

**ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**Кафедра «Строительство зданий, подземных
сооружений и геомеханика»**

**Курс лекций
по курсу «Моделирование физических процессов в горном деле»
для студентов направлений подготовки
21.05.04 «Горное дело».**

**Рассмотрено
на заседании кафедры
«Строительство зданий,
подземных сооружений и
геомеханика»**

Протокол № 1 от 03 02. 2018 г.

**Утверждено
на заседании учебно-издательского
совета ДонНТУ
Протокол № 5 от 15 . 02.2018 г.**

УДК 551. 24.02

Конспект лекций по курсу «Моделирование физических процессов в горном деле» (для студентов направлений подготовки 21.05.04 «Горное дело») / Сост. доценты Марийчук И.Ф., Купенко И.В., ассистент Барсук Н.Д. – Донецк: ДонНТУ, 2016.– 347 с.

Рецензент д.т.н., проф. Петренко Ю.А.

Приведены общие сведения о моделировании, основы теории и условия подобия: геометрическое, физических полей и явлений, включая механическое, гидродинамическое, тепловое, основы теории размерностей. Основная часть лекций посвящена физическому моделированию геомеханических процессов: методам эквивалентных материалов, центробежного моделирования, фотомеханики, тепловых и гидродинамических процессов, электромеханических аналогов. Остальная часть – математическому моделированию, в частности численным методам решения краевых задач в геомеханике: конечным разностям, конечным граничным и дискретным элементам, вариационным методам, в том числе решению задач о напряженно-деформированном состоянии непосредственной кровли и выработки, закрепленной анкерами, методами Ритца и Бубнова-Галеркина.

Конспект лекций по дисциплине подготовлен для студентов горного факультета и может быть полезным для аспирантов и сотрудников при выполнