптический метод исследования напряжений позволяет решать весьма сложные задачи, которые недоступны математическому анализу.

Теоретические основы оптического метода исследования упругих полей напряжений и смещений базируется на использовании закона Гука о прямой пропорциональности между напряжением и деформацией и на явлении оптической анизотропии изотропных тел, подвергнутых действию внешних сил, или при наличии внутренних напряжений. С помощью оптического метода обнаруживают не сами величины нормальных напряжений, а разность между ними, т.е. максимальные касательные напряжения τ_{\max}

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad (4.20)$$

где σ_1, σ_2 – главные нормальные напряжения.

Поэтому с помощью оптического метода определяется существенная характеристика для суждения о прочности конструкции по теории Кулона.

Второй принцип, использованный при оптическом моделировании, вытекает из общей теории света. Если, например, световой луч от обычного источника света направить на стеклянную пластинку под углом, то луч делится на две части: одна часть – отражается, другая – преломляется. Опыты показывают, что отраженный и преломленный лучи оказываются плоско-поляризованными и их колебания будут происходить в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

Наибольшей поляризации световой луч достигает в том случае, если отраженный и преломленный лучи перпендикулярны друг другу (рис.4.3).

Интересными оптическими свойствами обладает ряд кристаллов (турмалин, слюда, кальций). Если кристалл кальцита поставить своим основанием на бумагу с черной точкой и посмотреть сверху, то можно увидеть два изображения точки (рис. 4.4).

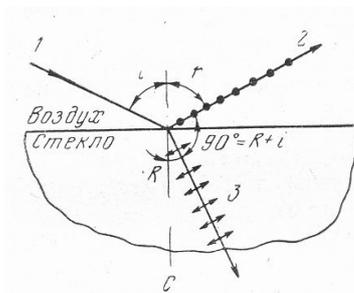


Рис.4.3. Отражение и преломление световых лучей: i – угол падения; γ – угол отражения; R – угол преломления; 1 – падающий луч; 2 – отраженный луч; 3 – преломленный луч.

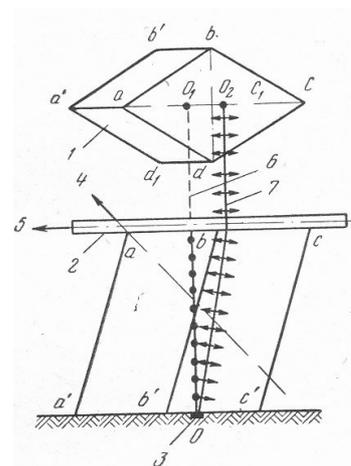


Рис. 4.4. Двойное лучепреломление: 1 – кристалл кальцита; 2 – пластинка турмалина; 3 – метка; 4 – оптическая ось кристалла кальцита; 5 – ось поляризации пластинки турмалина; 6 – обыкновенный луч; 7 – необыкновенный луч.

В этом случае имеет место двойное лучепреломление. Если теперь с помощью пластинки турмалина проанализировать обыкновенный и необыкновенный лучи, то оказывается, что оба луча являются плоско-поляризованными.

При этом колебания обыкновенного луча происходят в плоскости, перпендикулярной диагональной плоскости a, a', c', c , а колебания необыкновенного луча лежат в этой плоскости a, a', c', c , т.е. колебания лучей происходят в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

Явление двойного лучепреломления можно также наблюдать и в изотропных веществах под действием нагрузки. Например, сформированный или напряженный кусок стекла, целлулоида, акелита и т.д. обнаруживает все свойства двойного лучепреломления. Свойство двойного лучепреломления изотропных тел под нагрузкой (открыто Брюстером в 1816 г.) положило начало методу фотоупругости.

Как известно, при плоском напряженном состоянии тела в каждой точке имеются площадки, по которым касательные напряжения отсутствуют и действуют только главные нормальные напряжения σ_1 и σ_2 . Под действием этих напряжений создаются деформации, которые приводят материал к оптической анизотропии. Вследствие этого луч света, проходящий через напряженное прозрачное тело, будет разлагаться на два плоско-поляризованных луча, колебания которых лежат в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, параллельных направлению распространения луча.

При этом распространение лучей в напряженно-деформированной пластине происходит с различными скоростями в соответствии с величинами σ и ε , что приводит к оптическому сдвигу фаз и линейной разности хода. Как показывают многочисленные опыты, разность хода в общем случае определяется по формуле

$$\Gamma = C_\sigma \delta (\sigma_1 - \sigma_2) + C_\varepsilon \delta (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \quad (4.21)$$

где C_ε и C_σ – постоянные, называемые оптическими коэффициентами деформации и напряжения, зависящими от применяемых материалов;

δ – толщина пластинки;

σ_1 и σ_2 – главные нормальные напряжения;

ε_1 и ε_2 – деформации в направлении главных нормальных напряжений.

Поскольку в стадии упругого деформирования материалов существует строгая пропорциональность между σ и ε , обобщенная зависимость (4.21) преобразуется к виду

$$\Gamma = C_\sigma \delta (\sigma_1 - \sigma_2). \quad (4.22)$$

В этом случае выражение (4.22) согласно выражению (4.20) можно представить в виде

$$\Gamma = 2C_{\sigma}\delta\tau_{\max}. \quad (4.23)$$

При пластичном деформировании материалов на интерференционную картину полос решающее влияние оказывают деформации, так как напряжения на этой стадии деформации изменяются незначительно. В связи с этим зависимость (4.21) может быть представлена в виде линий

$$\Gamma = C_{\sigma}\delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2). \quad (4.24)$$

Следовательно, зная толщину модели δ , оптическую постоянную C_{σ} и определив разность хода Γ , можно установить значение максимальных скалывающих напряжений при исследовании модели в стадии упругого деформирования и относительных деформаций при изучении процессов ползучести или пластического деформирования.

Определение разности хода Γ основывается на свойстве поляризованного света в зависимости от частоты колебаний давать различные цвета. Точно так же, как частота звукового колебания определяет высоту звука, частота светового колебания определяет качество света, которое глаз воспринимает как цвет.

Следовательно, определенной частоте колебания соответствует определенный цвет. Луч света, составленный только из одного цвета, называется монохроматическим, или однородным.

Очевидно, для каждого монохроматического света имеется вполне определенная длина волны. Так как длина волны определяется выражением

$$\lambda = \nu T,$$

где ν – скорость распространения света;

T – период колебания волны,

а частота колебания при этом определяется как величина, обратная периоду колебания:

$$P_k = \frac{1}{T},$$

то можно установить связь между частотой колебания и длиной волны, а, следовательно, и цветом света. В пустоте все лучи монохроматического света распространяются с одинаковой скоростью $C^* = 3 \cdot 10^{10}$ см/с.

Следовательно, длина волны для каждого монохроматического света будет определяться только в зависимости от частоты колебания P_k :

$$\lambda = \frac{C^*}{P_k}. \quad (4.25)$$

Поэтому, получив на экране различные цвета, можно определить, имея таблицу соотношений цвета и длины волн, величину разности хода $\Gamma = n\lambda$, а следовательно, пользуясь формулой (4.126), можно получить величину максимальных касательных напряжений

$$\tau_{\max} = n \frac{\lambda}{2C_\sigma \delta} = n \frac{\tau_0^{1,0}}{\delta} = n \frac{\sigma_0^{1,0}}{2\delta}, \quad (4.26)$$

где n – порядок полосы;

$\sigma_0^{1,0}$ – цена полосы оптически чувствительного материала.

Разность хода может быть определена по методу сопоставления цветов, по методу полос и по методу компенсаций. При методе сопоставления цветов искомую разность хода определяют непосредственно по цветной картинке изохром, полученной при белом источнике света, и последующем сопоставлении с интерференционными цветами эталонных колец Ньютона, для которых составлена таблица. При методе полос используется монохроматический источник света и учитываются порядковый номер полосы в исследуемой области, а также цена полосы материала. При методе компенсаций к искомой разности хода, создаваемой в упругой напряженной области объекта, оператор добавляет компенсатором разность хода, равную по величине, но обратную по знаку. При результирующей разности хода, равной нулю, при скрещенных поляроидах в измеряемой точке модели наблюдается затемнение.

После этих замечаний можно приступить к рассмотрению принципа действия оптико-поляризационной установки.

Рассмотрим образец изотропного прозрачного тела, подвергнутого равномерной нагрузке (рис.4.5).

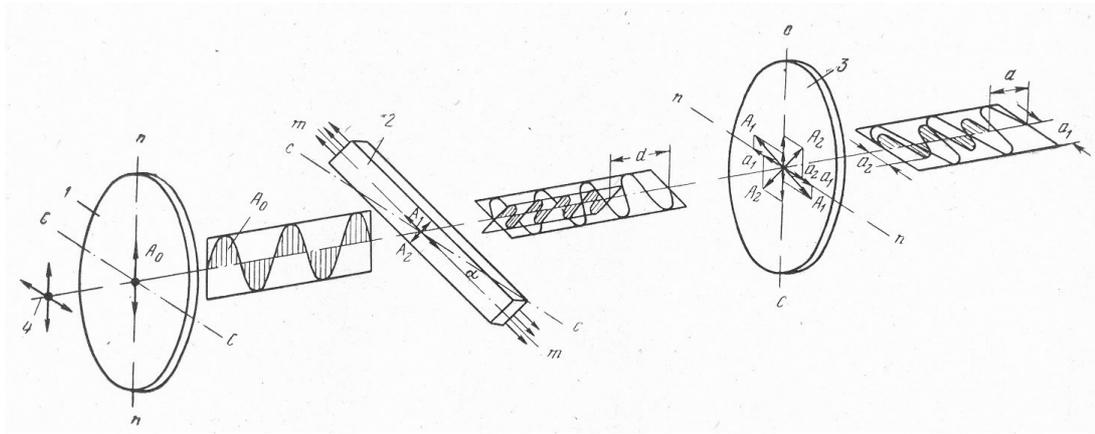


Рис. 4.5. Принципиальная схема оптической установки: 1 – поляризатор; 2 – образец; 3 – анализатор; 4 – источник света; A_0, A_1, A_2, a_1, a_2 – амплитуда колебания; $C-C$ – горизонтальная ось поляризатора; $n-n$ – вертикальная ось поляризатора; $m-m$ – ось модели.

Обыкновенный луч, проходя через поляризатор 1, приобретает только вертикальные колебания и падает на образец 2, повернутый на угол α к горизонтальной оси. В результате напряженного состояния образца поляризованный свет, преломляясь, распадается на два луча. Колебания лучей идут в плоскостях главных напряжений. В результате преломления в зависимости от напряженности образца лучи приобретают разные скорости распространения. Пройдя образец, лучи падают на анализатор 3, ориентированный так, что он пропускает только колебания, перпендикулярные плоскости поляризации поляризатора 1. Таким образом, через анализатор пройдут только лучи a_1 и a_2 . Так как после образца лучи вследствие разной скорости распространения получили некоторую разность хода, то следовательно и после анализатора получили некоторую разность хода между горизонтальными составляющими колебаний.

Если обозначить через A_0 амплитуду колебаний луча после поляризатора: a_1 и a_2 – амплитуды колебаний лучей после анализатора, то можно написать следующую зависимость для результирующей амплитуды колебаний после анализатора:

$$A_3 = a_1 + a_2 = A_0 \sin \alpha \cos \alpha [\sin(\varphi - 2\pi n) - \sin \varphi].$$

Значение A_{\max} достигается при $\varphi = -\pi n$

$$A_{\max} = A_0 \sin 2\alpha \sin \pi n.$$

Интенсивность света

$$J = A^2 \sin^2 2\alpha \sin^2 \pi n.$$

Максимальная интенсивность света имеет место при $\alpha = 45^\circ$, давая наиболее яркую картину цветов на экране, а, следовательно, распределения, скальвающие напряжения τ_{\max} . Кроме ярких цветов на экране получают и темные места, которые удовлетворяют одному из трех условий:

1. Свободные от напряжения точки, не дающие двух преломлений (поляризатор и анализатор скрещены, свет будет в них погашен).
2. Точки, в которых главные напряжения равны. В этих точках нет сдвига фаз, как нет и разности хода (скорости распространения лучей равны друг другу). Следовательно, амплитуды a_1 и a_2 при этом равны и тогда имеем

$$a_1 + a_2 = A_0 \sin \alpha \cos \alpha \sin \varphi + (-A_0 \cos \alpha \sin \alpha \sin \varphi) = 0.$$

Это дает в результате темноту на экране. Наличие таких особых точек является весьма значительным при изучении моделей, так как в них $\sigma_1 = \sigma_2$.

3. Точки, для которых плоскости направления главных напряжений совпадают с плоскостями поляризатора и анализатора. В этом случае $\alpha = 0$ при 90° и $J = 0$, т.к. $\sin 2\alpha = 0$.

Последний случай представляет большую ценность для исследования напряжений, т.к. он дает точные сведения о направлении двух главных напряжений в любой точке образца. Следовательно, вращая образец (или поляризатор – анализатор) с одновременным отсчетом углов, для каждого угла получим систему черных точек для линий, в которые эти точки могут сливаться. В этих точках будем знать направления главных напряжений. Линии, соединяющие точки, где направления главных напряжений совпадают с плоскостями поляризации поляризатора и анализатора, называются изоклинами. Допустим, имеем изоклину 1, соответствующую углу поворота образца на угол α_1 , изоклину 2, соответствующую углу поворота образца на угол $\alpha_2 = \alpha_1 + \Delta\alpha$ и т.д. (рис.4.6).

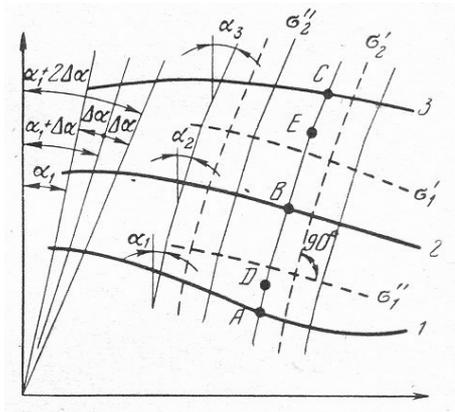


Рис. 4.6. Построение изостат:
 1,2,3 – изоклины;
 A, D, B, E, C, σ_1' , σ_1'' , σ_2' , σ_2'' – изостаты.

Проведем из точек A, B, C прямые под углами к вертикали, равными соответственно $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и т.д. Точки пересечения прямых между собой обозначим через D, E . Получим, таким образом, ломаные линии, которые являются изостатами (кривые направления одной из главных сил напряжения σ_1). В каждой точке изостаты под углом 90° к изолинии σ_1 направлена σ_2 . Таким образом, изостаты представляют собой ортогональное семейство кривых, касательные к которым совпадают с направлением главных нормальных напряжений.

Чтобы отличить темные места, соответствующие изоклинам, от тех, которые являются следствием условий 1 и 2, надо помнить, что изоклины изменяют свое положение при последовательных поворотах образца или системы поляризатора-анализатора. Точки образца, где $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$ (т.е. свободные от напряжения), при любом повороте остаются на тех же местах.

Таким образом, при исследовании образца или модели на изолированной установке получают значение τ_{\max} , после напряжений σ_1 и σ_2 , а, следовательно, определяют область пониженных и повышенных напряжений.

Изучение напряжений на объемных моделях основано на методе «замораживания» напряжений (деформаций) и методе рассеянного света. Первый метод, в котором предусматривается использование обычных поляризационных установок, нашел более широкое применение. Второй требует специального оптического оборудования, промышленное изготовление которого еще не налажено.

При методе рассеянного света нагруженная модель помещается в иммерсионную жидкость и просвечивается тонкой полоской плоско-поляризованного мо-

нохроматического света большой яркости, который проходя через модель, освещает рассматриваемую плоскость внутри модели. В просвечиваемом сечении при наблюдении со стороны, перпендикулярной к плоскости сечения, видна картина полос интерференции света, связанных с коэффициентом преломления, а, следовательно, и с деформацией в каждой точке модели.

Разность квазиглавных нормальных напряжений, лежащих в плоскости, перпендикулярной к проходящему лучу, определится по формуле

$$\sigma'_1 - \sigma'_2 = \frac{C_\sigma}{a} \quad (4.27)$$

где σ'_1, σ'_2 – квазиглавные напряжения (наибольшие и наименьшие нормальные напряжения в исследуемой плоскости);

a – расстояние между полосами интерференции;

Направляя плоский пучок поляризованного света различным образом по отношению к модели, можно определить напряжение в любом сечении модели без предварительного приготовления специальных срезов, как это делается при методе «замораживания».

Метод «замораживания» основан на способности некоторых оптически активных материалов, нагруженных при нагреве и охлажденных под нагрузкой до комнатной температуры, сохранять оптический эффект после снятия нагрузки. Модели изготавливают из оптически активных материалов, имеющих двухфазную структуру. При нагревании модели из таких материалов до определенных температур, в зависимости от вида и марки материала, большая часть материала размягчается и не оказывает сопротивления прилагаемой нагрузке. Часть материала (скелет), оставшаяся в твердом состоянии, полностью воспринимает прилагаемую нагрузку, под действием которой в модели возникают деформации и напряжения. Если затем, не снимая нагрузки, модель охладить до комнатной температуры, то размягченная при нагревании часть материала затвердевает (замораживается) и будет удерживать полученную скелетом деформацию при снятии нагрузки, а также и после распиливания модели в различных направлениях на тонкие пластинки толщиной 2-4 мм. В дальнейшем, через каждую такую пластинку, представляющую уже плоскую модель, пропускается луч поляризованного света,

и на экране получается плоское поле напряжений. В результате на основании просвечивания поляризованным светом всех пластинок получим объемную картину распределения напряжений в модели, соответствующую характеру распределения напряжений в натуре.

Оптический эффект, получающийся при прохождении поляризованного света через объемную модель, связан с понятием квазиглавных напряжений σ'_1 и σ'_2 . При нормальном просвечивании среза (пластинки) квазиглавные напряжения σ'_1 и σ'_2 действуют так же, как главные напряжения σ_1 и σ_2 в плоской модели.

Квазиглавные напряжения могут быть выражены через неглавные напряжения, действующие в той же плоскости, аналогично плоской задаче. Например, для плоскости $\tilde{o}o$, нормальной к оси z , напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, отнесенные к осям x и y , связаны с разностью квазиглавных напряжений соотношениями:

$$\sigma_x - \sigma_y = (\sigma'_1 - \sigma'_2) \cos 2\varphi_0; \quad (4.28)$$

$$\tau_{xy} = \frac{(\sigma'_1 - \sigma'_2)}{3} \sin 2\varphi_0, \quad (4.29)$$

где φ_0 – угол между направлением \tilde{o} и направлением квазиглавного напряжения σ'_1 .

Поляризованный луч света, пройдя пластинку с «замороженными» напряжениями, приобретает некоторую разность хода Γ , пропорциональную разности квазиглавных напряжений $(\sigma'_1 - \sigma'_2)$, лежащих в плоскости, перпендикулярной к оси распространения света:

$$\Gamma = C_0 \delta (\sigma'_1 - \sigma'_2), \quad (4.30)$$

или выражая разность хода через число полос, получаем

$$n = \frac{C_0 \delta (\sigma'_1 - \sigma'_2)}{\lambda}, \quad (4.31)$$

где λ – длина волны применяемого света;

n – число полос.

Таким образом, полученные из объемной модели, исследуют аналогично плоской модели.

Подобие при оптическом методе. При изучении оптических явлений с

помощью оптического метода необходимо так же, как при других методах моделирования физических явлений, соблюдать подобие соответственных одноименных параметров и комплексов. Установление связей между константами подобия и выявление критериев подобия находят из анализа размерностей самых общих уравнений, описывающих изучаемое явление. Поэтому в зависимости от постановки задачи: изучается ли процесс резания, удара или статического давления, для каждого процесса должны быть установлены значения критериев и множителей подобия.

Например, при моделировании задач в стадии упругого деформирования, связанных с установлением общей картины напряженно-деформированного состояния массива горных пород при разработке месторождений полезных ископаемых, необходимо обеспечить условия подобия и применять для перехода от модели к натуре исходя из зависимостей, приведенных в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Действующие нагрузки	Условия подобия		
	смещения	деформации	напряжения
Объемные силы тяжести	$C_u = C_l^2 C_v C_E$	$C_\varepsilon = C_i C_v C_E$	$C_\sigma = C_l C_v$
Объемные центробежные силы	$C_u = \frac{C_l^2 C_v}{K_{\Omega}} C_E$	$C_\varepsilon = \frac{C_i C_v}{K_{\Omega}} C_E$	$C_\sigma = \frac{C_l C_v}{K_{\Omega}}$
Распределенная нагрузка по площади	$C_u = C_l C_E C_s$	$C_\varepsilon = C_s C_v$	$C_\sigma = C_s$
Распределенная нагрузка по длине	$C_u = C_q C_E$	$C_\varepsilon = \frac{C_q C_E}{C_l}$	$C_\sigma = \frac{C_q}{C_l}$
Сосредоточенные силы	$C_u = \frac{C_p C_E}{C_l}$	$C_\varepsilon = \frac{C_p C_E}{C_l^2}$	$C_\sigma = \frac{C_p}{C_l^2}$
Примечание. K_{Ω} – масштаб центрифугирования; $K_{\Omega} = \frac{R_{\Omega}}{q} \omega^2$, R_{Ω} – радиус вращения; ω – угловая скорость; q – ускорение силы тяжести.			

Временное условие подобия определяется исходя из выражения

$$C_{\tau} = \frac{C_{\eta}}{C_{\nu} C_l}, \quad (4.32)$$

где $C_{\eta} = \frac{\eta_i}{\eta_i}$ – множитель подобия вязкости.

Выполнение граничных условий достигается при равенстве коэффициентов бокового распора:

$$\lambda_H = \lambda_M. \quad (4.33)$$

При моделировании задач горной механики в стадии пластического деформирования горных пород помимо требований геометрического и силового подобия, приведенного в табл., должны быть выполнены дополнительные требования:

$$\eta_M = \eta_H, \quad \mu_M = \mu_H. \quad (4.34)$$

Кроме того, должны быть подобными кривые $\sigma - \varepsilon$ для материалов модели и природы.

Метод фотопластичности основан на способности полимерных материалов переходить при определенных условиях напряжений из упругого состояния в пластическое и сохранять остаточные деформации после снятия внешних нагрузок. Поэтому при фотопластичности в основном используют модели с «замораживанием» напряжений.

Моделировать ползучесть массива горных пород более сложно, чем процессы упругого или пластического деформирования, так как необходимо соблюдать условия подобия как в первый момент после нагружения, так и в процессе ползучести. Условия подобия определяются исходя из анализа уравнений равновесия, соотношений Коши, связывающих напряжения с деформациями, граничных условий совместности деформаций и уравнений состояния.

Как показали исследования, масштаб напряжений в области линейной ползучести не зависит от параметров, характеризующих физико-механические свойства среды. Он определяется, как в случае упругой задачи, соотношением

$$C_{\sigma} = \frac{C_p}{C_l^2}. \quad (4.35)$$

Коэффициенты силового и геометрического подобия могут быть произвольными. Обычно их выбирают исходя из удобства проведения экспериментов.

Дополнительные критерии подобия, связанные с реологическими свойствами горных пород, выводят в зависимости от принятого уравнения состояния, анализируя размерности. Например, для уравнения линейно-наследственной ползучести Больцмана-Вольтерра:

$$\varepsilon_{\tau} = \frac{\sigma(\tau)}{E} + \int_0^{\tau} L_{(\tau-\nu)} \sigma_{(\nu)} d\nu, \quad (4.36)$$

$$\sigma_{(\tau)} = E\varepsilon_{(\tau)} - \int_0^{\tau} R_{(\tau-\nu)} \varepsilon_{(\nu)} d\nu. \quad (4.37)$$

На основании аппроксимирующей функции определяются ядра ползучести $L_{(\tau-\nu)}$ и релаксации $R_{(\tau-\nu)}$ и реологические параметры α и β уравнения состояния.

В этом случае дополнительными требованиями к условию подобия (4.149) являются

$$(\alpha_M) = (\alpha_H) \quad (4.38)$$

$$\text{и} \quad (\delta\tau^{1-\alpha})_M = (\delta\tau^{1-\alpha})_H \quad (4.39)$$

где α – безразмерный параметр;

δ – имеет размерность $C^{\alpha-1}$.

Сходственные моменты времени, когда поля напряжений в натуре и модели подобны, определяют из условия

$$\tau_H = \left(\frac{\delta_M}{\delta_H} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tau_M \quad (4.40)$$

Для ядра в виде дробно-экспоненциальной функции (ядра Работнова) критерии подобия

$$(\alpha)_M = (\alpha)_H \quad (4.41)$$

Масштаб времени определяют на основании

$$C_{\tau} = \frac{\tau_{OH}}{\tau_{OM}} = \left(\frac{\beta_M}{\beta_H} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}, \quad (4.42)$$

где τ_0 – время ретардации (последствия), которое принимается за единицу измерения,

$$\tau_0 = \frac{1}{(-\beta) \frac{1}{\alpha + 1}}. \quad (4.43)$$

При изучении напряженно-деформированного состояния массива горных пород и крепи выработок в натуральных условиях известное применение получил метод фотоупругих элементов и покрытий.

Для измерения напряжений и деформаций исследуемого объекта на его поверхность наносят или наклеивают тонкий слой оптически чувствительного материала – фотоупругого покрытия, который деформируется упруго независимо от характера деформирования исследуемого объекта. Измерение разности хода поляризованных лучей в покрытии позволяет определить на основании основного закона фотомеханики, разность главных деформаций или разность главных напряжений и их направления в исследуемой точке.

Связь между напряжениями в исследуемом объекте и фотоупругом покрытии определяется зависимостью

$$\sigma_{1,2} = \frac{E}{E_{II}(1 - \mu^2)} [(1 - \mu_{II}\mu)\sigma_{1II.2II} - (\mu_{II} - \mu)\sigma_{2II.1II}]. \quad (4.44)$$

Для отдельного определения главных напряжений σ_{1II} и σ_{2II} или главных деформаций применяют известные в фотомеханике методы – интегрирования уравнений равновесия плоской задачи, косого (наклонного) просвечивания покрытия, электроанalogии, а также способы измерения поперечных деформаций и абсолютных разностей хода с помощью квантовых оптических генераторов (лазеров).

При разделении напряжений с помощью наклонного просвечивания фотоупругого покрытия возможны два случая: одно нормальное и одно наклонное

просвечивание либо только два наклонных. В первом случае напряжения определяют из выражений:

$$\sigma_{1\Pi} = \frac{1}{2tC_{\sigma}} \left(\frac{\Gamma_{\theta 1} \cos \theta - \Gamma \cos^2 \theta}{1 - \cos^2 \theta} \right); \quad (4.45)$$

$$\sigma_{2I} = \frac{1}{2tC_{\sigma}} \left(\frac{\Gamma_{\theta 1} \cos \theta - \Gamma}{1 - \cos^2 \theta} \right),$$

во втором

$$\sigma_{1\Pi, 2\Pi} = \frac{1}{2tC_{\sigma}} \left(\frac{\Gamma_{\theta 1, \theta 2} + \Gamma_{\theta 1, \theta 1} \cos^2 \theta}{1 - \cos^4 \theta} \right) \cos \theta, \quad (4.46)$$

где θ – угол наклонного просвечивания.

При исследовании объектов, находящихся в условиях плоско-напряженного состояния, компоненты деформаций и напряжений определяют с помощью наклейки двух фотоупругих датчиков в непосредственной близости друг от друга, что при отсутствии высоких градиентов деформаций соответствует измерению напряжений в одной точке исследуемого объекта, при этом один датчик наклеивают по всей площади, а второй – лишь по концам, аналогично наклейке одноосного фотоупругого тензометра.

Определение параметра изоклины φ и относительной разности хода поляризованных лучей Γ_1 в первом датчике в сочетании с измерениями относительной разности хода лучей Γ_2 во втором датчике позволяют найти компоненты тензора напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, а также главные нормальные напряжения σ_1, σ_2 .

Таким образом, цветные полосы на экране полярископа представляют собой линии равных максимальных касательных напряжений исследуемой модели. Эти линии называют **изохромами**. Картину изохром, получаемую в поле анализатора, можно визуально наблюдать и фотографировать (рис. 14. 5а).

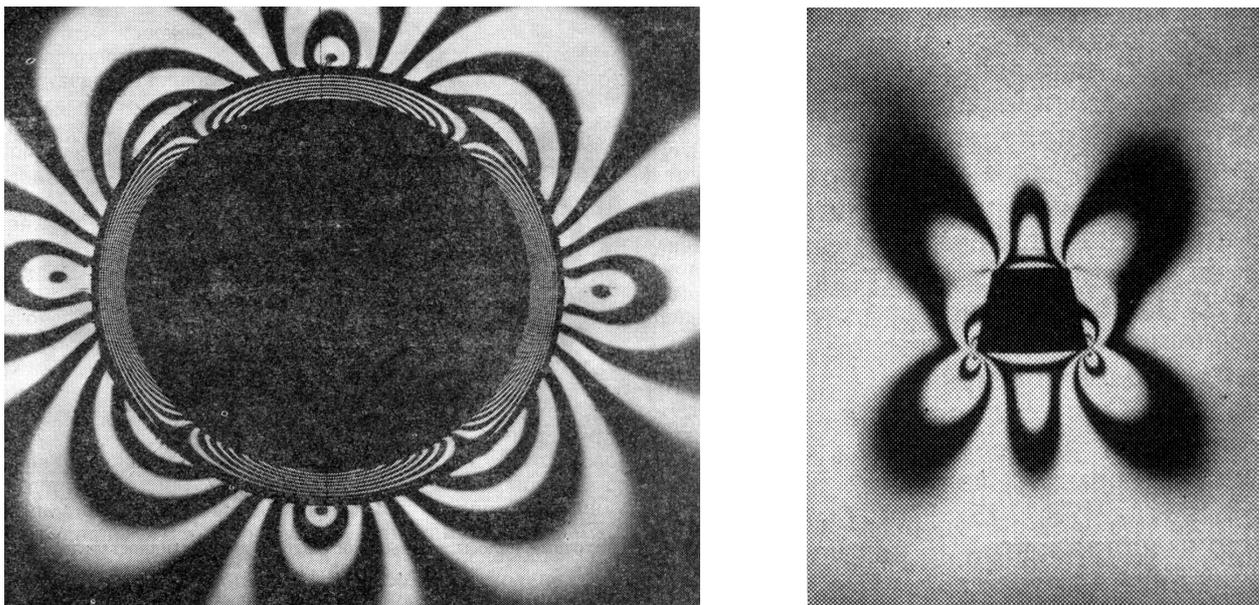


Рис. 14.5 Изохроматическая картина полос в оптических моделях: а) кольцевая крепь; б) крепь трапециевидной формы.

В некоторых точках исследуемой модели плоскость колебания луча совпадает с направлением какого-либо из главных нормальных напряжений. В таких точках двойного лучепреломления не происходит. Если плоскости поляризации поляризатора и анализатора взаимно перпендикулярны, т.е. скрещены, то лучи в указанных выше точках модели через анализатор не проходят. В результате на экране появляются черные линии, пересекающие цветную картину изохром. Эти линии суть геометрических мест точек, в которых направления главных нормальных напряжений параллельны между собой. Такие линии называют **изоклинами**.

Поворачивая скрещенные поляризатор и анализатор на различные углы, получают систему изоклин, позволяющую определить направления главных нормальных напряжений в любой точке модели. По изоклинам строят траектории главных напряжений, называемые **изостатами**.

При просвечивании напряженной модели темные пятна образуются также в точках, свободных от напряжений, и в точках, где главные напряжения равны между собой. Эти точки называют **изотропными** или особыми. Особые точки

определяют структуру изохром и изоклин и поэтому имеют важное значение при исследовании распределения напряжений в модели.

Если требуется исключить появление на экране изоклин, то вместо плоской поляризации света используют круговую. Для этого в полярископе конструктивно предусмотрены пластинки из слюды такого же диаметра, как и у поляроидов. Одну из них вводят в оптическую систему позади поляризатора (относительно источника света), другую – впереди анализатора. Для света, поляризованного по кругу, все направления в модели, на которую он падает, равноценны, поэтому по изостатическим направлениям луч не погасает.

Кроме белого, при исследовании распределения напряжений в модели используется также монохроматический свет с определенной длиной волны, что значительно облегчает количественный анализ напряжений в различных точках модели. Для этого применяют натриевые или ртутные лампы со светофильтрами. Обычно выделяют зеленую линию светового спектра с длиной волны $\lambda = 546$ мкм. Если напряженную модель просвечивать монохроматическим светом, то на экране вместо цветной картины изохром получается чередующийся ряд темных и светлых полос (рис.14.5, б), причем в тех точках, где разность хода равна четному числу полуволн (т.е. целому числу волн), происходит погасание света, и образуются темные полосы; в тех же точках, где разность хода равна нечетному числу полуволн, проходящий свет достигает наибольшей интенсивности и наблюдаются светлые полосы.

4.4. Моделирование тепловых процессов в горном деле

Дифференциальное уравнение теплопроводности в случае постоянных физических параметров тела имеет следующий вид:

$$\partial t / \partial \tau = a \nabla^2 t . \quad (4.47)$$

где t – температура тела, отсчитанная от температуры среды, окружающей твердое тело, как от нуля;

τ – время;

a – коэффициент температуропроводности, постоянный во всем теле;

$\nabla = \partial / \partial x + \partial / \partial y + \partial / \partial z$ – оператор Лапласа;

x, y, z – координаты.

Приведенное уравнение (4.47) описывает бесконечное множество рассматриваемых тепловых процессов. Чтобы из целого класса явлений выделить единичное явление, необходимо к уравнению (4.47) присоединить начальные и граничные условия, а также задать значение коэффициента температуропроводности a .

Начальное условие должно представлять собой распределение температур во всей исследуемой области для момента времени $\tau = 0$ и может быть записано в виде

$$t_{\text{нач}} = t^*, \quad (4.48)$$

где t^* – известная температура в фиксированной точке тела с координатами $x = x^*$, $y = y^*$, $z = z^*$ в начальный момент времени.

Граничные условия могут быть заданы в виде равенства тепловых потоков на поверхности тела.

$$-\lambda(\partial t / \partial n)_{\text{пов.}} = \alpha(t)_{\text{пов.}}, \quad (4.49)$$

где λ – коэффициент теплопроводности, постоянный во всем теле;

α – коэффициент теплоотдачи;

n – внешняя нормаль к поверхности тела.

Коэффициент теплоотдачи α в общем случае зависит от координат поверхности и времени. Поэтому, выражение для коэффициента теплоотдачи может быть записано в следующем виде:

$$\alpha = f(x_r, y_r, z_r, \tau, a, \lambda), \quad (4.50)$$

где x_r, y_r, z_r – координаты границы (поверхности) твердого тела.

Для установления подобия процессов в рассматриваемом случае необходимо дифференциальные уравнения, начальные и краевые условия привести к безразмерному виду и обеспечить равенство безразмерных параметров, начальных и краевых условий. С этой целью введем следующие масштабные преобразования:

$$\begin{aligned}
x &= l_0 X; & \tau &= \tau_0 T^0; \\
y &= l_0 Y; & t &= t_0 T; \\
z &= l_0 Z; & n &= l_0 N; \\
a &= l_0 A; & t^* &= t_0 T^*; \\
\alpha &= \alpha_0 A^0; & t_{\text{нач}} &= t_0 T_{\text{нач}}; \\
\lambda &= \lambda_0 \Lambda;
\end{aligned} \tag{4.51}$$

где величины, отмеченные индексом «нуль», являются размерными масштабами, выбор которых вначале произволен.

После введения преобразований (4.51) в уравнения (4.47), (4.48), (4.49) и (4.50) получаем

$$\left[\frac{t_0}{\tau_0} \right] \frac{\partial T}{\partial T^0} = \left[\frac{t_0 a_0}{l_0^2} \right] A \nabla^2 T \tag{4.52}$$

при $T^0 = 0$ и $T_{\text{нач}} = T^*$. (4.53)

На поверхности тела

$$- [\lambda_0 t_0 / l_0] \Lambda (\partial T / \partial N)_{\text{пов}} = [t_0 \alpha_0] A^0 (T_{\text{пов}}), \tag{4.54}$$

причем

$$A^0 = f(X_r, Y_r, Z_r, A, \Lambda, T^0). \tag{4.55}$$

Чтобы уравнения (4.52) и (4.54) стали безразмерными, необходимо принять

$$1/\tau_0 = a_0 / l_0^2 \text{ и } \alpha_0 = \lambda_0 / l_0 \tag{4.56}$$

Система уравнений связи между масштабами (4.56) состоит из двух уравнений, содержащих пять масштабов. Поэтому три из них, имеющие независимые размерности, могут быть выбраны произвольно. Уравнения связи не содержат во все масштаба температур t_0 , а поэтому он должен быть выбран произвольно.

Таким образом, выбирая произвольно следующие четыре масштаба с независимыми размерностями t_0, λ_0, a_0, l_0 , полагаем

$$t_0 = t^*, \quad \lambda_0 = \lambda; \quad a_0 = a; \quad l_0 = l_0. \tag{4.57}$$

Равенство $l_0 = l_0$ следует понимать в том смысле, что в качестве масштаба длин можно выбирать любой геометрический параметр твердого тела.

Масштабы τ_0 и α_0 определяют с помощью уравнений (4.56) и равенства (4.57):

$$\tau_0 = l^2 / a; \quad \alpha = \lambda / l_0. \quad (4.58)$$

Тогда выражения для безразмерных величин будут

$$\begin{aligned} X &= x/l_0; \quad Y = y/l_0; \quad Z = z/l_0; \quad T^0 = a\tau/l_0^2; \\ T &= t/t^*; \quad T_{\text{нач}} = t_{\text{нач}}/t^*; \quad A_0 = al_0/\lambda; \\ \Lambda &= 1; \quad A = 1; \quad N = n/l_0. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Дифференциальное уравнение (4.47), начальное (4.48) и граничное (4.49) условия теперь могут быть переписаны в безразмерном виде:

$$\partial t / \partial T^0 = \nabla^2 T; \quad (4.60)$$

$$T_{\text{нач}} = T^* \text{ при } T^0 = 0; \quad (4.61)$$

$$-(\partial T / \partial N)_{\text{пов}} = A^0(T)_{\text{пов}}, \quad (4.62)$$

Причем

$$A^0 = f_a(X_r, Y_r, Z_r, T^0). \quad (4.63)$$

Интеграл уравнения (4.63), удовлетворяющий начальному и граничному условиям (4.61) и (4.62) должен являться выражением, в котором зависимая переменная T представлена как функция всех величин (координат, времени и параметров), входящих в дифференциальные уравнения, начальные и граничные условия:

$$T = F(X, Y, Z, T^0, A^0, T_{\text{нач}}), \quad (4.64)$$

причем $T_{\text{нач}}$ и A^0 определяются условиями (4.61) и (4.63).

Поэтому для обеспечения подобия необходимо и достаточно, чтобы в модели все критерии, входящие в интеграл исходного дифференциального уравнения (4.64) (кроме критериев X, Y, Z, T^0), были равны соответствующим критериям образца.

Следовательно, задача осуществления подобия сводится к реализации следующих требований:

- обеспечения геометрического подобия модели и образца;
- тождественности в модели и образце безразмерных начального и граничного условий, т.е.:

$$T_{\text{нач.м}} = T_{\text{нач.н}} \text{ или } (t/t^*)_{\text{м}} = (t/t^*)_{\text{н}};$$

$$A_{\text{м}}^0 = A_{\text{н}}^0 \text{ или } (al_0/\lambda)_{\text{м}} = (al_0/\lambda)_{\text{н}}. \quad (4.65)$$

Если эти требования выполнены, то в сходственные моменты времени, т.е. при

$$T_{\text{м}}^0 = T_{\text{н}}^0 \text{ или } (a\tau/l_0^2)_{\text{м}} = (a\tau/l_0^2)_{\text{н}},$$

и во всех сходственных точках, т.е. при

$$X_{\text{м}} = X_{\text{н}} \text{ или } (x/l_0)_{\text{м}} = (x/l_0)_{\text{н}};$$

$$Y_{\text{м}} = Y_{\text{н}} \text{ или } (y/l_0)_{\text{м}} = (y/l_0)_{\text{н}};$$

$$Z_{\text{м}} = Z_{\text{н}} \text{ или } (z/l_0)_{\text{м}} = (z/l_0)_{\text{н}}$$

будет иметь место равенство

$$T_{\text{м}} = T_{\text{н}} \text{ или } (t/t^*)_{\text{м}} = (t/t^*)_{\text{н}},$$

т.е. будет иметь место подобие температурных полей модели и образца.

Большой практический интерес представляют задачи теплопроводности в случае, когда физические параметры зависят от температуры.

Дифференциальное уравнение, описывающее такие явления, имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} (ct), \quad (4.66)$$

где $\lambda = f_{\lambda}(t)$ – коэффициент теплопроводности;

$c = f_c(t)$ – объемная теплоемкость, причем при $t = t^*$ $\lambda = \lambda^*$, $c = c^*$.

Начальное и граничное условия по-прежнему выражаются уравнениями (4.48) и (4.49), причем величина a как и ранее, определяется уравнением (4.50).

На основании рассуждений, аналогичных приведенным в предыдущей задаче, можно доказать, что после приведения уравнения (4.56) начального (4.48) и граничного (4.49) условий с помощью масштабных преобразований, подобных (4.52), получим два уравнения связи:

$$\lambda_0/l_0^2 = c/\tau_0; \quad \lambda_0/l_0 = \alpha_0, \quad (4.67)$$

включающее пять масштабов. Поэтому три из них, обладающие независимыми размерностями, могут быть выбраны произвольно. Кроме того, так же как и ранее,

произвольно надлежит выбрать масштаб температуры. Таким образом принимаем:

$$t = t^*; \quad c_0 = c^*; \quad \lambda_0 = \lambda^*; \quad l_0 = l_0. \quad (4.68)$$

Остальные масштабы определяем из уравнений связи (4.67) и равенств (4.68):

$$\tau_0 = c^* l_0^2 / \lambda^* = l_0^2 / a^*; \quad \alpha_0 = \lambda^* / l_0. \quad (4.69)$$

где $a^* = \lambda^* / c^*$ – коэффициент температуропроводности.

После этого можно выписать выражения для безразмерных величин:

$$\begin{aligned} X = x/l_0; \quad Y = y/l_0; \quad Z = z/l_0; \quad T = t/t^*; \quad T_{\text{нач}} = t_{\text{нач}}/t^*; \\ A^0 = \alpha l_0 / \lambda^*; \quad \Lambda = \lambda / \lambda^*; \quad C = c / c^*; \quad T^0 = a^* \tau / l_0^2; \\ N = n / l_0; \quad \Lambda^* = 1; \quad C^* = 1; \quad T^* = 1; \quad a^* = \lambda^* / c^*. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Тогда дифференциальное уравнение (IV.16), начальное (IV.2) и граничное (IV.3) условия в безразмерном виде будут:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} \left(\Lambda \frac{\partial T}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\Lambda \frac{\partial T}{\partial Y} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\Lambda \frac{\partial T}{\partial Z} \right) = \frac{\partial}{\partial T^0} (CT); \\ \Lambda = F_\Lambda(T); \quad C = F_C(T). \end{aligned} \quad (4.71)$$

$$\text{При} \quad T_0 = 0; \quad T_{\text{нач}} = T^*, \quad (4.72)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial N} = A^0 T. \quad (4.73)$$

Интеграл дифференциального уравнения (4.71), удовлетворяющий условиям (4.72) и (4.73) может быть записан в виде

$$T = F(X, Y, Z, T^0, \Lambda, C, A^0, T_{\text{нач}}). \quad (4.74)$$

Таким образом, чтобы осуществить подобие явлений теплопроводности в случае, когда физические параметры зависят от температуры, необходимо и достаточно в геометрически подобных телах реализовать тождественно одинаковое распределение критериев Λ, C, A^0 и $T_{\text{нач}}$, т.е. осуществить равенства:

$$\Lambda_m = \Lambda_n \quad \text{или} \quad \left(\frac{\lambda}{\lambda^*} \right)_m = \left(\frac{\lambda}{\lambda^*} \right)_n;$$

$$C_M = C_H \text{ или } \left(\frac{c}{c^*} \right)_M = \left(\frac{c}{c^*} \right)_H; \quad (4.75)$$

$$A_M^0 = A_H^0 \text{ или } \left(\frac{\alpha l_0}{\lambda^*} \right)_M = \left(\frac{\alpha l_0}{\lambda^*} \right)_H;$$

$$T_{\text{нач.м}} = T_{\text{нач.н}}.$$

Отсюда следует, что при выполнении условий (4.75) во всех сходственных точках модели и образца, т.е. при

$$(x/l_0)_M = (x/l_0)_H; \quad (y/l_0)_M = (y/l_0)_H; \quad (z/l_0)_M = (z/l_0)_H$$

и в исходные моменты времени, т.е. при

$$(a\tau/l_0^2)_M = (a\tau/l_0^2)_H,$$

будет иметь место не только равенство

$$(t/t^*)_M = (t/t^*)_H,$$

но такие равенства

$$(\lambda/\lambda^*)_M = (\lambda/\lambda^*)_H \text{ и } (c/c^*)_M = (c/c^*)_H,$$

т.е. будет обеспечено подобие не только температурных полей, но также и подобие полей физических параметров λ и c .

4.5 Моделирование гидродинамических процессов

Рассмотрим подобие стационарного течения несжимаемой вязкой жидкости для следующих случаев:

- при наличии влияния веса;
- при отсутствии влияния веса;
- вязкостное и инерционное течение.

Последние три вида течения являются частными случаями первого.

Течение при наличии влияния веса.

Дифференциальные уравнения движения

$$\begin{aligned}
v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + q + \nu \nabla^2 v_x; \\
v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + q + \nu \nabla^2 v_y; \\
v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + q + \nu \nabla^2 v_z;
\end{aligned} \tag{4.76}$$

уравнение сплошности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \tag{4.77}$$

Уравнения движения (4.76) и сплошности (4.77) могут быть записаны в векторной форме:

$$(V, \text{grad})v = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + q + \nu \nabla^2 V \tag{4.78}$$

уравнение сплошности

$$\text{div } V = 0, \tag{4.79}$$

где V – вектор скорости;

v – скалярная величина того же вектора;

v_x, v_y, v_z – проекции вектора V на координатные оси x, y, z (причем x направлена вертикально);

p – давление, отсчитанное от давления в некоторой точке потока, как от нуля;

ρ – плотность жидкости;

$\nu = \mu / \rho$ – коэффициент кинематической вязкости жидкости;

μ – коэффициент вязкости жидкости;

q – ускорение свободного падения;

∇ – оператор Лапласа.

Величины ρ, ν, q – рассматриваются как постоянные во всем поле.

Краевые условия в рассматриваемой задаче не могут содержать никаких других физических переменных, кроме скорости, которая может быть задана на границе в виде уравнения, выражающего скорость как функцию координат точек границы. Если рассматривают течение жидкости внутри какого-либо аппарата, то границами потока следует считать входное сечение потока, где имеют место

управляемые краевые условия, и поверхности твердых стенок, окаймляющих поток, где имеют место неуправляемые граничные условия (в случае неподвижных стенок $v=0$). Поскольку это условие автоматически соблюдается и в модели, и в образце, то задание краевых условий сводится к заданию скорости на входном сечении изучаемого объекта. Это заключение можно отнести и ко всем задачам, разбираемым в дальнейшем.

Так как в рассматриваемой задаче размерность скорости может быть представлена как

$$[v] = [v/l_0] \text{ или } [v] = [\sqrt{ql_0}],$$

то граничные условия могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} v_{r,x} &= f_x(x_r, y_r, z_r, l_i, q); \\ v_{r,y} &= f_y(x_r, y_r, z_r, l_i, q); \\ v_{r,z} &= f_z(x_r, y_r, z_r, l_i, q). \end{aligned} \quad (4.80)$$

или

$$\begin{aligned} v_{r,x} &= \Phi_x(x_r, y_r, z_r, l_i v); \\ v_{r,y} &= \Phi_y(x_r, y_r, z_r, l_i v); \\ v_{r,z} &= \Phi_z(x_r, y_r, z_r, l_i v). \end{aligned} \quad (4.81)$$

Как показали исследования, оба способа записи краевых условий приводит к одному и тому же конечному результату.

Для приведения уравнений (4.76), (4.77), (4.80) и (4.81) к безразмерному виду напомним масштабные преобразования:

$$\begin{aligned} x &= l_0 X; \quad v_x = v_0 V_x; \quad p = p_0 P; \quad q = q_0 G; \quad y = l_0 Y; \quad v_y = v_0 V_y; \quad v = v_0 N; \\ v_{rx} &= v_0 V_{rx}; \quad z = l_0 Z; \quad v_z = v_0 V_z; \quad \rho = \rho_0 R; \quad v_{ry} = v_0 V_{ry}; \quad v_{rz} = v_0 V_{rz}. \end{aligned}$$

После введения преобразований в уравнения (4.76) и (4.77) получаем:

$$\begin{aligned} \left[\frac{v_0^2}{l_0} \right] \left(V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) &= - \left[\frac{p_0}{\rho_0 l_0} \right] \frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial X} + [q_0] G + \left[\frac{V_0 v}{l_0^2} \right] N \nabla^2 V_x; \\ \left[\frac{v_0^2}{l_0} \right] \left(V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) &= - \left[\frac{p_0}{\rho_0 l_0} \right] \frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial Y} + [q_0] G + \left[\frac{V_0 v}{l_0^2} \right] N \nabla^2 V_y; \end{aligned}$$

$$\left[\frac{v_0^2}{l_0} \right] \left(V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = - \left[\frac{p_0}{\rho_0 l_0} \right] \frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial Z} + [q_0] G + \left[\frac{V_0 v}{l_0^2} \right] N \nabla^2 V_z;$$

$$\left[\frac{v_0}{l_0} \right] \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) = 0;$$

$$[v_0] V_{r,x} = f_x(l_0 X_r, l_0 Y_r, l_0 Z_r, l_0 L_i, q_0 G);$$

$$[v_0] V_{r,y} = f_y(l_0 X_r, l_0 Y_r, l_0 Z_r, l_0 L_i, q_0 G);$$

$$[v_0] V_{r,z} = f_z(l_0 X_r, l_0 Y_r, l_0 Z_r, l_0 L_i, q_0 G).$$

Для приведения этих уравнений к безразмерному виду необходимо, чтобы

$$v_0^2 / l_0 = p_0 / (\rho_0 l_0) = q_0 = V_0 v_0 / l_0^2 \quad (4.86)$$

Из условий (4.86) можно получить три уравнения связи, которые содержат шесть масштабов. Следовательно, любые три из них, имеющие независимые размерности, можно выбрать в качестве основных, например, $l_0 = l$; $\rho_0 = \rho$; $q_0 = q$, а три остальных определить из уравнения связи (4.86).

$$v_0 = (ql_0)^{1/2}; \quad p_0 = \rho ql_0; \quad V = (ql_0^3)^{1/2}.$$

Тогда выражения для безразмерных величин можно записать:

$$X = \frac{x}{l_0}; \quad V_x = \frac{v_x}{(ql_0)^{1/2}}; \quad V_{r,x} = \frac{v_{r,x}}{(ql_0)^{1/2}};$$

$$Y = \frac{y}{l_0}; \quad V_y = \frac{v_y}{(ql_0)^{1/2}}; \quad V_{r,y} = \frac{v_{r,y}}{(ql_0)^{1/2}};$$

$$Z = \frac{z}{l_0}; \quad V_z = \frac{v_z}{(ql_0)^{1/2}}; \quad V_{r,z} = \frac{v_{r,z}}{(ql_0)^{1/2}};$$

$$L_i = \frac{l_i}{l_0}; \quad R = 1; \quad P = \frac{p}{\rho ql_0};$$

$$N = \frac{V}{(ql_0^3)^{1/2}}; \quad G = 1. \quad (4.87)$$

или

$$L = 1/l_0; \quad V = v/(ql_0)^{1/2}; \quad P = p/\rho ql_0; \quad N = v/(ql_0^3)^{1/2}; \quad (4.88)$$

$$G = 1; \quad R = 1.$$

где 1 – радиус вектора;

L – безразмерный радиус-вектор какой-либо точки в потоке;

G – единичный вектор.

Уравнение движения:

$$\begin{aligned} V_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= 1 - \frac{\partial p}{\partial x} + N \nabla^2 V_x; \\ V_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= 1 - \frac{\partial p}{\partial y} + N \nabla^2 V_y; \\ V_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 1 - \frac{\partial p}{\partial z} + N \nabla^2 V_z, \end{aligned} \quad (4.89)$$

или в векторной форме

$$(V, \text{grad})V = 1 - \text{grad}P + N \nabla^2 V. \quad (4.90)$$

Уравнение сплошности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (4.91)$$

или в векторной форме

$$\text{div}V = 0 \quad (4.92)$$

Граничные условия

$$\begin{aligned} V_{r,x} &= F_x(X_r, Y_r, Z_r, L_i); \\ V_{r,y} &= F_y(X_r, Y_r, Z_r, L_i); \\ V_{r,z} &= F_z(X_r, Y_r, Z_r, L_i). \end{aligned} \quad (4.93)$$

Решение системы дифференциальных уравнений (4.89) и (4.91), удовлетворяющей граничным условиям (4.93), можно представить в виде:

$$\begin{aligned} V_x &= F_x(X, Y, Z, V_{r,x}, V_{r,y}, V_{r,z}, N); \\ V_y &= F_y(X, Y, Z, V_{r,x}, V_{r,y}, V_{r,z}, N); \\ V_z &= F_z(X, Y, Z, V_{r,x}, V_{r,y}, V_{r,z}, N); \\ P &= F_p(X, Y, Z, V_{r,x}, V_{r,y}, V_{r,z}, N). \end{aligned} \quad (4.94)$$

Следовательно, для соблюдения подобия двух потоков необходимо и достаточно осуществить равенство безразмерной скорости на границе потока в модели

и образца и равенство критерия N в сравниваемых потоках, т.е. (в векторной форме)

$$(V_r)_M = (V_r)_H \text{ и } (N)_M = (N)_H,$$

или

$$\left[V_r / (ql_0)^{1/2} \right]_M = \left[V_r / (ql_0)^{1/2} \right]_H \text{ и } \left[v_r / (ql_0^3)^{1/2} \right]_M = \left[v_r / (ql_0^3)^{1/2} \right]_H. \quad (4.95)$$

Если эти условия будут соблюдены, то в сходственных точках модели и образца, т.е. при

$$(l/l_0)_M = (l/l_0)_H$$

будут иметь место равенства:

$$\left[V / (ql_0)^{1/2} \right]_M = \left[V / (ql_0)^{1/2} \right]_H \text{ и } \left[p / (\rho ql_0) \right]_M = \left[p / (\rho ql_0) \right]_H.$$

Интересно заметить, что имеющие широкое применение критерии Re, Eu, Fr могут быть представлены как степенные функции критериев V, P, N . Действительно, воспользовавшись равенством (198), можно получить

$$V / R = vl_0 / v = Re; \quad R / V^2 = p / (\rho v^2) = Eu; \quad V^2 = v^2 / (ql_0) = Fr.$$

Из условий (4.95) видно, что осуществление требования $(N)_M = (N)_H$ при условии, что жидкость в модели и образце одна и та же, т.е. $v_M = v_H$, возможно только при $l_{0,M} = l_{0,H}$, т.е. когда размеры модели и образца одинаковы. В этом случае для выполнения условий $V_{r,M} = V_{r,H}$ должно иметь равенство $\bar{v}_{r,M} = \bar{v}_{r,H}$.

Установление вида функций F_x, F_y, F_z, F_p в большинстве практических задач осуществляется опытным путем. Однако экспериментальное определение указанных функций связано с большими трудностями (вести измерения скоростей и давлений в значительном количестве точек). Поэтому для практических задач нередко переходят на средние значения скорости и давления и устанавливают равенство ускоренных по сечению критериев давления \bar{P}_F и скорости \bar{V}_F .

Перейдя к замене критериев \bar{P}_F, \bar{V}_F и N критериями Re, Eu, Fr , было установлено на основании многочисленных экспериментальных исследований, что

функциональная связь между критериями \bar{P}_F , \bar{V}_F и N может быть представлена в виде

$$\bar{E}u = \psi(\bar{Re}, \bar{Fr}), \quad (4.96)$$

где

$$\bar{E}u = (p_1 - p_2) / (\rho \bar{v}_i^2); \quad \bar{Re} = \bar{v}_i l_0 / \nu; \quad \bar{Fr} = \bar{v}_i^2 / (gl_0).$$

В гидравлике для подсчета сопротивления, возникающего вследствие трения при движении жидкости в канале или трубе, обычно пользуются формулой Дарси:

$$\Delta p = \xi_{\text{тр}} \frac{\rho(\bar{v})^2 l}{2 d},$$

а при определении местных сопротивлений – формулой Вейсбаха:

$$\Delta p = \xi_{\text{тр.м}} \frac{\rho(\bar{v})^2 l}{2 d},$$

где Δp – падение напора между двумя сечениями;

\bar{v} – средняя по сечению трубы скорость;

ρ – плотность жидкости;

l – длина трубы;

d – гидравлический диаметр.

На сопоставление приведенных формул с выражением для критерия $\bar{E}u$ можно заключить, что

$$\xi_{\text{тр.м}} = 2\bar{E}u;$$

$$l/d = 1\xi_{\text{тр}} = 2\bar{E}u,$$

т.е. коэффициенты сопротивления $\xi_{\text{тр}}$ и $\xi_{\text{тр.м}}$ в общем случае в соответствии с выражением (4.96) являются функции критериев \bar{Re} и \bar{Fr} .

Течение при отсутствии влияния веса характеризуется отсутствием свободных поверхностей, т.е. имеет место напорное течение. В этом случае влиянием веса можно пренебречь по сравнению с влиянием остальных сил, действующих на элементарную частицу жидкости.

На основании анализа дифференциальных уравнений:

движения

$$(\bar{V}, grad)\bar{V} = -\frac{1}{\rho} grad p + \nu \nabla^2 \bar{V};$$

сплошности

$$div V = 0;$$

граничных условий

$$V_r = \varphi(1_r, l_i, \nu),$$

где V_r – вектор скорости в точках, расположенных на границах потока;

1_r – радиус-вектор этих точек,

можно получить систему уравнений связи

$$\frac{v_0^2}{l_0} = \frac{p}{\rho_0 l_0} = \frac{V_0 v_0}{l_0^2}, \quad (4.97)$$

Используя уравнения связи, можно показать, так же как это было сделано при рассмотрении предыдущей задачи, что для осуществления подобия нужно на границах модели осуществить распределение критерия V , тождественно одинаковое с тем, которое имеет место в образце, т.е. выполнить условие

$$\left(\frac{V_r l_0}{\nu} \right)_н = \left(\frac{V_r l_0}{\nu} \right)_м.$$

Переходя к усредненным по сечению критериям \bar{V} и \bar{P} и заменяя их критериями $\bar{E}u$ и $\bar{R}e$, результаты опытов, имеющих целью установление эмпирических законов сопротивления при напорном течении, обычно обрабатывается в виде функциональной зависимости

$$\bar{E}u = \psi(\bar{R}e).$$

Вязкостный режим течения. Этот режим течения характеризуется исчезающе малым влиянием инерционных сил по сравнению с силами трения и давления. В этом случае на основании анализа уравнений:

движения

$$- grad + \mu \nabla^2 V = 0;$$

сплошности

$$div V = 0;$$

граничных условий

$$V_{\Gamma} = \psi(l_{\Gamma}, l_i, v^*),$$

где v^* – параметрическое значение скорости,
получается одно уравнение связи

$$\frac{p_0}{l_0} = \frac{\mu_0 v_0}{l_0^2}, \quad (4.98)$$

на основании которого, устанавливается подобие двух потоков.

Для осуществления подобия необходимо выполнить равенство критериев V на границах потоков в модели и в образце, т.е.

$$V_{\Gamma.м} = V_{\Gamma.н} \text{ или } \left(\frac{V_{\Gamma}}{v^*} \right)_м = \left(\frac{V_{\Gamma}}{v^*} \right)_н.$$

Отсюда видно, что подобие может быть осуществлено независимо от размеров модели.

Инерционный режим течения. В этом случае влиянием сил трения, ввиду их малости по сравнению с силами давления и инерции, на режим течения можно пренебречь.

Тогда после приведения уравнений:

движения

$$(v, grad)v = \frac{1}{\rho} grad p;$$

сплошности

$$div v = 0;$$

граничных условий

$$V_{\Gamma} = f(l_{\Gamma}, l, v^*)$$

и безразмерному виду получим уравнение связи

$$v_0^2 = \frac{p_0}{\rho_0}. \quad (4.99)$$

Следовательно, для установления подобия между двумя потоками необходимо выполнить то же условие, что и при вязкостном режиме, т.е.

$$\left(\frac{V_{\Gamma}}{v^*} \right)_н = \left(\frac{V_{\Gamma}}{v^*} \right)_м.$$

В данном случае подобие может быть осуществлено, так же как при вязкостном режиме, независимо от размеров модели, которая, разумеется, должна быть геометрически подобна образцу.

Сопоставим условия, необходимые для осуществления подобия в рассматриваемых задачах:

при наличии сил тяжести:

$$\left[v_r / (ql_0^3)^{1/2} \right]_M = \left[v_r / (ql_0^3)^{1/2} \right]_H ;$$

$$\left[v / (ql_0^3)^{1/2} \right]_M = \left[v / (ql_0^3)^{1/2} \right]_H ;$$

при напорном течении

$$\left(\frac{V_\Gamma l_0}{v} \right)_M = \left(\frac{V_\Gamma l_0}{v} \right)_H ;$$

при вязкостном течении

$$\left(\frac{V_\Gamma}{v^*} \right)_M = \left(\frac{V_\Gamma}{v^*} \right)_H ;$$

при инерционном течении

$$\left(\frac{V_\Gamma}{v^*} \right)_M = \left(\frac{V_\Gamma}{v^*} \right)_H .$$

$$\frac{v_M}{v_H} = C_v ; \quad \frac{l_M}{l_H} = C_e ; \quad \frac{q_M}{q_H} = C_q = 1 ; \quad \frac{v_M}{v_y} = C_v ,$$

получим при наличии влияния сил тяжести

$$C_v = C_e^{1/2} ; \quad C_v = C_e^{3/2} ;$$

при напорном течении

$$C_v C_l = C_V ;$$

при вязкостном и инерционном течении

$$C_v = C_V .$$

Следовательно, для первых двух режимов имеем ограничения в выборе множителей подобия. Действительно, выбрав в первом случае множитель геомет-

рического подобия C_l , мы тем самым предопределяем множители подобия C_v и C_ν . Аналогично и в случае напорного течения.

В противоположность рассмотренным двум первым видам течения, при осуществлении подобия вязкости и инерционного течения мы свободны в выборе множителей подобия. В последних двух случаях подобие обеспечивается одним лишь подобием распределения скоростей. Это свойство инерционного и вязкостного режимов течения называется автомоделью. При этом для вязкостного режима имеет место

$$\bar{E}u \bar{Re} = \text{const},$$

а для инерционного режима

$$\bar{E}u = \text{const}.$$

Вязкостный режим наблюдается в области малых значений числа \bar{Re} , а инерционный – в области больших значений числа \bar{Re} . В соответствии с этим принято говорить о первой и второй автомодельных областях. Значение автомодельности для практики моделирования совершенно очевидно, так как оно позволяет осуществить подобие на модели любых размеров с использованием любой рабочей жидкости.

4.6 Моделирование конвективного теплообмена

Рассмотрим стационарный конвективный теплообмен между твердым телом и омывающей его несжимаемой вязкой жидкостью. При этом физические параметры будем считать зависящими от температуры и давления.

Для сокращения запишем уравнения конвективного теплообмена в векторной форме:

уравнение движения

$$\rho(V, \text{grad})v = -\text{grad}p + \rho q + \mu \nabla^2 V; \quad (4.100)$$

уравнение сплошности

$$\text{div} \rho V = 0; \quad (4.101)$$

уравнение переноса тепла или уравнение энергии

$$(V, qgradt) = a\nabla^2 t \quad (4.102)$$

где $a = \lambda / \rho c q$ – коэффициент температуропроводности;

μ – коэффициент вязкости;

$$(V, qgradt) = v_x \frac{\partial t}{\partial x} + v_y \frac{\partial t}{\partial y} + v_z \frac{\partial t}{\partial z}.$$

Параметры μ, ρ, c, λ в общем случае являются переменными и зависят от температуры, т.е.:

$$\mu = f_\mu(t); \quad c = f_c(t); \quad \rho = f_\rho(t); \quad \lambda = f_\lambda(t). \quad (4.103)$$

краевые условия будут

$$V_r = f_V(1_r, l_i, v_0); \quad t_r = f_t(1_r, l_i, t^*). \quad (4.104)$$

Составим масштабные преобразования и введя их в уравнения (4.100), (4.101) и (4.102) получим в конечном итоге систему уравнений связи:

$$\frac{v_0^2}{l_0} = \frac{p_0}{\rho_0 l_0} = q_0 = \frac{\mu_0 v_0}{\rho_0 l_0^2}; \quad \rho_0 q_0 v_0 c_0 = \frac{\lambda_0}{l_0}. \quad (4.105)$$

Из девяти масштабов, связанных четырьмя уравнениями (4.105), пять масштабов могут быть выбраны произвольно:

$$q_0 = q; \quad t_0 = t^*; \quad \rho_0 = \rho_0; \quad c_0 = c_0; \quad l_0 = l_0, \quad (4.106)$$

а остальные четыре определены из условия (4.105):

$$p_0 = \rho_0 q l_0; \quad v_0 = (q l_0)^{1/2}; \quad \mu_0 = \rho_0 (q l_0^3)^{1/2}; \quad \lambda_0 = \rho_0 c_0 (q^3 l_0^3)^{1/2}. \quad (4.107)$$

Равенства $\rho_0 = \rho_0$; $c_0 = c_0$; $l_0 = l_0$ следует понимать в том смысле, что выбор указанных масштабов является произвольным.

Выражения для безразмерных величин:

$$V = \frac{v}{\sqrt{ql_0}}; \quad L = \frac{1}{l_0}; \quad P = \frac{p}{\rho_0 q_0 l_0};$$

$$T = \frac{t}{t^*}; \quad M = \frac{\mu}{\rho_0 \sqrt{ql_0^3}}; \quad R = \frac{p}{\rho_0}; \quad G = 1;$$

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\rho_0 c_0 \sqrt{q^3 l_0^3}}; \quad C = \frac{c}{c_0}; \quad T^* = 1.$$

После этого дифференциальные и характеристические уравнения и краевые условия в безразмерном виде запишем следующим образом:

уравнение движения

$$R(V, grad)V = -gradP + R + M\nabla^2 V; \quad (4.108)$$

уравнение сплошности

$$divRV = 0; \quad (4.109)$$

уравнение энергии

$$RC(V, gradT) = grad\Lambda\nabla^2 T. \quad (4.110)$$

характеристические уравнения:

$$\Lambda = F_\Lambda(T); \quad C = F_c(T); \quad M = F_M(T); \quad R = F_R(T). \quad (4.111)$$

Краевые условия:

$$V_r = F_v(L_r, L_i); \quad T_r = \Phi(L_r, L_i). \quad (4.112)$$

На основании безразмерных уравнений (4.108) – (4.112) можно заключить, что решение рассматриваемой задачи может быть представлено в виде:

$$V = \Phi_V(L, V_r, T_r, \Lambda, C, M, R);$$

$$P = \Phi_P(L, V_r, T_r, \Lambda, C, M, R);$$

$$T = \Phi_T(L, V_r, T_r, \Lambda, C, M, R). \quad (4.113)$$

Так как подобие двух систем означает тождество полей безразмерных переменных, то для осуществления подобия необходимо:
в сходственных точках рассматриваемых систем, т.е.

$$L_M = L_H, \quad (4.114)$$

иметь тождественно одинаковое распределение критериев V и T на границах рассматриваемых систем, т.е.

$$V_{r.M} = V_{r.H} \text{ или } \left(\frac{v_r}{\sqrt{ql_0}} \right)_M = \left(\frac{v_r}{\sqrt{ql_0}} \right)_H ;$$

$$T_{r.M} = T_{r.H} \text{ или } \left(\frac{t_r}{t^*} \right)_M = \left(\frac{t_r}{t^*} \right)_H , \quad (4.115)$$

и чтобы безразмерные характеристические параметры сравниваемых систем были также одинаковыми, т.е.

$$P_M = P_H \text{ или } \left(\frac{p}{\rho_0 q_0 l_0} \right)_M = \left(\frac{p}{\rho_0 q_0 l_0} \right)_H ;$$

$$\Lambda_M = \Lambda_H \text{ или } \left(\frac{\lambda}{\rho_0 c_0 \sqrt{q^3 l_0^3}} \right)_M = \left(\frac{\lambda}{\rho_0 c_0 \sqrt{q^3 l_0^3}} \right)_H ;$$

$$C_M = C_H \text{ или } \left(\frac{c}{c_0} \right)_M = \left(\frac{c}{c_0} \right)_H ; \quad (4.116)$$

$$M_M = M_H \text{ или } \left(\frac{\mu}{\rho_0 \sqrt{ql_0^3}} \right)_M = \left(\frac{\mu}{\rho_0 \sqrt{ql_0^3}} \right)_H ;$$

$$R_M = R_H \text{ или } \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)_M = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)_H .$$

4.7 Измерение физических параметров, обобщение данных и определение ошибки при моделировании

4.7.1 Измерение физических параметров

При проведении экспериментов на моделях большое значение приобретает вопрос об оценке приемлемости получаемых результатов, анализе полученных результатов, их интерпретации.

Измерение физических величин производится сравнением их с другими однородными величинами, принятыми за единицу измерения. Для измерения используют меры, измерительные приборы и аппаратуру. В случае прямых измерений измеряемая величина сравнивается с мерой непосредственно, при косвенных измерениях используют математические зависимости, которые позволяют вычислить искомую величину.

Различают образцовые и рабочие меры и измерительные приборы.

Образцовые используют только для проверки и градуировки других мер и приборов.

Рабочие меры и приборы используют для самых разных измерений. Они дают номинальное значение измеряемой величины.

В каждом паспорте прибора обычно кроме условий эксплуатации указываются: абсолютная ошибка (погрешность); номинальная относительная ошибка; приведенная относительная ошибка.

Меры, служащие для измерений определенной величины, делятся на классы и разряды, обозначаемые целыми числами: обычно, чем больше число, тем меньше точность меры.

Выше при рассмотрении ряда методов физического моделирования описывались методы измерения ряда физических величин. Ниже остановимся на общих вопросах измерения ряда теплотехнических и гидродинамических параметров.

Измерение температуры. В настоящее время для измерения температуры поверхности или среды каких-либо моделей широкое распространение получили термопары и термометры сопротивления.

Термопары должны быть выбраны такими, чтобы они обладали большой термо-э.д.с. и неизменными свойствами при повторных нагреваниях или охлаждениях.

В зависимости от температурных условий опытов применяют различные материалы для изготовления термопар. Наибольшее распространение в интервале температур до 350°C получили медь-константановые и медь-копелевые термопары. При изменении температур до 800 °C применяют хромель-копелевые термопары, а при измерении температур до 900 – 1000 °C – хромель-алюминиевые (95% Ni + 5% Al) термопары. Для замера более высоких температур применяют специальные термопары, выполненные, как правило, из благородных металлов и конструкция которых здесь не рассматривается.

Для правильного измерения температур необходимо, чтобы термопара имела тесное соприкосновение в месте измерения температуры с исследуемым образцом материала или с какой-либо другой поверхностью тела.

Термопары обычно изготавливают из термопарной проволоки толщиной 0,2-0,5 мм, иногда около 1 мм.

Применение термопар с малым диаметром электродов снижает погрешности измерений температуры, т.к. обладая малой теплоемкостью, они не искажают существенно температурного поля в области расположения термопары.

Изготовленные термопары должны пройти предварительную проверку на однородность, а также градуировку. Для снятия внутренних напряжений электродную проволоку после изготовления термопары подвергают отжигу.

Целесообразно стремиться к тому, чтобы материал термопар имел теплопроводность, близкую к теплопроводности модели. Это необходимо для того, чтобы отвод тепла вдоль электродов термопар был пренебрежимо малым по сравнению с расчетными тепловыми потоками. Чтобы не было искажения показаний, электроды термопар необходимо располагать вдоль изотермических поверхностей. В

отдельных случаях возможна неравномерность температурного поля в месте спаи вследствие разных значений коэффициентов теплопроводности электродов.

Электроды термопар соединяются путем пайки или сварки. В качестве припоя используют олово, серебро и другие металлы. В тех случаях, когда требуется весьма точное измерение перепадов температур на моделях, применяют дифференциальные многоспайные термопары, которые представляют систему нескольких последовательно соединенных термопар. При этом четные спаи соединяют в один пучок, а нечетные – в другой. Спаи должны иметь электрическую изоляцию. В случае измерения перепада температур среды по длине измерительного участка модели, спаи дифференциальной термопары обычно устанавливают во входном и выходном сечениях.

Измерение температур жидкости на входе и выходе измерительного участка модели производят также односпайными дифференциальными термопарами, зачеканенными в медные болванки, которые помещают в соответствующие гильзы. Измерение термо-э.д.с. термопар производят с помощью компенсационных приборов – потенциометров: гальванометров, милливольтметров. Для весьма точных измерений используют пятидекадные потенциометры с нормальным элементом высокого класса точности. Для измерения и записи температур одновременно в нескольких точках применяют электронные автоматические приборы ЭПП-09-М1 класса точности 0,5 % и др.

Термометр сопротивления представляет материал, электрическое сопротивление которого значительно изменяется с изменением температур. К таким материалам относятся: платина (до 660 °С), медь (до 200 °С). Сопротивление термометров измеряется потенциометрическим методом.

Для надежного измерения температур в исследуемой модели применяемые термометры должны быть предварительно проградуированы. Градуировку термопар производят в специальных учреждениях или же непосредственно в лабораторных условиях. Для этого сличают показания изготовленной термопары с показаниями эталонной термопары (термометра сопротивления). При низких температурах могут быть использованы ртутные термометры. Для этого горячие спаи ис-

следуемой и эталонной термопары закрепляют вместе и опускают в термостат с постоянной температурой. Холодные спаи погружают в сосуд с тающим льдом или в среду с температурой ± 0 °С.

Градуировку термопар проводят при нескольких различных температурах, охватывающих весь температурный интервал исследования. На основании данных градуировки составляют таблицы, графики или эмпирические уравнения для зависимости термо-э.д.с. термопары от температуры.

Градуировку термометров сопротивления осуществляют специализированными организациями, в частности Донецким центром стандартизации, метрологии и сертификации. В лабораторных условиях проводят периодическую проверку сопротивления при температуре 0 °С.

Измерение расходов. Расход жидкости в большинстве случаев определяют весовым (объемным) способом или с помощью дроссельных шайб (диафрагм). При измерении расхода весовым (объемным) способом взвешивают или измеряют объем некоторого количества жидкости, протекающей за выбранный промежуток времени, который определяют с помощью секундомера. Этот способ самый простой и рекомендуется к применению в том случае, если массовые расходы не очень велики. Для измерения значительных расходов жидкостей применяют диафрагмы, при которых массовый расход жидкости определяется по перепаду в них давлений. Диафрагма представляет собой дроссельное устройство. Скорость движения жидкости при прохождении через него возрастает, а статическое давление падает. Перепад давлений измеряется с помощью дифференциального манометра, присоединенного к отверстиям, сделанным в стенках трубы перед диафрагмой и после нее. Отверстия для отбора статического давления должны иметь малый диаметр, закругленные края и быть строго перпендикулярными к поверхности стенки. Перед диафрагмой и после нее необходимо предусматривать прямые участки трубы или канала длиной 30 – 40 дециметров.

Перепад статического давления ($p_1 - p_2$) связан с расходом G зависимостью

$$G = c\sqrt{\rho(p_1 - p_2)},$$

где $c = f(\text{Re})$ – определяется тарировочными опытами;
 ρ – плотность жидкости, кг/м³.

Скорость течения жидкости или газа в расчетном сечении может быть найдена по массовому расходу или по данным измерения динамического давления, которое обычно осуществляется с помощью трубки Прандтля. Обычно эту трубку устанавливают на оси канала или трубы в таком сечении, где скорость практически постоянна.

При измерении скоростей движения газовой среды широкое распространение получили термоанемометры, принцип действия которых основан на зависимости теплоотдачи тела от скорости движения охлаждающего его потока газа. В термоанемометре с термопарой чувствительный элемент – тонкая металлическая проволока – нагревается электрическим током, величина которого в процессе нагревания поддерживается постоянной. Скорость газа определяется по температуре нити, измеряемой с помощью термопары, или по величине электрического сопротивления нити, соответствующего этой температуре.

В термоанемометре без термопары поддерживается постоянная температура нити (сопротивление нити). В этом случае скорость движения газа определяется по результатам измерения силы тока, проходящего по нити. Термоанемометры с нагретой нитью используют для измерения скоростей до 15 м/с.

Давление измеряют с помощью манометров и микроманометров. Малые давления и перепады давления измеряют P – или V образными дифференциальными микроанемометрами. Их изготавливают из стеклянных трубок постоянного поперечного сечения и заполняют жидкостью (ртутью, водой, спиртом, толуолом и др.). Концы трубок манометра присоединяют к местам отбора давления. При измерении статического давления, как упоминалось выше, местами отбора могут служить небольшие отверстия в стенках трубы или канала. При необходимости замера давления внутри жидкости, используют трубки отбора давлений с отверстием, параллельным потоку. Такая одноканальная трубка позволяет измерить полное давление.

Измерение тепловых потоков. Методы определения тепловых потоков отличаются большим разнообразием. Они зависят от рода поставленной теплотех-

нической задачи, от способа подвода и отвода тепла к моделям и многим другим факторов. В связи с этим рассмотрим измерение тепловых потоков для случаев, когда необходимо определить коэффициент теплопроводности горной породы и при конвективном теплообмене.

Для определения коэффициентов теплопроводности в стационарном режиме тепловой поток в большинстве случаев создают с помощью электрических нагревателей, которые имеют различную форму и расположение относительно образца в зависимости от его формы и требований применяемого метода исследования. Нагреватели изготавливают из тонких проволок или тонкого листового материала в форме стержней полых трубок и т.д.

Во всех случаях в процессе экспериментов они должны создавать тепловой поток, равномерно распределенный по расчетной поверхности образца, с пренебрежимо малыми тепловыми потерями в окружающую среду по сравнению с потоками тепла, идущим на нагревание исследуемого образца. В таком случае тепловой поток к образцу может быть определен из выражения

$$Q = J\Delta U, \text{ Вт},$$

где J – сила тока;

ΔU – падение напряжения в нагревателе.

Измерение мощности, силы тока и падения напряжения в нагревателе производят ваттметрами, амперметрами и вольтметрами.

Для точных измерений небольших тепловых потоков используют потенциометрический метод измерения с образцовым сопротивлением.

Образцовое (нормальное) сопротивление включается в электрическую цепь последовательно с основным нагревателем. Исходя из этого мощность, Q , Вт, (тепловой поток) нагревателя находится по формуле

$$Q = \Delta U \frac{\Delta U_N}{R_N}, \text{ Вт},$$

где $\Delta U, \Delta U_N$ – падение напряжения нагревателей и на нормальном сопротивлении, которое измеряют с помощью потенциометров;

R_N – величина нормального сопротивления.

Если исследуются электропроводные материалы, процесс нагревания осуществляется за счет непосредственного пропускания электрического тока через образец, и тогда он сам одновременно является нагревателем. В этом случае определение теплового потока производят по вышеприведенным зависимостям. Тепловой поток может быть найден по методу калориметрирования, если через опытный образец циркулирует калориметрическая жидкость с известной удельной теплоемкостью

$$Q = G_k C_{P,k} (t''_{\text{ж}} - t'_{\text{ж}}),$$

где $G_k, C_{P,k}$ – массовый расход и удельная теплоемкость калориметрической жидкости;

$t''_{\text{ж}} - t'_{\text{ж}}$ – изменение температуры жидкости на исследуемом участке.

В некоторых случаях для измерения тепловых потоков используют тепломеры, работающие по методу дополнительной стенки. Этот метод состоит в том, что к поверхности, тепловой поток через которую необходимо определить, плотно прижимается дополнительная стенка с известной величиной теплового сопротивления ($R_0 = \delta_0 / \lambda_0$). Тогда, измеряя перепад температур Δt_0 в дополнительной стенке, можно найти тепловой поток q_f , проходящий через нее,

$$q_f = \frac{\lambda_0}{\delta_0} \Delta t_0.$$

Если термическое сопротивление дополнительной стенки невелико по сравнению с термическим сопротивлением исследуемого материала, то при установившемся тепловом состоянии тепловые потоки через дополнительную и через основную стенки будут одинаковы.

При конвективном теплообмене величина теплового потока в зависимости от обогрева определяется соотношениями, аналогичными приведенным выше для процессов теплопроводности.

Применительно к жидкости, протекающей внутри цилиндрической трубы, тепловой поток можно определить методом толстостенной трубы по зависимости

$$Q = \frac{2\pi\lambda(\bar{t}_{c1} - \bar{t}_{c2})l}{\ln d_2 / d_1},$$

где l – длина трубы;

λ – коэффициент теплопроводности стенки трубы;

d_2, d_1 – соответственно наружный и внутренний диаметр трубы.

Вышеприведенную зависимость можно использовать применительно к местным значениям величин. Этот метод определения Q требует наличия данных о λ стенки трубы и его зависимости от температуры. Кроме того, для надежного измерения перепада температур $\bar{t}_{c1} - \bar{t}_{c2}$ по толщине стенки она должна быть относительно толстой, поэтому такой метод определения теплового потока получил название метода толстостенной трубы. Этот метод удобен, если необходимо получить высокие значения тепловых потоков, которые обычно создаются с помощью электрических нагревателей на внешней поверхности толстостенной трубы.

Как указывалось выше, основной величиной, подлежащей опытному исследованию при конвективном теплообмене, является коэффициент теплоотдачи. Для его определения в настоящее время применяют в основном метод стационарного теплового потока и метод регулярного теплового режима.

Метод стационарного теплового потока основан на законе Ньютона-Рихмана

$$dQ = \alpha_F (t_{CT} - t_{ж}),$$

где Q – количество тепла, тепловой поток;

F – поверхность нагревания (охлаждения).

Если все величины, входящие в это уравнение, относить к небольшим элементам поверхности трубы, то из него определяются местные значения коэффициента теплоотдачи.

Среднее значение коэффициента теплоотдачи может быть найдено двумя способами.

Первый способ:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{F} \int_0^F \alpha_F dF \quad (4.117)$$

В случае изменения местного коэффициента теплоотдачи в одном направлении, например по длине трубы (канала), уравнение (4.279) переходит в зависимость

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{l} \int_0^l \alpha_x dx. \quad (4.118)$$

где l – конечная длина трубы.

Второй способ:

$$\bar{\alpha} = \frac{\frac{1}{l} \int_0^l q(x) dx}{\frac{1}{l} \int_0^l (t_{CT} - t_{ж}) dx} = \frac{Q}{F(\bar{t}_{CT} - \bar{t}_{ж})}, \quad (4.119)$$

где q – средняя плотность теплового потока,

$$q = \frac{1}{l} \int_0^l q(x) dx = \frac{Q}{F};$$

$\bar{t}_{ж}$ – среднее арифметическое значение температуры по длине потока,

$$\bar{t}_{ж} = \frac{t'_{ж} - t''_{ж}}{2};$$

$t'_{ж}, t''_{ж}$ – средняя по сечению температура жидкости на входе и выходе из канала.

Этот способ усреднения применяют при небольшом изменении температуры жидкости по длине канала. В общем случае усреднение температуры производится по логарифмическому закону:

$$\bar{t}_{ж.л} = \bar{t}_{CT} \pm \Delta \bar{t}_{ЛОГ},$$

где $\Delta \bar{t}_{ЛОГ}$ – средний логарифмический напор между температурами стенки и жидкости,

$$\Delta \bar{t}_{ЛОГ} = \frac{t'_{ж} - t''_{ж}}{\ln \frac{\bar{t}_{CT} - t'_{ж}}{\bar{t}_{CT} - t''_{ж}}};$$

\bar{t}_{CT} – средняя температура поверхности стенки, определяемая как среднее арифметическое нескольких значений ее в отдельных точках поверхности стенки;

$$\bar{t}_{CT} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_{CTi}.$$

Иногда среднюю температуру определяют как средневзвешенную величину. При достаточном количестве термопар можно построить сглаженную кривую изменения температуры поверхности и по ней найти среднее интегральное планиметрическое значение.

Естественно, что значение коэффициента теплоотдачи, определенное по формулам (4.118) и (4.119), будет различным.

По первому способу для определения местных значений коэффициента теплоотдачи надо знать температуру жидкости и плотность теплового потока во многих сечениях трубы. При этом необходимо располагать надежными данными о тепловых потерях на соответствующих расчетных участках, что не всегда представляется возможным и весьма затруднено.

Исходя из этого, данный способ не нашел широкого применения для определения коэффициента теплоотдачи.

Большое практическое распространение получил второй способ определения среднего коэффициента теплоотдачи как наиболее простой. В нем требуется знать среднее интегральное значение плотности теплового потока и температуры жидкости по длине, которые легко находятся по температурам жидкости на входе и выходе из трубы. В этом случае нет надобности знать распределение утечек тепла по длине канала, а достаточно располагать данными по суммарной величине этих потерь.

Тепловой поток при нагревании (охлаждении) жидкостью определяется по ее массовому расходу и изменению температуры (метод энтальпии):

$$q = GC_p (t'_{ж} - t''_{ж}),$$

где C_p – удельная теплоемкость жидкости;

G – массовый расход жидкости.

Важнейшими условиями надежности определения этого расхода является соблюдение постоянства расхода жидкости. Для его выполнения необходимо, чтобы напоры, под которыми движется жидкость, сохранялись постоянными во времени. Постоянство напоров осуществляется применением уравнивающих бачков, устанавливаемых в определенных положениях.

Метод регулярного теплового режима. При определении коэффициента теплоотдачи методом регулярного режима экспериментально измеряется лишь одна величина – скорость охлаждения. Измерять температуру поверхности тела не требуется, что особенно удобно при исследовании тел сложной геометрической формы.

В методе регулярного теплового режима скорость охлаждения тела измеряется в стадии регулярного режима, т.е. в той стадии охлаждения, когда на скорость охлаждения тела уже не влияют начальные условия.

Основным условием регулярного режима является постоянство температуры охлаждающей среды.

4.7.2 Обобщение данных опытов

Вид критериальных зависимостей остается одинаковым для всех геометрических подобных систем, поскольку сохраняют силу исходные дифференциальные уравнения и условия однозначности. Количественная связь между критериями подобия на основании теории размерности обычно представляется в виде степенных зависимостей, позволяющих описать практически любую экспериментальную зависимость, тем более, что критериальные уравнения представляют собой функции, изменяющиеся монотонно. Поэтому они легко могут быть аппроксимированы по отдельным интервалам приближенными степенными уравнениями.

В настоящее время эта форма критериальных уравнений получила очень большое распространение.

Прежде чем обрабатывать опытные данные в числах подобия, нужно знать, от каких чисел зависит определяемое значение. Для этого составляют систему дифференциальных уравнений, описывающих экспериментально изучаемый процесс, и формируют условия однозначности. Затем математическое описание процесса приводится к безразмерному виду.

Предположим, было получено, что $Nu = f(Re)$, т.е. опыты проводились с теплоносителем, критерий Прандтля которого является постоянной величиной, не зависящей от температуры.

В этом случае зависимость между числами подобия обычно представляют в виде степенных функций, т.е.

$$Nu = C Re^{n_1}, \quad (4.120)$$

где C, n_1 – постоянные безразмерные числа.

Постоянные C, n_1 подлежат определению. Для этого вычисляют значения критериев Nu, Re по найденным из опыта величинам коэффициента теплоотдачи и скорости движения жидкости. По этим значениям критериев строят график. В нем по оси ординат откладывают $\ln Nu$, а по оси абсцисс – $\ln Re$. В указанных координатах опытные данные описываются прямолинейной зависимостью, что следует из уравнения (4.120).

$$\ln Nu = \ln C + n_1 \ln Re.$$

Последнее уравнение является уравнением прямой линии. Показатель степени n_1 представляет собой тангенс угла наклона прямой к оси абсцисс.

Следовательно, значение n_1 можно определить с помощью графического представления опытных данных в координатах $\ln nu = f(\ln Re)$ (рис. 4.7).

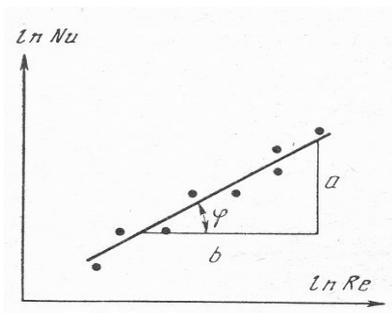


Рис. 4.7. Схема к установлению зависимости $Nu = c Re^{n_1}$ при одной переменной [$Nu = f(Re)$].

Показатель степени

$$n_1 = \operatorname{tg}\varphi = \frac{a}{b}.$$

Постоянная C определяется из уравнения

$$C = Nu / Re^{n_1}.$$

Проверкой применимости степенной зависимости является тот факт, что в логарифмических координатах все полученные точки укладываются на прямую. Если же опытные точки располагаются по кривой, то эту кривую заменяют ломанной. Для отдельных участков такой кривой значения C и n_1 различны.

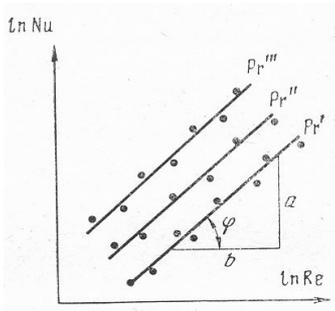


Рис. 4.8. Схема к установлению зависимости $Nu - c Re^{n_1}$ при двух переменных [$Nu = f(Re, Pr)$]

В случае, если искомая величина Nu является функцией двух аргументов, например $Nu = f(Re, Pr)$, т.е. $Nu = C Re^{n_1} Pr^{n_2}$, на графике получается семейство прямых, второй аргумент берется в качестве параметра (рис. 4.8).

Тогда по одной из прямых определяют показатель при числе Re , а затем опытные данные представляют на графике в виде зависимости $\ln \frac{Nu}{Re^{n_1}} = f(\ln Pr)$. Из последующего графика определяют показатель степени n_2 при критерии Pr , а значение коэффициента C определяют из уравнения

$$C = \frac{Nu}{Re^{n_1} Pr^{n_2}}.$$

Аналогичным путем можно установить и более сложные зависимости.

Критерии подобия, а, следовательно, и уравнения связи между ними обычно получают в предположении о независимости физических параметров жидкости от температуры.

Однако в процессе теплообмена, протекающих при высоких тепловых потоках и при больших скоростях, физические параметры жидкости нельзя считать

постоянными. В этих случаях может иметь место резкое изменение температуры по сечению потока. При исследовании капельных жидкостей теплоотдача оказывается различной в условиях нагревания и охлаждения. Явная зависимость теплоотдачи от направления теплового потока объясняется тем, что при нагревании и охлаждении жидкости закономерности изменения скорости и температуры в пограничном слое различны вследствие различного характера изменения ее физических свойств. Поэтому процессы теплообмена, одни из которых протекают в условиях нагревания, а другие – в условиях охлаждения, строго говоря, не являются подобными процессами.

Физические параметры капельных жидкостей изменяются с температурой существенно, особенно вязкость. Для учета неизотермичности в этом случае применяются параметрические критерии в виде отношения значений вязкости или в виде отношений критериев Прандтля соответственно при температурах потока вдали (в центре) и у стенки трубы

$$(\mu_{\text{ж}} / \mu_{\text{СТ}})^n \text{ и } (P_{r_{\text{ж}}} / P_{r_{\text{СТ}}})^n .$$

Критерии подобия имеют нулевую размерность. Определяющая температура, по которой выбираются физические параметры, может быть принята произвольно. Она принимается, в основном, исходя из соображения удобства расчетов. В качестве определяющей температуры принимают такую температуру, которая в технических расчетах задана или легко вычислена.

В качестве линейного характерного размера можно принимать расстояния x или l и другие величины.

Для каналов круглого сечения в качестве определяющего размера обычно принимается внутренний диаметр. Для каналов некруглого сечения широко применяется эквивалентный диаметр

$$d_{\text{эkv}} = \frac{4f}{P} ,$$

где f и P – соответственно площадь и периметр поперечного сечения канала.

Для кольцевых каналов рекомендуется еще вводить множитель, характеризующий соотношение между диаметрами, так как для случая ламинарного стабилизированного течения вязких жидкостей пользоваться эквивалентным диаметром для расчета теплоотдачи нельзя.

4.7.3 Оценка и определение ошибки при моделировании

При проведении экспериментов по моделированию какого-либо процесса важную роль играет изучение ошибок и неопределенностей. Результаты экспериментов содержат ошибки, которые могут быть как существенными, так и ничтожно малыми. Ни один эксперимент нельзя правильно спланировать без тщательного изучения этого фактора. Если неопределенности игнорируются или оцениваются небрежно, то это может приводить к убыткам, потере времени и труда.

Чтобы правильно поставить опыты по выбранной методике, необходимо заранее знать источники возможных ошибок. Кроме того, надо иметь в виду, что повышение точности иногда позволяет найти новые, неизвестные ранее закономерности. Поэтому для правильной постановки опыта производят предварительный анализ погрешности. К источникам возможных ошибок относятся: применение измерительных приборов невысокого класса точности и неправильная их настройка, неточная градуировка термомпар, отклонение от расчетного теплового режима работы установки, недостаточно строгое выполнение граничных условий, с которыми связаны применяемые расчетные уравнения, неполный учет тепловых потерь, неспособность наблюдателя правильно регистрировать показания прибора и т.д.

Вышеназванные причины приводят к двум основным классам ошибок: систематические и случайные.

Систематические ошибки представляют собой фиксированные величины отклонения отсчета относительно известного или калиброванного значения независимо от того, сколько раз производится измерение, т.е. систематические ошибки имеют постоянные величины. Систематические ошибки могут быть легко

устранены путем тщательной калибровки и проверки приборов и всей измерительной схемы или путем введения специальных поправок при обработке опытных данных.

Случайные ошибки имеют место, когда при последовательных измерениях постоянной величины получаются различные числовые значения. Величина ошибки зависит от того, насколько хорошо прибор может воспроизвести последовательные отсчеты при постоянном входном воздействии. Случайные ошибки являются принципиально неустранимыми. В некоторых случаях удается лишь уменьшить их численные значения.

Количественной оценкой точности результатов измерений является относительная ошибка. Относительная ошибка опыта представляет собой частное от деления абсолютной ошибки опыта ΔV на абсолютное значение измеряемой величины V .

Если величина V является заданной функцией нескольких независимых переменных, определяемых опытом,

$$V = f(K_1, K_2, K_3, \dots, K_n),$$

то

$$\frac{dV}{V} = d(\ln V) = d \ln f(K_1, K_2, K_3, \dots, K_n)$$

и относительная ошибка измерения V составит значение, равное сумме абсолютных значений всех слагаемых этих уравнений.

Это положение вытекает из того, что поскольку в первом приближении можно принять $\Delta V / V = dV / V$, а, как правило, $dV / V = d(\ln V)$, то относительная ошибка одного опыта определяется полным дифференциалом от натурального логарифма измеряемой переменной величины V .

Рассмотрим определение коэффициента теплопроводности, который для плоской стенки неограниченных размеров выражается уравнением вида

$$\lambda = \frac{Q\delta}{(t_{c1} - t_{c2})F_p}, \quad (4.121)$$

где Q – тепловой поток;
 δ – толщина плоского слоя;

$(t_{c1} - t_{c2})$ – перепад температур на изотермических поверхностях плоского слоя;

F_p – расчетная поверхность, нормальная к направлению теплового потока.

Логарифмируя уравнение (4.121), получим

$$\ln \lambda = \ln Q + \ln \delta - \ln(t_{c1} - t_{c2}) - \ln F_p.$$

Полный дифференциал рассматриваемой функции будет иметь вид

$$d(\ln V) = \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{dQ}{Q} + \frac{d\delta}{\delta} - \frac{d(t_{c1} - t_{c2})}{t_{c1} - t_{c2}} - \frac{dF_p}{F_p}.$$

Следовательно, относительная ошибка измерений коэффициента теплопроводности составит величину

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta Q}{Q} + \frac{\Delta\delta}{\delta} + \frac{\Delta(t_{c1} - t_{c2})}{t_{c1} - t_{c2}} + \frac{\Delta F_p}{F_p}. \quad (4.122)$$

В выражении (4.121) Δ – абсолютные ошибки при измерении отдельных величин с помощью имеющихся приборов.

При умножении обеих частей уравнения (4.121) на 100 получим значение относительной ошибки по определению коэффициента теплопроводности в процентах. Аналогично относительная ошибка определяется и при измерении других величин, для этого необходимо знать расчетное уравнение, по которому определяется тот или иной параметр.

Пример. Определить максимальную относительную ошибку опыта по определению коэффициента теплоотдачи в трубе, если последний определяется уравнением вида

$$\alpha = \frac{qf}{(t_c - t_{ж})}.$$

При этом удельный тепловой поток $qf = 500$ ккал/(м²·ч).

Температура поверхности трубы $t_c = -25$ °С, жидкости – 35 °С.

Измерение температуры производится с ошибкой 0,1 °С.

Максимальная относительная ошибка опыта в этом случае составит

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} = \frac{\Delta qf}{qf} + \frac{\Delta t_c + \Delta t_{ж}}{t_c - t_{ж}} = \frac{10}{500} + \frac{0,1 + 0,1}{35 - 25} = 2 + 2 = 4\%.$$

При проведении экспериментов оперируют средней арифметической и средней квадратичной ошибками. Для того, чтобы случайные ошибки результатов эксперимента были незначительными по сравнению с систематическими ошибками, каждый единичный опыт следует повторить достаточное количество раз.

При проведении n измерений единичного результата среднее арифметическое величин $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ составит

$$\bar{V} = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n V_i}{n}.$$

Средняя абсолютная арифметическая ошибка единичного результата при n измерениях выражается величиной

$$\Delta \bar{V}_{\text{ар}} = \frac{|\bar{V} - V_1| + |\bar{V} - V_2| + \dots + |\bar{V} - V_n|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n |\bar{V} - V_i|}{n}.$$

Средняя квадратичная ошибка единичного результата при n измерениях представляется зависимостью

$$\Delta \bar{V}_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{(\bar{V} - V_1)^2 + (\bar{V} - V_2)^2 + \dots + (\bar{V} - V_n)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{u} - u_i)^2}{n-1}}.$$

Относительные величины средних арифметической и квадратичной ошибок можно получить путем деления абсолютных их значений на величину \bar{V} .

Чем больше проведено измерений, тем меньше влияние будут оказывать случайные ошибки.

В отдельных случаях при определении полной ошибки к ошибкам измерения должна быть прибавлена ошибка отнесения.

Ошибка отнесения возникает тогда, когда какие-либо величины зависят от других величин. Например, коэффициент теплопроводности λ , коэффициент температуропроводности a , теплоемкость C_p зависят от температуры. Поэтому измеренные их значения относят к какой-либо определенной температуре, например к средней.

Однако эта средняя температура сама измеряется с некоторой абсолютной погрешностью Δt . В таком случае ошибка отнесения по температуре составит величину (если известна относительная скорость изменения изучаемой величины λ от температуры)

$$\frac{\Delta \lambda_t}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial t} \right) \Delta t.$$

В случае зависимости измеряемой величины от нескольких параметров процесса ошибка отнесения будет иметь соответствующие слагаемые, учитывающие ошибки отнесения по всем этим параметрам.

4.8 Математическое моделирование с применением моделей аналогов

4.8.1 Метод электромеханических аналогий

В примерах, рассмотренных выше, модель и оригинал имели одинаковую физическую природу. Если же оригинал описывается той же системой уравнений, что и модель, но имеет иную физическую природу, то применяется математическое моделирование. В настоящее время широко известны аналогии механических, электрических, акустических, гидравлических, тепловых и других явлений и процессов.

Академик А.Н. Крылов писал: «Таких аналогий между вопросами совершенно разных областей, но приводящих к одинаковым дифференциальным уравнениям, можно привести множество. Казалось бы, что может быть общего между движением небесных светил под действием притяжения к Солнцу и между собой и качкой корабля на волнении или между определением так называемых вековых неравенств в движении небесных тел и крутильными колебаниями вала многоцилиндрового двигателя Дизеля, работающего на корабельный винт или электрогенератор, между тем, если написать только формулу и уравнение без слов, то нельзя отличить, какой из этих вопросов решается: уравнение одни и те же.

При математическом моделировании основной соотношения модель – натура является такое обобщение теории подобия, которое учитывает качественную разнородность модели и природы, принадлежность их к разным формам движения материи. Такое обобщение принимает форму более абстрактной теории изоморфизма систем. Основой такого подхода является аналогия – правдоподобное и вероятное заключение о сходстве двух предметов или явлений в каком-либо признаке на основании установленного их сходства в других признаках. Принцип математической аналогии позволяет экспериментально находить решение дифференциальных уравнений на модели в той области, где эксперимент осуществляется наиболее легко и точно. Трудно найти более подходящую для этой цели область техники, чем электротехника. Необходимые для этой цели элементы электрических цепей (емкости, индуктивности и резисторы) портативны, дешевы и могут быть выполнены просто и с большой степенью точности, а электроизмерительные приборы обладают высокой точностью измерений.

В 1881 г. Максвелл изложил языком механики Лагранжа теорию электромагнитных явлений, приняв в качестве обобщенной величины перемещения электрического заряда, в качестве обобщенной скорости – силу тока и в качестве механической силы – величину электродвижущей силы.

Электрическое моделирование механических систем производится при физической постановке задачи, когда механическая система характеризуется массой, упругостью, трением и связями. По этой ее физической характеристике и строится модель-схема, в которой все элементы заменены аналогичными.

Электрическое моделирование возможно при математической постановке задачи. В этом случае сначала составляется дифференциальное уравнение исследуемой механической системы и для его решения создается электрическая, характеризующаяся точно таким же дифференциальным уравнением – математическая модель.

В настоящее время результатом развития электрического моделирования явилось создание двух систем электромеханических аналогий.

Эти системы установлены путем сопоставления уравнений поступательного и вращательного движений механической системы и уравнений для электрической цепи, состоящей из индуктивности, емкости и активного сопротивления, соединенных последовательно и параллельно.

Уравнения поступательного и вращательного движений механической системы имеют вид

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + R \frac{\partial x}{\partial t} + kx + \text{const} = P(t). \quad (4.123)$$

$$J \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + R_{\text{вр}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + k_{\text{вр}} x + c \text{const} = M(t), \quad (4.124)$$

где m – масса;

x – перемещение;

$R, R_{\text{вр}}$ – сопротивления трению соответственно при поступательном и вращательном движениях;

$k, k_{\text{вр}}$ – коэффициенты, учитывающие упругие свойства пружины, т.е. жесткость соответственно при сжатии (растяжении) и закручивании (раскручивании);

J – момент инерции;

φ – угол поворота (закручивания);

M – механический момент;

P – механическая сила.

При последовательном соединении индуктивности, активного сопротивления и емкости уравнение электрического состояния цепи согласно второму закону Кирхгофа можно представить в виде

$$L \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + R \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{C} q + \text{const} = U(t), \quad (4.125)$$

где L – индуктивность;

C – емкость;

R – активное сопротивление;

q – электрический заряд;

U – электрическое напряжение.

При параллельном соединении этих элементов согласно первому закону Кирхгофа получим

$$C \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{L} \Phi + \text{const} = i(t), \quad (4.126)$$

где Φ – магнитный поток;

i – сила электрического тока.

В уравнениях (4.123) и (4.124) слагаемые представляют собой силы, действующие соответственно на сосредоточенную массу, элемент сопротивления (демпфер), элемент упругости (пружину) или моменты, действующие на аналогичные элементы при вращательном движении механической системы.

В уравнении (4.125) слагаемые представляют собой напряжения на индуктивности, емкости и активном сопротивлении при последовательном их соединении.

В уравнении (4.126) слагаемые представляют собой токи в ветвях цепи с параллельным соединением емкости, активного сопротивления и индуктивности.

Физической основой механической системы являются законы Кирхгофа. Каждому уравнению равновесия сил в механической системе соответствует уравнение балансов напряжений цепи с последовательным соединением L, R, C или уравнение токов для отдельного узла с параллельным соединением:

$$P = P_m + P_E + P_\eta, \quad (4.127)$$

$$U = U_L + U_C + U_R, \quad (4.128)$$

$$i = i_L + i_C + i_R. \quad (4.129)$$

Механические параметры системы и соответствующие им электрические величины приведены в табл. 4.2. При изучении физико-механических свойств горных пород используются механические системы, представляющие собой всевозможные комбинации, составленные из идеальных сред: Гука, Ньютона и Сен-Венана.

Механические параметры системы и соответствующие им электрические величины

Характер величин	Механическая система		Электрическая система	
	Поступательное движение	Вращательное движение	I система аналогий	II система аналогий
Параметры системы	Инертная характеристика		Индуктивность	Емкость
	m	J	L	C
	Сопротивление трению		Омическое сопротивление R	Проводимость $q = \frac{1}{R}$
	R_n	R_b		
	Податливость		Емкость C	Индуктивность L
	S	S_b		
Параметры состояния	Перемещение		Заряд q	Потокосцепление Φ Напряжение U
	x	φ		
	Скорость		Ток $i = \frac{dq}{dt}$	Напряжение U
	$v = \frac{dx}{dt}$	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$		
	Усилие		Напряжение U	Ток i
	P	M		
Энергия	Кинетическая энергия		Магнитная энергия $T_M = \sum \frac{1}{2} Li^2$	Электрическая энергия $T_{\mathcal{E}} = \sum \frac{1}{2} CU^2$
	$T = \sum \frac{1}{2} mv^2$	$T_b = \sum \frac{1}{2} I\omega^2$		
	Потенциальная энергия		Электрическая энергия $W_{\mathcal{E}} = \sum \frac{1}{2} \frac{g^2}{C}$	Магнитная энергия $W_M = \sum \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L}$
	$W = \sum \frac{1}{2} \frac{x^2}{S}$	$W_b = \sum \frac{1}{2} \frac{\varphi^2}{S_b}$		
Рассеяние энергии	$A = \sum \frac{1}{2} R_n v^2$	$A_b = \sum \frac{1}{2} R_b \omega^2$	$A_{\mathcal{E}} = \sum \frac{1}{2} Ri^2$	$A_M = \sum \frac{1}{2} gU^2$

Таким образом, можно считать, что электрический заряд соответствует относительной деформации ε , сила тока $i = \frac{dq}{dt}$ – скорости деформации $\varepsilon = \frac{d\varepsilon}{dt}$; электрическое напряжение U – напряжению в образе горной породы σ .

Упругие, вязкие и пластические свойства горных пород могут быть представлены механическими и электрическими моделями.

1. Упругость. Твердые тела, при механическом нагружении которых наблюдается линейная зависимость между напряжением и деформацией, называют телами Гука. Механической моделью такого тела является пружина. Деформации тела упруги (при снятии нагрузки полностью восстанавливается равновесное состояние) и определяются приложенной силой и тяжестью пружины

$$F = ks, \quad (4.130)$$

где F – приложенная к пружине сила;

k – коэффициент, учитывающий жесткость пружины;

s – деформация пружины.

Зависимость между напряжением и деформацией (для случая упругой деформации) выражается законом Гука:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (4.131)$$

где σ – напряжение, Па;

ε – относительная деформация.

Идентичность зависимостей (4.130) и (4.131) послужила причиной тому, что упругие свойства горных пород в механических моделях аппроксимируется пружиной.

В качестве электрического анализа упругих свойств горных пород может служить емкость, для которой справедливо выражение

$$U = \frac{1}{C}q, \quad (4.132)$$

где U – приложенное напряжение, В;

C – емкость конденсатора, Ф;

q – заряд на обкладках конденсатора, Кл.

Энергия, накопленная электрическим полем,

$$W_{\text{уэ}} = \frac{CU^2}{2} = \frac{U^2}{2\frac{1}{C}}, \quad (4.133)$$

полностью возвращается источнику при разряде конденсатора.

Потенциальная энергия упругой деформации, запасенная в единице объема деформируемого тела,

$$W_{\text{М}} = \frac{\sigma^2}{2E}, \quad (4.134)$$

полностью возвращается при исчезновении возмущающей силы.

2. Вязкость. Механической моделью, характеризующей свойства вязкости твердого тела, является тело Ньютона (N – тело). Напряжения в нем прямо пропорциональны скорости деформирования

$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} = \eta \dot{\varepsilon}, \quad (4.135)$$

где η – вязкость среды, Н·(с/м²);

$\dot{\varepsilon}$ – скорость деформирования, с⁻¹;

σ – напряжение, Па.

Элемент, отражающий поведение такого тела при нагружении, представляется в виде поршня с отверстиями, движущегося в цилиндре, наполненном вязкой жидкостью.

Аналогом вязких свойств горных пород при электрическом моделировании может служить омическое сопротивление.

Величина падения напряжения на сопротивлении определяется уравнением

$$U = R \frac{dq}{dt} = R_i \dot{q}, \quad (4.136)$$

где U – напряжение на сопротивлении, В;

R – величина омического сопротивления, Ом;

i – сила электротока, А.

Известно, что процесс деформации жидкости необратим и энергия не может быть накоплена в теле или возвращена им.

Затраченная в таком необратимом процессе работа полностью рассеивается – переходит в тепло.

Энергия электрического тока выделяется в виде тепла в омическом сопротивлении.

3. Пластичность. Особенность пластического течения состоит в том, что оно возникает в твердом теле под действием напряжений, превосходящих определенное критическое значение и прекращается тогда, когда напряжения становятся меньше этого критического значения.

Элементарной моделью, отражающей пластическую деформацию при нагружении, является модель сухого трения лежащего на горизонтальном основании массивного тела, сдвигаемого внешними силами.

Смещение его возможно лишь при достижении внешним усилием определенной величины. При равенстве сил трения покоя и внешних сил начинается перемещение тела, причем для поддержания движения тела достаточно приложить силу, меньшую силы трения покоя, т.е.

$$F_{\text{тр.дв.}} < F_{\text{тр.пок.}} \quad (4.137)$$

Тело, деформируемое по такому закону, называется средой Сен-Венана (StV -тело). Механической моделью этого тела будет груз, лежащий на горизонтальном основании, последовательно соединенный с пружиной.

В качестве электрического аналога этой механической модели может быть двухэлектродный ионный прибор (неоновая лампа).

Если на электроны неоновой лампы подать напряжение, то до тех пор, пока оно будет оставаться меньше напряжения зажигания лампы, ток в цепи лампы практически проходить не будет.

При достижении равенства разности потенциалов между электродами лампы величины $U_{\text{зак}}$ за счет ударной ионизации газа внутри лампы ее внутреннее сопротивление резко снижается и между электродами происходит разряд, сопровождающийся свечением.

Для поддержания разряда достаточно приложить напряжение, несколько меньшее величины $U_{\text{зак}}$. Так же, как и в механической модели, вся энергия, расходуемая источником тока на поддержание разряда в межэлектродном пространстве, носит необратимый характер и полностью диссипируется.

4. Инерционность. В качестве инерционного элемента в механических моделях используется материальная точка, имеющая массу и обладающая абсолютной жесткостью.

В соответствии со вторым законом механики инерционная сила может быть выражена:

$$F_{\text{ei}} = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad (4.138)$$

где m – масса, кг;

x – перемещение, м;

v – скорость, м/с.

Напряжения, вызванные силами инерции, можно выразить:

$$\sigma_{\text{ei}} = m_3 \frac{d^2x}{dt^2}, \quad (4.139)$$

где m_3 – приведенная масса, определяемая произведением плотности горной породы на площадь взаимодействия;

ε – относительная деформация, вычисляемая как относительное перемещение центра масс системы.

В электрических цепях мерой инерции является индуктивность цепи. Для цепи с индуктивностью справедливо равенство

$$U = L \frac{di}{dt} = L \frac{d^2q}{dt^2}, \quad (4.140)$$

где L – индуктивность, Гн;
 U – напряжение, В;
 q – заряд, Кл;
 i – сила тока, А.

Следовательно, для механических моделей можно составить дифференциальные уравнения напряженного состояния горных пород, решение которых возможно на электрических моделях.

Действительно, поведение вязко-упругого тела при его нагружении можно объяснить с помощью механической модели, получившей название среды Кельвина-Фойгта.

Идеально упругая пружина E и демпфер η соединены в жесткую систему, находящуюся под напряжением σ (рис. 4.9, а).

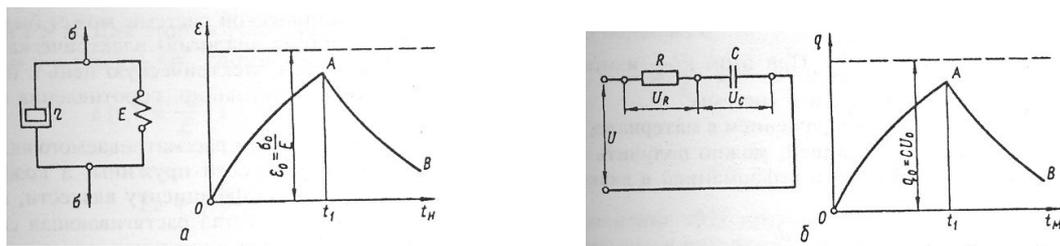


Рис. 4.9. Сопоставление механической и электрической моделей:
 а – механическая модель упруго-вязкой среды Кельвина-Фойгта и ее деформация при нагружении и разгрузке; б – электрический аналог модели Кельвина-Фойгта и характер изменения величины электрического заряда при зарядке и разрядке конденсатора.

Для такой механической системы может быть построена (по первой системе аналогий) электрическая модель, представляющая собой электрическую цепь с последовательным соединением активного сопротивления и емкости (рис. 4.9, б).

Пусть модуль упругости рассматриваемого вязко-упругого тела E равен жесткости пружины, а коэффициент вязкого тела η равен коэффициенту вязкости, в которой перемещается поршень. Тогда растягивающая сила σ будет урав-

новешиваться сопротивлением пружины E_ε и сопротивлением жидкости $\eta \frac{d\varepsilon}{dt}$.

При этом ε – изменение расстояния между точками A и B системы.

Отождествляя силу σ с напряжением в материале, а перемещение – с его деформацией, можно получить зависимость между напряжением и деформацией в вязко-упругом теле:

$$\sigma = E_\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (4.141)$$

Закон изменения деформации при расстоянии вязко-упругого тела постоянной силой можно найти, решив дифференциальное уравнение (4.141) и приняв в нем $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$, а при $t = 0$ $\varepsilon = 0$, решением уравнения (4.141) будет

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} (1 - e^{-\frac{t}{T}}), \quad (4.142)$$

где $T = \frac{\eta}{E}$ – время релаксации.

Из формулы (4.142) следует, что деформация вязко-упругого тела остается все время меньше деформации

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E}, \quad (4.143)$$

которая соответствует упругой деформации. Она достигает этой величины при $t \rightarrow \infty$, т.е. кривая деформаций имеет асимптоту $\varepsilon = \varepsilon_0$ (рис. 4.9, *a*). После снятия напряжений в момент $t = t_1$ можно получить закон изменения деформаций при $t > t_1$.

Для этого в уравнении (4.141) следует положить $\sigma = 0$ и решить его, считая что при $t = t_1$

$$\varepsilon(t_1) = \frac{\sigma_0}{E} (1 - e^{-\frac{t_1}{T}}), \quad (4.144)$$

то есть

$$E_\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} = 0. \quad (4.145)$$

Таким образом,

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} (e^{\frac{t_1}{T}} - 1) e^{-\frac{t}{T}} = \frac{\sigma_0}{T} (e^{\frac{t_1-t}{T}} - e^{-\frac{t}{T}}) \quad (4.146)$$

или

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} (1 - e^{-\frac{t_1}{T}}) e^{-\frac{t-t_1}{T}}. \quad (4.147)$$

Уравнение (4.147) представляет собой закон изменения деформаций в вязко-упругом теле при сжатии нагрузки.

Аналогично можно определить величину заряда конденсатора в цепи с последовательным соединением активного сопротивления в емкости. Согласно второму закону Кирхгофа приложенное напряжение

$$U = U_c + R_i. \quad (4.148)$$

Напряжение на конденсаторе

$$U_c = \frac{1}{C} q, \quad (4.149)$$

а ток в цепи есть скорость изменения заряда на обкладках конденсатора, т.е.

$$i = \frac{dq}{dt}. \quad (4.150)$$

Тогда уравнение (310) можно представить в виде

$$U = \frac{1}{C} q + R \frac{dq}{dt}. \quad (4.313)$$

Сравнивая уравнения (4.141) и (4.3148), можно заключить, что зависимость между напряжением в вязко-упругом теле и зависимость между электрическим напряжением и величиной заряда описывается аналогичными уравнениями.

Закон изменения заряда q конденсатора при включении его через сопротивление на постоянное напряжение, можно определить решением дифференциального уравнения (4.151).

Решением этого уравнения будет:

$$q = \frac{U_0}{\frac{1}{C}} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad (4.152)$$

где $\tau = RC$ – постоянная времени. Из уравнения (4.152) следует, что величина заряда конденсатора изменяется по экспоненциальному закону от нуля при $t = 0$, асимптотически приближаясь к

$$q = q_0 = \frac{U_0}{\frac{1}{C}} \text{ или } q = CU_0, \quad (4.153)$$

где U_0 – напряжение источника.

Сравнив уравнения (4.141) с (4.152) и (4.143) с (4.153) нетрудно заметить соответствие (аналогично) процессов, происходящих в вязко-упругом теле, и процессов, происходящих в электрических цепях с последовательным соединением активного сопротивления и емкости.

Для определения закона изменения заряда при $t > t_1$, необходимо в уравнении (4.142) принять $U = 0$ (разряд конденсатора) и решить его, считая, что $t = t_1$:

$$q(t_1) = \frac{U_0}{\frac{1}{C}} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad (4.154)$$

то есть
$$\frac{1}{C}q + R \frac{dq}{dt} = 0. \quad (4.155)$$

Решением дифференциального уравнения (4.155) будет

$$q = \frac{U_0}{\frac{1}{C}} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}. \quad (4.156)$$

На основании полученных выражений (4.147) и (4.156) можно заключить, что процессы, происходящие в вязком упругом теле после снятия напряжений, аналогичны процессам, происходящим в цепи с последовательным соединением активного сопротивления и емкости при заряде конденсатора (рис.4.9, б).

При постоянных деформациях твердого тела напряжения будут постепенно уменьшаться. Явление уменьшения напряжения в теле при постоянных деформациях называется релаксацией напряжений. Это явление можно объяснить, рассмотрев механическую систему, называемую средой Максвелла (рис. 4.10, а).

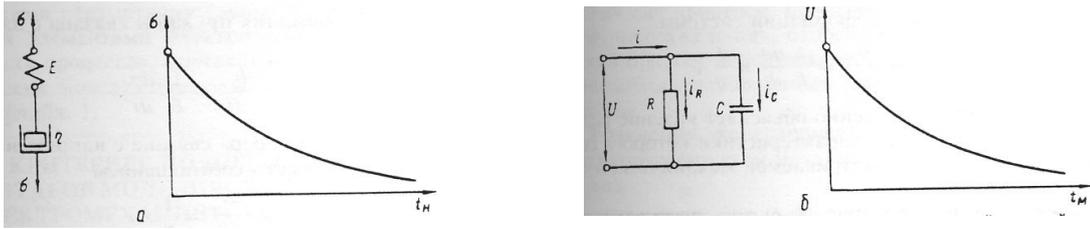


Рис. 4.10. Сопоставление механической и электрической моделей в режиме релаксации напряжений: *a* – механическая модель среды Максвелла и релаксация в ней напряжений при фиксированной начальной деформации; *б* – электрический аналог модели Максвелла и изменение напряжения на конденсаторе при фиксированном начальном заряде на его обкладках.

Упругая пружина E и демпфер η соединены в податливую систему последовательно и находятся под напряжением σ .

Скорость продольной деформации системы складывается из скорости деформации пружины

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} = \varepsilon_1 \quad (4.157)$$

и скорости деформации демпфера

$$\frac{d\varepsilon_2}{dt} = \varepsilon_2. \quad (4.158)$$

Так как деформация пружины связана с напряжением законом Гука, то

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt}. \quad (4.159)$$

Деформация демпфера связана с напряжением σ и коэффициентом вязкости соотношением

$$\frac{d\varepsilon_2}{dt} = \frac{1}{\eta} \sigma. \quad (4.160)$$

Следовательно, скорость деформации системы

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_1}{dt} + \frac{d\varepsilon_2}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\eta} \sigma. \quad (4.161)$$

Уравнение (4.161) упрощенно объясняет явление релаксации напряжений в теле, характеристики которого соответствуют свойствам рассматриваемой системы.

В электрической цепи (рис. 4.10, б) ток, протекающий в ветви с емкостью

$$i_C = \frac{dq}{dt}. \quad (4.162)$$

Ток, протекающий в ветви с активным сопротивлением

$$i_R = \frac{1}{R}U. \quad (4.163)$$

Ток в неразветвленной части цепи согласно первому закону Кирхгофа

$$i = i_C + i_R \quad (4.164)$$

так как

$$q = CU, \quad (4.165)$$

то

$$\frac{dq}{dt} = C \frac{dU_0}{dt} \quad (4.166)$$

и, следовательно, ток в неразветвленной части цепи или скорость изменения заряда

$$i = \frac{dq}{dt} = i_C + i_R = C \frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{R}U. \quad (4.167)$$

Установленная аналогия между упругими, вязкими и пластическими параметрами горных пород и соответствующими им элементами электрических цепей, а также идентичность процессов, протекающих в механических и электрических моделях, позволяет обобщить эти закономерности.

4.8.2 Критерии подобия и масштабы моделирования на основе электромеханических аналогий

Уравнения, характеризующие электрическую цепь и соответствующую ей механическую систему (рис. 4.11),

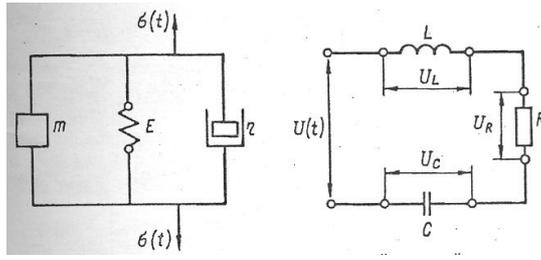


Рис. 4.11. Принципы механической и электрической моделей.

имеют вид

$$U(t) = \frac{1}{c} q + R \frac{dq}{dt} + L \frac{d^2 q}{dt^2} \quad (4.168)$$

$$\sigma(t) = E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} + m \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} \quad (4.169)$$

После введения безразмерных величин

$$U = U_0 \bar{U}; \quad C = C_0 \bar{C}; \quad q = q_0 \bar{q}; \quad R = R_0 \bar{R}; \quad L = L_0 \bar{L}; \quad t_M = t_{0M} \bar{t}_M;$$

$$\sigma = \sigma_0 \bar{\sigma}; \quad E = E_0 \bar{E}; \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \bar{\varepsilon}; \quad \eta = \eta_0 \bar{\eta}; \quad m = m_{03} \bar{m}_3; \quad t_i t_{0i} \bar{t}_i,$$

и подстановки их в уравнения (4.168), (4.169), группировки постоянных величин, деления на $(R_0 q_0)/t_{0i}$ и $(\eta_0 \varepsilon_0)/t_{0i}$ и приравнивания коэффициентов в этих уравнениях получим критерии подобия

$$\left[\frac{E_0 t_{0i}}{\eta_{0i}} \right] = \left[\frac{t_{0i}}{C_0 R_0} \right] \quad (4.170)$$

$$\left[\frac{\sigma_0 t_{0i}}{\varepsilon_0 \eta_0} \right] = \left[\frac{U_0 t_{0i}}{q_0 R_0} \right] \quad (4.171)$$

$$\left[\frac{m_0}{t_{0i} \eta_0} \right] = \left[\frac{L_0}{t_{0i} R_0} \right] \quad (4.172)$$

Для уравнений, характеризующих электрическую и механическую системы, получено по $i = 3$ независимых критерия подобия. Действительно, количество величин, определяющих каждое из явлений $k = 6$, а количество величин, обладаю-

щих независимыми равномерностями в обоих случаях, – $k = 3$. Полученное количество критериев подобия удовлетворяет требованиям Пи-теоремы

$$t = N - k = 3.$$

В этом случае для моделирования упругих свойств горных пород масштаб определяется следующим образом:

$$K_E = \frac{E_0}{1/C_0} = \frac{\eta_0 t_{0i}}{R_0 t_{0i}} = \frac{\hat{E}_\eta}{\hat{E}_l} \quad (4.173)$$

Масштаб напряжений определится аналогично:

$$\hat{E}_\sigma = \frac{\sigma_0}{U_0} = \frac{\varepsilon_0 t_{0i}}{q_0 t_{0i}} \frac{\eta_0}{R_0} = \frac{K_\eta}{K_l K_t} \quad (4.174)$$

Отсюда масштабы времени K_t и вязких свойств горных пород K_η имеют вид

$$K_t = \frac{K_\eta}{K_E}; \quad K_\eta = \frac{K_\sigma K_l}{K_t} \quad (4.175)$$

Для случая моделирования нестационарных процессов инерционные силы учитываются масштабом K_m

$$K_m = \frac{t_{0M}}{t_{0H}} \frac{\eta_0}{R_0} = K_t K_\eta \quad (4.176)$$

4.8.3 Метод электрогидродинамических аналогий (метод эгда)

Метод ЭГДА успешно применяют для изучения стационарных физических процессов, которые описываются уравнениями эллиптического вида.

В этом случае метод ЭГДА применяется в горном деле и гидротехнике для решения задач фильтрации жидкости; в электротехнике – для решения задач электропередачи; в строительной механике – при решении задач теории упругости; в теплотехнике – для решения задач теплообмена, а также для решения задач диффузии газа и жидкости, распространения магнитных, электрических и взрывных волн и др.

В ряде случаев, используя метод суперпозиций, метод ЭГДА может быть применен и для решения нестационарных физических процессов, которые описываются уравнениями параболического типа, например, задачи замораживания горных пород и фильтрации жидкости и газа в пористых средах, физические процессы которых протекают весьма медленно во времени. В этом случае изучение процесса в заданный период времени разбивается на сравнительно короткие промежутки времени, в течение которого физический процесс может рассматриваться как стационарный с соответствующим заданием граничных условий.

Метод ЭГДА основан на математической аналогии между некоторыми физическими процессами: например, между стационарным движением электрического тока в проводящей среде или стационарным распространением тепла в твердых телах, диффузией газа и жидкости и т.д.

Рассмотрим аналогию указанных выше процессов на примере аналогии между стационарным движением электрического тока в проводящей среде и стационарным движением жидкости в пористых средах. Для упрощения процесса рассмотрим для плоскости (двухмерная задача). В этом случае процессы описываются следующими уравнениями

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sigma_{x,y} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\sigma_{x,y} \frac{\partial u}{\partial y_1} \right) = 0; \quad (4.177)$$

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial j_x}{\partial x_1} + \frac{\partial j_y}{\partial y_1} = 0. \quad (4.178)$$

Для фильтрующих пород:

уравнение движения

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(k_{x,y} \frac{\partial h}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(k_{x,y} \frac{\partial h}{\partial y_2} \right) = 0; \quad (4.179)$$

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x_2} + \frac{\partial v_y}{\partial y_2} = 0, \quad (4.180)$$

где u – электрический потенциал;
 σ – электропроводность материала;
 h – пьезометрический напор;
 k – коэффициент фильтрации;
 j – компоненты плотности тока;
 v – компоненты скорости потока;
 x, y – координаты поверхности.

Если среды однородные, то коэффициенты электропроводности и фильтрации будут постоянными. В этом случае вместо уравнений (339), (341) получим уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y_2^2} = 0.$$

Исходя из этих уравнений, устанавливают аналогию между процессами и отдельными параметрами (табл. 4.3).

Таким образом, исследование вопросов фильтрации в натуре сводят к изучению соответствующих (аналогичных) электрических процессов и параметров на электрических моделях, и результаты этих исследований распространяют на процессы фильтрации.

Таблица 4.3

Электрическое поле тока	Поле фильтрации жидкости	Магнитное поле	Поле температур
Закон Ома: $j = -\sigma \text{grad } u$; $l = \int j ds$, где j – плотность тока; σ – электропроводность; u – электрический потенциал; l – сила тока.	Закон Дарси: $v = -k \text{grad } h$; $Q_{\phi} = \int v ds$, где v – скорость фильтрации; k – коэффициент фильтрации; h – пьезометрический напор; Q_{ϕ} – фильтрационный расход.	Закон магнитной индукции: $B = -\mu \text{grad } u$; $\Phi = \int B ds$, где B – магнитная индукция; μ – магнитная проницаемость; u – магнитный потенциал; Φ – магнитный поток.	Закон Фурье: $q = -\lambda \text{grad } t$; $Q_T = \int q ds$, где q – тепловой поток; λ – коэффициент теплопроводности; t – температура; Q_T – тепловой поток.

При осушении месторождений полезных ископаемых в результате работы водопонижительных скважин образуется депрессионная поверхность, на основании которой ведутся все гидрогеологические расчеты (дебит скважин и установки в целом, расположение скважин в плане, приток воды в горные выработки, закладка фильтров и т.д.). Для получения на электрической модели процессов аналогичных процессам фильтрации жидкости в натуре, необходимо выполнить ряд условий, вытекающих из общей теории подобия.

1. Электрическая модель должна представлять изучаемую область фильтрации жидкости в натуре в некотором масштабе без всякого искажения, т.е. должно быть соблюдено геометрическое подобие.

2. Коэффициент электропроводности модели должен быть прямо пропорционален в сходственных точках коэффициенту фильтрации жидкости, т.е. между моделью и натурой должно быть соблюдено физическое подобие

$$\frac{k}{\sigma} = C_{k,\sigma}. \quad (4.181)$$

3. Также должны быть подобны граничные условия модели и природы, т.е. должно быть соблюдено динамическое подобие

$$\frac{h}{u} = C_{h,u}. \quad (4.182)$$

Подставив значения параметров фильтрации из выражений (4.181) и (4.182) в выражение (4.179), после преобразований получают

$$\left[\frac{C_{k,\sigma} C_{h,u}}{C_l^2} \right] \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sigma_{x,y} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\sigma_{x,y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = 0 \quad (4.183)$$

Следовательно, уравнения (4.177) и (4.183) будут аналогичными в том случае, если произведение коэффициентов в квадратных скобках будет постоянно:

$$\frac{C_{k,\sigma} C_{h,u}}{C_l^2} = \text{const} . \quad (4.184)$$

Для однородной среды при $k(x, y) = \text{const}$ и $\sigma(x, y) = \text{const}$ условия физического подобия выполняются автоматически, т.е. имеет место автомодельность. Поэтому при моделировании физических процессов необходимо соблюдать только геометрическое и динамическое подобие.

Исследование процесса осушения водоносных пород в конечном счете сводится к определению напоров воды на различных участках изучаемого пространства. Следовательно, на электрической модели необходимо построить поле потенциала, которое было бы аналогичным депрессионной поверхности воды в натуре. Пересчет электрического потенциала на напоры воды производится на основании граничных условий моделирования, которые могут быть записаны следующим образом:

$$y = ha + b , \quad (4.185)$$

где a и b – постоянные коэффициенты.

При этом:

при $h = \text{const}$ должно быть $u = \text{const}$;

при $\partial h / \partial n = 0$ должно быть $\partial u / \partial n = 0$.

В этом случае будем иметь:

$$u_{\max} = ah_{\max} + b ; \quad (4.186)$$

$$u_{\min} = ah_{\min} + b . \quad (4.187)$$

Значения максимальных и минимальных напоров воды обычно известны. Максимальный напор воды h_{\max} имеет место на границе области питания и опре-

деляется гидрогеологическими разведочными скважинами. Контур питания определяется гидрогеологическими расчетами или непосредственными наблюдениями в скважинах при опытных откачках. Минимальный напор воды h_{\min} задают из условий работы водопонижительных скважин. На электрической модели в соответствии с заданием максимального и минимального напоров воды задают максимальные и минимальные напряжения u_{\max} и u_{\min} . Обычно на модели эквипотенциальные поля строятся в относительных величинах. При этом u_{\max} берется за 1, а u_{\min} 0. Подставив значения $u_{\max} = 1$ и $u_{\min} = 0$ в выражения (4.186) и (4.187), получим:

$$a = \frac{1}{h_{\max} - h_{\min}}; \quad b = \frac{h_{\min}}{h_{\max} - h_{\min}}. \quad (4.188)$$

Следовательно, значение потенциала в любой точке поля будет определяться формулой

$$u_{x,y} = \frac{h_{x,y}}{h_{\max} - h_{\min}} - \frac{h_{\min}}{h_{\max} - h_{\min}}. \quad (4.189)$$

Зная значения h_{\max} и h_{\min} и значение потенциала u на модели (определяется прибором), получим для напорной фильтрации значение напора h в любой точке изучаемой области природы:

$$h_{x,y} = (h_{\max} - h_{\min})u_{x,y} + h_{\min}. \quad (4.190)$$

В случае безнапорной фильтрации пересчет от потенциалов к напорам производится по формуле

$$h_{x,y} = \sqrt{(h_{\max}^2 - h_{\min}^2)u_{x,y} + h_{\min}^2}. \quad (4.191)$$

При напорно-безнапорной фильтрации каждая из вышеприведенных формул (4.190) и (4.191) применяется в соответствующей области. Граница между ними определяется из условия

$$h_{x,y} = m, \quad (4.192)$$

где m – мощность водоносного пласта.

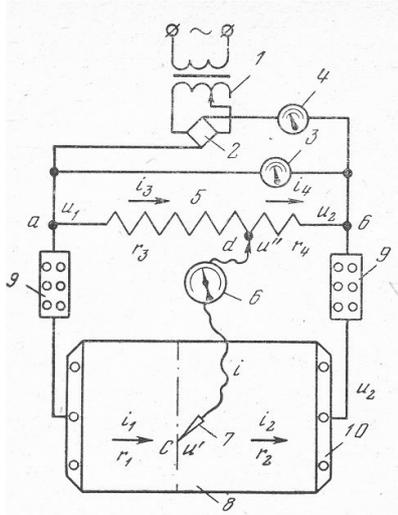


Рис. 4.11. Принципиальная схема установки ЭГДА:
 1-трансформатор; 2-выпрямитель;
 3-вольт-метр; 4-миллиамперметр;
 5-потенциометр; 6-нуль-индикатор;
 7-поисковая игла; 8-мо-дель; 9-магазин сопротивлений;

Принцип действия установки ЭГДА основан на использовании для производства экспериментов мостового (компенсационного) метода измерений электрического потенциала в поле модели. Принципиальная электрическая схема установки ЭГДА (рис. 4.11) состоит из блока питания и блока измерения.

В блок питания входят: пони- тельный трансформатор 1, выпрямитель 2 и измерительные приборы – вольт- метр 3 и миллиамперметр 4. В блок из- мерений входит: градуированный по-

тенциометр 5, нуль-индикатор (гальванометр) 6 и поисковая игла 7.

Если поисковой иглой подключиться к модели в какой-то точке C , то будут иметь место отмеченные на схеме токи i и потенциал u . Если же градуированное сопротивление потенциометра 5 отрегулировать так, чтобы потенциал u' в точке C был равен потенциалу u'' в точке d , то мост будет уравновешен, в чем убеж- даются по отсутствию отклонения стрелки гальванометра: так как $u' = u''$, то $i = 0$.

При уравновешенном мосте в силу разности потенциалов в точках a и b ток пойдет частично через модель, а частично через градуированный потенциометр и тогда:

$$u_1 - u' = i_1 r_1; \quad u' - u_2 = i_2 r_2;$$

$$u_1 - u'' = i_3 r_3; \quad u'' - u_2 = i_4 r_4.$$

Если $u' = u''$, то $i_1 r_1 = i_3 r_3$; $i_2 r_2 = i_4 r_4$.

Разделив их, получим

$$\frac{i_1 r_1}{i_2 r_2} = \frac{i_3 r_3}{i_4 r_4}, \quad (4.193)$$

а так как $i = 0$ (в сети гальванометра), то $i_1 = i_2$ и $i_3 = i_4$.

Отсюда получаем уравнение равновесия моста

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_3}{r_4} \quad \text{или} \quad r_1 r_4 = r_2 r_3 \quad (4.194)$$

Принимая сопротивление модели за усредненно-линейное, получаем значение потенциала u' на всей линии $c' - d'$. Это и есть линия равного потенциала u' . Но так как $u' = u''$, то по шкале градуированного потенциометра в момент равновесия мостовой схемы получим значение потенциала u' в той точке, где установлена поисковая игла.

Из теории моста следует, что

$$\frac{r_3}{r_0} = \frac{r_3}{r_1 - r_2} = \frac{u_2 - u''}{u_1 - u_2} \quad (4.195)$$

Отсюда ясно, что результаты измерений потенциалов на моделях не зависят от величины напряжения, приложенного на шинах модели, т.е. при изменении напряжения $u_1 - u_2$ (при колебании напряжения в питательной сети) одновременно и пропорционально изменяется падение напряжения $u_1 - u''$. Поэтому разность потенциалов $u_1 - u_2$ может быть условно принята равной единице, а различные эквипотенциальные линии на модели будут лежать в пределах от нуля до единицы.

Зная значения отдельных эквипотенциалей [или в пересчете по формулам (4.190), (4.191) напоров] и кратчайшие расстояния между ними, можно определить величину градиентов, а также плотность тока или скорости фильтрации.

Таким образом, метод ЭГДА дает возможность заменить исследования фильтрационного потока в натуре исследованием электрического поля на модели и результаты исследования перенести в натуру.

4.8.4 Метод тепло-гидравлических аналогий

При разработке месторождений полезных ископаемых часто приходится встречаться с тепловыми задачами, например, теплообмен при замораживании горных пород, при разработке месторождений полезных ископаемых на больших глубинах или в условиях вечномёрзлых пород и т.д. В большинстве случаев задачи теплообмена представляют собой весьма сложные физические процессы, которые в общем случае описываются уравнениями параболического типа с первой производной во времени. Для решения указанных задач успешно применяют метод гидравлических аналогий, разработанный проф. В.С. Лукьяновым. Метод гидравлических аналогий применяют также для решения фильтрационных, диффузных и других задач. Аналогия между термическим и гидравлическим процессами легко устанавливается при сравнении основных уравнений рассматриваемых процессов. Однако, придерживаясь основных положений моделирования, принятых в настоящей книге, установим аналогию между процессом распространения тепла в пластине и движением вязкой жидкости по капиллярам.

Как известно, расход жидкости за участком стабилизации может быть определен по формуле

$$q_r = -kF_r \frac{\Delta h}{\Delta x_r}, \quad (4.196)$$

где k – гидравлическая проводимость капилляра;

F_r – площадь сечения капилляра;

$\Delta h / \Delta x_r$ – падение напора на участке капилляра Δx_r .

Рассмотрим теперь распространение тепла в пластине (рис. 4.12), толщина которой исчезающе мала по сравнению с ее высотой и шириной. Если подвод или отвод тепла осуществляется равномерно к каждой из внешних поверхностей пластины, то температура будет изменяться только вдоль оси x_T . При этом количество тепла, проходящего через площадку F_T в направлении оси x_T

$$q_T = -\lambda \frac{\Delta t}{\Delta x_T} F_T, \quad (4.197)$$

где q_T – количество тепла, проходящего через площадку F_T ;

λ – коэффициент теплопроводности пластины;

$\Delta t / \Delta x_T$ – падение температуры на участке пластины толщиной Δx_T .

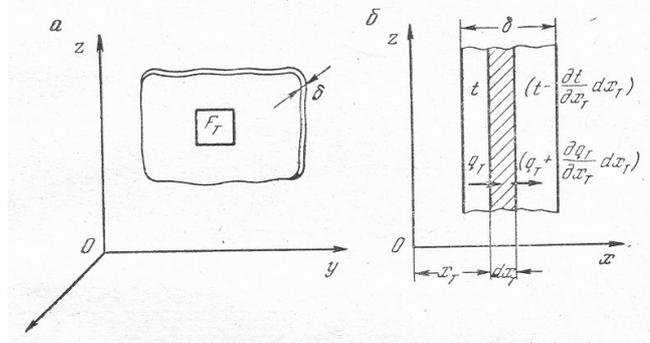


Рис. 4.12. Схема к расчету теплообмена в пластине:
 а – общая схема; б – теплообмен через элементарный слой.

Нетрудно видеть, что уравнения (4.196) и (4.197) имеют одинаковую структуру. При этом q_r является аналогом q_T ; k является аналогом λ ; h является аналогом t ; F_r является аналогом F_T ; x_r является аналогом x_T .

Таким образом, законы, управляющие распространением тепла в пластине и ламинарным течением вязкой жидкости, выражаются аналогичными уравнениями. Это дает основание полагать, что дифференциальные уравнения, полученные из этих законов, будут аналогичными.

Выделим в пластине (см. рис. 4.12, а), в которой происходит нестационарный режим распространение тепла, элементарный слой толщиной dx_T (см. рис. 4.12, б).

При этом физические параметры пластины (λ – теплопроводность; C – теплоемкость; γ_0 – удельный в материала пластины) будем рассматривать как постоянные величины.

Количество тепла, входящего за время $d\tau_T$ в левую поверхность элементарного слоя, определится как

$$Q'_T = q'_T d\tau_T = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x_T} F_T d\tau_T. \quad (4.198)$$

Но так как тепловой поток распространяется только в сторону понижения температуры, а температурный градиент, представляющий вектор, имеет положительное направление в сторону возрастания температуры, то в формуле температурный градиент берется с обратным знаком.

Количество тепла, выходящего за то же время через правую поверхность элементарного слоя,

$$Q'_T = q''_T d\tau_T = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x_T} \left(t + \frac{\partial t}{\partial x_T} dx_T \right) F_T d\tau_T. \quad (4.199)$$

Разность между количеством тепла, которое вошло в рассматриваемый элементарный слой за время $d\tau_T$ и вышло из него за тот же промежуток времени

$$dQ_T = Q'_T - Q''_T = \lambda F_T \frac{\partial^2 t}{\partial x_T^2} dx_T d\tau_T. \quad (4.200)$$

Очевидно, эта разность тепла пошла на изменение теплосодержания элементарного слоя за то же время, т.е.

$$dQ_T = C\gamma_T E_T dx_T \frac{\partial t}{\partial \tau_T} d\tau_T, \quad (4.201)$$

где C – удельная теплоемкость материала пластины;

$\partial t / \partial \tau_T$ – температурный градиент.

Согласно закону сохранения энергии при отсутствии источников тепла в рассматриваемом элементарном слое правые части формул (4.200) и (4.201) должны быть равны и тогда будем иметь

$$c\gamma_T \frac{\partial t}{\partial \tau_T} = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x_T^2} \quad \text{или} \quad \frac{\partial t}{\partial \tau_T} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x_T^2}, \quad (4.202)$$

где $a = \frac{\lambda}{c\gamma_T}$ – коэффициент температуропроводности.

Перейдем к выводу дифференциального уравнения для гидравлической системы. С этой целью представим схему (рис. 4.13).

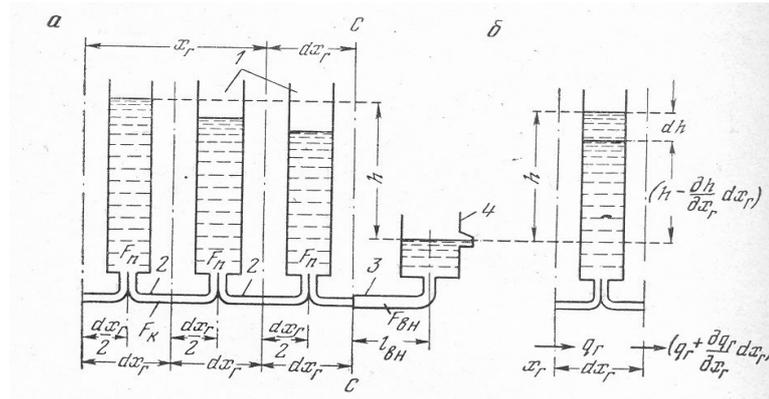


Рис. 4.13. Схема к расчету гидравлической модели:
 а – общая схема; б – схема одного капилляра;
 1 – пьезометры; 2 – капилляры; 3 – внешний
 капилляр; 4 – сосуд постоянного уровня.

К системе цилиндрических сосудов (пьезометров) 1, открытых сверху, подсоединены капилляры 2. Площадь сечения пьезометров F_k . Пьезометры отстоят друг от друга на равном расстоянии dx_r .

Разобьем рассматриваемую систему на элементарные слои толщиной dx_r . Каждый такой слой включает в себя один пьезометр и примыкающие к нему справа и слева два участка капилляра длиной $dx_r/2$ каждый. После этого разберем материальный баланс элементарного слоя, ограниченного координатами x_r и $x_r + dx_r$ (рис. 4.13, б).

Согласно формуле (4.196) количество жидкости, втекающей по капилляру в элементарный слой за время $d\tau_r$,

$$Q'_r = -k \frac{\partial h}{\partial x_r} F_k d\tau_r, \quad (4.203)$$

где $\frac{\partial h}{\partial x_r}$ – гидравлический градиент, взятый с обратным знаком по тем же соображениям, что и при тепловой системе.

За тот же промежуток времени из элементарного слоя вытекает

$$Q''_r = -k \frac{\partial}{\partial x_r} \left(h + \frac{\partial h}{\partial x_r} dx_r \right) F_k d\tau_r. \quad (4.204)$$

Разность между указанными величинами свидетельствует об изменении содержания жидкости в пьезометре за время $d\tau_r$ и составляет

$$dQ_r = Q'_r - Q''_r = k \frac{\partial^2 h}{\partial x_r^2} F_k d\tau_r dx_r. \quad (4.205)$$

С другой стороны, изменение количества жидкости в пьезометре за время $d\tau_r$ может быть определено из формулы

$$dQ_r = F_n \frac{\partial h}{\partial \tau_r} d\tau_r dx_r. \quad (4.206)$$

Согласно закону сохранения материи, левые части уравнений (4.205) и (4.206) будут равны, а, следовательно, равны и правые части. И тогда будем иметь

$$\frac{\partial h}{\partial \tau_r} F_n = k \frac{\partial^2 h}{\partial x_r^2} F_k dx_r \quad \text{или} \quad \frac{\partial h}{\partial \tau_r} = b \frac{\partial^2 h}{\partial x_r^2}, \quad (4.207)$$

где $b = \frac{kF_k dx_r}{F_n}$ – коэффициент-аналог температуропроводности.

Таким образом, имеют место аналогичные системы дифференциальных уравнений (4.202) и (4.207). Следовательно, приходим к выводу, что процесс неустановившейся теплопередачи и процесс перетекания жидкости в системе сообщающихся сосудов, соединенных капиллярными трубками, описываются аналогичными дифференциальными уравнениями.

Для возможности применения метода гидравлических аналогий к исследованию тепловых процессов остается показать, что и краевые условия решения задач неустановившейся теплопередачи имеют соответствующие гидравлические аналогии.

Как известно, краевые условия подразделяются на начальные – характеризующие состояние системы в некоторый «начальный» момент, от которого ведется отсчет времени, и граничные – характеризующие условия взаимодействия системы с окружающей средой.

В тепловых задачах начальным условием будет служить распределение температур в момент начала процесса.

При $\tau_r = 0$ $t(0, x, y, z) = F(x, y, z)$, т.е. распределение температур в теле в начальный момент времени определится известной функцией пространственных координат.

В гидравлическом процессе аналог начальных условий очевиден – это будет распределение уровней жидкости в системе сообщающихся сосудов до начала процесса перетекания: при $\tau_r = 0$ $h_i(0) = h_i^*$, где $h_i = h_1, h_2, \dots, h_n$ – известная система заданных условий.

В тепловых задачах обычно приходится встречаться с тремя видами граничных условий.

Граничные условия I рода предполагают, что в течение всего рассматриваемого времени известны температуры во всех точках поверхности, ограничивающей тело:

$$t_s(x_T, y_T, z_T, \tau_T) = F_s(x_T, y_T, z_T, \tau_T).$$

Для приведенного простейшего примера пластины, если считать начало координат ($x_T = 0$) лежащим на средней поверхности, условия примут вид при $x_T = \pm \delta_T$

$$t(x_T, \tau_T) = f(\tau_T),$$

где $f(\tau)$ – известная функция времени;

δ_T – половина толщины пластины.

Граничные условия II рода предполагают известным плотность теплового потока через граничную поверхность:

$$q_{Ts}(x_T, y_T, z_T, \tau_T) = \varphi_s(x_T, y_T, z_T, \tau_T)$$

или в рассматриваемом случае при $x_T = \pm \delta_T$

$$q_T(x_T, \tau_T) = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x_T} = \varphi(\tau).$$

Граничное условие III рода заключается в задании температуры окружающей среды и закона теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой.

Принимая для теплообмена закон Ньютона, граничное условие получаем в виде

$$\alpha[t_n(\tau) - t_c(\tau)] = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} \Big|_s,$$

где α – коэффициент теплоотдачи от поверхности, ккал/(м·с·°С);

t_n – температура поверхности, °С;

t_c – температура окружающей среды, °С;

$\partial t / \partial n_s$ – значение градиента температур в направлении нормали к поверхности тела в точках поверхности.

Или в нашем случае при $x_T = \pm \delta_T$

$$\alpha [t(x_T, \tau) - t_c(\tau)] = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x_T}.$$

Переходя к рассмотрению граничных условий в гидравлической модели, заметим, что точке поверхности ($x_T = \delta_T$) будет соответствовать окончание капилляра (см. рис. 4.13, сечение С-С), соответствующего элементарному слою dx контактирующему с внешней поверхностью.

Следовательно, создавая на выходе из этого капилляра некоторый, в общем случае переменный во времени, но известный напор h_A , получаем очевидную аналогию: при $x_\Gamma = \pm \delta_\Gamma$, $h = h_\Gamma(\tau)$.

Очевидна также аналогия и в случае граничных условий II рода, если осуществить управление подаваемым напором $h_\Gamma(\tau)$ таким образом, чтобы заданной величиной явилась разность между уровнем жидкости в пьезометре, соответствующим граничному слою, и заданным напором: при $x_\Gamma = \pm \delta_\Gamma$

$$q_\Gamma = -kF_k \frac{\partial h}{\partial x_\Gamma} = -\frac{2kF_k}{\Delta x_\Gamma} (h - h_\Gamma) = \Delta h_\Gamma(\tau),$$

где $\Delta h = q * (\tau) / \frac{2kF_k}{\Delta x_\Gamma}$.

Для обоснования гидравлической аналогии граничных условий III рода заметим, что физическая сущность закона Ньютона заключается в том, что между температурой поверхности тела и температурой окружающей среды возникает градиент $|\Delta t| = |t_n t_c|$, обратно пропорциональный коэффициенту теплоотдачи от

поверхности и прямо пропорциональный плотности теплового потока через поверхность, $\Delta t = q_T / \alpha$.

Представим себе мысленно, что поверхность тела покрыта слоем вещества толщиной δ_α с коэффициентом теплопроводности λ_α , не имеющем теплоемкости.

В среде, не имеющей теплоемкости, не существует тепловой инерции и распределение температур по толщине всегда будет линейным, а плотность теплового потока через слой составит

$$q_T = -\lambda_\alpha \frac{\partial t}{\partial x_T} = -\lambda_\alpha \frac{\Delta t}{\delta_\alpha},$$

откуда

$$|\Delta t| = \frac{q_T \delta_\alpha}{\lambda_\alpha},$$

где λ_α и δ_α – постоянные величины.

Приравнивая полученные величины градиента температур между поверхностью тела и внешней средой, получаем

$$\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{\delta_\alpha}. \quad (4.208)$$

Следовательно, влияние закона теплообмена на поверхности эквивалентно влиянию некоторого «фиктивного» вещества, параметры которого можно подобрать исходя из уравнения (4.208), чем граничное условие III рода сводится к граничному условию I рода.

Таким образом, приходим к выводу, что и краевые условия тепловых задач имеют обоснованные гидравлические аналогии.

Следовательно, описанную гидравлическую систему можно рассматривать как модель пластины, в которой происходит тепловой процесс при краевых условиях III рода. При этом пьезометры являются аналогами теплоемкостей элементарных слоев; высота уровня жидкости в пьезометре – аналогом температуры соответствующего элементарного слоя; количество жидкости в пьезометре – анало-

гом теплосодержания соответствующего слоя; течение жидкости через капилляр – аналогом переноса тепла в пластине и т.д. (табл. 4.4).

Таблица 4.4

Тепловой процесс	Гидравлический процесс
$q_T = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x_T} F_T, \text{ ккал/с}$	$q_\Gamma = -k \frac{\partial h}{\partial x_\Gamma} F_k, \text{ м}^3/\text{с}$
$q_T d\tau_T = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x_T} F_T d\tau_T, \text{ ккал}$	$q_\Gamma d\tau_\Gamma = -k \frac{\partial h}{\partial x_\Gamma} F_k d\tau_\Gamma, \text{ м}^3$
$dq_T = -c\gamma_T F_T \frac{\partial t}{\partial x_T} dx_T d\tau_T, \text{ ккал}$	$dq_\Gamma = -F_\Gamma \frac{\partial h}{\partial x_\Gamma} dx_\Gamma d\tau_\Gamma, \text{ м}^3$
$\frac{\partial t}{\partial \tau_T} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x_T^2}, \text{ }^\circ\text{C/с}$	$\frac{\partial h}{\partial \tau_\Gamma} = b \frac{\partial^2 h}{\partial x_\Gamma^2}, \text{ }^\circ\text{C/с}$
$-\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial x_T} \right)_n = \alpha t_n, \text{ ккал/м}^2\text{с}$	$-k \left(\frac{\partial h}{\partial x_\Gamma} \right)_n = m h_n, \text{ м/с}$
$q_T, \text{ ккал/с}$ $\lambda, \text{ ккал/(м}\cdot\text{с}\cdot^\circ\text{C)}$	$q_\Gamma, \text{ м}^3/\text{с}$ $k, \text{ м/с}$
$a = \frac{\lambda}{c\gamma_T}, \text{ м}^2/\text{с}$	$b = k \frac{F_k}{F_n}, \text{ м/с}$
$\alpha, \text{ ккал/(м}^2\cdot\text{с}\cdot^\circ\text{C)}$	$m = \frac{k_b F_b}{l_b F_k}, \text{ с}^{-1}$
$x_T, \text{ м}$	$x_\Gamma, \text{ м}$
$\tau_T, \text{ с}$	$\tau_\Gamma, \text{ с}$
$F_T, \text{ м}^2$	$F_\Gamma, \text{ м}^2$
$t, \text{ }^\circ\text{C}$	$h, \text{ м}$

Температура внешней среды имитируется уровнем жидкости в сосуде постоянного уровня 4 (см. рис. 4.13).

Условия моделирования. После установления аналогии между тепловыми и гидравлическими процессами можно перейти к выявлению условий, при которых стало бы возможным изучение теплового процесса, протекающего в природе, заменить изучением гидравлического процесса на модели в лабораторных условиях. С

этой целью приведем дифференциальные уравнения, начальные и граничные условия, описывающие аналогичные явления, к безразмерному виду и установим на основании этих преобразований уравнения связи и критерия подобия, обеспечивающие возможность такой замены при изучении указанных процессов.

Запишем масштабные преобразования для тепловой и гидравлической систем

для пластины

$$\left. \begin{aligned} t &= t_0 T; \\ x_T &= l_{0,T} X_T; \\ \tau_T &= \tau_{o,T} T_T^0; \\ \lambda &= \lambda_0 \Lambda; \\ a &= a_0 A; \\ \alpha &= \alpha_0 A^0; \\ t_H &= t_0 T_H; \\ t_{II} &= t_0 T_{II}; \\ \delta_T &= l_{0,T} \Delta_T, \end{aligned} \right\}$$

(4.209 Т)

для гидрогенератора

$$\left. \begin{aligned} h &= h_0 H; \\ x_{\Gamma} &= l_{0,\Gamma} X_{\Gamma}; \\ \tau_{\Gamma} &= \tau_{o,\Gamma} T_{\Gamma}^0; \\ k &= k_0 K; \\ b &= b_0 B; \\ m &= m_0 M^0; \\ h_H &= h_0 H_H; \\ h_{\Gamma} &= h_0 H_{\Gamma}; \\ \delta_{\Gamma} &= l_{0,\Gamma} \Delta_{\Gamma}, \end{aligned} \right\}$$

(4.209 Г)

После введения масштабных преобразований (4.209) в дифференциальные уравнения, начальные и краевые условия, приведенные в таблице аналогов, получим:

$$\frac{\partial(t_0 T)}{\partial(\tau_{o,T} T_T^0)} = a_0 A \frac{\partial^2(t_0 T)}{\partial(l_{0,T}^2 X_T^2)}$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial T_T^0} = A \frac{\partial^2 T}{\partial X_T^2} \left[\frac{a_0 t_0 \tau_{o,T}}{t_0 l_{0,T}^2} \right]; \quad (4.210 Т)$$

для гидроинтегратора

$$\frac{\partial(h_0 H)}{\partial(\tau_{o,\Gamma} T_{\Gamma}^0)} = b_0 B \frac{\partial^2(h_0 H)}{\partial(l_{0,\Gamma}^2 X_{\Gamma}^2)}$$

или

$$\frac{\partial H}{\partial T_{\Gamma}^0} = B \frac{\partial^2 H}{\partial X_{\Gamma}^2} \left[\frac{b_0 h_0 \tau_{0,\Gamma}}{h_0 b_{0,\Gamma}^2} \right]. \quad (4.210 \Gamma)$$

Начальные условия:

$$T_T^0 = 0; \quad T_H = f_H(X_T); \quad (4.211 \Gamma)$$

$$T_{\Gamma}^0 = 0; \quad H_H = f_{\Gamma}(X_{\Gamma}); \quad (4.211 \Gamma)$$

Граничные условия:

$$-\lambda_0 \Lambda \frac{\partial(t_0 T)_{\Pi}}{\partial(l_{0,\Gamma} X_T)_{\Pi}} = \alpha_0 A^0 t_0 T_{\Pi}; \quad -k_0 K \frac{\partial(h_0 H)_{\Pi}}{\partial(l_{0,\Gamma} X_{\Gamma})_{\Pi}} = m_0 h_0 H_{\Pi}$$

или

$$-\Lambda \left(\frac{\partial T}{\partial X_T} \right)_{\Pi} = A^0 T_{\Pi} \left[\frac{\alpha_0 t_0 l_{0,\Gamma}}{\lambda_0 t_0} \right]; \quad (4.212 \Gamma)$$

$$-k \left(\frac{\partial H}{\partial X_{\Gamma}} \right)_{\Pi} = M H_{\Pi} \left[\frac{m_0 h_0 l_{0,\Gamma}}{k_0 h_0} \right]. \quad (4.212 \Gamma)$$

Как видим, дифференциальные уравнения (4.210)-(4.212) для обоих случаев отличаются друг от друга лишь численной величиной безразмерных коэффициентов, заключенных в квадратные скобки. При равенстве этих коэффициентов уравнения становятся взаимозаменяемыми. Следовательно, результаты исследования физических параметров на гидроинтеграторе могут быть распространены на соответствующие параметры тепловых процессов в природе.

Таким образом, приходим к выводу, что решения указанных дифференциальных уравнений будут тождественно одинаковыми, если будут выполнены следующие требования:

$$\frac{a_0 \tau_{0,\Gamma}}{l_{0,\Gamma}^2} = \frac{b_0 \tau_{0,\Gamma}}{l_{0,\Gamma}^2}, \quad \frac{a_0 \tau_{0,\Gamma}}{b_0 \tau_{0,\Gamma}} = \frac{l_{0,\Gamma}^2}{l_{0,\Gamma}^2}; \quad (4.213)$$

$$\frac{\alpha_0 l_{0,\Gamma}}{\lambda_0} = \frac{m_0 l_{0,\Gamma}}{k_0}, \quad \frac{\alpha_0 l_{0,\Gamma}}{m_0 l_{0,\Gamma}} = \frac{\lambda_0}{k_0}. \quad (4.214)$$

Из двух уравнений связи имеем пять неизвестных. Поэтому три пары параметров могут быть выбраны произвольно, а две остальные пары определены из уравнений (4.213) и (4.214).

Приняв произвольно три пары соотношений между аналогичными параметрами или три масштаба модели:

$$\frac{a_0}{b_0} = C_{a,b} - \text{масштаб температуропроводности;}$$

$$\frac{l_{0,T}}{l_{0,\Gamma}} = C_l - \text{линейный масштаб;}$$

$$\frac{\lambda_0}{k_0} = C_{\lambda,k} - \text{масштаб теплопроводности,}$$

определим масштаб времени и теплоотдачи:

$$\frac{\tau_{0,T}}{\tau_{0,\Gamma}} = \frac{l_{0,T}^2}{l_{0,\Gamma}^2} : \frac{a_0}{b_0} = \frac{C_l^2}{C_{a,b}} \text{ или } C_T = \frac{C_l^2}{C_{a,b}}; \quad (4.215)$$

$$\frac{a_0}{m_0} = \frac{\lambda_0}{k_0} : \frac{l_{0,T}}{l_{0,\Gamma}} = \frac{C_{\lambda,K}}{C_l} \text{ или } C_{\alpha,m} = \frac{C_{\lambda,K}}{C_l}. \quad (4.216)$$

Очевидно, при соблюдении указанных условий в сходственных точках пластины и гидроинтегратора и в сходственные моменты времени, т.е. при $X_T = X_\Gamma$ и $T_T^0 = T_\Gamma^0$, будем иметь равенство безразмерных переменных

$$T = H \text{ или } \frac{t}{t_0} = \frac{h}{h_0},$$

откуда $t/h = t_0/h_0 = t_i/h_i = \dots = \text{const}$. Следовательно, имеем аналогию.

Пользуясь таблицей аналогий, вводим систему непосредственных масштабных соотношений между элементами термических расчетных схем и гидромодели:

Масштаб температур

$$M_t = t/h, \text{ } ^\circ\text{C}/\text{см.}$$

Масштаб теплоемкости

$$M_C = C_i / \omega_i, (\text{ккал} / ^\circ\text{C}) / \text{см}^2.$$

Масштаб количеств тепла и скрытых теплот фазовых переходов

$$M_Q = Q / v \text{ ккал} / \text{см}^3.$$

Масштаб сопротивлений

$$M_R = \frac{R_{i,i-1}}{\rho_{i,i-1}}, \text{ ч} \cdot ^\circ\text{C} \cdot \text{см}^2 / \text{ккал} \cdot \text{мин}.$$

Масштаб времени

$$\dot{I}_\tau = \tau_O / \tau_A.$$

Из анализа размерностей становится очевидным, что если три масштабных соотношения, например M_t , M_C и M_R , принять за основные, то оставшиеся два масштабных соотношения будут получены как комбинация основных:

$$M_Q = M_C M_t;$$

$$M = M_C M_R = \frac{C_i R_{i,i-1}}{\omega_i \rho_{i,i-1}}.$$

Раскрывая выражения комплексных параметров, можно убедиться, что приведенная частная система аналогий и масштабных соотношений полностью эквивалентна общим условиям подобия и аналогий.

Применение методов математического моделирования особенно целесообразно для продолжения исследований физических процессов, выполненных на физических моделях, в результате которых предоставляется возможность установления аналогий. В этом случае математическое моделирование позволяет значительно расширить и углубить область исследований интересующего нас физического процесса.

В настоящем курсе рассматривается математическое моделирование процессов, которые описываются линейными уравнениями в частных производных второго порядка. К числу таких уравнений в общем виде относятся:

Уравнения эллиптического типа (Уравнение Пуассона)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(f_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(f_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(f_3 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = F(x, y, z) \quad (4.217)$$

где φ – искомая функция, зависящая только от координат;

f – известные функции, зависящие от координат и характеризующие неоднородность среды;

F – известная функция координат.

Этим уравнением описываются все установившиеся стационарные процессы фильтрации, диффузии, водопонижения, увлажнения и т.д.

При однородной среде и функции $F(x, y, z) = 0$ уравнение (4.217) переходит в известное уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (4.218)$$

Упрощенно это выражение записывается

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (4.219)$$

Уравнение параболического типа (уравнение теплопроводности)

$$\nabla^2 \varphi + A \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = F(x, y, z), \quad (4.220)$$

где φ – искомая функция, зависящая от координат и времени;

A – известная функция координат ($A < 0$);

τ – время.

Этим уравнением описываются неустановившиеся процессы и, в частности, задачи теплообмена. При функции $F(x, y, z) = 0$ уравнение (4.220) переходит в известное уравнение Фурье

$$\nabla^2 \varphi + A \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = 0. \quad (4.221)$$

Уравнение гиперболического типа

$$\nabla^2 \varphi + B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} = F(x, y, z), \quad (4.222)$$

где B – известная функция координат ($B < 0$).

Уравнением (4.222) описываются также неустановившиеся процессы, в частности волновые и колебательные процессы.

Приведенные уравнения имеют бесчисленное множество решений. Для выделения из этого множества нужного решения необходимо задать начальные и граничные условия. Если независимым переменным является время, то обычно задают только начальные условия (задача Коши). Если независимым переменным является пространственная координата, то тогда задача решается для определенной области. Для этого задают условия на границах области и соответственно задачи называются краевыми. При решении краевых задач возможны три типа граничных условий:

1) на границе задана сама искомая функция $\varphi|_{\pm} = f(s)$ (задача Дирихле), где s – точка на границе;

2) на границе задана нормальная производная искомой функции

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\pm} = f(s) \text{ (задача Неймана);}$$

3) на границе задана линейная комбинация первых двух условий (смешанная задача).

Для решения нестационарных краевых задач задание только граничных условий недостаточно. Здесь необходимо еще задать начальные условия по времени. Следовательно, нестационарные задачи являются смешанными: по пространственным координатам задачи являются краевыми, а по временной координате ставится задача Коши.

В большинстве случаев, найти аналитическое решение дифференциальных уравнений ряда краевых задач невозможно, а для приближенного решения с достаточной точностью требуется большой объем вычислительных работ. В связи с этим на практике для решения краевых задач используют различные приближенные методы* и в особенности метод конечных разностей, или метод сеток. Сущность метода заключается в замене производной ее приближенным значением, выраженным через разности значений функции в отдельных точках.

Допустим, требуется найти значение второй производной искомой функции $\nabla^2\varphi = 0$ для плоскости в точке 0 через значения этой функции в точках 1, 2, 3, 4 (рис.4.14).

Для нахождения второй производной в точке 0 найдем вначале значения первой производной для точек I, II, III, IV:

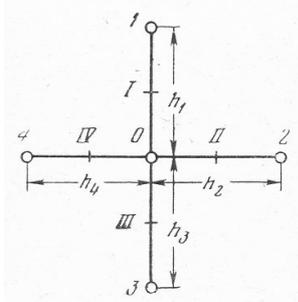


Рис. 4.14. Схема к выводу конечно-разностных уравнений:
0 – узловая точка;
1, 2, 3, 4 – граничные точки.

для точки I

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right|_I = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta y} \cong \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{h_1};$$

для точки II

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right|_{II} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} \cong \frac{\varphi_2 - \varphi_0}{h_2};$$

для точки III

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right|_{III} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta y} \cong \frac{\varphi_0 - \varphi_3}{h_3};$$

для точки IV

$$\left. \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right|_{IV} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} \cong \frac{\varphi_0 - \varphi_4}{h_4}.$$

Тогда вторая производная функции в точке 0 составит:

по оси x

$$\left. \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \right|_0 \cong \frac{\left. \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right|_{II} - \left. \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right|_{IV}}{h_2 + h_4} \cong \frac{\frac{\varphi_2 - \varphi_0}{h_2} + \frac{\varphi_4 - \varphi_0}{h_4}}{2};$$

по оси y

$$\left. \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \right|_0 \cong \frac{\left. \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right|_I - \left. \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right|_{III}}{h_1 + h_3} \cong \frac{\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{h_1} + \frac{\varphi_3 - \varphi_0}{h_3}}{2}.$$

Следовательно, лапласиан $\nabla^2\varphi$ для плоской задачи будет равняться

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \Big|_0 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cong \frac{\frac{\varphi_2 - \varphi_0}{h_2} + \frac{\varphi_4 - \varphi_0}{h_4}}{\frac{h_2 + h_4}{2}} + \frac{\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{h_1} + \frac{\varphi_3 - \varphi_0}{h_3}}{\frac{h_1 + h_3}{2}}. \quad (4.223)$$

если $h_1 = h_3 = h_y$ и $h_2 = h_4 = h_x$, то получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cong \frac{\varphi_2 - 2\varphi_0 + \varphi_4}{h_x^2} + \frac{\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_3}{h_y^2}. \quad (4.224)$$

Точность решения задачи по формуле (4.223) – порядка h , а по формуле (4.224) порядка h^2 , т.е. более высокая. Следовательно, при разбиении области сеткой величину шага h_i целесообразно брать равной.

Рассмотрим применение разностного метода для решения краевых задач. Пусть в однородной среде дана область S , ограниченная контуром l (рис. 4.15).

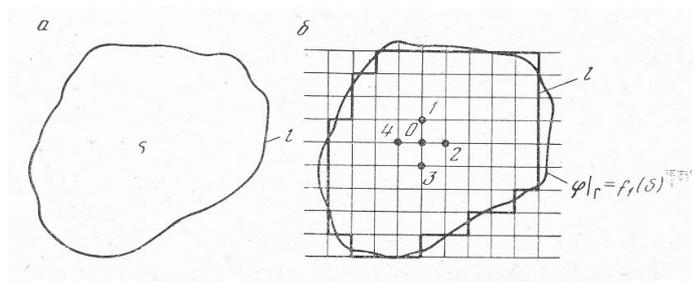


Рис. 4.15. Схема разбиения исследуемой области сеткой:
 a – исследуемая область; b – разбиение области сеткой;
 l – граница области; 0, 1, 2, 3, 4 – узловые точки.

Требуется найти внутри области решение уравнения $\nabla^2 \varphi = F(x, y)$ при условии, что на контуре l значения искомой функции заданы, т.е. $\varphi|_r = f(s)$.

Построим на плоскости прямоугольную сетку из взаимно перпендикулярных и параллельных прямых линий. Точка пересечения двух линий называется узловой. Для любой узловой точки, расположенной внутри контура l , можно написать разностное уравнение (4.223).

После преобразования получим

$$\begin{aligned} & \frac{h_1 + h_3}{2h_2}(\varphi_2 - \varphi_0) + \frac{h_1 + h_3}{2h_4}(\varphi_4 - \varphi_0) + \frac{h_2 + h_4}{2h_1}(\varphi_1 - \varphi_0) + \frac{h_2 + h_4}{2h_3}(\varphi_3 - \varphi_0) = \\ & = \frac{1}{4}(h_1 + h_3)(h_2 + h_4)F(x, y). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Для неоднородной среды уравнение (4.225) примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{h_1 + h_3}{2h_2} f_2(\varphi_2 - \varphi_0) + \frac{h_1 + h_3}{2h_4} f_4(\varphi_4 - \varphi_0) + \frac{h_2 + h_4}{2h_1} f_1(\varphi_1 - \varphi_0) + \\ & + \frac{h_2 + h_4}{2h_3} f_3(\varphi_3 - \varphi_0) = \frac{1}{4}(h_1 + h_3)(h_2 + h_4)F(x, y). \end{aligned} \quad (4.226)$$

где f_1, f_2, f_3, f_4 – значения известных функций координат в точках 1, 2, 3, 4, характеризующие неоднородность среды.

Таким образом, для каждой узловой точки сетки составляется подобное уравнение. Количество неизвестных в этих уравнениях равно числу внутренних узловых точек, т.к. значения функции на границе известны.

При решении второй краевой задачи (задачи Неймана), кроме уравнений (4.225) для узловых точек внутри области, составляются также разностные выражения для всех граничных узловых точек, в которых заданы значения нормальных производных искомой функции.

Систему таких уравнений решают методом последовательных приближений. Сначала задают нулевое приближение или производное значение исходя из физических соображений. Затем решают систему уравнений и находят значения функции в первом приближении и т.д. до момента, когда два последующих приближения совпадут. В этом случае задачу считают решенной.

Разбиение области на прямоугольники не является единственно возможным: можно покрывать данную область системой параллелограммов, треугольников, шестиугольников или использовать диагональную сетку. Наиболее высокую точность дает диагональная сетка (рис.4.16).

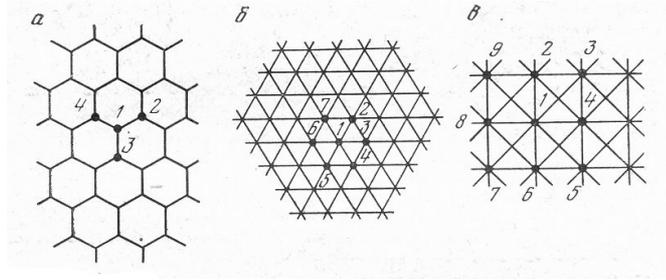


Рис. 4.16. Типы сеток: *a* – шестиугольная; *б* – треугольная; *в* – диагональная; 1. 2. 3. 4 – узловые точки.

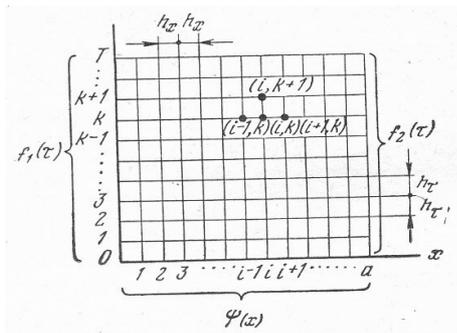
Применение разностного метода для решения нестационарных задач с целью упрощения рассмотрим на примере одномерной задачи.

Для плоского случая все выводы получаются аналогично.

Допустим, требуется найти внутри области (рис. 4.17) решение уравнения

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = A \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}; \tag{4.227}$$

при заданных краевых условиях, т.е.



$$\left. \begin{aligned} \varphi(0, \tau) &= f_1(\tau) \\ \varphi(a, \tau) &= f_2(\tau) \end{aligned} \right\} \text{-граничные условия;}$$

$$\varphi(x, 0) = f_3(x) \text{ – начальные условия.}$$

Рис. 4.21. Схема к решению одномерных тепловых задач: 1, 2, 3, ..., *i* – вертикальные колонки; 1, 2, 3, ..., *k* – горизонтальные ряды; h_x – шаг сетки по оси *x*; h_τ – шаг сетки по оси τ ;

Как и в первом случае, разобьем область прямоугольной сеткой и напишем сеточные уравнения для узловых точек *i, k*. шаги по осям *x* и τ будем брать равными. Тогда можем записать

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_{i,k} \cong \frac{\varphi(i-1, k) - 2\varphi(i, k) + \varphi(i+1, k)}{h_x^2},$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{i,k} \cong \frac{\varphi(i, k+1) - \varphi(i, k)}{h_\tau}.$$

Подставив эти значения производных в уравнение (4.227) и решив его относительно функции $\varphi(i, k+1)$, получим

$$\varphi(i, k+1) = \frac{h_\tau \varphi(i-1, k)}{h_x^2 A} - \frac{h_\tau 2\varphi(i, k)}{h_x^2 A} + \varphi(i, k) + \frac{h_\tau \varphi(i+1, k)}{h_x^2 A}. \quad (4.228)$$

Из формулы следует, что, зная значения функции в узловых точках слоя k , можно найти значения функции в узловых точках слоя $k+1$. Поэтому, зная значения функции нулевого слоя (начальные условия), с помощью уравнения (4.228) находят решения сначала для первого слоя, затем для второго и т.д.

Таким образом, решение краевых задач методом сеток требует больших вычислительных работ. Поэтому применение в этом случае счетно-решающих и моделирующих машин является весьма целесообразным.

4.8.5 Решение краевых задач методом электрических сеток

Краевые задачи, описываемые уравнениями эллиптического и параболического типов, значительно быстрее и проще, чем при использовании приближенного аналитического метода, решаются на электрических моделирующих машинах, специально созданных для этой цели. В основе метода математического моделирования лежит возможность замены метода сеток электрическими сетками, в которых протекающие электрические процессы описываются уравнениями, подобными конечно-разностным уравнениям (4.223)-(4.225), (4.228). Следовательно, на электрических сеточных машинах моделируют конечно-разностные уравнения, к которым были сведены дифференциальные уравнения эллиптического и параболического типов. Электрические схемы составляют так, чтобы удовлетворить заданной системе конечно-разностных уравнений. При этом электрические элемен-

ты рассматриваются как арифметические (суммирующие и множительные) устройства, а в некоторых случаях – как дифференцирующие и интегрирующие.

Рассмотрим применение метода электрических сеток для моделирования стационарных и нестационарных физических полей, описываемых уравнениями эллиптического и параболического типов.

Метод ячеек. Происходящие в природе процессы находятся в непрерывной зависимости от той среды, в которой они протекают. Имея в виду, что при решении практических задач исходные данные о свойствах среды известны с невысокой степенью точности, равно как и решение задачи исследователь не в состоянии выполнить с неограниченной степенью точности, в соответствии с методом сеток следуют непрерывно меняющиеся в пространстве функции, характеризующие свойства среды, аппроксимировать некоторыми ступенчатыми (кусочнопостоянными функциями). В этом случае подлежащая исследованию область разбивается прямыми линиями на совокупность подобластей q_i , каждая из которых представляет собой ячейку с некоторыми усредненными параметрами (рис. 4.18).

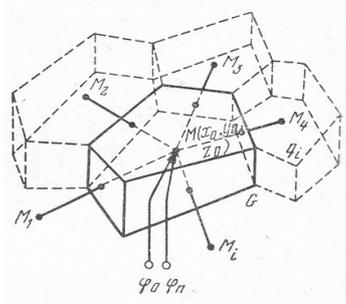


Рис. 4.18. Схема разбивки области исследований

подобно принятому в механике методу сосредоточенных масс, в каждой подобласти следует наилучшим образом избрать точку $M(x_0, y_0, z_0)$ с координатами x_0, y_0, z_0 – в качестве центра сосредоточенных параметров, которому приписываются все усредненные свойства данной подобласти. Далее для каждой такой точки следует указать условия связи центра данной подобласти с центрами граничащих с ней подобластей. При этом в общем случае конфигурации подобластей могут меняться в процессе решения задачи.

В дальнейшем каждую такую подобласть будем называть элементарной ячейкой. Практически удобно пользоваться ячейками в виде прямоугольника. В качестве сосредоточенных параметров могут выступать: температура, давление, напор, теплоемкость, упругоёмкость, влагоемкость, содержание одной из фаз

многофазной жидкости и т.п. В качестве условий связи между ячейками могут выступать: теплопроводность, пьезопроводность, площадь границы между ячейками, поток тепла, жидкости или некоторых фаз для многофазной жидкости и др.

Такое представление метода математических сеток применительно к аналогиям позволяет значительно сократить объем вычислительных работ и моделировать сложность по конфигурации области сравнительно небольшим количеством узлов электрической сетки. При выборе центра сосредоточенных параметров для каждой элементарной ячейки в общем случае следует принять точку, в которой $\varphi = \varphi_{\max}$, полученное из решения уравнения Пуассона для данной подобласти при нулевых условиях на границе подобласти $\varphi|_r = 0$ и постоянной правой части.

Условия связи центра сосредоточенных параметров с начальными условиями определяются емкостными свойствами элемента среды, условия фазовых превращений определяются значением φ_n .

Условия связи между двумя соседними центрами сосредоточенных параметров определяются проводящими свойствами среды. В основу выбора этого параметра связи может быть положена интегральная формула Грина

$$\iiint_V u \nabla \varphi dV = \iint u \frac{\partial \varphi}{\partial n} \partial s,$$

где V – объем ячейки;

s – поверхность, ограничивающая подобласть.

Исходя из этой формулы для задач на плоскости можно приблизительно записать

$$-\int_L \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl = \sum \frac{l_{i0}}{h_{i0}} (\varphi_i - \varphi_0),$$

где l_{i0} – расстояние между избранным и соседним центром сосредоточенных параметров;

h_{i0} – размер общей границы между ячейками, проведенной через середину линии l_{i0} и перпендикулярно к ней.

В большинстве практических случаев для решения двумерных задач используют не произвольную конфигурацию ячеек, а квадратную или прямоугольную, соответствующую декартовой или цилиндрической системе координат. Однако при решении задач, требующих большого количества узловых точек модели, нередко приходится прибегать к грубой аппроксимации прилегающих к району исследования областей. В этом случае формализованный метод ячеек позволяет сравнительно легко и детерминировано назначить параметры элементов модели. Такая практика моделирования позволяет легко переходить в случае надобности от прямоугольных координат к криволинейным. Однако в дальнейшем будут рассматриваться только случаи исключительно с прямоугольными ячейками.

Аппроксимация стационарных полей. При решении уравнений эллиптического типа конечно-разностным методом исследуемую область разбивают сеткой из взаимно параллельно-перпендикулярных линий. Дифференциальные уравнения заменяют системой арифметических (сеточных) уравнений для каждой узловой точки области.

В общем случае сеточные уравнения для стационарных процессов имеют вид:

для неоднородных уравнений (правая часть уравнения не равна нулю)

$$\begin{aligned} & \frac{h_1 + h_3}{2h_2} f_2(\varphi_2 - \varphi_0) + \frac{h_1 + h_3}{2h_4} f_4(\varphi_4 - \varphi_0) + \frac{h_2 + h_4}{2h_1} f_1(\varphi_1 - \varphi_0) + \\ & + \frac{h_2 + h_4}{2h_3} f_3(\varphi_3 - \varphi_0) = \frac{1}{4} (h_1 + h_3)(h_2 + h_4) F(x, y). \end{aligned} \quad (4.229)$$

для однородных уравнений (правая часть уравнения равна нулю)

$$\begin{aligned} & \frac{h_1 + h_3}{2h_2} f_2(\varphi_2 - \varphi_0) + \frac{h_1 + h_3}{2h_4} f_4(\varphi_4 - \varphi_0) + \frac{h_2 + h_4}{2h_1} f_1(\varphi_1 - \varphi_0) + \\ & + \frac{h_2 + h_4}{2h_3} f_3(\varphi_3 - \varphi_0) = 0. \end{aligned} \quad (230)$$

Для моделирования уравнений (4.229) и (4.230) составляют электрические схемы, представляющие собой такие же сетки, на которые была разбита исследуемая область для конечно-разностного метода (рис. 4.19).

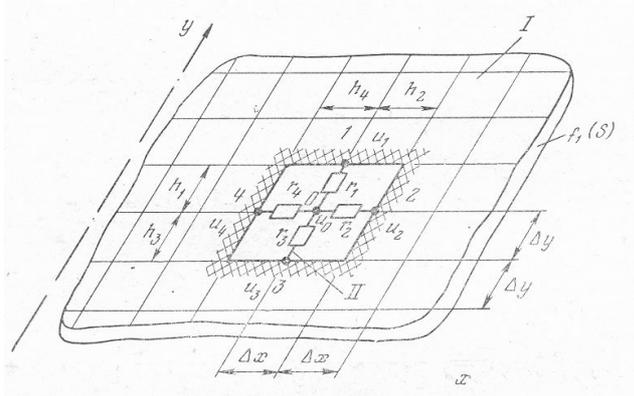


Рис. 4.19. Схема замены сплошной среды на электрические цепи:

I-сплошная среда; II-электрические цепи;
0, 1, 2, 3, 4 – узловые точки

$$\sum_{i=1}^n J_i + J_0 = 0; \quad \sum_{i=1}^n J_i = 0,$$

или

$$\frac{u_1 - u_0}{r_1} + \frac{u_2 - u_0}{r_2} + \frac{u_3 - u_0}{r_3} + \frac{u_4 - u_0}{r_4} = 0, \quad (4.231)$$

или

$$\frac{u_1 - u_0}{r_1} + \frac{u_2 - u_0}{r_2} + \frac{u_3 - u_0}{r_3} + \frac{u_4 - u_0}{r_4} + \frac{V - u_0}{R} = 0; \quad (4.232)$$

где u_i – потенциал в узловых точках электрического поля,

r_i – активные сопротивления между узловыми точками;

J_i – сила тока;

V – напряжение, подаваемое в узловую точку через активное сопротивление

R ;

J_0 – суммарный ток в узловой точке.

Будем считать, что электрический потенциал u_i – пропорционален искомой функции φ_i , т.е.

$$u_i = k_1 \varphi_i, \quad (4.233)$$

где k_1 – коэффициент пропорциональности.

Тогда уравнения (4.231) можно записать в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^n \frac{u_i - u_0}{r_i} = k_1; \quad \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_i - \varphi_0}{r_i} = 0. \quad (4.234)$$

Сравнивая уравнения (4.230) и (4.231) можно заключить, что они аналогичны и могут быть взаимозаменяемыми, если значения r_i будут пропорциональны коэффициентам при конечных разностях, т.е.

$$r_i = k_2 \check{r}_1; \quad r_2 = k_2 \hat{r}_2, \quad (4.235)$$

где k_2 – коэффициент пропорциональности,

$$\check{r}_1 = \frac{2h_1}{f_1(h_1 + h_4)}; \quad \hat{r}_2 = \frac{2h_2}{f_2(h_1 + h_3)}; \quad \check{r}_3 = \frac{2h_3}{f_3(h_2 + h_4)}; \quad \hat{r}_4 = \frac{2h_4}{f_4(h_1 + h_3)}.$$

Для определения искомой функции φ внутри какой-то области необходимо решить систему алгебраических уравнений (4.229) для всех внутренних узловых точек при заданных значениях искомой функции на границах области. Используя аналогию формул (4.229) и (4.234), решение задачи можно значительно упростить. Для этого достаточно между узловыми точками электрической сетки включить сопротивления, рассчитанные из условий (4.235), а на граничных узловых точках задать напряжения, равные или пропорциональные заданным значениям искомой функции на границе. После этого задача решается мгновенно: необходимо только произвести замеры напряжений во внутренних узловых точках и их значения пересчитать по формуле (4.233).

При выборе коэффициентов пропорциональности k_1 и k_2 исходят из практических возможностей электрических машин.

Значение напряжения, подаваемого на машину и максимальное сопротивление машины принимаются за 100 %.

Тогда значения k_1 и k_2 определяются из условий, чтобы максимальные значения напряжений в узловых точках и на границе и максимальные рассчитанные сопротивления были меньше допустимых, т.е.:

$$k_1 \leq \frac{100}{u_{\max}}; \quad k_2 \leq \frac{100}{r_{\max}}. \quad (4.236)$$

При решении неоднородного дифференциального уравнения (4.217) левая часть алгебраического уравнения (4.230) аппроксимируется так же, как при решении первой краевой задачи, рассмотренной выше. Правая же часть уравнения (4.230) из аналогии уравнений (4.232) аппроксимируется током J_0 . Необходимо задать этот ток так, чтобы он был пропорционален правой части уравнения (4.230), т.е.

$$J_0 = k_3 \frac{1}{4} (h_1 + h_3)(h_2 + h_4), \quad (4.237)$$

где k_3 – коэффициент пропорциональности.

Так как

$$J_0 = \frac{V - u_0}{R},$$

то при $|V| \gg |u_0|$ можно записать

$$J_0 = \frac{V_0}{R}, \quad (4.238)$$

где R – сопротивление.

Следовательно, при очень малых значениях напряжений на сетке ток можно считать примерно пропорциональным напряжению, поданному на R .

Чтобы $|V| \gg |u_0|$, необходимо сопротивление R брать гораздо большим, чем сопротивление в узловых точках сетки, т.е. $|R| \gg u_i, r_i, J_0$.

Подставив значения u_i, r_i, J_0 в формулу (4.231), получим

$$\begin{aligned} & \frac{k_1(h_2 + h_4)f_1}{k_2 2h_1} (\varphi_1 - \varphi_0) + \frac{k_1(h_2 + h_4)f_3}{k_2 2h_3} (\varphi_3 - \varphi_0) + \\ & + \frac{k_1(h_1 + h_3)f_4}{k_2 2h_4} (\varphi_4 - \varphi_0) = k_3 \frac{1}{4} (h_1 + h_3)(h_2 + h_4) F(x, y). \end{aligned} \quad (4.239)$$

Сопоставляя формулы (4.229) и (4.239), можно заключить, что они будут взаимозаменяемыми в том случае, если коэффициенты будут связаны между собой зависимостью

$$\frac{k_1}{k_2} = k_3 \text{ или } \frac{k_1}{k_2 k_3} = 1. \quad (4.240)$$

Значения коэффициентов k_1 или k_2 определяют из условий (4.236), а значение коэффициента k_3 – из условия (4.240). Значение R всегда задано и берется из паспорта машины.

Таким образом, для решения второй краевой задачи необходимо составить электрическую сетку из сопротивлений, определяемых из условий (4.235), и в каждую узловую точку через сопротивление R подать напряжение, пропорциональное значению правой части уравнения (4.230) в данной точке. Кроме этого необходимо задать граничные условия.

5. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ГЕОМЕХАНИКЕ

5.1. Общие сведения

Массивы горных пород (горная выработка, кровля, целик, ствол и т.д.) являются трехмерными системами, состоящие из слоев анизотропных пород, которые могут иметь переменные толщину, внешнюю нагрузку и различные граничные условия.

Оценим возможность применения некоторых известных методов к исследованию их напряженно-деформируемого состояния как многослойных толстых пластин (плит) с учетом поперечного сдвига (влиянием поперечных сил).

Тот факт, что на одних краях массива горных пород (плиты) заданы перемещения, а на других усилия, делает задачу смешанной. Задачи об изгибе плиты со смешанными условиями опирания сложнее обычных, поэтому, в обширной литературе о пластинах (оболочках) имеется сравнительно мало работ, посвященных изгибу даже обычных однослойных пластин (оболочек) со смешанными краевыми условиями.

В общем случае, когда жесткость – функция координат и отсутствует свободное опирание на противоположных краях, сложность дифференциальных разрешающих уравнений и граничных условий, приведенных в разделе 2, вынуждает применять приближенные методы.

Одним из широко используемых численных методов решения краевых задач является метод сеток, который приведен выше и, несмотря на простоту и возможность применения его к пластинам (оболочкам) с произвольной толщиной при любых условиях крепления и нагрузке, фактически в таких задачах используется редко, так как дифференциальное уравнение равновесия имеет переменные коэффициенты и шаг сетки должен быть меньше, чем при постоянных толщине и нагрузке, а тем более при учете анизотропности слоев и поперечного сдвига, то значительно увеличивается количество подлежащих составлению и решению ал-

гебраических уравнений. Матрица системы получается плохо обусловленной, большой по объему, имеет мало отличных от нуля элементов, составление программы усложняется формулами, вытекающими из краевых условий.

По методу прямых конечностными разностями заменяют частные производные только по одному направлению. При этом получают систему дифференциальных уравнений в обыкновенных производных, общее решение которых можно найти для некоторых частных случаев переменных толщин, нагрузки, слоистости и анизотропии горных пород. Получить точное решение системы дифференциальных уравнений методом прямых можно только при изменении толщины и нагрузки по простым законам с учетом только изотропии слоев. В общем случае это сделать не удастся, поэтому для отыскания решения необходимо использовать один из численных методов интегрирования. Кроме того, недостатком метода прямых является необходимость составления и решения алгебраических уравнений для удовлетворения краевым условиям на противоположных краях пластины (оболочки) при любых способах их закрепления.

Приведенная краткая характеристика конечноразностных методов показывает, что применение их для расчета массивов горных пород, в принципе возможно, но только для решения плоских задач. Это относится и к методу конечных элементов.

По методу коллокаций прогибы пластины (оболочки), представляются в виде конечного ряда заданных функций, умноженных на параметры. Для вычисления параметров строится система алгебраических уравнений из условий, что уравнения и граничные условия удовлетворяются в ряде точек пластины (оболочки). Метод коллокаций дает хорошие результаты, если заданные функции удовлетворяют уравнению равновесия и граничным условиям. В общем случае такие функции подобрать трудно.

Для расчета пластин и оболочек широко применяют вариационные методы теории упругости.

Известно, что основные проблемы механики наряду с дифференциальными уравнениями управляются так называемыми минимальными принципами. Так,

например, положение равновесия механической системы есть положение, отвечающее минимуму ее потенциальной энергии. Ввиду этого проблема решения граничной задачи для дифференциального уравнения данной механической системы оказывается, в общем, эквивалентной проблеме нахождения функции, дающей минимум интеграла, которым выражается потенциальная энергия системы.

Для решения задач об изгибе пластин (оболочек) можно использовать вариационный принцип Рейсснера, при котором одновременно отыскивается прогиб и все моменты, представляющие также как и прогиб, в виде конечных сумм произведений неопределенных параметров на заданные координатные функции, которые выбирают так, чтобы они были равны нулю на свободных краях пластины (оболочки). Расчетные формулы и машинный алгоритм принципа Рейсснера очень сложный.

Расчет пластин (оболочек) по методу Бубнова-Галеркина значительно усложняется, так как необходимо удовлетворять координатными функциями все граничные условия, в том числе и условия на свободных краях. Последнее обстоятельство препятствует использованию на практике метода Треффца и метода наименьших квадратов. Однако если эти условия выполняются, то эти методы весьма эффективны в применении. Можно утверждать, что ввиду сложности задач о напряженно-деформируемом состоянии массивов горных пород, любой метод исследования, обеспечивающий необходимую точность, потребует весьма громоздких вычислений. Поэтому, естественно, следует применять такой метод, который просто реализуется на ПЭВМ и позволяет получить решение, не прибегая к дополнительным (по сравнению с обычной теорией пластин и оболочек) приближенным допущениям.

Для решения краевых задач горной геомеханики является эффективным применение метода Ритца – одного из основных прямых методов вариационного исчисления.

Метод (процесс) Ритца является одним из методов построения минимизирующей последовательности. Для упрощения выкладок ограничимся случаем

вещественного гильбертова пространства H ; результаты переносятся на комплексное пространство без изменений.

Пусть A – положительно определенный оператор в пространстве H . Задача о построении обобщенного решения уравнения

$$Au = f \quad (5.1)$$

равносильна задаче о построении элемента энергетического пространства, который реализует минимум функционала

$$F(u) = [u, u]_A - 2(u, f) \quad (5.2)$$

в энергетическом пространстве. Эту последнюю задачу будем приближенно решать следующим образом.

Выберем последовательность элементов

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots \quad (5.3)$$

удовлетворяющих следующим трем условиям:

- 1) все элементы $\varphi_n \in H_A$;
- 2) при любом n элементы $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ линейно независимы;
- 3) последовательность (5.3) полна в H_A .

Элементы (5.3), следуя Ритцу будем называть координатными. Совокупность координатных элементов назовем координатной системой.

Построим линейную комбинацию первых n координатных элементов

$$U_n = \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j \quad (5.4)$$

с произвольными численными коэффициентами a_j . Подставим U_n вместо u в функционал (5.2); это превратит $F(u)$ в функцию n независимых переменных a_1, a_2, \dots, a_n :

$$\begin{aligned} F(u_n) &= \left[\sum_{j=1}^n a_j A\varphi_j, \sum_{k=1}^n a_k A\varphi_k \right] - 2 \left(\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k, f \right) = \\ &= \sum_{j,k=1}^n [\varphi_j, \varphi_k] a_j a_k - 2 \sum_{k=1}^n (\varphi_k, f) a_k \end{aligned} \quad (5.5)$$

тического пространства можно было аппроксимировать координатными элементами – достаточно, чтобы такую аппроксимацию допускало обобщенное решение. Поэтому, если заранее известно, что искомое решение принадлежит к некоторому классу, более узкому, чем D_A , то достаточно, чтобы координатная система была полна в этом классе. Например, если известно, что искомая функция четная относительно какого-либо из независимых переменных, то можно брать в качестве координатных только четные функции той же переменной, и достаточно, чтобы выбранная система координатных функций была полной относительно четных функций из H_A .

Метод Ритца имеет простую схему расчета и позволяет исследовать массивы горных пород с любым сочетанием слоев при любой нагрузке и условиях закрепления, различной анизотропией пород. Для решения многих важных для практики задач достаточно, в отличие от метода Бубнова – Галеркина, чтобы координатные функции удовлетворяли только геометрическим граничным условиям, записываемых относительно функции прогиба и ее производной (угла поворота).

Приведем решения некоторых задач о напряженно-деформированном состоянии массивов горных пород, используя вариационный метод исчисления.

5.2. Влияние напряженно-деформированного состояния пород кровли пласта на образование пожароопасных зон

Из-за резкого сокращения объемов строительства новых горизонтов, панелей и блоков на шахтах дорабатывают выемочные поля со сложными и неоднородными геологическими условиями. В пределах одного поля наблюдается изменение мощности пласта или вмещающих его пород, их физико-механических свойств, исчезновение отдельных слоев и тому подобное.

До недавнего времени отсутствовали способы учета влияния изменений геологических условий при прогнозировании эндогенной пожароопасности гор-

ных выработок. Раскрытие этих проблемных вопросов представляется возможным при условии определения параметров напряжений и деформаций в угленосном массиве, вмещающем горную выработку. Существенной значимостью является оценка влияния геологических (мощность слагающих кровлю пласта слоев, порядок их чередования, анизотропия механических свойств) и технологических (способ управления кровлей) условий разработки пласта на формирование самонагревающейся пожароопасной среды, а также учет этих факторов при разработке технологии профилактики эндогенных пожаров.

Современное состояние научных знаний о напряженном состоянии вмещающего очистную выработку горного массива во многом предопределено работами Ардашева К.А., Амусина Б.З., Борисова А.А., Бурчакова А.С., Глушко В.Т., Грядущего Б.А., Жукова В.В., Зборщика М.П., Зорина А.Н., Картозия Б.А., Колоколова О.В., Либермана Ю.М., Назимко В.В., Руппенейта К.В., Черняка И.Л., Шемякина Е.И. и др.

Известны исследования, посвященные расчету напряженно-деформированного состояния пород вблизи очистных выработок, где породный массив рассмотрен как пластина с постоянной жесткостью и однородными граничными условиями под действием равномерно распределенной нагрузки, а решение дифференциального уравнения выполнено методом сеток. Принятые при этом граничные условия и допущения не адекватны условиям формирования параметров полостей в реальных условиях, приведенных в предшествующей главе.

Другие математические модели были разработаны для расчета крепей очистных выработок, их реализация сводилась к определению действующих на крепь усилий (напряжений) и сопутствующих им деформаций. Они не описывают напряженно-деформированного состояния пород кровли пласта, находящихся в выработанном пространстве. Как правило, в этих моделях рассмотрена плоская задача, характерная для наиболее нагруженного нормальными усилиями среднего участка лавы. Краевые части, где нагрузка распределена как на призабойную, так и околоштрековую области, этим моделям не соответствуют. Поэтому в целях

прогнозирования параметров пожароопасных зон (полостей) возникла необходимость разработки соответствующей математической модели.

5.2.1. Выбор расчетной схемы и этапы решения задачи

Для решения задачи о напряженно-деформированном состоянии массива горных пород, как и при решении задач по сопротивлению материалов, необходимо принять его расчетную схему, то есть определить, что собой представляет объект исследований с геометрической точки зрения: балка, пластина (плита), оболочка, его параметры в плане и по нормали, а следовательно определить тонкие они или толстые и с механической – однозначность или многозначность упругих параметров слоев, внешнюю нагрузку и граничные условия.

Как показывает опыт ликвидации очагов самонагревания и возгорания в выработанных пространствах, большинство из них находилось вблизи границы угля с выработанным пространством. Это обусловлено условиями зависания кровли, опирающейся двумя смежными сторонами на угольный массив - забой лавы и границу выемочного поля. В Украинском Донбассе максимальная длина зависания основной кровли в выемочных полях достигает 50...70 м. Для выбора расчетной схемы проведен анализ основных параметров и механических характеристик, составляющих массив кровли слоев пород, данные которых приведены в таблицах 5.1 и 5.2.

Таблица 5.1.

Принятые в расчетах параметры пород кровли очистной выработки

Типы пород	Плотность, кг/м ³	Толщина, м
Уголь	1400	0,5...2,5
Алевролит	2500	0,5...20
Аргиллит	2500	0,5...20
Песчаник	2600...2700	0,5...50
Известняк	2700...2800	0,5...15

Как следует из табл. 5.1 средняя толщина слоя пород кровли больше 1/15 ее минимального размера в плане, поэтому следует рассматривать кровлю в виде многослойной толстой пластины (плиты) с обязательным учетом поперечных де-

Таблица 5.2.

Механические свойства пород кровли очистной выработки

Типы пород	Модули упругости, $E \cdot 10^{-10}$, Па		Коэффициенты Пуассона		Пределы прочности на сжатие, $\sigma_{сж} \cdot 10^{-5}$, Па		Пределы прочности на растяжение, $\sigma_p \cdot 10^{-5}$, Па		Пределы прочности при сдвиге $\tau_{сдв} \cdot 10^{-5}$, Па
	$E_x (E_y)$	E_z	$\nu_x (\nu_y)$	ν_z	$\sigma_x (\sigma_y)$	σ_z	$\sigma_x (\sigma_y)$	σ_z	
Уголь	0,04÷ 0,60	0,06÷ 0,54	0,17÷ 0,19	0,13÷ 0,16	53÷ 200	53÷ 200	2,5÷22,5	2,5÷22,5	24÷100
Алевролит	2,67	1,72	0,25	0,29	506	675	30	15	230÷260
Аргиллит	4,50÷ 5,00	4,50÷ 5,00	0,20	0,22	140÷ 570	215÷ 770	-	-	170÷230
Песчаник (крупнозерн.)	1,93	1,73	0,45	0,36	1185	1423	44,3	52,5	180÷310
Песчаник (мелкозерн.)	3,83	2,64	0,20	0,19	1380÷ 2400	1330÷ 2260	83,0	72,5	280÷480
Известняк	6,36	7,25	0,28	0,30	1140÷ 1700	104÷ 2020	102÷230	102÷230	210÷270

Широкий диапазон изменения механических характеристик: модулей упругости (E) и коэффициентов Пуассона (ν) для различных слоев (несмотря на то, что в отдельности каждый слой можно считать трансверсально изотропным, особенно при наличии в них трещин) определяет необходимость считать кровлю анизотропной.

Толщина слоев пород, а также кровли в целом может быть переменной и меняться по любому закону, причем два смежных ее края (защемленных) испытывают максимальные напряжения от изгиба и сдвига, а два других - максимальные перемещения (свободный край) и максимальные напряжения сдвига (свободная опора). Таким образом, в качестве обобщенной расчетной схемы рассмотрена многослойная анизотропная плита постоянной толщины (рис.5.1а), прямоугольная в плане, под действием равномерно распределенной нагрузки от собственной массы q_z , при следующих граничных условиях: два смежных края, опирающиеся на угольный массив, жестко закреплены, два других свободны – полное обрушение (рис.5.1., б) или свободно-опертые – полная или частичная закладка выработанного пространства (рис. 5.1., в) с координатными осями: x и y , расположенными в срединной ее поверхности, а z – нормальной к ней.

Расчет напряженного состояния выполняли в два этапа. На первом этапе рассматривали сплошной массив горных пород, состоящий из разного сочетания количества и типов слоев с заданными для них механическими характеристиками.

При этом слои являются трансверсально изотропными, т.к. для осадочных горных пород, имеющих четко выраженную слоистость, плоскость напластования является плоскостью изотропии. Число упругих постоянных для каждого слоя равно пяти, а сами слои жестко связаны между собой так, что скольжение по контактными поверхностям невозможно.

Сравнением полученных значений напряжений для каждого слоя горных пород в различных направлениях с известными значениями предельных напряжений (табл. 5.2) и при выполнении условия, что максимальные напряжения равны или превышают предельные, определяли места (зоны) образования трещин и направления их распространения.

На втором этапе, используя известные зависимости для определения механических характеристик трещиноватого слоя горных пород с учетом их количественных и качественных параметров, таких как частота и протяженность, ширина и конфигурация, характер поверхности трещин, число скальных контактов и т.п., определяли напряжения и расширенную область (места) образования трещин в горных породах. Этот процесс можно циклично продолжать дальше, но вышеуказанного вполне достаточно, чтобы провести качественную и количественную оценку образования и распространения трещин в кровле.

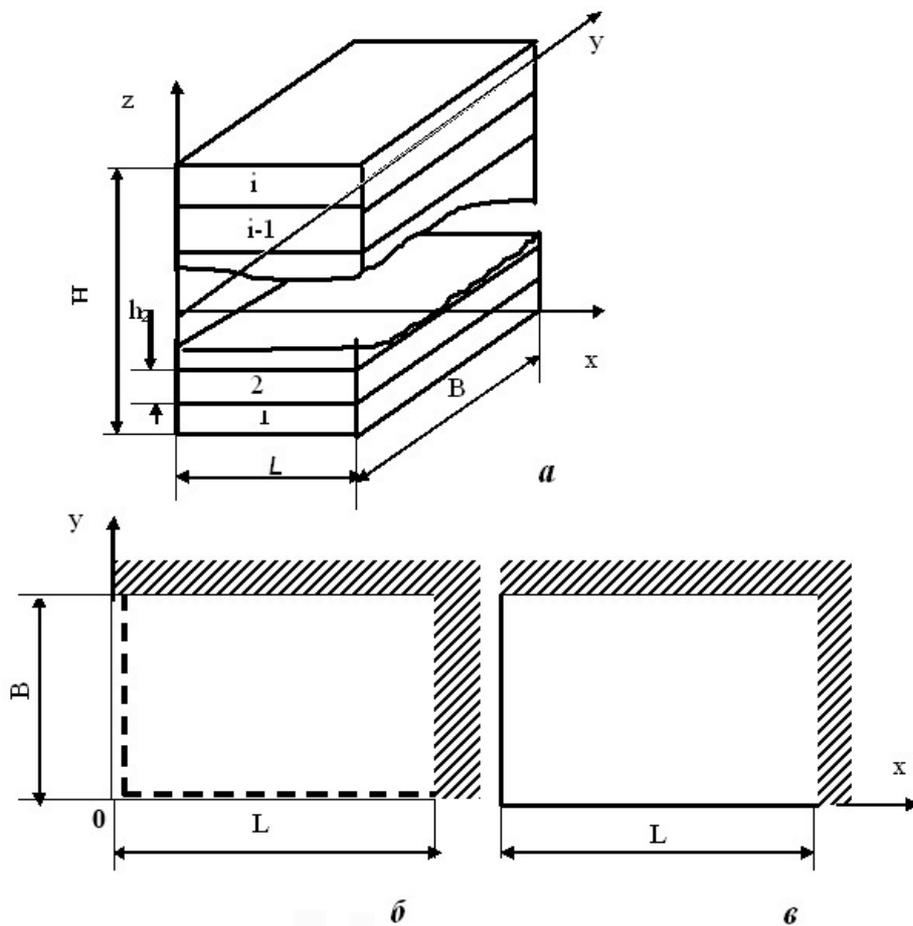


Рис.5.1. Схема для расчета напряженного состояния пород кровли очистной выработки: (а) – многослойная плита; (б) – граничные условия по контуру плиты типа «два края свободно-оперты, два – жестко защемлены»; (в) – «два смежных края свободны, два остальных – жестко закреплены»

5.2.2. Основные соотношения упругости

Перемещения точек срединной поверхности в направлениях x , y , z обозначим соответственно через u , v , w . Для решения задачи используем прием, который предложил Тимошенко С.П., состоящий в представлении полного прогиба в виде суммы двух составляющих - за счет изгиба w_0 и сдвига w_1 :

$$w = w_0 + w_1. \quad (5.11)$$

Физически такое представление w соответствует деформированию плиты в два этапа. В первом – деформации происходят, как и для обычной плиты без учета влияния сдвига на напряжения изгиба. Второй этап состоит в учете дополнительной деформации за счет сдвига.

Таким образом, специфической особенностью расчета слоистой плиты является учет влияния сдвига на величину изгибающих моментов, энергии сдвига от поперечных сил и определение ее механических характеристик при учете трещиноватости.

Деформации в любой точке i -го слоя ($i=1,2,\dots$) плиты в предположении гипотезы прямых нормалей имеют вид

$$\varepsilon^i_x = \varepsilon_1 + z\chi_1; \quad \varepsilon^i_y = \varepsilon_2 + z\chi_2; \quad \varepsilon^i_{xy} = \varepsilon_{12} + 2z\tau. \quad (5.12)$$

Деформации срединной поверхности

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (5.13)$$

Параметры изменения кривизны в пределах точности технической теории

$$\chi_1 = -\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right); \quad \tau = -\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y}\right); \quad (5.14)$$

$$\chi_2 = -\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}\right),$$

где $\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y}$ – дополнительные слагаемые, учитывающие влияние

перерезывающих сил.

Закон Гука для i -го слоя плиты записывается следующим образом

$$\begin{aligned}\varepsilon^i_x &= \frac{1}{E^i_x} \sigma^i_x - \frac{v^i_y}{E^i_y} \sigma^i_y; & \varepsilon^i_y &= \frac{1}{E^i_y} \sigma^i_y - \frac{v^i_x}{E^i_x} \sigma^i_x; \\ \varepsilon^i_{xy} &= \frac{1}{G^i_{xy}} \sigma^i_{xy}.\end{aligned}\quad (5.15)$$

Решая систему уравнений (5.15) относительно компонент тензора напряжений и учитывая соотношения (5.12), получим

$$\begin{aligned}\sigma^i_x &= B_{11}^i \varepsilon_1 + B_{11}^i \varepsilon_2 + z(B_{11}^i \chi_1 + B_{12}^i \chi_2), \\ \sigma^i_y &= B_{12}^i \varepsilon_1 + B_{22}^i \varepsilon_2 + z(B_{12}^i \chi_1 + B_{22}^i \chi_2), \\ \sigma^i_{xy} &= B_{12}^i \varepsilon_{12} + 2zB_{12}^{*i} \tau\end{aligned}\quad (5.16)$$

$$\begin{aligned}B_{11}^i &= \frac{E^i_x}{1 - v^i_x v^i_y}, & B_{12}^i &= \frac{v^i_y E^i_x}{1 - v^i_x v^i_y}, \\ B_{22}^i &= \frac{E^i_y}{1 - v^i_x v^i_y}, & B_{12}^{*i} &= G_{12}^i.\end{aligned}\quad (5.17)$$

Интегрируя (5.16) по толщине каждого слоя и суммируя выражения по числу слоев, получим выражение для внутренних усилий в срединной поверхности

$$\begin{aligned}T_1 &= C_{11} \varepsilon_1 + C_{12} \varepsilon_2, & T_{12} &= C_{12}^* \varepsilon_{12}, \\ T_2 &= C_{12} \varepsilon_1 + C_{22} \varepsilon_2,\end{aligned}\quad (5.18)$$

Умножая (5.16) на z и интегрируя, получим изгибающие и крутящий моменты

$$\begin{aligned}M_1 &= D_{11} \chi_1 + D_{12} \chi_2, & M_{12} &= 2D_{12}^* \tau, \\ M_2 &= D_{12} \chi_1 + D_{22} \chi_2,\end{aligned}\quad (5.19)$$

Решая соотношения (5.18) относительно компонент деформаций, имеем

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= A_{11} T_1 + A_{12} T_2, & \varepsilon_{12} &= A_{12}^* T_{12}, \\ \varepsilon_2 &= A_{12} T_1 + A_{22} T_2,\end{aligned}\quad (5.20)$$

В соотношениях (5.18-5.20) введены следующие обозначения

$$\begin{aligned}C_{jk} &= \sum_{i=1}^t B^i_{jk} (\delta_i - \delta_{i-1}), \\ D_{jk} &= \sum_{i=1}^t B^i_{jk} (\delta^3_i - \delta^3_{i-1}),\end{aligned}\quad (5.21)$$

где δ_{i-1} – расстояние по нормали от внутренней поверхности до наружной поверхности i -го слоя;

C_{12}^* , D_{12}^* – получены из (5.21) заменой B_{jk}^i на B_{12}^* ;

t – количество слоев.

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{C_{22}}{\Delta_1}, & A_{12} &= -\frac{C_{12}}{\Delta_1}, & A_{22} &= \frac{C_{11}}{\Delta_1}, \\ A_{12}^* &= \frac{1}{C_{12}^*}, & \Delta_1 &= C_{11}C_{22} - C_{12}^2. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Работа поперечных сил для элемента плиты

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2} Q_{xz} \frac{\partial w_1}{\partial x} dx dy, \\ &-\frac{1}{2} Q_{yz} \frac{\partial w_1}{\partial y} dx dy \end{aligned} \quad (5.23)$$

Для определения угла наклона касательной $\frac{\partial w_1}{\partial x} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)$ использовано допу-

щение, что высота плиты после деформации не изменится и равна ее высоте до деформации. Из этого следует, что угол наклона касательной численно равен углу сдвига плиты и постоянен по ее высоте. В силу постоянства угла сдвига будет постоянным и напряжение сдвига по высоте плиты. Поэтому согласно закону Гука

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{Q_{xz}}{G_{xz}H}, \quad \frac{\partial w_1}{\partial y} = \frac{Q_{yz}}{G_{yz}H}, \quad (5.24)$$

где Q_{xz} , Q_{yz} – полные перерезывающие силы для плиты в целом;

G_{xz} , G_{yz} , H – модули сдвига по нормали и толщина плиты.

Потенциальная энергия элементарной площадки плиты от поперечных сил равна

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} Q_{xz} \frac{\partial \delta w_1}{\partial \delta x} dx dy &= \frac{1}{2} \frac{Q_{xz}^2}{G_{xz} H} dx dy, \\ \frac{1}{2} Q_{yz} \frac{\partial \delta w_1}{\partial \delta y} dx dy &= \frac{1}{2} \frac{Q_{yz}}{G_{yz} H} dx dy.\end{aligned}\quad (5.25)$$

5.2.3. Вариационное уравнение

В соответствии с принципом возможных перемещений вариация полной энергии деформированной плиты равна нулю в состоянии равновесия

$$\delta = \delta U + \delta V = 0, \quad (5.26)$$

где δU – вариация потенциальной энергии плиты; δV – вариация потенциала внешних сил.

Вариация потенциальной энергии внешних сил

$$\delta V = -\delta \int q_z w_o dS. \quad (5.27)$$

Интегралы в выражении (5.27) и ниже вычисляются в пределах $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq B$.

Вариация потенциальной энергии плиты может быть представлена как сумма вариаций энергий деформаций растяжения (сжатия) δU_p , деформации изгиба δU_u и деформации сдвига δU_c

$$\delta U = \delta U_p + \delta U_u + \delta U_c, \quad (5.28)$$

где

$$\delta U_p = \iint (T_1 \delta \varepsilon_1 + T_2 \delta \varepsilon_2 + T_{12} \delta \varepsilon_{12}) dS, \quad (5.29)$$

$$\delta U_u = \iint (M_1 \delta \chi_1 + M_2 \delta \chi_2 + 2M_{12} \delta \tau) dS, \quad (5.30)$$

$$\delta U_c = \iint (Q_{xz} \delta \varepsilon_{xz} + Q_{yz} \delta \varepsilon_{yz}) dS. \quad (5.31)$$

Здесь ε_{xz} , ε_{yz} – деформации сдвига в плоскости xoz и yoZ соответственно.

Интеграл (5.29) представим в виде

$$\delta U_c = \delta \iint (T_1 \varepsilon_1 + T_2 \varepsilon_2 + T_{12} \varepsilon_{12}) dS - \iint (\varepsilon_1 \delta T_1 + \varepsilon_2 \delta T_2 + \varepsilon_{12} \delta T_{12}) dS. \quad (5.32)$$

Такая запись δU_c ведет к вариационному уравнению смешанного типа, в котором варьируются не только деформации, как в выражении (5.29), но и усилия в срединной поверхности.

Подставляя деформации в срединной поверхности по формулам (5.13) и интегрируя по частям, преобразуем выражение

$$\begin{aligned} \delta I_1 = & \delta \iint (T_1 \varepsilon_1 + T_2 \varepsilon_2 + T_{12} \varepsilon_{12}) dS = -\delta \iint \left(\frac{\partial}{\partial x} T_1 + \frac{\partial}{\partial y} T_{12} \right) u dS - \\ & - \delta \iint \left(\frac{\partial}{\partial y} T_2 + \frac{\partial}{\partial x} T_{12} \right) v dS. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Контурные интегралы в данном случае равны нулю, т.к. на закрепленном крае плиты перемещения равны нулю, а на свободно-опертом или свободном краях равны нулю усилия в срединной поверхности.

Введем функцию усилий φ в срединной поверхности с помощью соотношений

$$T_1 = \varphi_{yy}, \quad T_2 = \varphi_{xx}, \quad T_{12} = -\varphi_{xy}. \quad (5.34)$$

Здесь использованы краткие обозначения вторых производных в прямоугольных координатах.

Подставим выражение (5.34) в (5.33). Тогда первый и второй интегралы равны нулю, а следовательно $\delta I_1 = 0$.

Второй интеграл (5.32) с учетом зависимостей (5.20) имеет вид

$$\begin{aligned} \delta I_2 = & \iint (\varepsilon_1 \delta T_1 + \varepsilon_2 \delta T_2 + \varepsilon_{12} \delta T_{12}) dS = \\ = & \frac{1}{2} \delta (A_{11} T^2_1 + 2A_{12} T_1 T_2 + A_{22} T^2_2 + A^*_{12} T^2_{12}) dS. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Преобразуем интеграл (5.30), используя соотношения (5.19)

$$\delta I_3 = \delta U_u = \frac{1}{2} \delta \iint (D_{11} \chi^2_1 + 2D_{12} \chi_1 \chi_2 + D_{22} \chi^2_2 + 4D^*_{12} \tau^2) dS. \quad (5.36)$$

Учитывая соотношения (5.35), (5.36), (5.31), (5.24), (5.27) и заменяя усилия в срединной поверхности их выражениями через функцию усилий по формулам (5.34), а параметры изменения кривизны - функциями прогибов w_0 , w_1 из выражения (5.14), для вариации полной энергии слоистой плиты получим

$$\delta = \delta \iint \left[\frac{1}{2} L \mathbf{a}(w_1, w) - \frac{1}{2} L_c(w_1, w) + \frac{1}{2} L(w_1) - q_z w_0 \right] dS = 0. \quad (5.37)$$

Здесь введены следующие обозначения

$$\begin{aligned} D_{jk} &= a_{jk}, \quad 2D^*_{12} = a^*_{12}, \quad A_{11} = C_{22}, \quad A_{22} = C_{11}, \quad \frac{1}{2} A^*_{12} = C^*_{12}, \\ L_p(\psi, \eta) &= p_{11} \psi_{xx} \eta''_{xx} + 2p_{12} \psi_{xx} \eta''_{yy} + p_{22} \psi_{yy} \eta''_{yy} + 2p^*_{12} \psi_{xy} \eta''_{xy}, \quad (5.38) \\ L(w_1) &= C_{13} (w'_1)_x^2 + C_{23} (w'_1)_y^2. \end{aligned}$$

В выражении $L_p(\psi, \eta)$ p_{jk} принимает значения a_{jk}, c_{jk} , а функции ψ и η соответствуют функциям w и φ .

Полученное вариационное уравнение (5.37) смешанного типа относительно прогибов и функции усилий для слоистой плиты имеет ряд преимуществ по сравнению с вариационным уравнением относительно перемещений, а именно:

– функция усилий (следует отметить, что ее удается ввести только в технической теории пластин) является независимо варьируемой, поэтому отпадает необходимость решать предварительно сложную задачу интегрирования уравнения совместности для того, чтобы выразить φ через w_0 ;

– при наличии усилий в срединной поверхности разыскиваются три функции (w_0, w_1, φ) вместо пяти ($u_\alpha, v_\alpha, u_\beta, v_\beta, w$);

– при любом выборе координатных функций для функции усилий уравнения равновесия в срединной поверхности удовлетворяются автоматически, что увеличивает точность решения;

– методы решения вариационных уравнений смешанного типа удобны для алгоритмизации, программирования и точной автоматизации счета на ЭВМ.

Из вариации уравнения (5.37) следует, что главными краевыми условиями для функций w_0, w_1 является

$$\begin{aligned} w_0|_\Gamma &= w_0^0, & w'_0|_\Gamma &= (w_0^0)', \\ w_1|_\Gamma &= w_1^0. \end{aligned} \quad (5.39)$$

где $w_0^0, (w_0^0)', w_1^0$ – заданные функции;

Γ – контур срединной поверхности.

Главными краевыми условиями для функции усилий φ , если край пластины свободен или свободно-опертый, является

$$\varphi|_{\Gamma} = \varphi|_{\Gamma} = 0 \quad (5.40)$$

Естественные краевые условия имеют сравнительно сложный характер, однако использование вариационного метода решения Ритца позволяет заранее не подчинять этим условиям координатные функции. Разумеется, если появляется возможность подчинить координатную систему всем краевым условиям, то это будет способствовать ускорению сходимости решения.

5.2.4. Система разрешающих уравнений

Искомые функции представим в виде

$$\begin{aligned} w_0(x, y) &= \sum_{j=1}^n a_j f_j(x) g_j(y), \\ w_1(x, y) &= \sum_{j=1}^n c_j l_j(x) u_j(y), \\ \varphi(x, y) &= \sum_{j=1}^n b_j p_j(x) q_j(y), \end{aligned} \quad (5.41)$$

где a_j, b_j, c_j - неопределенные параметры; f_j, g_j, \dots, q_j - заданные координатные функции.

Подставив выражения (5.41) в (5.37) и приравняв к нулю производные по параметрам от интеграла по срединной поверхности, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно a_j, b_j, c_j .

Вводя безразмерные величины и константы по формулам

$$\begin{aligned} w_0 &= L_0 w_0, \quad w_1 = L_0 w_1, \quad \varphi = 2EH_0 L_0^2 \varphi, \quad x = L_0 x, \quad y = B_0 y, \\ D_{jk} &= 2D_0 h_{jk}, \quad D^*_{12} = 2D_0 h^*_{12}, \quad C_{jk} = 2C_0 \alpha_{jk}, \quad C^*_{12} = 2C_0 \alpha^*_{12}, \end{aligned} \quad (5.42)$$

$$\begin{aligned}
q_z &= q_0 \bar{q}_z, \quad q_0 = \sum \rho_i h_i, \quad H = H_0 \bar{H}, \\
\beta_{jj} &= \frac{\alpha_{jj}}{\Delta_2}, \quad \beta_{12} = -\frac{\alpha_{12}}{\Delta_2}, \quad \beta_{12}^* = \frac{1}{\alpha_{12}^*}, \quad \Delta_2 = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2, \\
C_0 &= -\frac{12(1-\nu^2)L_0^2}{H_0^2}, \quad k_0 = \frac{L_0}{B_0}, \quad \tau_0 = \frac{G_0 H_0 L_0^2}{D_0}, \quad \rho_0 = \frac{q_0 L_0^3}{D_0},
\end{aligned} \tag{5.43}$$

и опуская в дальнейшем черту в обозначениях безразмерных величин, получим систему уравнений следующего вида

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n a_j \iint \sum_{r=1}^5 F_r G_r dS + \sum_{j=1}^n c_j \iint \sum_{r=1}^5 R_r S_r dS &= \rho_0 \iint q_z f_i g_i dS, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \\
\sum_{j=1}^n a_j \iint \sum_{r=1}^5 K_r N_r dS + \sum_{j=1}^n c_j \iint \sum_{r=1}^7 L_r U_r dS &= 0, \quad i = n+1, n+2, \dots, n+m \\
c_0 \sum_{j=1}^m b_j \iint \sum_{r=1}^5 P_r Q_r dS &= 0, \quad i = n+m+1, n+m+2, \dots, 2n+m
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Как следует из третьего уравнения системы (5.43) $b_j=0$, т.е. $\varphi(x,y)=0$, т.к. в данном случае отсутствует внешняя нагрузка, действующая в плоскости плиты.

Здесь введены следующие обозначения

$$\begin{aligned}
F_1 &= f_i'' f_j'', \quad F_2 = f_i'' f_j, \quad F_3 = f_i f_j'', \quad F_4 = f_i f_j, \quad F_5 = f_i' f_j', \\
G_1 &= h_{11} g_i g_j, \quad G_2 = k^2_0 h_{12} g_i g_j'', \quad G_3 = k^2_0 h_{12} g_i'' g_j, \quad G_4 = k^4_0 h_{12} g_i'' g_j'', \\
G_5 &= 4k^2_0 h^*_{12} g'_i g'_j, \quad L_6 = l'_i l'_j, \quad L_7 = l_i l_j, \quad u_6 = \tau_0 \alpha_{13} u_i u_j, \\
u_7 &= k^2_0 \tau_0 \alpha_{23} u'_i u'_j.
\end{aligned} \tag{5.45}$$

Выражения для функций R_r и S_r , L_r и U_r получены из выражений для F_r и G_r заменой в них f_j на l_j и g_j на u_j , f на l и g на u соответственно.

Функции K_r , N_r получаются заменой в выражениях R_r , S_r i на j и, наоборот.

Подставляя выражения (5.14), (5.20), (5.22), (5.41) в (5.16) и учитывая (5.42), для i -го слоя пластины получили

$$\begin{aligned}
\sigma^i_x &= -\frac{z}{L_0} \left[\sum_{j=1}^n a_j (B^i_{11} f_i'' g_j + k_0^2 B^i_{12} f_j g_j'') + \sum_{j=1}^n c_j (B^i_{11} l_j'' u_j + k_0^2 B^i_{12} l_j u_j'') \right], \\
\sigma^i_y &= -\frac{z}{L_0} \left[\sum_{j=1}^n a_j (B^i_{11} f_i'' g_j + k_0^2 B^i_{22} f_j g_j'') + \sum_{j=1}^n c_j (B^i_{12} l_j'' u_j + k_0^2 B^i_{22} l_j u_j'') \right], \\
\sigma^i_{xy} &= -\frac{2k_0}{L_0} z B^{*i}_{12} \left(\sum_{j=1}^n a_j f_j' g_j' + \sum_{j=1}^n c_j l_j' u_j' \right), \\
\sigma^i_{xz} &= G^i_{xz} \sum_{j=1}^n c_j l_j' u_j, \quad \sigma^i_{yz} = k_0 G^i_{yz} \sum_{j=1}^n c_j l_j u_j'.
\end{aligned} \tag{5.46}$$

Координата z меняется в пределах от нейтральной оси до нижней и верхней поверхностей пластины, причем положение нейтральной оси зависит в каждом конкретном случае от количества слоев и их жесткостей на изгиб (см. раздел 2).

5.2.5. Выбор координатных функций

Чтобы приближенные решения, отыскиваемые по методу Ритца, при увеличении числа параметров сходились с точными, необходимо задать систему координатных функций, обладающих следующими свойствами:

координатные функции удовлетворяют кинематическим, существенным условиям закрепления пластины;

взятые в любом конечном числе координатные функции линейно независимы;

координатные функции должны быть непрерывны вместе с первыми производными и иметь интегрируемые квадраты вторых производных. Все эти требования выполнить нетрудно, т.к. краевые условия для функций w_0, w_1 просты, а класс функций, обеспечивающий существование интегралов по области в уравнениях (5.44), весьма широк. Так, в нашем случае, координатные функции должны быть подчинены следующим краевым условиям:

на защемленном крае

$$w_0 = w_1 = 0, \quad (w_0)' = 0 \tag{5.47}$$

на свободно-опертом крае

$$w_0 = w_1 = 0. \quad (5.48)$$

Проверить линейную независимость координатных элементов (если она неочевидна) можно, составив определитель Грамма. Если он не равен нулю, то это требование выполнено. Линейную независимость координатных функций можно считать обеспеченной, если они выбраны в виде степенных и тем более ортогональных полиномов.

Третье условие – полноту координатных систем считаем при решении конкретной задачи выполненным.

Обычно при использовании вариационных методов в теории пластин в качестве координатных функций принимают тригонометрические, гиперболютригонометрические и степенные полиномы.

При выполнении расчетов на ЭВМ предпочтение следует отдать степенным полиномам. Это объясняется простотой программирования, малым временем на вычисление значений этих функций и их производных в узлах. Гиперболютригонометрические функции, комбинации бесселевых и других специальных функций менее удобные для расчета, чем полиномы, т.к. значения последних легко вычисляются, в то время, как для вышеуказанных балочных функций необходимо использовать таблицы или медленно сходящиеся ряды. В литературе не приведено убедительных доказательств того, что для расчета балочные функции удобнее полиномов. Как правило, результаты расчетов и с теми, и с другими функциями при одинаковом количестве параметров отличаются незначительно, хотя в некоторых работах показано, что лучшие результаты получаются с полиномами. Следовательно, скорость сходимости процесса Ритца по числу параметров при использовании степенных полиномов не меньше, а в некоторых случаях больше, чем при других типах координатных функций.

При использовании большого количества параметров важное значение приобретают условия, которым следует подчинить координатные системы для того, чтобы решение алгебраической системы Ритца было устойчивым. Рост погрешности решения по сравнению с погрешностью коэффициентов уравнений

является следствием малости определителя системы, которая в свою очередь есть следствие “почти” линейной зависимости координатных функций.

Во избежание неустойчивости решения системы линейных алгебраических уравнений относительно параметров по отношению к малым изменениям элементов матрицы и правой части системы (5.44), координатные функции желательно подчинить еще одному условию:

$$\iint Z_i Z_j dS = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} . \quad (5.49)$$

Под Z подразумеваются системы координатных функций.

Если координатные функции принадлежат к классу функций к конечной нормой по энергии, решение будет приближаться к точному, хотя эти функции могут и не удовлетворять статическим (естественным) условиям. Это является важным преимуществом метода Ритца по сравнению с другими методами.

При ортонормированных функциях получаемое решение значительно устойчивое к изменениям элементов матрицы, чем при степенных. Однако, если точность вычисления элементов матрицы и правой части настолько высока, что напряжения, рассчитываемые со всей возможной точностью в системе степенных функций (несмотря на плохие свойства порождаемой ею матрицы) несущественно отличаются от напряжений, вычисляемых при искажении матрицы и правой части, то пластины рассматриваемого типа можно рассчитывать с общими системами координатных функций.

При использовании ЭВМ основным требованием к системе координатных функций (кроме приведенных выше условий, вытекающих из теории энергетического метода) является минимальный расход машинного времени на вычисления значений этих функций и их производных, а также простота программирования.

Исходя из принятых граничных условий (5.47) и (5.48) в качестве координатных функций приняты степенные полиномы, коэффициенты которых приведены в таблицах 5.3-5.6.

Таблица 5.3

Коэффициенты полиномов $f_j(x)$, $g_j(y)$ для условий защемление-свободный край

	x^2, y^2	x^3, y^3	x^4, y^4	x^5, y^5	x^6, y^6	x^7, y^7	x^8, y^8	x^9, y^9
f_1, g_1	-3	1						
f_2, g_2	-6	0	1					
f_3, g_3	-10	0	0	1				
f_4, g_4	-15	0	0	0	1			
f_5, g_5	-21	0	0	0	0	1		
f_6, g_6	-28	0	0	0	0	0	1	

С другой стороны, если в нашем случае окажется, что сдвиг от поперечных сил в плоскостях xoz и yoz незначительно повлияет на напряжения изгиба σ_x^i , σ_y^i , то в дальнейшем для упрощения решения задачи в качестве координатных функций будут использованы степенные балочные функции, точно удовлетворяющие всем граничным условиям и получены, используя методы сопротивления материалов с началом расположения координатных осей в правом нижнем углу, т.е. для условий защемление- свободный край

$$f(k), g(k) = 1/24 (4k - k^4 - 3), \quad (5.50)$$

Таблица 5.4

Коэффициенты полиномов $l_j(x)$, $u_j(y)$ для условий защемление-свободный край

	x^1, y^1	x^2, y^2	x^3, y^3	x^4, y^4	x^5, y^5	x^6, y^6
l_1, u_1	1					
l_2, u_2	-1	2				
l_3, u_3	1	-6	6			
l_4, u_4	-1	12	-30	20		
l_5, u_5	1	-20	90	-140	70	
l_6, u_6	-1	30	-210	560	-630	252

Таблица 5.5

Коэффициенты полиномов $f_j(x)$, $g_j(y)$ для условий защемление-свободная опора

	x^2, y^2	x^3, y^3	x^4, y^4	x^5, y^5	x^6, y^6	x^7, y^7	x^8, y^8	x^9, y^9
f_1, g_1	3	-5	2					
f_2, g_2	-12	40	-43	15				
f_3, g_3	92	-540	1113	-965	300			
f_4, g_4	-9	15	-6	3	-5	2		
f_5, g_5	12	-40	43	-27	40	-43	15	
f_6, g_6	-276	1620	-3339	2987	-1400	1113	-965	300

Таблица 5.6

Коэффициенты полиномов $l_j(x)$, $u_j(y)$ для условий защемление-свободная опора

	x^1, y^1	x^2, y^2	x^3, y^3	x^4, y^4	x^5, y^5	x^6, y^6	x^7, y^7
l_1, u_1	-1	1					
l_2, u_2	1	-3	2				
l_3, u_3	-1	7	-12	6			
l_4, u_4	1	-13	42	-50	20		
l_5, u_5	-1	21	-110	230	-210	70	
l_6, u_6	1	-31	240	-770	1190	-882	252

для условий защемление-свободная опора

$$f(k), g(k) = 1/48 (3k^3 - 2k^4 - k), \quad (5.51)$$

где в $f(k)$ k принимает значение x , а в $g(k)$ – y .

При этом в выражении (5.44) $c_j=0$, а в (5.45) - для определения перерезывающих напряжений σ_{xz}^i , σ_{yz}^i c_j заменяются на a_1 ; l_j и u_j - соответственно на f_1 и g_1 , т.е. выражение для w_0 представляются в виде

$$w_0(x, y) = a_1 f_1(x) g_1(y). \quad (5.52)$$

Для определения жесткостных параметров слоев горных пород кровли, являющейся трансверсально изотропной средой, необходимо знать пять упругих параметров ее слоев: E_x^i , ν_x^i , E_{xz}^i , ν_{xz}^i , G_{xz}^i .

Остальные параметры определяются из общеизвестных соотношений

$$\begin{aligned}
 E^i_x v^i_y &= E^i_y v^i_x; & E^i_{xz} v^i_{yz} &= E^i_{yz} v^i_{xz}; \\
 G^i_{xy} &= \frac{E^i_x}{2(1+v^i_x)}; & G^i_{yz} &= \frac{E^i_{yz}}{2(1+v^i_{yz})}.
 \end{aligned}
 \tag{5.53}$$

Для трещиноватых массивов горных пород в зависимости от вида наиболее распространенных в шахтах трещин, учитывая, что трещины ориентированы преимущественно под углом 0 и 90° к оси z, приведенные упругие параметры определяются следующим образом.

Система зияющих трещин:

$$\begin{aligned}
 E^i_{x \cdot p} &= E^i_x; & E^i_{z \cdot p} &= \frac{E^i_x}{1+\eta^i}; & v^i_{x \cdot p} &= v^i_x; \\
 G^i_{xy \cdot p} &= \frac{E^i_x}{2(1+v^i_x)}; & G^i_{xz \cdot p} &= \frac{E^i_x}{2(1+v^i_x + \eta^i)}; & \eta_i &= \frac{\delta_i}{\xi^i \Delta^i}.
 \end{aligned}
 \tag{5.54}$$

где $E^i_{x \cdot p}$ – модуль упругости эквивалентной сплошной среды по направлению, совпадающему с поверхностью трещин; $E^i_{z \cdot p}$ – модуль упругости эквивалентной сплошной среды по нормали к плоскости трещин; $G^i_{xy \cdot p}$ – модуль сдвига в плоскости изотропии, т.е. в плоскости xoy ; $G^i_{xz \cdot p}$ – модуль сдвига в плоскости xoz ; $v^i_{x \cdot p}$ – коэффициент Пуассона, определяемый как отношение поперечной деформации в плоскости xoz к продольной деформации в плоскости трещин; E^i_x ; v^i_x – модуль упругости и коэффициент Пуассона ненарушенного материала массива; Δ^i – расстояние между трещинами; δ^i – ширина раскрытия трещины; ξ^i – относительная площадь скальных контактов в данной трещине ($\xi^i = 3 \cdot 10^{-4}$).

Система с хаотической трещиноватостью: для систем трещин примерно равной мощности и $\delta_i \ll h_i$ расчет вели по формуле

$$E^i_0 = \frac{E^i_x}{1 + \frac{5}{8} n^i \eta^i}; \quad \eta_i = \frac{\bar{\delta}^i}{\xi \bar{\Delta}^i},
 \tag{5.55}$$

где E^i_0 – приведенный модуль упругости; n^i – число систем трещин; $\bar{\delta}^i$ – средняя ширина раскрытия трещин; $\bar{\Delta}^i$ – средняя протяженность ненарушенного материала, приходящегося на одну трещину.

Алгоритм решения задачи реализован как структурированный программный модуль, состоящий из нескольких блоков: присваивания начальных значений; определения расчетных величин; решения системы линейных алгебраических уравнений; определения напряжений; печати результатов в виде трехмерных и двумерных графиков.

Процедуры решения систем линейных алгебраических уравнений, дифференцирования и интегрирования функций реализованы в виде отдельных подпрограмм. Для решения системы линейных алгебраических уравнений, являющихся описанием математической модели, применен метод Гаусса с выбором главного элемента.

Определение численных значений интегралов осуществлено путем интерполирования подинтегральной функции кубическими сплайнами и дальнейшего применения квадратных формул. Дифференцирование функций реализовано с помощью метода Рунге-Кутты четвертого порядка. Алгоритм реализован с помощью пакета инженерного проектирования Maple V for Windows'95.

Исследования проводили в следующей последовательности, причем определяли:

- сходимости и устойчивости метода;
- влияние деформаций сдвига на напряжение от изгиба;
- адекватности метода сравнением результатов расчета с данными, имеющимися в литературе по пластинам прямоугольной формы, находящимся под действием равномерно распределенной нагрузки с подобными граничными условиями, а также проводили анализ изменения максимальных напряжений в зависимости от параметров плиты в плане с минимальной толщиной (жесткостью);
- зависимость максимальных напряжений от механических характеристик, жесткостных параметров, толщины, последовательности расположения слоев горных пород в кровле;
- максимальные напряжения в сечениях кровли; проводили сравнение их с предельными напряжениями и определяли направления и зоны разрушения пород.

На втором этапе была дана оценка напряженного состояния кровли горных пород с двумя наиболее характерными в практике системами трещин: зияющими и хаотическими с использованием механических характеристик по зависимостям (5.53) и (5.54).

5.2.6. Результаты исследований

Известно, что при увеличении количества параметров точность решения по методу Ритца должна возрастать. Чтобы установить минимальное количество параметров, необходимых для получения практически приемлемой точности, с помощью разработанного алгоритма, составленной программы на ПЭВМ, были проведены расчеты для кровли с двумя вышеуказанными граничными условиями (см. рис. 5.1 в, г). В качестве координатных функций использованы системы степенных полиномов, коэффициенты которых приведены в вышеуказанных таблицах.

В связи с симметричностью граничных условий в направлениях x , y и одинаковыми размерами в плане, исследовали изменение максимальных нормальных σ_x , продольных σ_{xy} и поперечных σ_{xz} напряжений сдвига в нижней поверхности слоя угля с последовательностью расположения слоев горных пород и их механическими характеристиками согласно таблиц 5.1 и 5.2 при количестве параметров $n = 5, 7, 10, 14, 17$.

Как показали результаты исследований, при переходе от одного варианта к другому до $n=14$ происходит уточнение напряжений, поэтому в расчетах использовано именно такое, т.е. $n=14$, число параметров.

Проведена численная проверка степени устойчивости решения системы Ритца - определение параметров и напряжений при использовании степенных полиномов путем сравнения характерных результатов расчета, полученных со всей возможной точностью и после замены последнего десятичного разряда в коэффициентах уравнений нулем. Оказалось, что погрешность искомых величин (в данном случае - напряжений) существенно больше, чем погрешность, вносимая в

параметры, а тем более в коэффициенты уравнений. Отсюда следует, что при использовании степенных полиномов, точность подсчета коэффициентов уравнений Ритца должна быть значительно выше точности искомых величин. Однако в данном расчете, учитывая высокую степень точности подсчета коэффициентов, указанная потеря точности мало повлияла на окончательные результаты.

Сравнение результатов расчета для максимальных напряжений от изгиба σ_x , при учете деформаций сдвига ($c_j \neq 0$) и без их учета, т.е. при $c_j = 0$, показали, что максимальная относительная погрешность составляет не более 7 %. Следовательно, для рассматриваемой расчетной схемы кровли, состоящей из слоев с указанными в таблице 5.2 механическими характеристиками, можно пренебречь влиянием сдвига на напряжения от изгиба.

Адекватность любого метода расчета проверяется путем сравнения его результатов с данными экспериментальных исследований или сопоставлением с результатами, полученными другими расчетными способами.

Из обширной технической литературы по многослойным пластинам и оболочкам не известны конкретные результаты для моментов или напряжений с такими сложными граничными условиями, которые рассматриваются в принятой расчетной схеме для горных пород кровли. В литературе приведены табличные результаты расчета максимальных моментов (напряжений) как функций нагрузки

q и f , параметр в плане B , для некоторых точек $(x = \frac{L}{2}, y = \frac{L}{2})$;

$(x = L, y = \frac{B}{2})$; $(x = \frac{L}{2}, y = B)$ при решении дифференциального уравнения равнове-

сия однослойной изотропной прямоугольной в плане пластины, находящейся под равномерно распределенной нагрузкой, два смежных края которой жестко закреплены, два других – свободно-опертые, причем дана зависимость этих вели-

чин от параметров в плане $k_0^{-1} = \frac{B}{L}$.

Основным критерием для определения правильности использования балочных функций, а, следовательно, и метода решения, так как в данном случае при-

менена известная и апробированная на практике техническая теория многослойных пластин с применением вариационного принципа, является сравнение качественной картины распределения максимальных напряжений, полученных по классическому и предложенному методам.

Анализ полученных результатов показал следующее. Максимальная относительная погрешность при расчете по разработанному методу в указанном интервале отношений сторон плиты составляет менее 10 %, причем в контрольных точках знаки совпадают, поэтому можно сделать вывод о правильности качественной картины распределения напряжений, а следовательно выборе балочных степенных функций в качестве координатных функций.

При равенстве сторон плиты, действию равномерно распределенной нагрузки и симметричных граничных условиях, напряжения в двух направлениях равны между собой, а с увеличением отношения сторон увеличиваются напряжения в направлении большей стороны и наоборот. Такая ситуация в реальных условиях наблюдается при отходе лавы от разрезной печи. При этом скорость изменения нормальных положительных (растягивающих) напряжений изгиба выше, чем поперечных сдвигающих отрицательных напряжений, возникающих в середине большей заземленной стороны, и значительно выше нормальных отрицательных (сжимающих) напряжений в этой же точке пластины (плиты).

Распределение максимальных нормальных изгибающих, продольных и поперечных напряжений сдвига для квадратной плиты в направлении оси x , полученные в результате расчета по данному методу с указанными начальными данными, приведены на рис. 5.2 на основании которых и не приведенных здесь других результатов исследований в силу их громоздкости, составлена табл. 5.7 и сделаны вышеизложенные выводы.

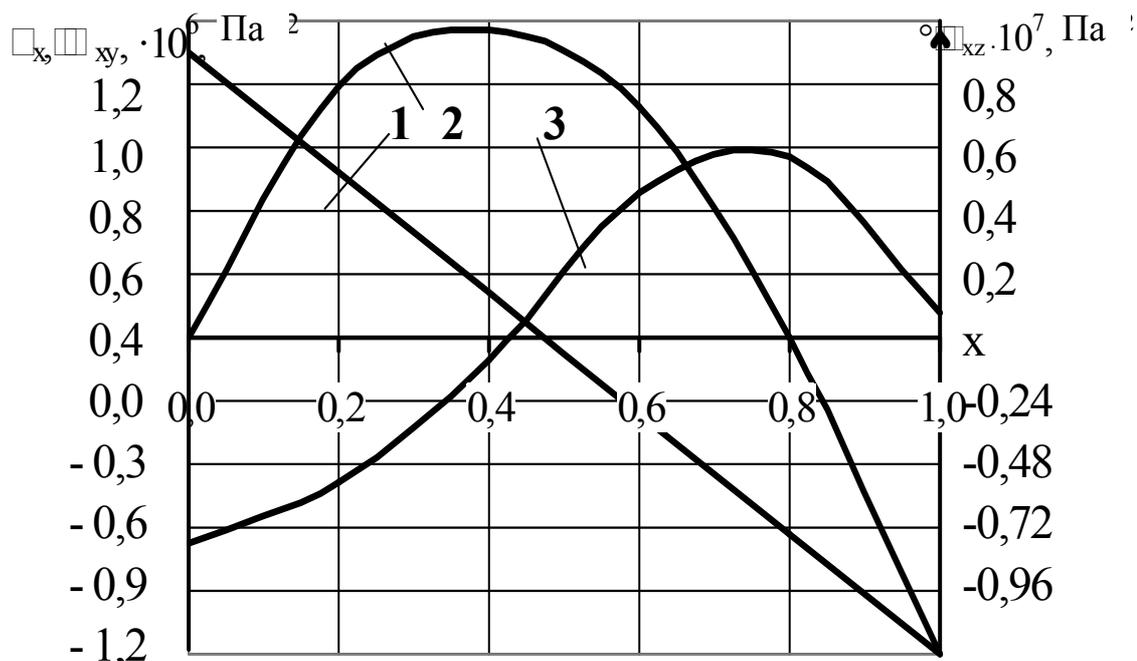


Рис. 5.2. Распределение максимальных напряжений в нижней поверхности слоя угля, оставленного в кровле, при $t = 6$, $k_0^{-1} = 1$, для граничных условий типа «два смежных края защемлены, два других – свободно опертые»:
 1 – $\sigma_{xz}(x, 1/2)$; 2 – $\sigma_x(x, 1/2)$; 3 – $\sigma_{xy}(x, 0)$

Данные по сравнению отношений поперечных сдвиговых напряжений в табл. 5.7. отсутствуют, поскольку для тонкой пластины по классической теории они не приведены из-за их малости. В нашем случае максимальные их значения в восемь раз превышают соответствующие нормальные напряжения в точке $(1, 1/2)$.

Аналогичные результаты для отношений максимальных напряжений плиты, возникающих в точках $(x=L, y=0)$; $(x=L, y=B/2)$ с другими граничными условиями: два смежных края защемлены, два других - свободные, представлены в табл. 5.8, а распределение максимальных напряжений на рис. 5.3. Откуда следует, что в этом случае наибольшие нормальные и поперечные напряжения сдвига возникают в точках $x=1, y=0$ и $x=1, y=1/2$, а продольные напряжения сдвига - соответственно в точках $x=0, y=0$ и $x=0, y=1/2$ (см. рис. 5.3).

Зависимость отношений максимальных напряжений от параметров в плане для граничных условий защемление-свободная опора по классическому и разработанному методам

$k_0^{-1} = \frac{B}{L}$	$\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x = \frac{L}{2}, y = \frac{B}{2})$		$\frac{\sigma_y(x = \frac{L}{2}, y = B)}{\sigma_x(x = L, y = \frac{B}{2})}$		$\frac{\sigma_{yz}(x = \frac{L}{2}, y = B)}{\sigma_{xz}(x = L, y = \frac{B}{2})}$
	классический метод	разработанный метод	классический метод	разработанный метод	разработанный метод
0,5	3,01	3,28	1,50	1,46	2,15
0,6	2,29	2,50	1,40	1,37	1,80
0,7	1,79	1,67	1,29	1,27	1,50
0,8	1,44	1,57	1,18	1,15	1,30
0,9	1,19	1,30	1,08	1,06	1,10
1,0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
1,1	0,86	0,94	0,93	0,85	0,90
1,2	0,74	0,81	0,87	0,80	0,85
1,3	0,60	0,65	0,82	0,75	0,78
1,4	0,56	0,60	0,78	0,72	0,70
1,5	0,52	0,54	0,75	0,69	0,67
1,6	0,47	0,51	0,73	0,67	0,60
1,7	0,42	0,46	0,71	0,65	0,55
1,8	0,39	0,43	0,69	0,63	0,50
1,9	0,36	0,39	0,68	0,62	0,48
2,0	0,33	0,36	0,67	0,61	0,46

Аналогичные результаты для отношений максимальных напряжений плиты, возникающих в точках $(x=L, y=0)$; $(x=L, y=B/2)$ с другими граничными условиями: два смежных края защемлены, два других - свободные, представлены в табл. 5.8, а распределение максимальных напряжений на рис. 5.3. Откуда следует, что в этом случае наибольшие нормальные и поперечные напряжения сдвига возникают в точках $x=1, y=0$ и $x=1, y=1/2$, а продольные напряжения сдвига - соответственно в точках $x=0, y=0$ и $x=0, y=1/2$ (см. рис. 5.3).

Зависимость отношений максимальных напряжений от параметров в плане для граничных условий защемление-свободный край по разработанному методу

$k_0^{-1} = \frac{B}{L}$	$\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x=L, y=0)$	$\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x=L, y=\frac{B}{2})$	$\frac{\sigma_{yz}}{\sigma_{xz}}(x=L, y=0)$	$\frac{\sigma_{yz}}{\sigma_{xz}}(x=L, y=\frac{B}{2})$
0,5	3,93	3,75	2,00	2,93
0,6	3,20	2,93	1,71	2,20
0,7	2,40	2,00	1,42	1,80
0,8	1,85	1,43	1,23	1,42
0,9	1,32	1,12	1,11	1,21
1,0	1,00	1,00	1,00	1,00
1,1	0,82	0,90	0,92	0,91
1,2	0,70	0,80	0,85	0,82
1,3	0,60	0,71	0,79	0,75
1,4	0,53	0,62	0,75	0,65
1,5	0,44	0,50	0,70	0,58
1,6	0,37	0,45	0,65	0,51
1,7	0,32	0,37	0,60	0,46
1,8	0,29	0,34	0,56	0,41
1,9	0,27	0,30	0,53	0,37
2,0	0,25	0,27	0,50	0,34

При этом наблюдается подобная тенденция, но с большей скоростью изменения напряжений по сравнению с предыдущими граничными условиями в зависимости от отношения сторон плиты (кровли), причем скорость изменения выше для нормальных напряжений изгиба в точке $x=L, y=0$, чем для тех же напряжений в точке $x=L, y=B/2$ и тем более для поперечных напряжений сдвига соответственно в точках $x=L, y=B/2$ и $x=L, y=0$.

Аналогичное распределение напряжений с практически равными значениями по величине, но с обратными знаками, наблюдается в верхней поверхности верхнего слоя плиты, т.е. при $z = \frac{H_0}{2}$, даже при значительной разнице модулей упругости этих слоев.

Последовательность расположения слоев горных пород кровли, их толщины и механические характеристики, как было отмечено выше, меняются в широ-

ких диапазонах, поэтому изучено влияние изменения этих параметров на ее напряженное состояние.

Рассмотрена одна из наиболее распространенных пожароопасных ситуаций, когда в кровле обрабатываемого пласта оставляют пачку угля. Получены распределения максимальных напряжений в нижнем слое толщи пород кровли пласта в зависимости от общей мощности (толщины) H_0 кровли и отношения модулей упругости в плоскости напластования горных пород к поперечному их направлению при количестве слоев $t=6$ и отношении параметров в плане $k_0^{-1}=1$, результаты которых для двух видов граничных условий приведены на рис.5.3-5.6.

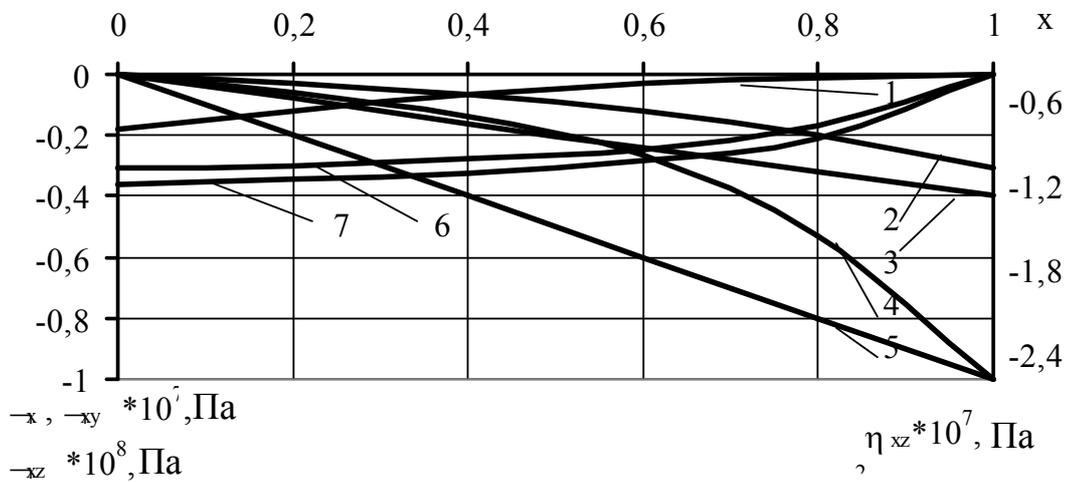


Рис. 5.3. Распределение максимальных напряжений в нижней поверхности слоя угля, оставленного в кровле, при $t=6$, $k_0^{-1}=1$ для граничных условий: два смежных края защемлены, два других – свободные:
 1 – $\sigma_x(x,0)$; 2 – $\sigma_x(x, 1/2)$; 3 – $\sigma_{xz}(x, 1/2)$; 4 – $\sigma_x(x,0)$; 5 – $\sigma_{xz}(x,0)$;
 6 – $\sigma_{xy}(x, 1/2)$; 7 – $\sigma_{xy}(x,0)$

Как показывают результаты исследований, в обоих случаях при увеличении толщины и отношения модулей упругости, напряжения уменьшаются, при этом, как и следовало ожидать, их величины значительно выше у плиты с граничными условиями защемление-свободный край.

Максимальные напряжения σ_x и σ_{xy} для плиты с граничными условиями защемление-свободная опора не приведены, так как они ниже, чем предел прочности угля, следовательно анализу в дальнейшем не подлежат.

В ситуации с граничными условиями защемление-свободный край, при изменении отношения модулей упругости слоев в указанном интервале, плоское напряженное состояние плиты меняется незначительно, поэтому эти результаты также не приведены.

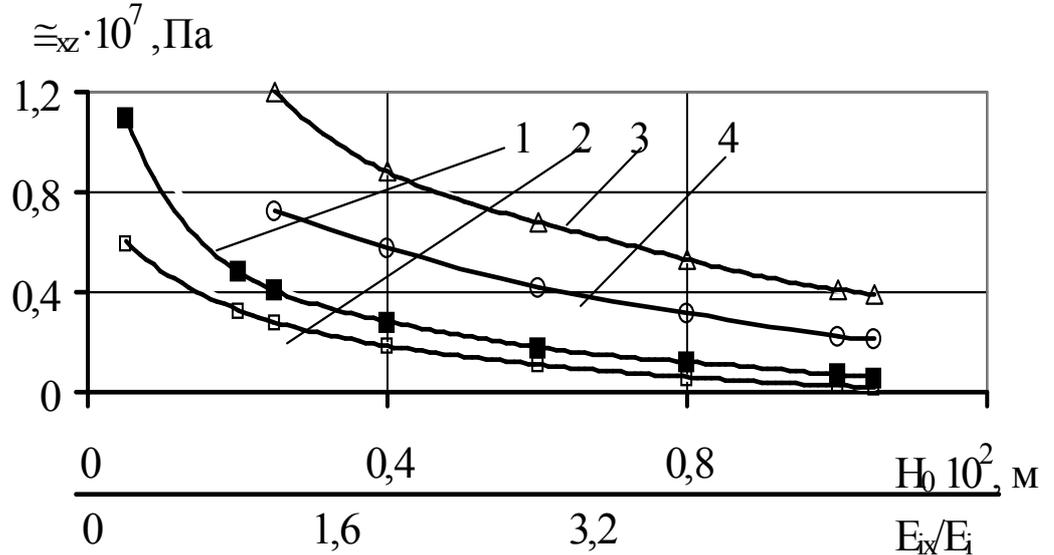


Рис. 5.4. Зависимость максимальных поперечных напряжений сдвига в слое угля от мощности кровли (1,2) и коэффициента анизотропии пород (3,4) при $t = 6$, $k_0^{-1} = 1$ для граничных условий: два смежных края защемлены, два других – свободно опертые: 1,3 – $\sigma_{xz}(1,1/2)$; 2,4 – $\sigma_{xz}(0,1/2)$

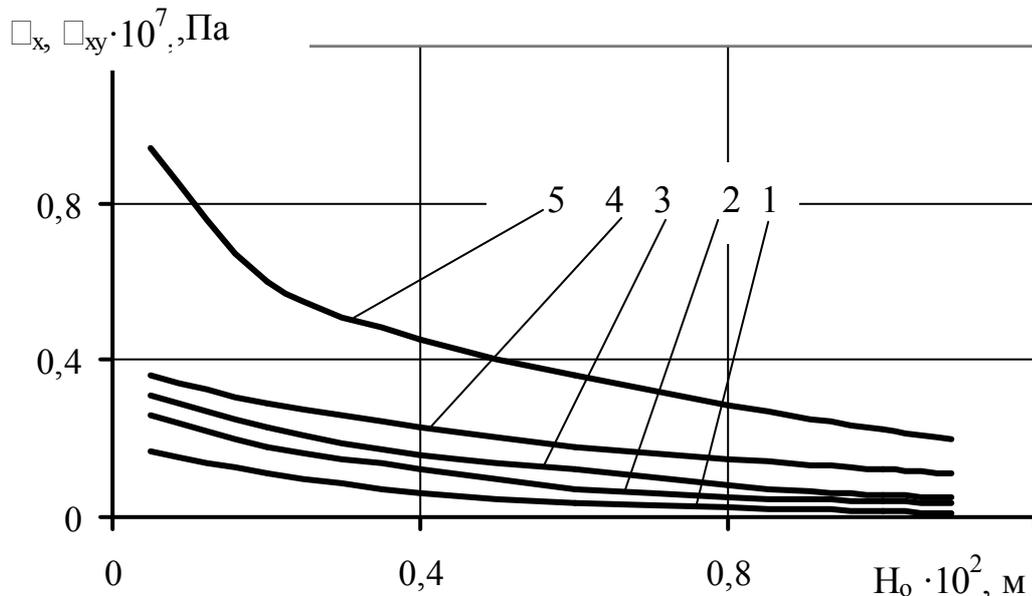


Рис.5.5. Зависимость максимальных напряжений σ_x, σ_{xy} в слое угля от его толщины при $t = 6$, $k_0^{-1} = 1$ для граничных условий: два смежных края защемлены, два других – свободные: 1 – $\sigma_x(0,1)$; 2 – $\sigma_{xy}(0,1/2)$; 3 – $\sigma_{xy}(0,0)$; 4 – $\sigma_x(1,1/2)$; 5 – $\sigma_x(1,0)$

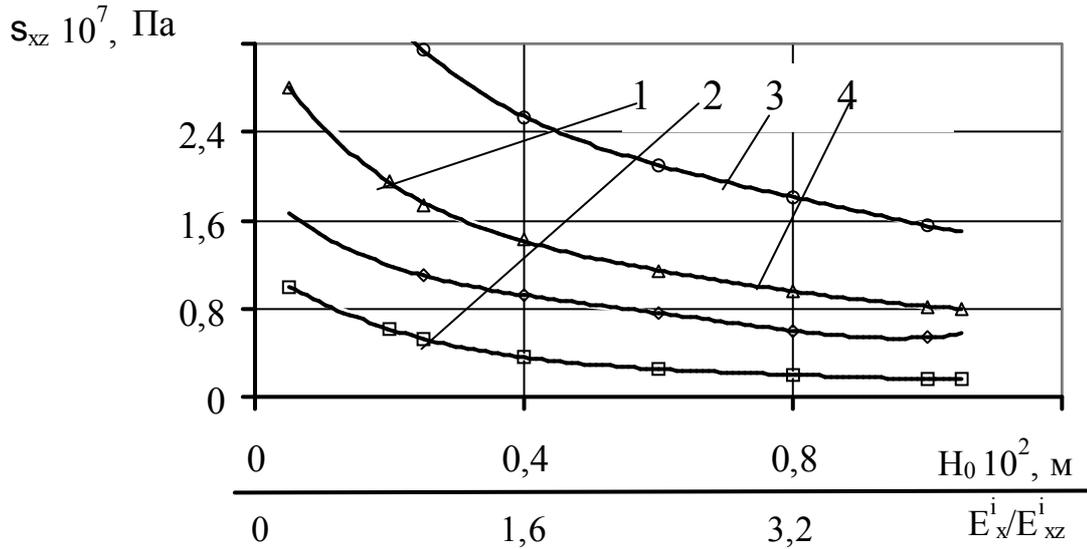


Рис. 5.6. Зависимость максимальных поперечных напряжений сдвига в слое угля от толщины (1,2) и коэффициента анизотропии (3,4) при $t = 6$, $k_0^{-1} = 1$ для граничных условий: два смежных края защемлены, два других свободные: 1,3 – $\sigma_{xz}(1,0)$; 2,4 – $\sigma_{xz}(1,1/2)$

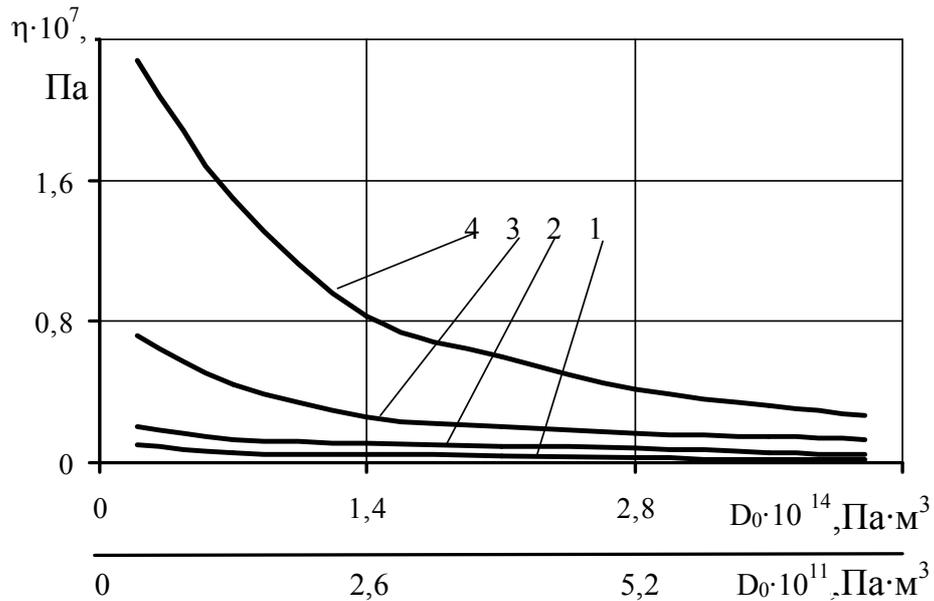


Рис.5.7. Зависимость максимальных напряжений σ_x , σ_{xz} от общей жесткости на изгиб D_0 и σ_{xz} от жесткости на сдвиг D_0^* в слоях кровли при $t = 6$, $k_0^{-1} = 1$ для граничных условий: два смежных края защемлены, два других – свободно оперты: 1 – $\sigma_x(1/2,1/2)$; 2 – $\sigma_x(1,1/2)$; 3 – $\sigma_{xz}(0,1/2)$; 4 – $\sigma_{xz}(1,1/2)$

Исследования влияния на напряженное состояние кровли в зависимости от расположения слоев (без слоя угля), их толщины, жесткости с различной комбинацией, общей жесткости проведено с использованием данных табл. 5.9, результаты которых для двух случаев граничных условий приведены на рис.5.7 и 5.8.

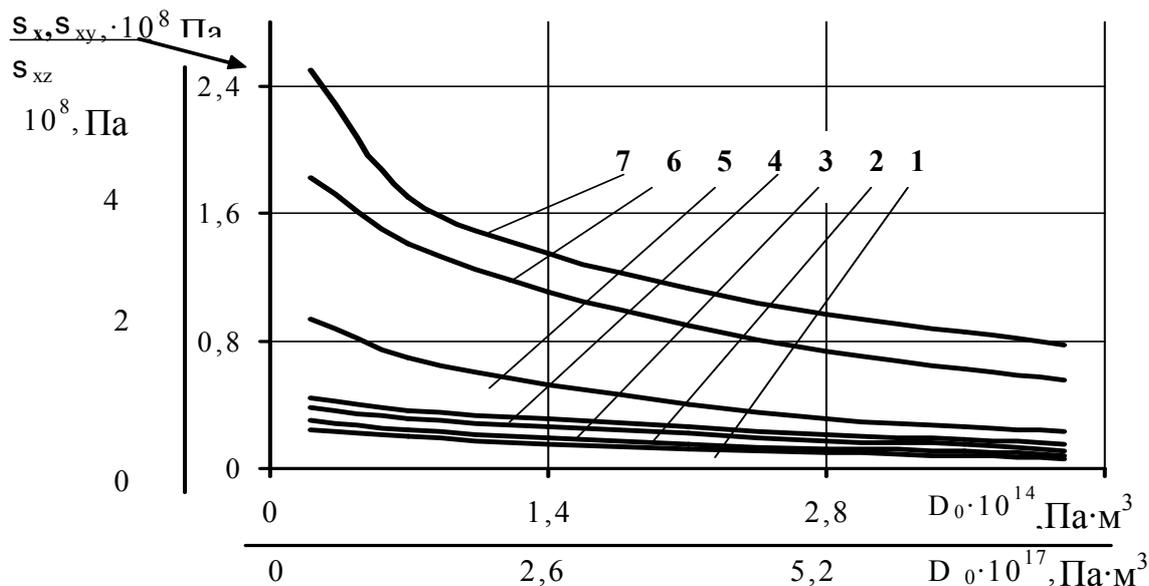


Рис. 5.8. Зависимость максимальных напряжений σ_x , σ_{xy} от общей жесткости на изгиб D_0 и σ_{xz} от жесткости на сдвиг D_0^* в слоях кровли при $t = 4$, $k_0^{-1} = 1$ для граничных условий два смежных края защемлены, два других – свободны:

1 – $\sigma_x(0,1)$; 2 – $\sigma_{xy}(0,1/2)$; 3 – $\sigma_x(1,1/2)$; 4 – $\sigma_{xy}(1,1/2)$;

5 – $\sigma_{xz}(1,1/2)$; 6 – $\sigma_x(1,0)$; 7 – $\sigma_{xz}(1,0)$

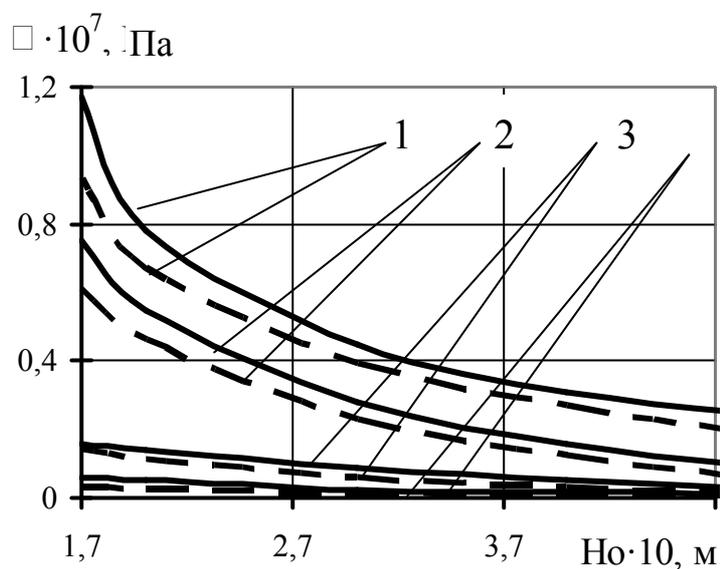


Рис. 5.9. Зависимость максимальных напряжений в слоях кровли с системами трещин ($\delta^i = 10^{-4}$ м, $\Delta^i = 5 \cdot 10^{-2}$ м) при $t = 4$, $k_0^{-1} = 1$ для граничных условий два смежных края защемлены, два других – свободно опертые: 1 – $\sigma_x(1/2,1/2)$;

2 – $\sigma_x(1,1/2)$; 3 – $\sigma_{xz}(0,1/2)$; 4 – $\sigma_{xz}(0,1/2)$; 5 – $\sigma_{xz}(1,1/2)$; 6 – $\sigma_x(1,0)$;

трещины: зияющие – — хаотические – - - -

Отсюда следует, что независимо от указанных варьируемых параметров слоев, напряженное состояние кровли зависит от общей жесткости, причем, как и в предыдущих случаях, с увеличением жесткости (толщины) напряжения уменьшаются и наоборот, а скорость изменения напряжений значительно выше в точке $(x=1, y=0)$ - в начале защемленного края при граничных условиях защемление-свободный край и в точке $(x=1, y=1/2)$ для граничных условий защемление-свободная опора.

В результате тектонических процессов и воздействия очистных работ в горных породах образуются трещины, которые влияют на механические характеристики кровли, а, следовательно, на ее напряженное состояние. Используя данные табл. 5.9 зависимости, в том числе усредненные значения для ширины трещины и расстояния между трещинами, исследовано напряженное состояние плиты с наиболее распространенными их системами: зияющими и с хаотической трещиноватостью, основные результаты которых для двух видов граничных условий приведены на рис. 5.9 и 5.10.

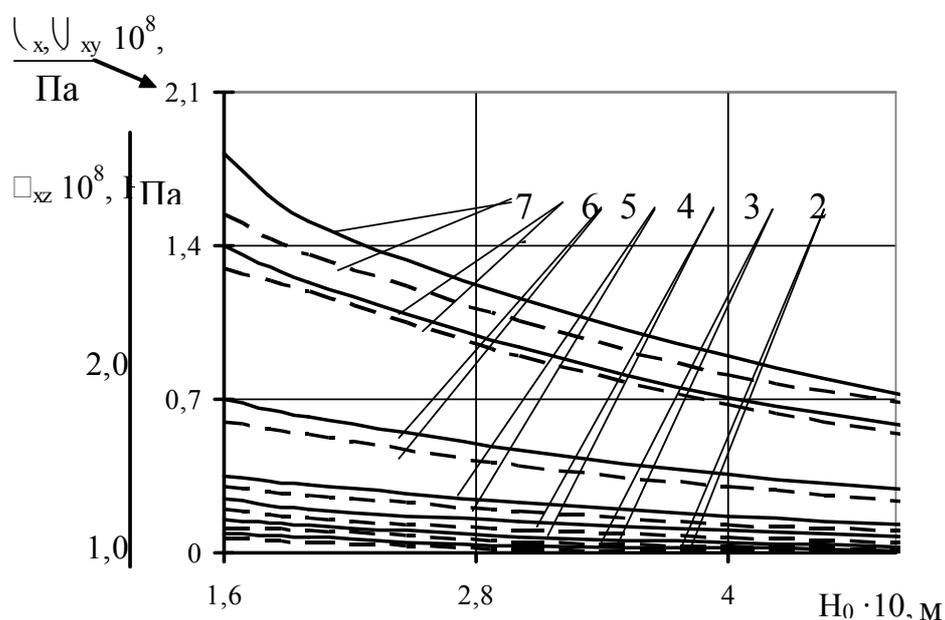


Рис. 5.10. Зависимость максимальных напряжений в слоях кровли с системами трещин ($\delta^i=10^{-4}$ м, $\Delta^i=5 \cdot 10^{-2}$ м) при $t=4$, $k_0^{-1}=1$ от толщины плиты для граничных условий два смежных края защемлены, два других – свободные: 1 – $\sigma_x(0, 1)$; 2 – $\sigma_{xy}(0, 1/2)$; 3 – $\sigma_x(1, 1/2)$; 4 – $\sigma_{xy}(0, 0)$; 5 – $\sigma_{xz}(1, 1/2)$; 6 – $\sigma_x(1, 0)$; 7 – $\sigma_{xz}(1, 0)$; трещины: зияющие - ——— ; хаотические - - - - -

Таблица 5.9.

Данные для расчета напряжений в плите

№ пп	Последовательность расположения слоев кровли с параметрами в плане $k_o^{-1}=1$	Толщина слоев, h^i , м	Общая толщина плиты H_o , м	Жесткость ($\text{Па}\cdot\text{м}^3$,) на			Ширина трещины, δ^i , м	Расстояние между трещинами, Δ^i , м
				изгиб слоев, D^i ,	изгиб плиты, D_o ,	сдвиг в поперечном направл D^*_{o} ,		
1	Песчаник	20	42	$1,6\cdot 10^{13}$	4,0 $\cdot 10^{14}$	7,7 $\cdot 10^{11}$	10^{-4}	$5\cdot 10^{-2}$
2	Известняк	10		$3,0\cdot 10^{12}$				
3	Алевралит	6		$1,9\cdot 10^{12}$				
4	Аргиллит	2		$2,9\cdot 10^{11}$				
1	Аргиллит	10	38	$2,4\cdot 10^{13}$	1,9 $\cdot 10^{14}$	6,1 $\cdot 10^{11}$	10^{-4}	$5\cdot 10^{-2}$
2	Известняк	8		$5,0\cdot 10^{12}$				
3	Алевралит	6		$5,0\cdot 10^{11}$				
4	Песчаник	8		$2,9\cdot 10^{10}$				
1	Аргиллит	2	32	$3,6\cdot 10^{12}$	1,1 $\cdot 10^{14}$	5,1 $\cdot 10^{11}$	10^{-4}	$5\cdot 10^{-2}$
2	Алевралит	3		$2,5\cdot 10^{12}$				
3	Песчаник	5		$5,0\cdot 10^{11}$				
4	Известняк	7		$1,6\cdot 10^{12}$				
1	Аргиллит	2	17	$2,9\cdot 10^{10}$	0,17 $\cdot 10^{14}$	2,7 $\cdot 10^{11}$	10^{-4}	$5\cdot 10^{-2}$
2	Алевралит	3		$5,8\cdot 10^{10}$				
3	Песчаник	5		$4,0\cdot 10^{11}$				
4	Известняк	7		$1,9\cdot 10^{12}$				

В связи с тем, что значения модулей деформаций меньше значений модулей упругости для сплошной среды, а, следовательно, снизится общая жесткость, то с увеличением толщины уменьшается напряженное состояние плиты, что подтверждают приведенные результаты. При этом уровень напряжений ниже у пород

с хаотической трещиноватостью. Следует отметить, что напряжения в кровле с зияющими трещинами в направлении оси y значительно ниже (примерно на три порядка), чем в направлении оси x .

На основании приведенных выше результатов исследована прочность горных пород кровли, для чего проведено сравнение максимальных напряжений, возникающих в кровле с предельными их значениями для каждого слоя согласно табл. 5.1, и, если они равны или их превышают, определены направления и зоны образования трещин.

Отправной точкой для этих исследований являются распределения напряжений в кровле с минимальной толщиной шести слоев, разными параметрами в плане и двумя случаями граничных условий, которые приведены на рис. 5.2 и 5.3.

Для кровли с граничными условиями защемление-свободная опора, распределение напряжений получено для слоя угля (см. рис. 5.2), а предельные их значения приведены в табл. 5.1. Из рис. 5.2 видно, что максимальные значения нормальных напряжений $\sigma_x(1; 1/2)$ равные $1,5 \cdot 10^5$ Па, и продольные (касательные) напряжения сдвига $\sigma_{xy}(0;0) = 0,97 \cdot 10^5$ Па ниже минимальных предельных их значений на растяжении и сдвиг для угля, меняющихся соответственно в пределах $(2,5 \dots 22,5) \cdot 10^5$ и $(24 \dots 100) \cdot 10^5$ Па (см. табл. 5.1).

В тоже время поперечные (касательные) напряжения сдвига $\sigma_{xz}(1;1/2) = 1,2 \cdot 10^5$ Па, то есть посередине защемленного края, превышают предельные их значения на всем интервале, а $\sigma_{xz}(0;1/2) = 0,72 \cdot 10^5$ Па, посередине опертого края, равно или превышает эти значения на интервале $(24 \dots 72) \cdot 10^5$ Па. При этом разрушающие напряжения могут возникнуть на расстоянии $(1 \dots 0,5)$, 30 м от защемленного края и соответственно $(0 \dots 0,25)$, т.е. 15 м от опертого края.

Таким образом, в участке кровли, с одинаковыми параметрами в плане ($k_0^{-1} = 1$), состоящей из шести слоев одинаковой минимальной толщины с параметрами согласно табл. 5.1 и 5.2 при условиях крепления защемление-свободная опора могут возникнуть в направлениях xoz и $yoз$ трещины посередине защемленных и опертых краев, причем в первом случае на расстоянии примерно в два раза больше, чем во втором.

С увеличением толщины кровли и отношения модулей упругости ее напряженное состояние снижается (см. рис. 5.4) и при $H_0 > 30$ м, $\frac{E_x}{E_{xz}} > 4,0$ в середине опертого края, если σ_{xz} предельное равно $24 \cdot 10^5$ Па, а $H_0 > 8$ м, $\frac{E_x}{E_{xz}} > 1,4$ в середине защемленного края, если σ_{xz} предельное равно $100 \cdot 10^5$ Па, или $H_0 > 50$ м, если σ_{xz} предельное равно $24 \cdot 10^5$ Па, трещины образовываться не будут.

Если плита состоит из четырех слоев различной жесткости (см. табл. 5.5), то, как следует из рис. 5.7, ее напряженное состояние снижается с увеличением жесткостей на изгиб и поперечный сдвиг. В этом случае нормальные σ_x (1;1/2), σ_x (1/2;1/2) и поперечные напряжения сдвига σ_{xz} (0;1/2) значительно ниже их предельных значений для указанных пород и только напряжения поперечного сдвига σ_{xz} (1;1/2), т.е. в середине защемленного края, близки к минимальному предельному значению напряжения для алевролита и превышают соответствующие их значения для аргиллита, песчаника (крупнозернистого) и известняка при $D_0 = 0,17 \cdot 10^{14}$ Па и $D_0^* = 0,3 \cdot 10^{11}$ Па, что говорит о возможности появления аналогичных трещин в середине защемленных краев от поперечных сил.

Выше рассматривалось напряженное состояние кровли с одинаковыми параметрами в плане, т.е. при $k_0^{-1} = 1$. Однако распределение напряжений меняется в зависимости от их отношения (см. табл. 5.5), причем напряжения увеличиваются в направлении большей стороны и при $k_0^{-1} = 0,5$ или $k_0^{-1} = 2,01$ нормальные напряжения в одном из направлений больше примерно в 1,5 и 3,0 раза, а поперечные напряжения сдвига примерно в 2,0 раза. Поэтому в данном случае максимальные нормальные напряжения в точке (1/2;1/2), т.е. вблизи середины плиты достигнут предельного их значения для угля и могут появиться трещины в направлении большей стороны, соответствующие напряжения в середине защемленного края (1;1/2) приблизятся к предельному значению, а увеличение поперечных напряжений сдвига повлечет за собой увеличение зоны появления трещин.

В кровле с четырьмя слоями нормальные напряжения в этих двух точках достигнут предельных значений на растяжение только для алевролита, что явится причиной появления здесь трещин, а поперечные напряжения сдвига, увеличенные в 2,15 раза в середине защемленного края, вызовут появление трещин также у алевролита и песчаника (мелкозернистого). При этом расширится область появления трещин с увеличением значений жесткостей (толщины) и отношения модулей упругости слоев кровли.

Перейдем к исследованию прочности кровли с граничными условиями защемление - свободный край, для чего, как и в предыдущем случае, рассмотрим распределение напряжений, приведенное на рис.5.3.

В данном случае напряженное состояние плиты естественно значительно выше, а опасными точками, подлежащими анализу для определения ее прочности, являются: для нормальных напряжений $\sigma_x(1, 0)$, $\sigma_x(1, 1/2)$, $\sigma_x(0, 1)$, для продольных напряжений $\sigma_{xy}(0, 0)$, $\sigma_{xy}(0, 1/2)$ и поперечных напряжений $\sigma_{xz}(1, 0)$ и $\sigma_{xz}(1, 1/2)$. Аналогичная картина распределения напряжений наблюдается в направлении оси y с координатами при замене x на y , и наоборот.

Как следует из рис. 5.3 наиболее нагруженными точками, откуда начнут появляться во всех направлениях трещины являются места начального защемления краев кровли, где возникают нормальные σ_x , σ_y и поперечные σ_{xz} , σ_{yz} напряжения сдвига, которые, несмотря на снижение их к свободным краям, на большей части интервала длины превышают соответствующие предельные значения для угля на растяжение, сжатие и сдвиг. Разрушающими являются эти напряжения в средней части защемленных краев, которые, будучи меньше примерно в три раза с аналогичным законом изменения к свободным краям, также на большом своем интервале превышают продольные значения. Разрушающими для слоя угля являются и продольные напряжения сдвига, которые, незначительно отличаясь по величине в уступе в средней части свободных краев плиты и уменьшаясь к защемленным ее краям, могут явиться причиной появления зияющих трещин. Несмотря на то, что с увеличением отношения модулей упругости слоев пород и их

толщин напряженное состояние кровли снижается (см. рис. 5.5, 5.6), в указанных точках во всех направлениях трещины сохраняются.

В четырехслойной кровле с различным расположением слоев при увеличении их жесткостей (толщин) в пределах, указанных в табл.5.5 и рис.5.8, несмотря на снижение напряженного состояния, во всех этих точках действуют те или иные разрушающие напряжения или их сочетания, которые обуславливают появление систем с хаотической трещиноватостью.

С изменением параметров в плане напряжения в плите значительно возрастут (см. табл. 5.8) в направлении большей заземленной стороны.

Более подробно исследовать зоны появления трещин нет необходимости, т.к. при рассматриваемых граничных условиях во всех приведенных выше случаях произойдет обрушение кровли.

Таким образом, разработанный метод позволяет исследовать напряженное состояние кровли горных пород, состоящей из различного сочетания слоев переменной жесткости под действием распределенной нагрузки от собственной массы при различных граничных условиях, а, следовательно, определять напряжения, зоны образования, вид трещин и влияние изменения горно-геологических условий на изменение газодинамического режима проветривания горных выработок.

5.3. Напряженно-деформированное состояние армированного анкерами горного массива

Рассмотрим армированную анкерами верхнюю часть горного массива выработки, состоящего из нескольких слоев пород, в виде прямоугольной в плане толстой слоистой пластины (плиты – отношение толщины к ширине превышает 0,1) под действием равномерно распределенной нагрузки, два противоположных края которой жестко закреплены, два других – свободные (рис. 5.11).

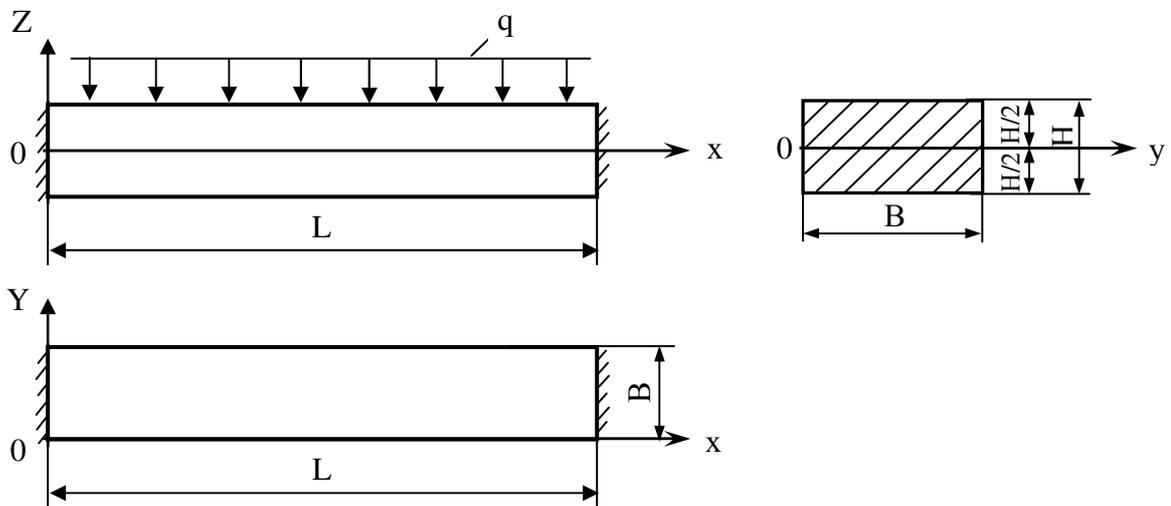


Рис. 5.11 – Расчетная схема армированной части горного массива

Пусть координаты x , y , z расположены в срединной (нейтральной) поверхности и в нижнем левом углу закрепленного края пластины; L , B , H – соответственно длина, ширина и высота пластины; Δ – расстояние от нижней поверхности пластины до нейтральной поверхности.

Рассмотрим три способа армирования анкерами: вертикальное расположение, расположение под углом и двойное расположение под углом (рис. 5.12).

Пусть в направлении y будет такое же расположение анкеров, но на расстоянии t_1 .

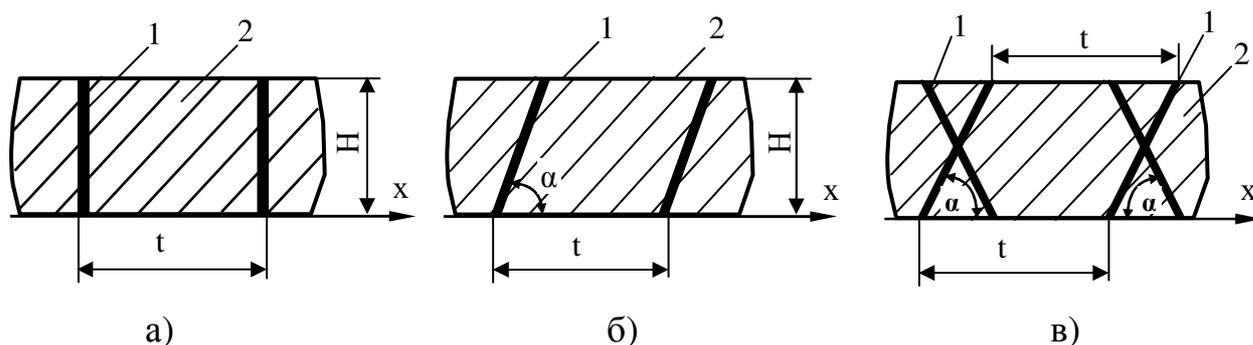


Рис. 5.12 – Способы армирования анкерами: а – вертикальная; б – под углом; в – двойное расположение под углом; 1 – анкера; 2 – порода; t – расстояние между осями диаметров анкеров в направлении x .

Пусть σ_x , σ_y , σ_z – нормальные напряжения, подстрочные индексы которых показывают направление внешней нормали к этой площадке, к которой данные напряжения относятся;

$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ – касательные напряжения, первые подстрочные индексы которых показывают направления внешней нормали к той площадке, к которой приложено данное напряжение, а вторые индексы – направление, в котором действует данное касательное напряжение.

Все напряжения, как нормальные, так и касательные, считаются положительными, если они, будучи приложенными к площадкам с положительными внешними нормальными, действуют по направлению соответствующих положительных внешних нормалей.

Деформированное состояние сплошного трёхмерного тела в окрестности любой точки характеризуется шестью составляющими деформации. Из этих составляющих три, которые обозначаются через ϵ_x , ϵ_y , ϵ_z , представляют соответственно относительные деформации удлинения по трём взаимно перпендикулярным направлениям x , y , z , а остальные три, которые обозначаются через ϵ_{xy} , ϵ_{xz} , ϵ_{yz} представляют соответственно деформации сдвига, происходящие в трёх взаимно перпендикулярных плоскостях, являющихся касательными плоскостями в

точке к трём взаимно перпендикулярным координатным поверхностям $z = \text{const}$, $x = \text{const}$, $y = \text{const}$.

Если сплошное тело под действием каких-либо сил претерпевает деформацию, то какая-либо точка этого тела получит перемещение, которое может быть представлено тремя проекциями вектора полного перемещения на направления касательных к координатным линиям x , y , z .

$$u_x = u_x(x, y, z); \quad v_y = v_y(x, y, z); \quad w_z = w_z(x, y, z).$$

За положительные принимают перемещения, направленные в сторону положительных изменений соответствующих независимых переменных x , y , z .

Дополнительно предположим:

- расстояние по нормали (z) между двумя точками пластины до и после деформации остаются неизменными;
- нормальные напряжения σ_z на площадках, параллельных срединной плоскости, могут быть пренебрежены по сравнению с прочими напряжениями;
- при определении деформаций ε_{xy} и ε_{yz} считаем, что касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} не отличаются от соответствующих напряжений, найденных при наличии гипотезы недеформируемых нормалей, то есть от соответствующих напряжений теории изгиба анизотропных пластин.

Обозначим через u , v и w перемещения точек срединной плоскости в направлении соответственно x , y и z .

Как и в предыдущем подразделе для решения задачи используем приём, состоящий в представлении полного прогиба в виде суммы двух составляющих – за счёт изгиба w_0 и сдвига w_1 .

$$w = w_0 + w_1.$$

Деформации в любой точке i -го слоя пластины в предположении гипотезы прямых нормалей, деформации срединной поверхности параметры изменения кривизны в пределах точности технической теории имеют вид, аналогичный зависимостям в подразделе 5.2.

Закон Гука для i -го слоя пластины запишем

$$\varepsilon_x^i = \frac{1}{E_{xn}^i} \sigma_x^i - \frac{\nu_{yn}^i}{E_{yn}^i} \sigma_y^i; \quad \varepsilon_y^i = \frac{1}{E_{yn}^i} \sigma_y^i - \frac{\nu_{xn}^i}{E_{xn}^i} \sigma_x^i; \quad \varepsilon_{xy}^i = \frac{1}{G_{xyn}^i} \sigma_{xy}^i, \quad (5.56)$$

где E_{xn}^i , E_{yn}^i , ν_{xn}^i , ν_{yn}^i – приведенные модули нормальной упругости, Па и коэффициенты Пуассона, соответственно; G_{xyn}^i – приведенный модуль сдвига в плоскости пластины.

Компоненты тензора напряжений имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_x^i &= B_{11}^i \varepsilon_1 + B_{12}^i \varepsilon_2 + z(B_{11}^i \chi_1 + B_{12}^i \chi_2); \\ \sigma_y^i &= B_{12}^i \varepsilon_1 + B_{22}^i \varepsilon_2 + z(B_{12}^i \chi_1 + B_{22}^i \chi_2); \\ \sigma_{xy}^i &= B_{12}^i \varepsilon_{12} + 2zB_{12}^{*i} \tau, \end{aligned} \quad (5.57)$$

где упругие постоянные материала слоёв пластины имеют вид

$$\begin{aligned} B_{11}^i &= E_{xn}^i \Delta_1^{-1}; \quad B_{12}^i = \nu_{yn}^i E_{xn}^i \Delta_1^{-1}; \quad B_{22}^i = E_{yn}^i \Delta_1^{-1}; \\ B_{12}^{*i} &= G_{12}^{*i}; \quad \Delta_1 = 1 - \nu_{xn}^i \nu_{yn}^i. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Выражение для внутренних усилий в срединной поверхности изгибающих и крутящего моментов деформаций имеет аналогичный вид.

Однако в этих выражениях введены следующие обозначения для жёсткостей на растяжение (сжатие), сдвиг и изгиб (рис. 5.13)

$$C_{jk} = \sum_{i=1}^{t+s} B_{jk}^i (\delta_i - \delta_{i-1}); \quad (5.59)$$

$$D_{jk} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{t+s} B_{jk}^i \left[(\delta_i^3 - \delta_{i-1}^3) - 3\Delta (\delta_i^2 - \delta_{i-1}^2) + 3\Delta^2 (\delta_i - \delta_{i-1}) \right], \quad (5.60)$$

где C_{12}^* , D_{12}^* – получены заменой B_{jk} на B_{12}^* .

Здесь $(t+s)$ – число всех слоёв пластины; m – число слоёв ниже координатной поверхности; n – число остальных слоёв; Δ – расстояние по нормали от нижней до координатной поверхности пластин. Если координатная поверхность пластины расположена внутри какого-либо слоя, то под n подразумевается число слоёв выше координатной поверхности плюс один, а если же координатная по-

верхность пластины совпадает с какой-либо поверхностью контакта, то под n подразумевается число слоёв выше координатной поверхности.

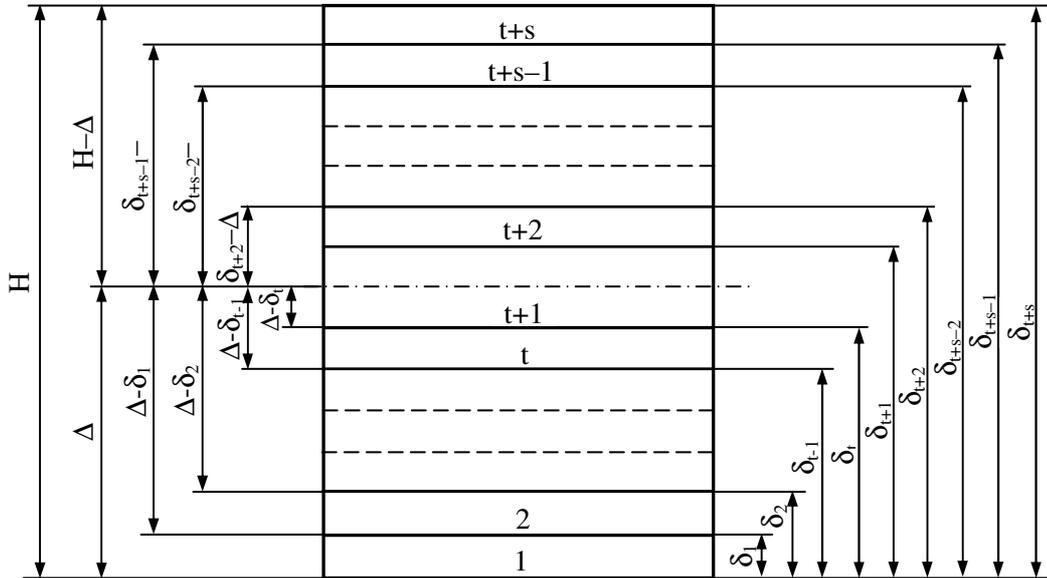


Рис. 5.13 – Схема сечения массива горных пород для определения его жесткостных параметров

В выражениях (5.59, 5.60) δ_{i-1} – расстояние по нормали от предыдущей до последующей поверхности слоя пластины:

$$A_{11} = C_{22}\Delta_1^{-1}; \quad A_{22} = C_{11}\Delta_1^{-1}; \quad A_{12} = -C_{12}\Delta_1^{-1};$$

$$A_{12}^* = C_{12}^{*-1}; \quad \Delta_2 = C_{11}C_{22} - C_{12}^2. \quad (5.61)$$

В силу принятой гипотезы о недеформируемости нормали пластины поперечные силы имеют вид

$$Q_{xz} = G_{xzn} H(w'_1)_x = C_{13}(w'_1)_x; \quad Q_{yz} = G_{yzn} H(w'_1)_y = C_{23}(w'_1)_y, \quad (5.62)$$

где $C_{13} = G_{xzn}$, $C_{23} = G_{yzn}$;

G_{xzn} , G_{yzn} – приведенные модули сдвига в плоскостях xoz и $yoз$ соответственно;

штрихами обозначены краткие производные.

Все промежуточные выражения, а также вариационное уравнение имеют аналогичный вид. Отличительной чертой в данном случае является определение жесткостных параметров и выбор координатных функций.

Для определения перемещений, деформаций, усилий и моментов, напряжений, возникающих в пластине под действием нагрузки, необходимо знать жесткостные ее параметры, которые зависят от приведенных модулей упругости, сдвига и коэффициентов Пуассона (5.56), (5.58), (5.62).

В зависимости от схемы армирования анкерами (см. рис. 5.12), равномерно распределяя жесткости анкеров и пород по площади сечения пластины, получим следующие выражения:

– для вертикального расположения анкеров (см. рис. 5.12, а)

$$E_x^i = \frac{E_a d_a + (t - d_a) E_n^i}{t}; \quad E_y^i = \frac{E_a d_a + (t_1 - d_a) E_n^i}{t_1}; \quad (5.63)$$

$$G_{xz}^i = \frac{G_a d_a + (t - d_a) G_n^i}{t}; \quad G_{yz}^i = \frac{t_1}{\frac{d_a}{G_a} + \frac{t_1 - d_a}{G_n^i}}; \quad G_{12}^{*i} = G_n^i; \quad (5.64)$$

$$v_x^i = \frac{v_a d_a + (t - d_a) v_n^i}{t}; \quad v_y^i = \frac{v_a d_a + (t_1 - d_a) v_n^i}{t_1}; \quad (5.65)$$

$$G_a = \frac{E_a}{2(1 - v_a)^2}; \quad G_n^i = \frac{E_n^i}{2(1 - v_n^i)^2}. \quad (5.66)$$

В выражениях (5.63)-(5.66) введены следующие обозначения

E_a, E_n^i – модули нормальной упругости материала анкера и слоёв породы;

d_a – диаметр анкера, м;

t_1 – расстояние между осями анкеров в поперечном направлении (в направлении n), м;

G_a, G_n^i – модули сдвига материала анкера и слоёв породы, Па.

v_a, v_n^i – коэффициенты Пуассона материала анкера и слоёв породы;

– для расположения анкеров под углом α (см. рис. 5.12, б)

$$E_x^i = \frac{E_a d_a \sin \alpha + (t - d_a) E_n^i}{t}; \quad E_y^i = \frac{E_a d_a \sin \alpha + (t_1 - d_a) E_n^i}{t_1}; \quad (5.67)$$

$$G_{xz}^i = \frac{G_a d_a \sin \alpha + (t - d_a) G_n^i}{t}; \quad G_{yz}^i = \frac{t_1}{\frac{d_a \sin \alpha}{G_a} + \frac{t_1 - d_a}{G_n^i}}; \quad G_{12}^{*i} = G_n^i; \quad (5.68)$$

$$v_x^i = \frac{v_a d_a \sin \alpha + (t - d_a) v_n^i}{t}; \quad v_y^i = \frac{v_a d_a \sin \alpha + (t_1 - d_a) v_n^i}{t_1}, \quad (5.69)$$

– для двойного расположения анкеров под углом α (см. рис. 5.12, в)

$$E_x^i = \frac{2[E_a d_a \sin \alpha + (t - d_a) E_n^i]}{t}; \quad E_y^i = \frac{2[E_a d_a \sin \alpha + (t_1 - d_a) E_n^i]}{t_1}; \quad (5.70)$$

$$G_{xz}^i = \frac{2[G_a d_a \sin \alpha + (t - d_a) G_n^i]}{t}; \quad G_{yz}^i = \frac{2t_1}{\frac{d_a \sin \alpha}{G_a} + \frac{t_1 - d_a}{G_n^i}}. \quad (5.71)$$

Аналогично искомые функции представим в виде

$$w_0(x, y) = \sum_{j=1}^n a_j f_j(x) g_j(y); \quad w_1(x, y) = \sum_{j=1}^n c_j \ell_j(x) u_j(y);$$

$$\varphi(x, y) = \sum_{j=1}^m b_j p_j(x) q_j(y).$$

Вводя безразмерные величины и константы по формулам

$$x = L\bar{x}; \quad y = B\bar{y}; \quad w_0 = L\bar{w}_0; \quad w_1 = L\bar{w}_1; \quad k = \frac{L}{B};$$

$$d_{12} = \frac{D_{12}}{D_{11}}; \quad d_{22} = \frac{D_{22}}{D_{11}}; \quad d_{12}^* = D_{12}^*; \quad r_0 = \frac{2qL^3}{D_{11}}; \quad (5.72)$$

$$g_{11} = \frac{G_{xzn}^i HL^2}{D_u}; \quad \frac{G_{yzn}^i HL^2}{D_u}$$

и учитывая тот факт, что $b_j = 0$, ввиду отсутствия внутренних сил в срединной поверхности, опуская в дальнейшем черту в обозначениях безразмерных величин, система линейных алгебраических уравнений примет вид

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_j \iint \sum_{r=1}^s F_r G_r ds + \sum_{j=1}^n c_j \iint \sum_{r=1}^s F_r S_r ds &= r_0 \iint f_i g_i ds \\ \sum_{j=1}^n a_j \iint \sum_{r=1}^s K_r G_r ds + \sum_{j=1}^n c_j \iint \sum_{r=1}^s K_r S_r ds &= 0 \end{aligned} \quad (5.73)$$

Здесь введены следующие обозначения

$$\begin{aligned} F_1 &= f_i'' f_j''; \quad F_2 = f_i'' f_j; \quad F_3 = f_i f_j''; \quad F_4 = f_i f_j; \quad F_5 = f_i' f_j'; \\ G_1 &= g_i g_j; \quad G_2 = d_{12} k g_i g_j'; \quad G_3 = d_{22} k^2 g_i'' g_j; \quad G_4 = d_{12} k^4 g_i'' g_j''; \\ G_5 &= 4k^2 d_{12}^* g_i' g_j'; \quad K_6 = \ell_i' \ell_j'; \quad K_7 = \ell_i \ell_j; \quad S_6 = g_{11} u_i u_j; \quad S_7 = g_{22} k^2 u_i' u_j'. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Выражения для функций K_r и S_r при $r=5$ получены из F_r и G_r заменой в них на ℓ_j и g_j на u_j .

Интегралы в уравнении (5.74) вычисляются в пределах $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

Напряжения для i -того слоя пластины имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_x^i &= -\frac{z}{L} \left[\sum_{j=1}^n a_j (B_{11}^i f_j'' g_j + k^2 B_{12}^i f_j g_j'') + \sum_{j=1}^n c_j (B_{11}^i \ell_j'' u_j + k^2 B_{12}^i \ell_j u_j'') \right]; \\ \sigma_y^i &= -\frac{z}{L} \left[\sum_{j=1}^n a_j (B_{12}^i f_j'' g_j + k^2 B_{22}^i f_j g_j'') + \sum_{j=1}^n c_j (B_{12}^i \ell_j'' u_j + k^2 B_{22}^i \ell_j u_j'') \right]; \end{aligned} \quad (5.75)$$

$$\sigma_{xy}^i = -\frac{2kz}{L} B_{12}^{*i} \left(\sum_{j=1}^n a_j f_j' g_j' + \sum_{j=1}^n c_j \ell_j' u_j' \right);$$

$$\tau_{xz}^i = G_{xzn}^i \sum_{j=1}^n c_j \ell_j' u_j; \quad \tau_{yz}^i = k G_{yzn}^i \sum_{j=1}^n c_j \ell_j u_j'.$$

Исходя из принятых граничных условий в качестве координатных функций приняты степенные полиномы, коэффициенты которых приведены в таблицах 5.10-5.12.

Таблица 5.10.

Коэффициенты полиномов f_i для условий заземленный - заземленный края

f_i	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
f_1	1	-2	1				
f_2	-1	4	-5	2			
f_3	1	-8	19	-18	6		
f_4	-1	14	-55	92	-70	20	
f_5	1	-22	131	-340	440	-280	70

Таблица 5.11.

Коэффициенты полиномов g_i, u_i для условий свободный - свободный края

g_i, u_i	y^0	y^1	y^2	y^3	y^4	y^5
g_1, u_1	-1	2				
g_2, u_2	1	-6	6			
g_3, u_3	-1	12	-30	20		
g_4, u_4	1	-20	90	-140	70	
g_5, u_5	-1	30	-210	560	-630	252

Таблица 5.12.

Коэффициенты полиномов l_i для условий заземленный - заземленный края

l_i	y^0	y^1	y^2	y^3	y^4	y^5
l_1	-1	1				
l_2	1	-3	2			
l_3	-1	7	-12	6		
l_4	1	-13	42	-50	20	
l_5	-1	21	-110	230	-210	70

Кроме набора вышеуказанных координатных функций для условий «заземленный – заземленный» края будут использованы балочные степенные полиномы:

$$f = (x^4 - 2x^3 + x^2)/24; \quad \ell = (6x^2 - 6x + 1)/12, \quad (5.76)$$

которые точно удовлетворяют всем граничным условиям крепления пластины в этом направлении.

Для решения поставленной задачи численным методом была разработана специальная программа на ПЭВМ. Выполненные с помощью ее расчеты позволили получить целый ряд зависимостей, характеризующих степень влияния на прогиб армо-породной плиты (w), различных приведенных показателей (рис. 5.14-5.22).

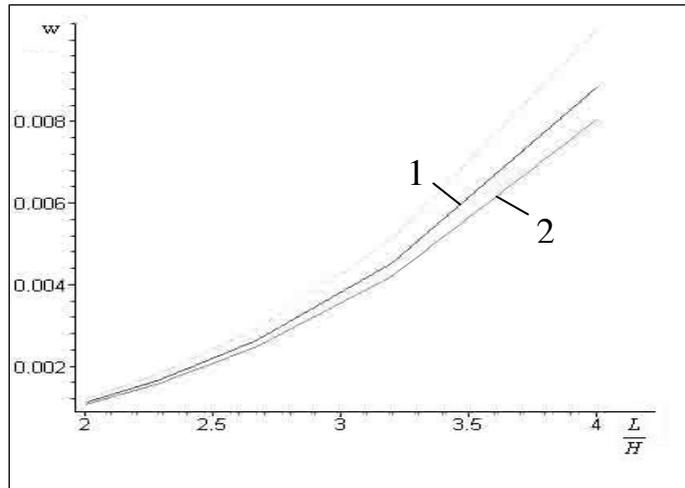


Рис. 5.14 – Зависимость относительного максимального прогиба ($w=w/L$) от отношения внешней нагрузки к приведенному модулю упругости ($q_0/E_{пр}$) горного массива, закрепленного анкерами под углом α : 1 – 30 °; 2 – 90 °

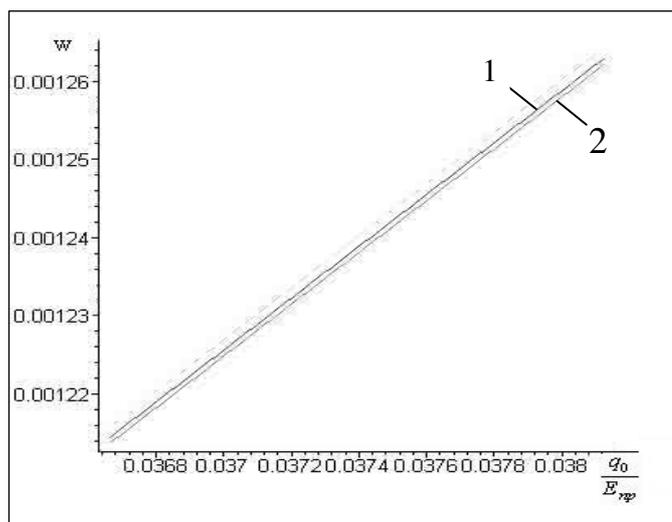


Рис. 5.15 – Зависимость относительного максимального прогиба ($w = w/L$) от отношения длины к высоте (L/H) горного массива, закрепленного анкерами под углом α : 1 – 30 °; 2 – 90 °

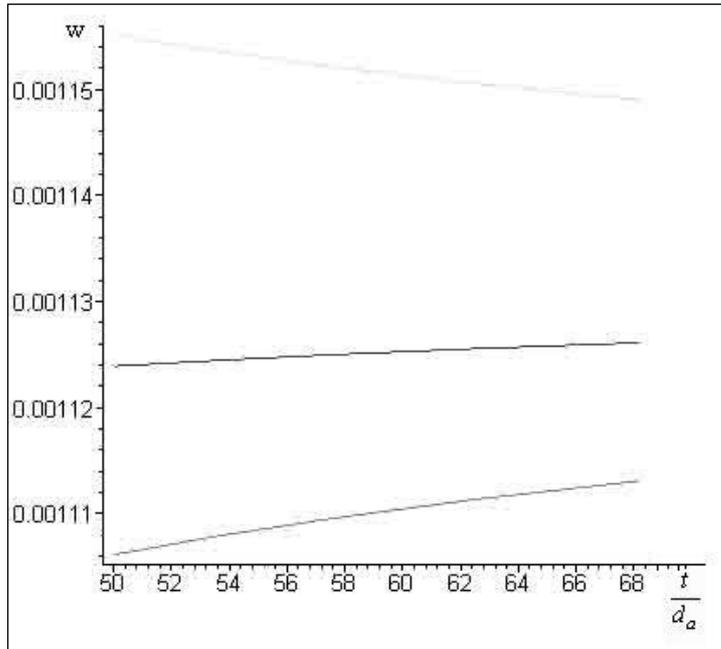


Рис. 5.16 – Зависимость относительного максимального прогиба ($\bar{w} = w/L$) от отношения расстояния между анкерами горного массива к их диаметру (t/d_a) и угла наклона α : 1 – 30° ; 2 – 90°

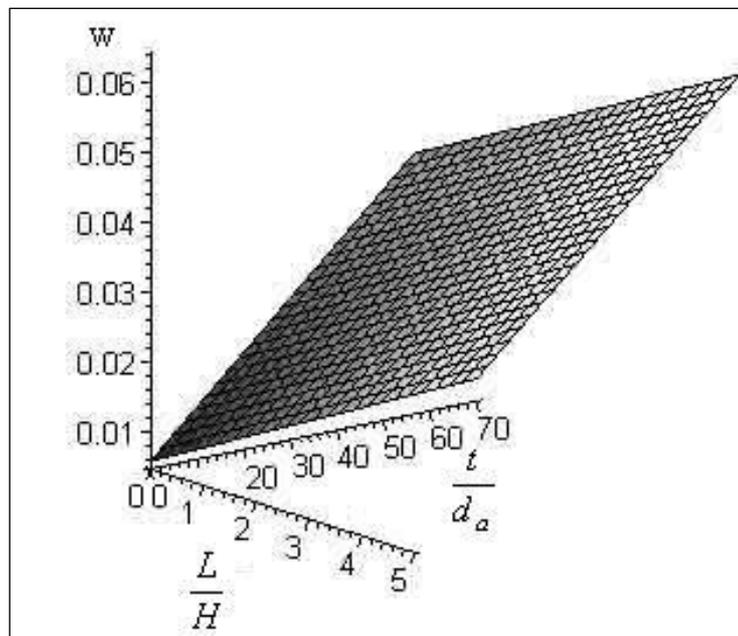


Рис. 5.17 – Зависимость относительного максимального прогиба ($\bar{w} = w/L$) горного массива, закрепленного анкерами от отношений L/H и t/d_a при их угле наклона 90°

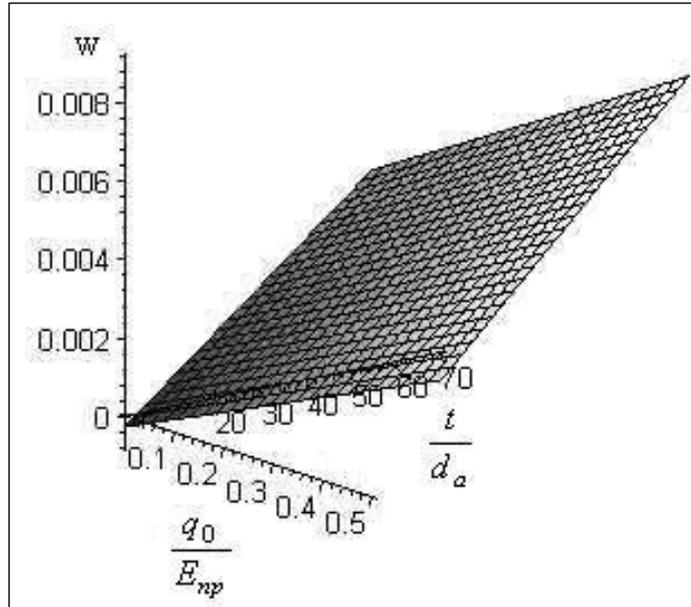


Рис. 5.18 – Зависимость относительного максимального прогиба ($\bar{w} = w/L$) горного массива, закрепленного анкерами от отношений $q_0/E_{пр}$ и t/d_a при их угле наклона 90°

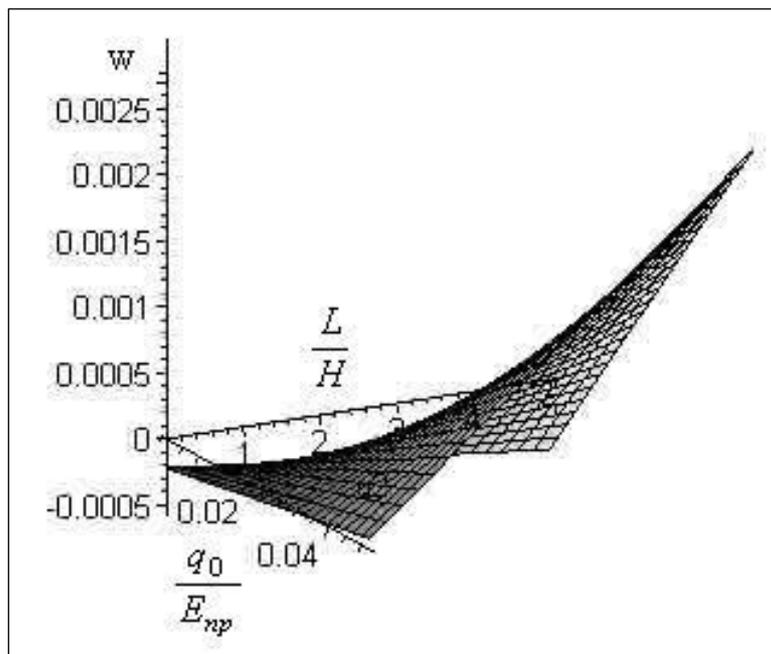


Рис. 5.19 – Зависимость максимального прогиба ($\bar{w} = w/L$) горного массива, закрепленного анкерами от отношений $q_0/E_{пр}$ и L/H при их угле наклона 90° .

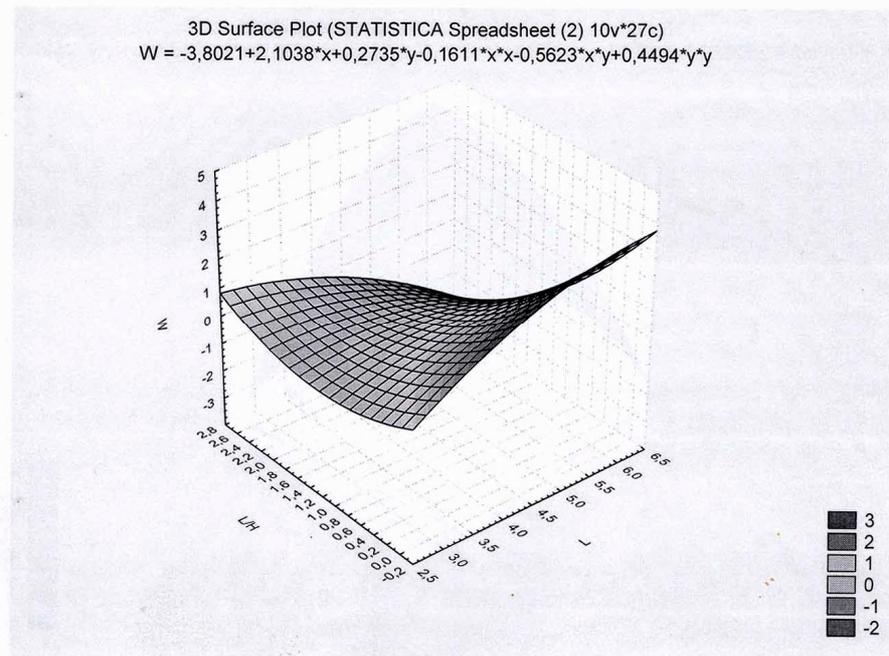


Рис. 5.20 – Зависимость относительного максимального прогиба ($\bar{w} = w/L$) от величин (L/H) и ширины выработки по кровле (L)

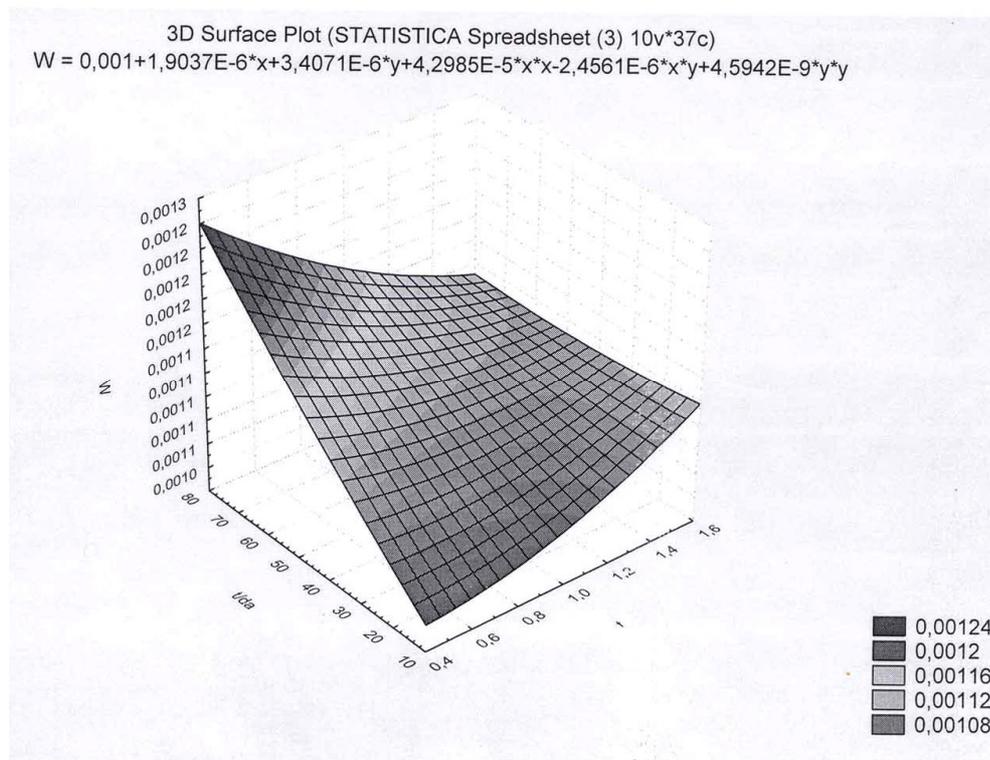


Рис. 5.21 – Зависимость относительного максимального прогиба ($\bar{w} = w/L$) от величин (t/d_a) и (t)

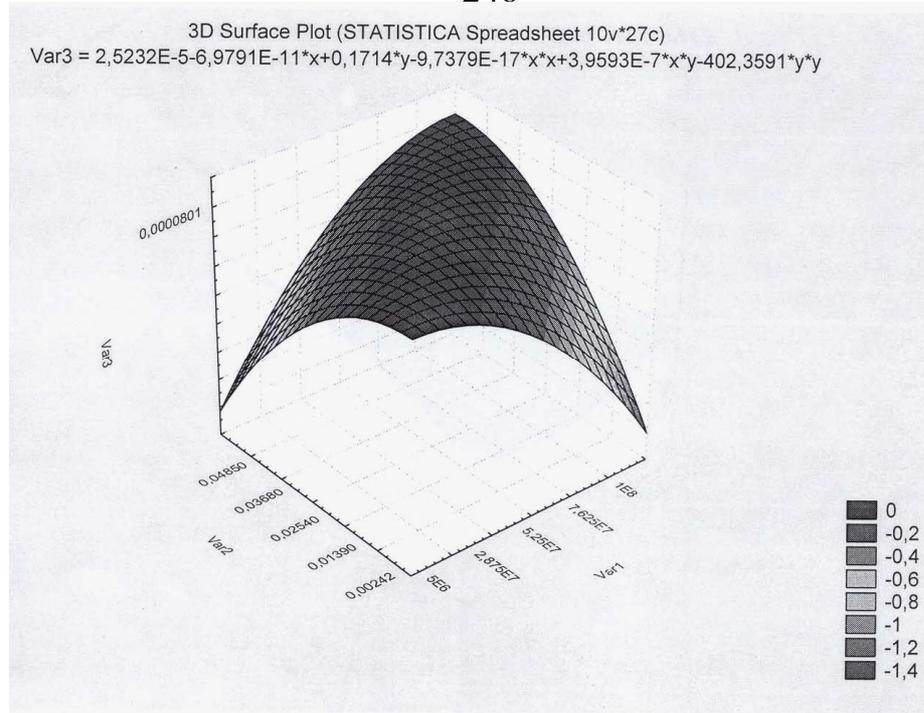


Рис.5.22 – Зависимость величины (t/d_a) от величин $(q_0/E_{пр})$ и (L/H) .

В результате обработки полученных при решении задачи результатов методами математической статистики с использованием пакета прикладных программ Matcad была получена эмпирическая зависимость для расчета прогиба анкерно-породной плиты в кровле выработки:

$$w/L = 0,2983549763E^{-1} \cdot u_1 + 0,1459923268E^{-4} \cdot u_2 - 0,2634277968E^{-5} \cdot u_3 + \\ + 0,2128374770E^{-2} \cdot u_1 \cdot u_2 + 0,6377950671E^{-4} \cdot u_1 \cdot u_3 - \\ - 0,1871331474E^{-5} \cdot u_2 \cdot u_3 - 0,1871331474E^{-5} \cdot u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 + 0,13311665122$$

где $u_1 = \frac{q_0}{E_{пр}}$; $u_2 = \frac{L}{H}$; $u_3 = \frac{t}{d_a}$

На основании выполненных аналитических исследований было установлено влияние схем и параметров АПАС на напряженно-деформированное состояние заанкерowanego породного массива и получены зависимости для расчета прогибов анкерно-породной плиты в кровле выработки. Это позволило сформулировать методические положения по расчету параметров анкерных породо-армирующих систем для крепления выработок. Вначале, в зависимости от горно-геологических и горнотехнических условий выбирается схема анкерования.

После этого, рассчитываются ожидаемые смещения контура выработки, по которым определяется нагрузка на заармированную толщу пород с некоторым запасом прочности. Затем, в зависимости от принимаемых параметров анкерной крепи (расстояния между анкерами и их длины) определяется предельно-допустимая деформация заанкерванной, породно-анкерной конструкции. Она сопоставляется с ожидаемыми смещениями контура выработки и делается вывод о возможности поддержания только анкерной крепью или в комбинации ее с рамной конструкцией. В случае принятия решения о поддержании выработки анкерно-рамной крепью, параметры рамной крепи выбираются из условия восприятия ею нагрузки от остаточных смещений.

При длительной эксплуатации армо–породного массива его деформации во времени с постоянной нагрузкой увеличиваются за счет изменения реологических характеристик горных пород (явление ползучести). Его общие напряжения или перемещения равны сумме двух составляющих, полученных в данный момент времени t , определенных по зависимостям (5.75) и в течение времени τ , предшествующего настоящему времени.

Для решения второй части задачи свойства transversально изотропного армо–породного массива заменены линейными операторами Вольтерры Γ^* и N^* дробно–экспоненциальными функциями с использованием асимптотического разложения \mathcal{E}_α^* – функции

$$\bar{E}_{np} = E_{np} (1 - \Gamma^*); \quad \bar{G}_{np} = \frac{\tilde{E}_{np}}{2(1 + \bar{v}_{np})}; \quad \bar{v}_{np} = v_{np} (1 + N^*); \quad \Gamma^* = \chi \mathcal{E}_\alpha^*(-\beta - \chi);$$

$$N^* = \frac{1 - 2v_{np}}{2v_{np}} \Gamma^*;$$

$$\mathcal{E}_\alpha^*(-\beta) \cdot 1 \approx \frac{1}{\beta} - t^{1+\alpha} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (\beta t^{1+\alpha})^{-n}}{\Gamma[1 + (1 + \alpha)(1 - n)]},$$

где $\Gamma(x)$ – гамма функция; α, β, χ – параметры ползучести горных пород, определенные экспериментальным путем.

Экспериментально определяемое максимальное перемещение $w(t)$ представим в виде

$$w(t) = w \left[1 + \chi \mathcal{E}_\alpha^* (-\beta) \cdot 1 \right] \quad (5.77)$$

Данные инструментальных наблюдений максимальных перемещений массива, закрепленного анкерами под углом $\alpha_0 = 90^\circ$, полученные для подготовленной выработки шахты «Добропольская», а также результаты их теоретических исследований в зависимости от времени эксплуатации армо–породного массива в течение 600 суток при фиксированных значениях безразмерных величин, приведены на рис. 2. Отсюда следует, что максимальная погрешность данных эксперимента и результатов теории не превышает 20 %. При этом $\alpha = 0,72$, $\beta = 0,46$, $\chi = 2,54 \cdot 10^{-2}$. Установлено, что относительно меньшие значения максимальных перемещений имеют место при одиночном расположении анкеров под углом $\alpha_0 = 90^\circ$ и двойном – 60° .

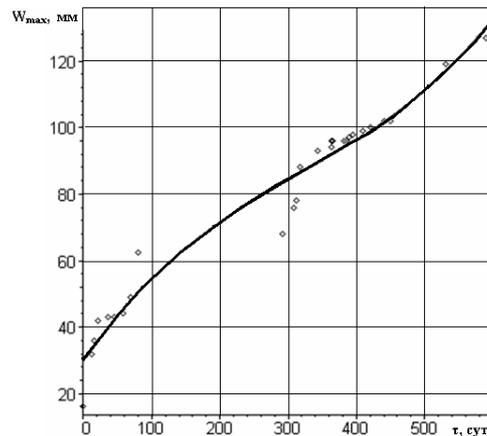


Рис. 5.23 – Зависимость максимальных перемещений армо–породного массива от времени эксплуатации при $q/E = 3,4 \cdot 10^{-2}$, $L/H = 2,4$, $t/d_a = 0,25 \cdot 10^2$, $\alpha_0 = 90^\circ$: \diamond – данные эксперимента; — – теоретическая кривая.

Разработанный метод расчета напряженно-деформированного состояния армированного анкерами породного массива с учетом явления ползучести горных пород позволил определить его максимальные перемещения (напряжения) при длительной эксплуатации горной выработки с различными схемами и параметрами анкерования, а, следовательно, обосновано выбрать параметры анкерно-породной системы, обеспечивающие ее прочность и устойчивость.

5.4 Напряженно-деформированное состояние закрепленной анкерами горной выработки

В предыдущем разделе проведены исследования напряженно-деформированного состояния верхней части горной выработки, закрепленной анкерами.

Однако важной задачей является обеспечение эффективного поддержания горных выработок в случае создания в приконтурном массиве несущих породно-анкерных конструкций, которые совместно с закрепленными краями воспринимают горное давление.

Рассмотрим расчетную схему закрепленной части анкерами горной выработки в виде многослойной толстой оболочки с трансверсально изотропными слоями под действием нормальной нагрузки q от массы вышележащих слоев пород, два края которых защемлены, два других – свободные (рис. 5.24).

Отличительной особенностью выбора основных уравнений в данном случае от ранее приведенного является:

- изменение координаты z по параболической зависимости;
- зависимости поперечных сил и учет поперечного сдвига;
- учет нормального напряжения σ_z при допущении $\varepsilon_z = 0$, которое для рамной крепи является распределенной нагрузкой.

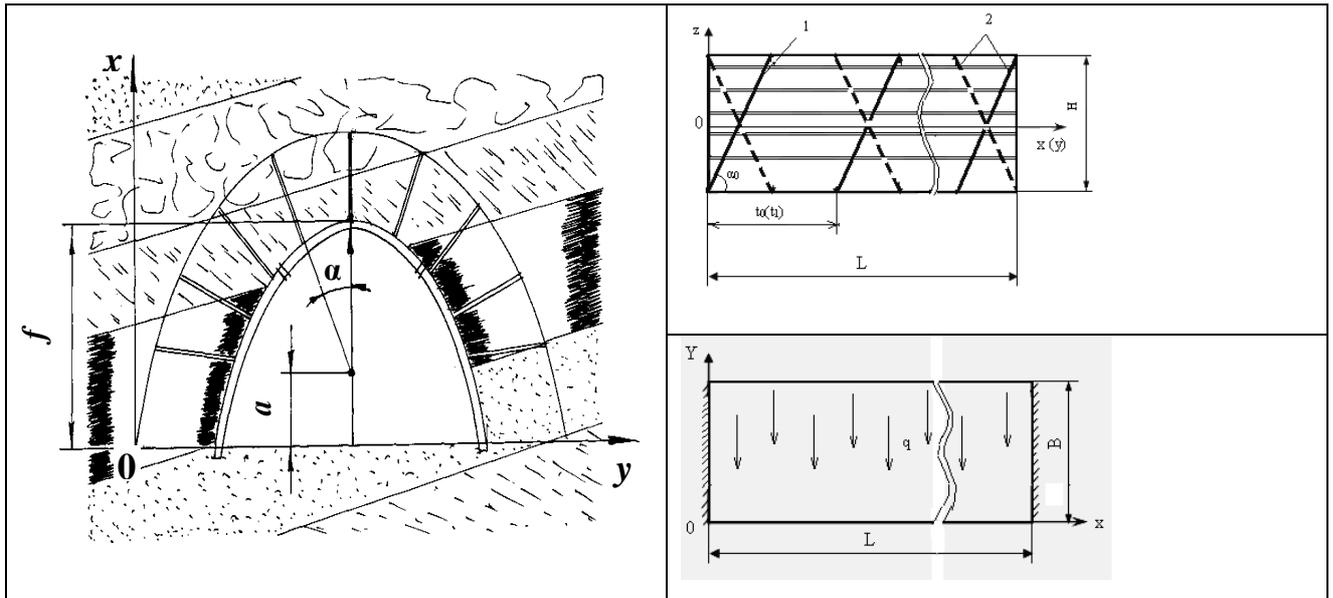


Рис. 5.24 – Расчетная схема закрепления анкерами горной выработки

Примем изменения координаты z и радиуса кривизны R_0 в виде

$$z = f \left(1 - 4 \frac{y^2}{b^2} \right); \quad R_0 = \frac{4fy}{b^2(b-y)}. \quad (5.77)$$

Поперечные силы, действующие в плоскостях xoz и yoz имеют вид

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{h^2}{12} \varphi^i, \quad N_2 = \frac{h^2}{12} \psi^i; \\ \varphi^i &= - \left[B_{11}^i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (B_{12}^i + 2B_{66}^i) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y^2} \right]; \\ \psi^i &= - \left[B_{22}^i \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (B_{12}^i + 2B_{66}^i) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y} \right]. \end{aligned} \quad (5.78)$$

Тогда вариационное уравнение примет вид

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{E} &= \delta \iint \left[\frac{1}{2} L_1(w) + \frac{h^2}{48} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) L_2^i(w) - qw \right] ds = 0; \\ L_1(w) &= D_{11} (w''_{xx})^2 + 2D_{12} w''_{xx} w''_{yy} + D_{22} (w''_{yy})^2 + 4D_{66} (w''_{xy})^2; \\ L_2^i(w) &= a_{55} [B_{11}^i w'''_{xxx} + (B_{11}^i + 2B_{66}^i) w'''_{xyy}]^2 + a_{44} [B_{22}^i w'''_{yyy} + (B_{12}^i + 2B_{66}^i) w'''_{xxy}]^2. \end{aligned} \quad (5.79) \quad \text{б)}$$

Входящие в жесткости производные модули упругости, сдвига находим, как и ранее, равномерно распределяя жесткости анкеров и пород на растяжение-сжатие по площади оболочки. В нашем случае они имеют вид

$$E_{x\Pi}^i = \frac{E_a d_a + (t_i - d_a) \sum_{i=1}^n E_{\Pi}^i / n}{t_i}, \quad E_{y\Pi}^i = \frac{E_a d_a + (t_0 - d_a) \sum_{i=1}^n E_{\Pi}^i / n}{t_0},$$

$$E_{xz\Pi}^i = \frac{E_a d_a + (t_i - d_a) \sum_{i=1}^n G_{\Pi}^i / n}{t_i}, \quad G_{yz\Pi}^i = \frac{t_0}{\frac{d_a}{G_a} + \frac{(t_0 - d_a)}{\sum_{i=1}^n G_{\Pi}^i / n}}, \quad (5.80)$$

$$G_a = \frac{E_a}{2(1 - \nu_a)^2}, \quad G_{\Pi}^i = \frac{E_{\Pi}^i}{2(1 - \nu_{\Pi}^i)^2}, \quad t_i = 2R_{i-1} + \frac{\sin \alpha}{2}, \quad (n = 4).$$

Приведенные коэффициенты Пуассона имеют вид (5.80) при замене E на ν , причем введены следующие обозначения:

E_a, E_{Π}^i – модули нормальной упругости материала анкера и слоев породы, Па;

G_a, G_{Π}^i – соответственно модули сдвига, Па;

d_a – диаметр анкера, м;

t_0 – расстояние между анкерами в направлении x (по длине выработки), м;

t_i – расстояние между анкерами в направлении y , м;

α – центральный угол между анкерами, град.

Остальные параметры в уравнении (5.79) имеют вид

$$B_{66}^i = G^i; \quad a_{44} = G_{yz}^i; \quad a_{55} = G_{xz}^i \quad (5.81)$$

Искомую функцию ищем в виде

$$w(x, y) = \sum_{j=1}^n a_j f_j(x) q_i(y), \quad (5.82)$$

где a_j – неопределенные параметры;

f_j, q_i – координатные функции, удовлетворяющие граничным условиям.

Вводя безразмерные параметры и константы

$$x = L\bar{x}, \quad y = B\bar{y}, \quad z = f\bar{z}, \quad w = L\bar{w}, \quad m = \frac{f}{B}, \quad k = \frac{L}{B},$$

$$d_{12} = \frac{D_{12}}{D_{11}}, \quad d_{22} = \frac{D_{22}}{D_{11}}, \quad d_{66} = \frac{D_{66}}{D_{11}}, \quad r_0 = \frac{2qL^3}{D_{11}}, \quad (5.83)$$

$$h_1 = \frac{h^2}{L^2} - \frac{4m\bar{z}^2}{k^2}, \quad h^* = \frac{h^2 h_1 a_{55} (B_{11}^i)^2}{96D_{11}}, \quad b_1^i = \frac{B_{12}^i + 2B_{66}^i}{B_{11}^i}, \quad b_2^i = \frac{B_{22}^i}{B_{11}^i}, \quad a^* = \frac{a_{44}}{a_{55}}.$$

получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^n a_j \iint \sum_{r=1}^{13} F_r G_r ds = r_0 \iint f_e g_e ds, \quad e = 1, \bar{n}. \quad (5.84)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$F_1 = f_e'' f_j'', F_2 = f_e'' f_j', F_3 = f_e f_j'', F_4 = f_e f_j', F_5 = f_e' f_j',$$

$$F_6 = f_e''' f_j''', F_7 = f_e''' f_j', F_8 = f_e' f_j''', F_9 = f_e' f_j', F_{10} = f_e f_j',$$

$$F_{11} = f_e'' f_j', F_{12} = f_e f_j'', F_{13} = f_e'' f_j'',$$

$$G_1 = g_e g_j, G_2 = d_{12} k^2 g_e g_j'', G_3 = d_{12} k^2 g_e'' g_j, G_4 = d_{22} k^4 g_j'' g_e'', \quad (5.85)$$

$$G_5 = 2d_{66} k^2 g_j' g_e', G_6 = h^* g_e g_j, G_7 = h^* b_1^i k^2 g_e g_j'',$$

$$G_8 = h^* b_1^i k^2 g_e'' g_j, G_9 = h^* (b_1^i)^2 k^4 g_e'' g_j'', G_{10} = h^* (b_2^i)^2 k^6 g_e''' g_j''',$$

$$G_{11} = h^* b_1^i k^4 a^* g_e' g_j''', G_{12} = h^* b_1^i k^4 a^* g_e''' g_j', G_{13} = h^* (b_1^i)^2 k^2 a^* g_e' g_j',$$

$$(0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1),$$

где штрихами обозначены производные.

Напряжения для i -го слоя оболочки примет вид

$$\begin{aligned} \sigma_x^i &= -\frac{m}{k} \bar{z} \left[B_{11}^i \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j'' g_j + k^2 (B_{12}^i + 2B_{66}^i) \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j g_j' \right] + \\ &\quad + \frac{8mk}{[1 + m^2 (1 - 2\bar{y})^2]^{3/2}} B_{12}^i \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j g_j, \\ \sigma_y^i &= -\frac{m}{k} \bar{z} \left[B_{22}^i k^2 \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j g_j'' + (B_{12}^i + 2B_{66}^i) \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j' g_j \right] + \\ &\quad + \frac{8mk}{[1 + m^2 (1 - 2\bar{y})^2]^{3/2}} B_{22}^i \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j g_j, \\ \sigma_z^i &= \nu_{x(y)}^i (\sigma_x^i + \sigma_y^i), \quad (\text{при } \varepsilon_z = 0), \quad \tau_{xy}^i = -2mB_{66}^i \bar{z} \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j' g_j', \quad (5.86) \\ \tau_{xz}^i &= -\frac{1}{8} h_1 \left[B_{11}^i \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j''' g_j + k^2 (B_{12}^i + 2B_{66}^i) \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j' g_j'' \right], \\ \tau_{yz}^i &= -\frac{1}{8} h_1 \left[B_{22}^i k^3 \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j g_j''' + k^2 (B_{12}^i + 2B_{66}^i) \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j'' g_j' \right]. \end{aligned}$$

В качестве координатных функций используем степенные полиномы, удовлетворяющие по методу Риза кинематическим граничным условиям относительно функции w и ее первой производной

Координатные функции согласно методу Ритца

f_i	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
f_1	1	-2	1				
f_2	-1	4	-5	2			
f_3	1	-8	19	-18	6		
f_4	-1	14	-55	92	-70	20	
f_5	1	-22	131	-	440	-	70

g_i	y^0	y^1	y^2	y^3	y^4	y^5
g_1	-1	2				
g_2	1	-6	6			
g_3	-1	12	-30	20		
g_4	1	-20	90	-	70	
g_5	-1	30	-	560	-	252

или по методу Бубнова-Галеркина – всем граничным условиям

$$f(x) = (x^4 - 2x^3 + x^2) / 24; g(y) = 20y^7 - 10y^6 + 84y^5 - 35y^4 + y + 1.$$

Для проверки адекватности приведенной математической модели по (5.87) ботанному алгоритму решения задачи (рис. 5.25) определены перемещения по методам Ритца и Бубнова-Галеркина. При этом использованы следующие исходные данные: для первого и второго слоев средние значения $E_{cp} = 1,75 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_{cp} = 0,33$, третьего – $E_{cp} = 2,0 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_{cp} = 0,32$, четвертого – $E_{cp} = 3,0 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_{cp} = 0,27$; $B = 4,0$ м, $f = 2,5$, $\alpha = 20^\circ$, $R_0 = 2,5$ м, $t_0 = t_1 = 1,0$ м, $q = 3$ МПа.

Предварительные результаты расчеты перемещений показали, что лучшая их сходимость с данными эксперимента происходит при использовании координатных функций (5.87). Однако данные экспериментальных исследований по определению перемещений получены в реальных условиях конвейерного штрека 5-й южной лавы шахты «Добропольская», породы выработки которой были увлажненными, поэтому погрешность результатов расчета составила около 50 %. В связи с этим, в дальнейших исследованиях значения модулей нормальной упругости уменьшены в 1,5 раза. В этом случае при креплении выработки анкерами на расстояниях 1,0 м погрешность перемещений в верхней ее части по результатам теории составила 21 % (рис. 5.26, кривая 1), а при уменьшении расстояния между анкерами в 2 раза (0,5 м) перемещения снижаются в 1,75 раза (кривая 2).

Затем выполнены расчеты по определению нормальных и касательных напряжений выработки, закрепленной анкерами, по зависимостям (5.86). Распределение напряжений σ_x , σ_y , σ_z для внутренней поверхности выработки в направлениях x и y представлены на рис. 5.26-5.29, откуда следует, что максимальные напряжения σ_x возникают в средней ее части, σ_y , σ_z – в заземленной части, причем максимальное значение σ_z равно 0,07 МПа, а в верхней части выработки – 0,06 МПа. Касательные напряжения значительно ниже нормальных, поэтому они не приведены.



Рис. 5.25. Блок-схема алгоритма решения задачи

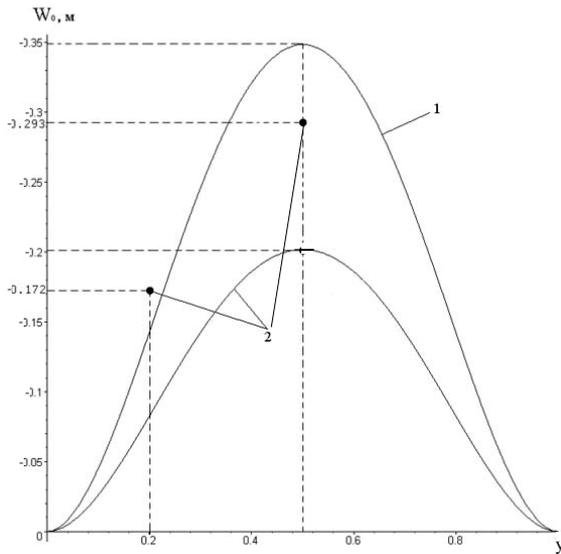


Рис. 5.26. Изменение нормального перемещения, закрепленной анкерами горной выработки:
1, 2 – расстояния между анкерами соответственно 1,0 и 0,5 м; • – данные экспериментальных исследований

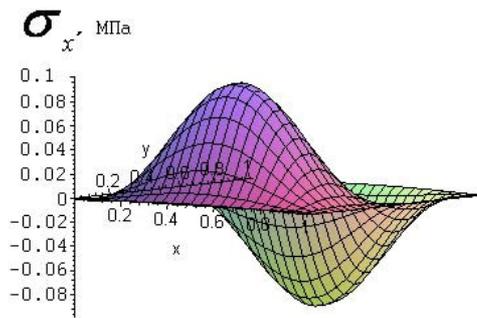


Рис. 5.27. Распределение нормальных максимальных напряжений σ_x внутренней поверхности закрепленной анкерами выработки (расстояние между анкерами 1,0 м)

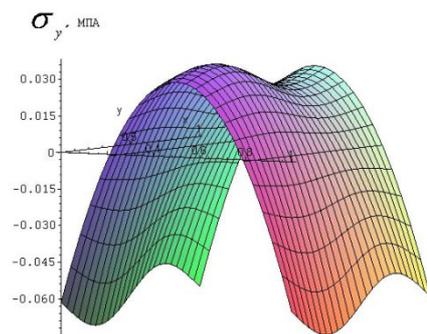


Рис. 5.28. Распределение нормальных максимальных напряжений σ_y внутренней поверхности закрепленной анкерами выработки (расстояние между анкерами 1,0 м)

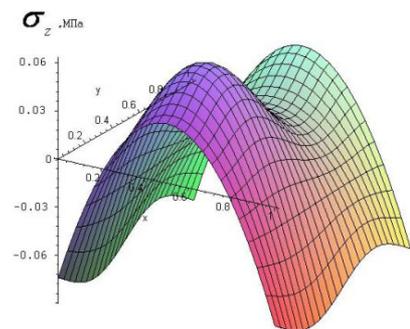


Рис. 5.29. Распределение нормальных максимальных напряжений σ_z внутренней поверхности закрепленной анкерами выработки (расстояние между анкерами 1,0 м)

Таким образом, в данном случае при выборе типа рамной крепи необходимо учитывать, что действующая на нее максимальная внешняя нагрузка q_1 , должна быть равной в пределах 0,06-0,07 МПа.

5.5 Напряженно-деформированное состояние охранного объекта (целика)

5.5.1 Расчетная схема целика

Выше рассмотрены шахтные объекты постоянной толщины. Однако теоретический и практический интерес представляют задачи горной геомеханики, связанные с учетом переменной их толщины и податливости почвы.

Пусть на горный массив по нормали действует внешняя нагрузка: равномерно распределенная от массы вышележащих горных пород, равномерно распределенная в плане и неравномерная по нормали от собственной массы, а его края со стороны выработанного пространства расположены под углами и являются свободными, другие – защемленными.

Пусть координаты x, y, z расположены по напластованию в направлении защемленных, свободных сторон и по нормали, соответственно.

На основании вышеизложенного, в качестве расчетной схемы целика рассмотрим многослойную прямоугольную в плане трансверсально изотропную плиту переменной толщины под действием внешней нагрузки от массы вышележащего горного массива, собственной массы и силы реакции основания, два края которого жестко защемлены, два других – свободные (рис. 5.30, а, б).

Известно, что для обычных пластин или оболочек трехмерная задача теории упругости сводится к двумерной за счет введения допущений о характере распределения деформаций по толщине. Такими допущениями являются положения о сохранении прямых нормалей к срединной (нейтральной) поверхности и

пренебрежения нормальными напряжениями, направленными перпендикулярно к этой поверхности (гипотеза Кирхгофа-Лява).

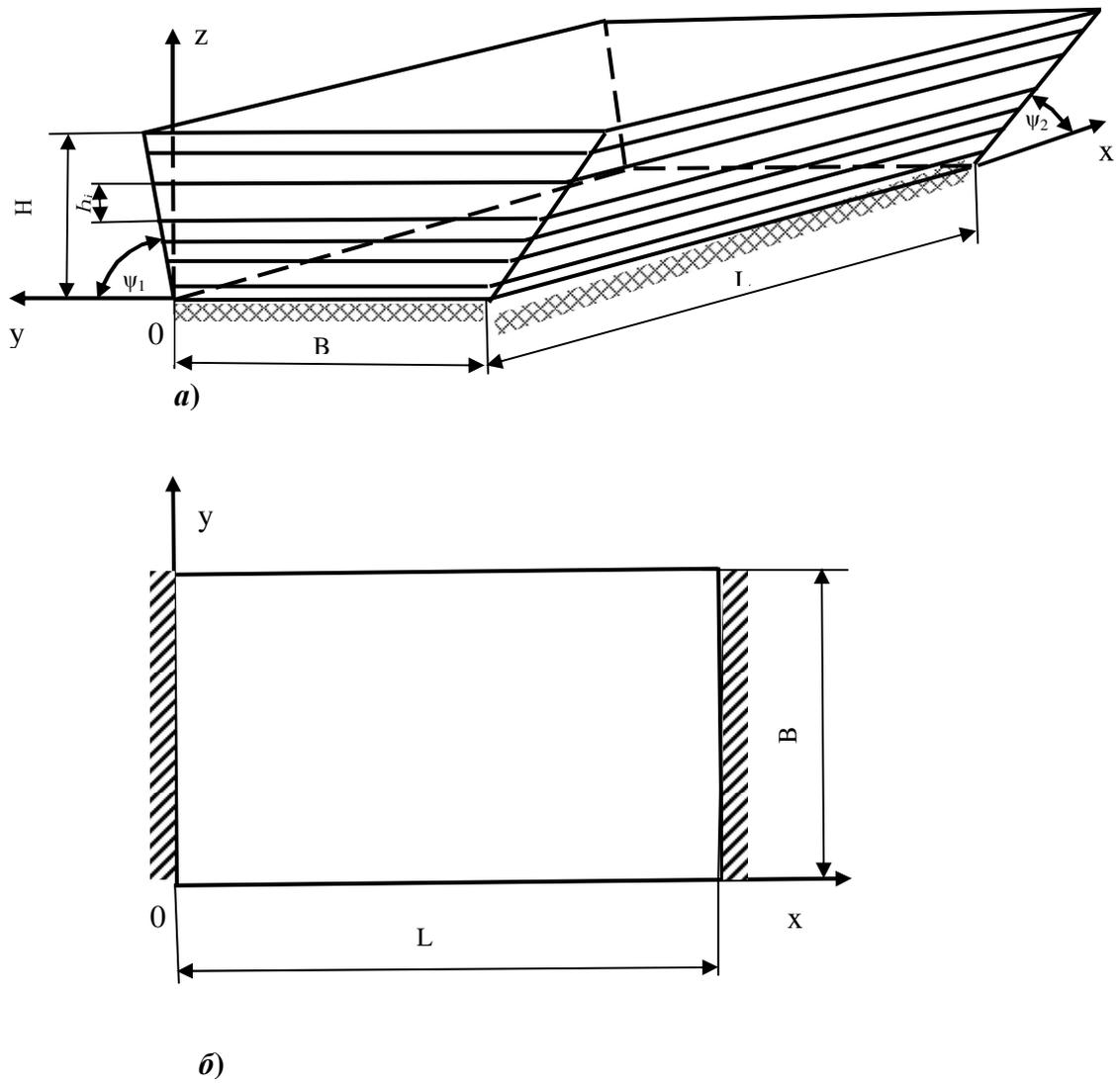


Рис. 5.30. Схема массива горных пород

 – упругое основание

 – защемленный край

 – свободный край

5.5.2 Разработка математической модели

Рассмотрим многослойную плиту в общем случае переменной толщины, собранную из произвольного числа однородных ортотропных слоев толщиной $h_i (i = 1, 2, \dots)$ (см. рис. 5.30, *a, б*).

Предполагается, что в каждой точке любого слоя плиты имеется лишь одна плоскость упругой симметрии, параллельная координатной поверхности плиты; координатная поверхность параллельна внешним ее поверхностям и проходит внутри какого-либо слоя. В частности, координатной поверхностью может служить также какая-либо из поверхностей контакта слоев или одна из граничных поверхностей.

Пусть x и y являются прямоугольными ортогональными координатами, совпадающими с линиями координатной поверхности, которая в свою очередь, является срединной плоскостью пластины, а z , будучи нормальной к координатным линиям $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, является прямолинейной и представляет расстояние по нормали от точки (x, y) координатной поверхности до точки (x, y, z) пластины. Допустим, что все слои пластины при деформации остаются упругими, то есть подчиняются обобщенному закону Гука и работают совместно без скольжения.

Все напряжения, как нормальные, так и касательные, считаются положительными, если они, будучи приложенными к площадкам с положительными внешними нормальными, действуют по направлению соответствующих положительных внешних нормалей.

Если сплошное тело под действием каких-либо сил претерпевает деформацию, то какая-либо точка этого тела получит перемещение, которое может быть представлено тремя проекциями вектора полного перемещения на направления касательных к координатным линиям x, y, z .

$$u_x = u_x(x, y, z), \quad v_y = v_y(x, y, z), \quad w_z = w_z(x, y, z)$$

За положительные принимают перемещения, направленные в сторону положительных изменений соответствующих независимых переменных x, y, z .

Дополнительно предположим:

– расстояние по нормали (z) между двумя точками пластины до и после деформации остаются неизменными;

– при определении деформаций ε_{xz} и ε_{yz} считаем, что касательные напряжения τ_{xz} и τ_{yz} не отличаются от соответствующих напряжений, найденных при наличии гипотезы недеформируемых нормалей, то есть от соответствующих напряжений классической теории изгиба анизотропных пластин.

Решить такую сложную трехмерную задачу не представляется возможным, а поэтому рассмотрим две части ее решения: плоское напряженное состояние и напряженно-деформированное состояние от изгиба и сдвига, а затем эти решения просуммируем.

5.5.3 Плоское напряженное состояние

Рассмотрим массив горных пород как многослойную плиту под действием внешней нагрузки от массы вышележащей толщи пород q_z^* и собственной массы q_z .

Зависимости между деформациями и напряжениями для трансверсально изотропного тела согласно обобщенному закону Гука имеют вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E_x}(\sigma_x - \nu_x \sigma_y) - \frac{\nu_z}{E_z} \sigma_z \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E_x}(\sigma_y - \nu_x \sigma_x) - \frac{\nu_z}{E_z} \sigma_z \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu_z}{E_z}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{E_z} \sigma_z; \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{G_{xy}} \tau_{xz}; \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{G_{xz}} \tau_{xz}; \quad \varepsilon_{yz} = \frac{1}{G_{yz}} \tau_{yz}.\end{aligned}\tag{5.88}$$

При решении плоской задачи считали, что напряжения в направлении свободных краев деформации в направлении защемленных краев, а также деформации сдвига равны нулю, т.е.

$$\sigma_y = 0, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0 \quad (5.89)$$

Пусть длины слоев плотностью $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$, толщиной h_1, h_2, \dots, h_n , начиная с верхнего, равны $l_1, l_2, l_3, \dots, l_n$.

Тогда нормальные напряжения соответственно примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_z^{(1)} &= \frac{(q_z^* + \rho_1 h_1)}{l_1}; \\ \sigma_z^{(2)} &= \frac{(q_z^* + \rho_1 h_1)l_1}{l_2} + \rho_2 h_2 = \frac{q_z^* l_1 + \rho_1 h_1 l_1 + \rho_2 h_2 l_2}{l_2}; \\ \sigma_z^{(3)} &= \frac{(q_z^* + \rho_1 h_1)l_1 + \rho_2 h_2 l_2 + \rho_3 h_3 l_3}{l_3}; \\ &\dots\dots\dots \\ \sigma_z^{(n)} &= \frac{1}{l_n} (q_z^* l_1 + \sum_{i=1}^n \rho_i h_i l_i). \end{aligned} \quad (5.90)$$

Подставляя выражение (5.90) в зависимости (5.88), для i -го слоя массива, получим

$$\sigma_x^{(n)} = \frac{\nu_z E_x}{E_y} \frac{1}{l_n} (q_z^* l_1 + \sum_{i=1}^n \rho_i h_i l_i) \quad (5.91)$$

Найдем перемещение w для плиты, которое понадобится в дальнейшем при определении координатной функции от изгиба. К нижнему слою (угольный пласт) приложим силы реакции, передающиеся от основания к плите

$$q_1 = \sigma_z^{(n+1)} = k^* w^{(n+1)}, \quad (5.92)$$

где $n+1$ – обозначен нижний слой плиты;

k^* – модуль основания, или коэффициент постели, Н/м³.

Используя зависимость в общем виде

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{E_z} (\sigma_z - \nu_z \sigma_x),$$

после интегрирования получим

$$w = \frac{1}{E_z} (\sigma_z - \nu_z \sigma_x) z + c. \quad (5.93)$$

Для первого слоя $(n+1)$ эта зависимость примет вид

$$w^{(n+1)}\left(\frac{h_{n+1}}{2}\right) = \frac{1}{E_z^{(n+1)}} (\sigma_z^{(n+1)} - \nu_z^{(n+1)} \sigma_x^{(n+1)}) \frac{h_{n+1}}{2} + c_{n+1} \quad (5.94)$$

При $H_{n+1} = 0$

$$w^{(n+1)}(0) = \frac{1}{k^*} \sigma_z^{(n+1)}. \quad (5.95)$$

Из выражения (5.90) следует

$$w^{(n+1)}(0) = c_{n+1} \quad \text{или} \quad c_{n+1} = \frac{1}{k^*} \sigma_z^{(n+1)}. \quad (5.96)$$

Подставляя значение константы (5.96) в (5.90), получим перемещение для первого слоя

$$w^{(n+1)}\left(\frac{h_{n+1}}{2}\right) = \frac{1}{E_z^{(n+1)}} (\sigma_z^{(n+1)} - \nu_z^{(n+1)} \sigma_x^{(n+1)}) \frac{h_{n+1}}{2} + \frac{1}{k^*} \sigma_z^{(n+1)}. \quad (5.97)$$

Перемещение в любой точке по высоте первого слоя

$$w^{(n+1)}(z) = \frac{1}{E_z^{(n+1)}} (\sigma_z^{(n+1)} - \nu_z^{(n+1)} \sigma_x^{(n+1)}) z + \frac{1}{k^*} \sigma_z^{(n+1)} \quad (5.98)$$

Для второго слоя (n)

$$w^{(n)}(z) = \frac{1}{E_z^{(n)}} (\sigma_z^{(n)} - \nu_z^{(n)} \sigma_x^{(n)}) z + c_n \quad (5.99)$$

используя условие, что перемещения между первым и вторым слоем равны

$$w^{(n)}(h_{n+1}) = w^{(n+1)}(h_{n+1}),$$

получим

$$\frac{1}{E_z^{vm}} (\sigma_z^{(n)} - \nu_z^{(n)} \sigma_x^{(n)}) h_{n+1} + c_n = w^{(n+1)}(h_{n+1}),$$

отсюда

$$c_n = w^{(n+1)}(h_{n+1}) - \frac{1}{E_z^n} (\sigma_z^{(n)} - \nu_z^{(n)} \sigma_x^{(n)}) h_{n+1}. \quad (5.100)$$

Перемещения в срединной поверхности второго слоя

$$w^{(n)}(h_{n+1} + \frac{h_n}{2}) = \frac{1}{E_z^{(n)}} (\sigma_z^{(n)} - \nu_z^{(n)} \sigma_x^{(n)}) (h_{n+1} + \frac{h_n}{2}) + c_n,$$

где c_n имеет вид (5.100).

Поступая аналогично для последующих слоев, в результате для последнего слоя $(n-k)$ получим

$$w^{(n-k)}(H_{n-k}) = \frac{1}{E_z^{(n-k)}} (\sigma_z^{(n-k)} - \nu_z^{(n-k)}) H_{n-k} + c_{n-k}, \quad (5.101)$$

где

$$c_{n-k} = \frac{1}{E_z^{(n-k+1)}} (\sigma_z^{(n-k+1)} - \nu_z^{(n-k+1)} \sigma_x^{(n-k+1)}) (H_{n-k} - \frac{h_{n-k}}{2}) + c_{n-k+1} - \frac{1}{E_z^{(n-k)}} (\sigma_z^{(n-k)} - \nu_z^{(n-k)} \sigma_x^{(n-k)}) (H_{n-k} - \frac{h_{n-k}}{2}), \quad (5.102)$$

$$H_{n-k} = h_{n-k} + h_n + h_{n-1} + \dots + h_{n-k+1} + \frac{h_{n-k}}{2}.$$

Перейдем к решению второй части задачи.

5.5.4 Напряженно-деформированное состояние от изгиба и сдвига

Для определения напряженно-деформированного состояния плиты от изгиба и сдвига рассмотрим расчетную схему, приведенную на рис. 5.30, а, б. При этом учитываются все три вида нагрузок: от массы вышележащего массива горных пород q_z^* , собственной массы q_z и сил реакции основания q_1 .

Для решения задачи используем прием, состоящий в представлении полного прогиба в виде суммы двух составляющих – за счет изгиба w_0 и сдвига w_1

$$w = w_0 + w_1. \quad (5.103)$$

Деформации в любой точке i -го слоя пластины в предположении гипотезы прямых нормалей имеют вид

$$\epsilon_x^i = z \cdot \chi_1, \epsilon_y^i = z \cdot \chi_2, \epsilon_{xy}^i = 2\tau z. \quad (5.104)$$

Соответствующие перемещения

$$u_x^i = z(w^i)'_x; \quad v_y^i = z(w^i)'_y. \quad (5.105)$$

В выражении (5.101) приняты краткие обозначения в частных производных, которые будут использованы в дальнейшем.

Параметры изменения кривизны в пределах точности технической теории

$$\chi_1 = -(w''_{0xx} + w''_{1xx}), \quad \chi_2 = -(w''_{0yy} + w''_{1yy}), \quad \tau = -(w''_{0xy} + w''_{1xy}), \quad (5.105)$$

где $w''_{1xx}, w''_{1yy}, w''_{1xy}$ – дополнительные слагаемые, учитывающие влияния поперечных (перерезывающих) сил.

Закон Гука для i -го слоя плиты запишем

$$\epsilon_x^i = \frac{1}{E_x^i} \sigma_x^i - \frac{\nu_y^i}{E_y^i} \sigma_y^i; \quad \epsilon_y^i = \frac{1}{E_y^i} \sigma_y^i - \frac{\nu_x^i}{E_x^i} \sigma_x^i; \quad \epsilon_{xy}^i = \frac{1}{G_{xy}^i} \tau_{xy}^i. \quad (5.106)$$

Решая систему уравнений (5.106) относительно компонент тензора напряжений и учитывая соотношения (5.100), получим

$$\sigma_x^i = z(B_{11}^i \cdot \chi_1 + B_{12}^i \cdot \chi_2); \quad (5.107)$$

$$\sigma_y^i = z(B_{12}^i \cdot \chi_1 + B_{22}^i \cdot \chi_2);$$

$$\tau_{xy}^i = 2zB_{12}^{*i} \tau,$$

где упругие постоянные материала слоев пластины имеют вид

$$B_{11}^i = E_x^i \Delta_1^{-1}; \quad B_{12}^i = \nu_y^i E_x^i \Delta_1^{-1}; \quad B_{22}^i = E_y^i \Delta_1^{-1}; \quad (5.108)$$

$$B_{12}^{*i} = G_{12}^{*i}; \quad \Delta_1 = 1 - \nu_x^i \nu_y^i.$$

Умножая (5.104) на z и соответственно интегрируя, получим выражения для изгибающих и крутящего моментов

$$M_1 = D_{11} \cdot \chi_1 + D_{12} \cdot \chi_2; \quad M_2 = D_{12} \cdot \chi_1 + D_{22} \cdot \chi_2; \quad M_{12} = 2D_{12}^{*} \tau. \quad (5.109)$$

В соотношениях (5.106) введены следующие обозначения для жесткостей на изгиб и кручения (см.рис.5.13)

$$D_{jk} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{m+k} B_{jk}^i \left[(\delta_i^3 - \delta_{i-1}^3) - 3\Delta(\delta_i^2 - \delta_{i-1}^2) + 3\Delta^2(\delta_i - \delta_{i-1}) \right], \quad (5.110)$$

где δ_{i-1} – расстояние по нормали от предыдущей до последующей поверхности плиты;

D_{12}^* – получены из (5.108) заменой B_{jk} на B_{12}^* .

Здесь $(m + k)$ – число всех слоев пластины; n – число слоев ниже координатной поверхности; k – число остальных слоев; Δ – расстояние по нормали от нижней до координатной поверхности плиты. Если координатная поверхность плиты расположена внутри какого-либо слоя, то под k подразумевается число слоев выше координатной поверхности плюс один, а если же координатная поверхность плиты совпадает с какой-либо поверхностью контакта, то под k подразумевается число слоев выше координатной поверхности.

В силу принятой гипотезы о недеформируемой нормали плиты поперечные силы имеют вид

$$Q_{xz} = G_{xz} H (w'_1)_x; \quad Q_{yz} = G_{yz} H (w'_1)_y, \quad (5.111)$$

а в связи с принятыми предположениями для напряжений, имеем

$$\tau_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{H^2}{4} - z^2 \right) \Phi_0; \quad (5.112)$$

$$\tau_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{H^2}{4} - z^2 \right) \Psi_0,$$

где функции Φ_0 и Ψ_0 при интегрировании (5.112) имеют вид

$$\Phi_0 = \frac{12}{H^3} Q_{xz}; \quad \Psi_0 = \frac{12}{H^3} Q_{yz}. \quad (5.113)$$

В соответствии с принципом возможных перемещений вариация полной энергии деформированной пластины в состоянии равновесия равна нулю, то есть

$$\delta \delta = \delta U + \delta V = 0, \quad (5.114)$$

где U – вариация потенциальной энергии пластины;

V – вариация потенциала внешних сил.

Вариация потенциала внешних сил для первого варианта пластины равна вариации суммы потенциальной энергии нагрузки от массы вышележащего массива q_z^* , собственной массы q_z и реакции основания q_1 .

$$\delta V = \frac{1}{2} \delta \iint [(q_z^* + q_z)w_0 - k^* w_0^2] ds. \quad (5.115)$$

где $ds = dx dy$, $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq B + H(\operatorname{ctg} \psi_1 + \operatorname{ctg} \alpha_2)z$.

Вариацию потенциальной энергии плиты представим как сумму вариаций энергий деформаций изгиба δU_H и сдвига δU_C .

$$\delta U = \delta U_H + \delta U_C, \quad (5.116)$$

где

$$\delta U_H = \iint (M_1 \delta \cdot \chi_1 + M_2 \delta \cdot \chi_2 + 2M_{12} \delta \tau) ds; \quad (5.117)$$

$$\delta U_C = \iint (Q_{xz} \delta \epsilon_{xz} + Q_{yz} \delta \epsilon_{yz}) ds. \quad (5.118)$$

Здесь $\epsilon_{xz}, \epsilon_{yz}$ – деформации сдвига в плоскости xOz и yOz соответственно.

$$\epsilon_{xz} = (w'_1)_x, \quad \epsilon_{yz} = (w'_1)_y. \quad (5.119)$$

Преобразуем выражение (5.117), используя соотношения (5.109)

$$\delta U_H = \frac{1}{2} \delta \iint (D_{11} \chi_1^2 + 2D_{12} \chi_1 \chi_2 + D_{22} \chi_2^2 + 4D_{12}^* \tau^2) ds. \quad (5.120)$$

Учитывая соотношения (5.114), (5.115), (5.118), (5.120) и заменяя параметры изменения кривизны функциями прогибов w_0 и w_1 из выражения (5.106), для вариации полной энергии слоистой пластины получим

$$\delta \delta = \delta \iint [L_a(w, w) + L(w_1)] ds = \delta \iint [(q_z^* + q_z)w_0 - k^* w_0^2] ds. \quad (5.129)$$

Здесь введены следующие обозначения

$$L_p(\Psi, \eta) = p_{11}(\Psi'')_{xx}(\eta'')_{xx} + 2p_{12}(\Psi'')_{xx}(\eta'')_{yy} + p_{22}(\Psi'')_{yy}(\eta'')_{yy} + 2p_{12}^*(\Psi'')_{xy}(\eta'')_{xy};$$

$$L(w_1) = C_{13}(w_1')_x^2 + C_{23}(w_1')_y^2; \quad (5.130)$$

$$D_{jk} = a_{jk}; \quad 2D_{12}^* = a_{12}^*.$$

В выражении $L_p(\Psi, \eta)$ p_{jk} принимает значения a_{jk}, c_{jk} , а функции Ψ и η соответствуют функциям w_0 и w_1 .

Искомые функции представим в виде

$$w_0(x, y) = \sum_{j=1}^n a_j f_j(x) g_j(y);$$

$$w_1(x, y) = \sum_{j=1}^m c_j l_j(x) u_j(y),$$
(5.131)

где a_j, c_j – неопределенные параметры;

f_j, \dots, u_j – заданные координатные функции.

Подставив выражения (5.119) в (5.112) и приравнявая нулю, производные по параметрам от интеграла по срединной поверхности, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно a_j, c_j .

Вводя безразмерные величины и константы по формулам

$$w_0 = L\bar{w}_0; \quad w_1 = L\bar{w}_1; \quad x = L\bar{x}; \quad y = B\bar{y}; \quad H = H_0\bar{H};$$

$$D_{jk} = D_0\bar{h}_{jk}; \quad D_{12}^* = D_0\bar{h}_{12}^*;$$

$$C_{13} = G_0\bar{\alpha}_{13}; \quad C_{23} = G_0\bar{\alpha}_{23}; \quad (5.132)$$

$$k_0 = \frac{L}{B}; \quad \tau_0 = \frac{G_0 H_0 L^2}{D_0}; \quad \rho_0 = \frac{q_0 L^2 B}{D_0};$$

$$q_z = q_0\bar{q}_z$$

и опуская в дальнейшем черту в обозначениях безразмерных величин, получим систему уравнений следующего вида

$$\sum_{j=1}^n a_j \iint \sum_{r=1}^5 F_r G_r ds + \sum_{j=1}^m c_j \iint \sum_{r=1}^5 R_r S_r ds = \rho_0 \iint \left[\frac{q_z^*}{q_0} + 1 \int tq - 2 \frac{k^* L}{q_0} a_0 f^2 q^2 \right] ds;$$

$$\sum_{j=1}^n a_j \iint \sum_{r=1}^5 R_r S_r ds + \sum_{j=1}^m c_j \iint \sum_{r=1}^7 L_r U_r ds = 0; \quad (5.133)$$

$$0 \leq x \leq 1; \quad 0 \leq y \leq [1 + kz(ctq\psi_1 + ctq\psi_2)]; \quad k = \frac{H_0}{B},$$

где введены следующие обозначения

$$F_1 = f_i'' f_j''; \quad F_2 = f_i'' f_j'; \quad F_3 = f_i' f_j''; \quad F_4 = f_i' f_j'; \quad F_5 = f_i' f_j'; \quad G_1 = h_{11} g_i g_j;$$

$$G_2 = k_0^2 h_{12} g_i'' g_j; \quad G_3 = k_0^2 h_{12} g_i' g_j''; \quad G_4 = k_0^4 h_{12} g_i'' g_j''; \quad G_5 = 4k_0^2 h_{12}^* g_i' g_j'; \quad (5.134)$$

$$L_6 = l_i' l_j'; \quad L_7 = l_i l_j; \quad U_6 = \tau_0 \alpha_{13} u_i u_j; \quad U_7 = k_0^2 \tau_0 \alpha_{23} u_i' u_j'.$$

Выражения для функций R_r и S_r , L_r и U_r получили из выражений для F_r и G_r заменой в них f на l и g на u .

Зависимости для напряжений имеют вид

$$\sigma_x^i = -\frac{z}{L} \left[\sum_{j=1}^n a_j (B_{11}^i f_j'' g_j + k_0 B_{12}^i f_j' g_j'') + \sum_{j=1}^m c_j (B_{11}^i l_j'' u_j + k_0 B_{12}^i l_j' u_j'') \right],$$

$$\sigma_y^i = -\frac{z}{L} \left[\sum_{j=1}^n a_j (B_{12}^i f_j'' g_j + k_0 B_{22}^i f_j' g_j'') + \sum_{j=1}^m c_j (B_{12}^i l_j'' u_j + k_0 B_{22}^i l_j' u_j'') \right],$$

$$\tau_{xy}^i = -\frac{2k_0}{L} z B_{12}^i \left(\sum_{j=1}^n a_j f_j' g_j' + \sum_{j=1}^m c_j l_j' u_j' \right), \quad (5.135)$$

$$\tau_{xz} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{4z^2}{H^2} \right) G_{xz} \sum_{j=1}^m c_j l_j' u_j',$$

$$\tau_{yz} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{4z^2}{H^2} \right) G_{yz} \sum_{j=1}^m c_j l_j' u_j'.$$

Зная геометрические параметры целика, количество слоев горных пород, их механические характеристики и нагрузки, граничные условия с учетом выбранных координатных функций, можно определить его суммарные перемещения по зависимостям (5.101), (5.103), (5.131) и напряжения – (5.135). Это дает возможность найти длину целика, которая обеспечивает его устойчивость и прочность, а следовательно сохранность горных выработок.

Аналогично, принимая расчетные схемы, в частности, охранных сооружений для непосредственной кровли, стволов, а также других подземных объектов и используя вышеприведенный вариационный метод решения краевых задач, можно определить их параметры, необходимые для надежной работы этих объектов.

Контрольные вопросы

1. Основные понятия, исходные соотношения и гипотезы теории слоистых анизотропных пластин и оболочек.
2. Перемещения, деформации и напряжения в слоях.
3. Уравнения неразрывности деформаций координатной поверхности.
4. Условия контакта смежных слоев.
5. Внутренние силы, моменты и уравнения равновесия.
6. Потенциальная энергия деформации.
7. Соотношения упругости.
8. Граничные условия.
9. Частные случаи анизотропии материала слоев оболочки.
10. Оболочки, составленные из нечетного числа слоев, симметрично расположенных относительно координатной поверхности.
11. Вычисления жесткостей для произвольных направлений.
12. Трещиноватость массивов горных пород.
13. Определение механических характеристик.
14. Системы зияющих трещин.
15. Система трещин с заполнителем.

16. Сущность физического и математического моделирования.
17. Метод эквивалентных материалов.
18. Метод эквивалентных материалов.
19. Методы фотомеханики.
20. Моделирование тепловых процессов в горном деле.
21. Моделирование гидродинамических процессов.
22. Моделирование конвективного теплообмена.
23. Измерение физических параметров, обобщение данных и определение ошибки при моделировании.
24. Математическое моделирование с применением моделей аналогов.
25. Метод электромеханических аналогий.
26. Критерии подобия и масштабы моделирования на основе электромеханических аналогий.
27. Метод электрогидродинамических аналогий (метод ЭГДА).
28. Метод электрических сеток.
29. Сущность вариационных методов.
30. Требования для вывода вариационного уравнения.
31. Требования к выбору координатных функций.
32. Метод Ритца.
33. Метод Бубнова-Галеркина.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Механика горных пород: Т.1/Под общей ред. С.С. Гребенкина, Н.Н. Гавриша. – Донецк: ДонНТУ, 2004. – 170 с.
2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек / С.А. Амбарцумян. – М.: Физматлит., 1961. – 384 с.
3. Березин М.С., Жидков Н.П. Методы вычислений: Т.2. / М.С. Березин. – М.: Физматлит., 1962. – 640 с.
4. Дарков А.В. Строительная механика / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. – М.: Высшая школа, 1986. – 608 с.
5. Руппенейт К.В. Деформируемость массивов трещиноватых горных пород / К.В. Руппенейт. – М.: Недра, 1975. – 224 с.
6. Насонов И.Д. Моделирование горных процессов / И.Д. Насонов. – М.: Недра, 1978. – 229 с.
7. Олексеенко С.Ф. Основы моделирования при решении задач горной геомеханики / С.Ф. Олексеенко, А.Г. Заболотный, Л.А. Штанько.– Киев: Техника, 1996. – 178 с.
8. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике / Л.И. Седов. – М.: Наука, 1967. – 428 с.
9. Тимошенко С.П. Теория упругости / С.П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М.: Наука, 1975. – 557 с.
10. Ямщиков В.С. Методы и способы испытаний и контроля горных пород и процессов / В.С. Ямщиков. – М.: Недра, 1982. – 196 с.
11. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике / С.Г. Михлин. – М.: Гостехиздат, 1957. – 512 с.
12. Алексеенко С.Ф. Исследование на реологических моделях деформационных свойств горных пород при динамических нагрузках / С.Ф. Алексеенко, В.П. Мележик // Физико-технические проблемы разработки месторождений полезных ископаемых. – 1977. – №2. – С. 30–36.
13. Исследование массива горных пород методами фотомеханики. Под редакцией Н.Ф. Кусова. – М.: Наука, 1982. – С. 172–180.
14. Исследование напряженного состояния горных пород методом ЭГДА / Липкович С.М., Ильченко О.М., и др. Изв. высш. уч. зав.: Горный журнал. – №12. – 1965.
15. Зборщик М.П., Соловьев В.Н. Исследование распределения напряжений в почве подготовительных выработок методом ЭГДА / М.П. Зборщик, В.Н. Соловьев // Разработка месторождений полезных ископаемых. – Киев: Техника, 1974. – №38. – С. 44–48.
16. Ржевский В.В. О научных основах расчетов давления горных пород / В.В. Ржевский // Изв. высш. уч. зав.: Горный журнал. – 1982. – №7. – С. 1–10.

17. Докукин А.В. Моделирование задач механики горных пород методами фотомеханики с использованием голографии / А.В. Докукин, В.Ф. Трумбачев, С.Н. Славин // Горное давление. – Фрунзе: ИХИМ, 1978. – С. 5 –15.
18. Филатов Н.А. Фотоупругость в горной геомеханике / Н.А. Филатов, В.Д. Белеков, Г.А. Иевлев. – М.: Недра, 1975. – 180 с.
19. Теория подобия и размерностей. Моделирование. П.М. Алабужев, В.Б. Горенимус, Л.М. Минкевич и др. – М.: Высшая школа, 1968. – 205 с.
20. Алексеенко С.Ф. Электрическое моделирование реологических процессов при испытаниях горных пород / С.Ф. Алексеенко // Науч. сообщ. ИГД им. Скочинского. – №68. – М., 1969. – С. 97 – 103.
21. Алексеенко С.Ф. Электрическое моделирование осадки основной кровли в очистном забое / С.Ф. Алексеенко. – М.: Недра, 1971. – 27 с.
22. Моделирование геомеханических процессов в массиве горных пород. Под общей ред. Ю.А. Петренко. – Донецк: НОУЛИДЖ, 2009. – 161 с.
23. Основы моделирования геомеханических процессов. Под общей ред. И.А. Ефремова, Н.В. Малеева.– Донецк: НОУЛИДЖ, 2012. – 262 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1. Основные уравнения теории упругости анизотропного тела в криволинейных координатах	5
1.1. Некоторые сведения о криволинейных координатах в пространстве	5
1.2. Составляющие деформации и дифференциальные уравнения равновесия в триортогональной системе криволинейных координат	7
1.3. Криволинейная анизотропия. Обобщенный закон Гука	10
2. Основные уравнения теории анизотропных слоистых оболочек	18
2.1. Основные понятия, исходные соотношения и гипотезы	18
2.2. Перемещения, деформации и напряжения в слоях	20
2.3. Уравнения неразрывности деформаций координатной поверхности	22
2.4. Условия контакта смежных слоев	23
2.5. Внутренние силы, моменты и уравнения равновесия	24
2.6. Потенциальная энергия деформации	26
2.7. Соотношения упругости	28
2.8. Граничные условия	28
2.9. Частные случаи анизотропии материала слоев оболочки	31
2.10. Оболочки, составленные из нечетного числа слоев, симметрично расположенных относительно координатной поверхности	34
2.11. О соотношениях упругости	35
2.12. Вычисления жесткостей для произвольных направлений	38
2.13. Приближенная теория анизотропной пластинки, учитывающая явления поперечного сдвига	39
3. Деформируемость массивов трещиноватых горных пород	47
3.1. Некоторые сведения о трещиноватости массивов горных пород	47
3.2. Определение механических характеристик	58
3.2.1. Системы зияющих трещин	58
3.2.2. Система трещин с заполнителем	67
4. Физическое и математическое моделирование геомеханических процессов с применением моделей-аналогов	71

4.1.	Общие сведения	71
4.2.	Метод эквивалентных материалов	75
4.3.	Методы фотомеханики	82
4.4.	Моделирование тепловых процессов в горном деле	101
4.5.	Моделирование гидродинамических процессов	107
4.6.	Моделирование конвективного теплообмена	117
4.7.	Измерение физических параметров, обобщение данных и определение ошибки при моделировании	121
4.7.1.	Измерение физических параметров	121
4.7.2.	Обобщение данных опытов	131
4.7.3.	Оценка и определение ошибки при моделировании	135
4.8.	Математическое моделирование с применением моделей аналогов	139
4.8.1.	Метод электромеханических аналогий	139
4.8.2.	Критерии подобия и масштабы моделирования на основе электромеханических аналогий	153
4.8.3.	Метод электрогидродинамических аналогий (метод эгда)	155
4.8.4.	Метод тепло-гидравлических аналогий	163
4.8.5.	Решение краевых задач методом электрических сеток	182
5.	Вариационные методы решения краевых задач в геомеханике	190
5.1.	Общие сведения	190
5.2.	Влияние напряженно-деформированного состояния пород кровли пласта на образование пожароопасных зон	196
5.2.1.	Выбор расчетной схемы и этапы решения задачи	198
5.2.2.	Основные соотношения упругости	202
5.2.3.	Вариационное уравнение	206
5.2.4.	Система разрешающих уравнений	208
5.2.5.	Выбор координатных функций	210
5.2.6.	Результаты исследований	217
5.3.	Напряженно-деформированное состояние армированного анкерами горного массива	233
5.4.	Напряженно-деформированное состояние закрепленной анкерами горной выработки	249
5.5.	Напряженно-деформированное состояние охранного объекта (целика)	257

5.5.1. Расчетная схема охранного сооружения	257
5.5.2. Разработка математической модели	259
5.5.3. Плоское напряженное состояние	260
5.5.4. Напряженно-деформированное состояние от изгиба и сдвига	263
Контрольные вопросы	269
Список литературы	271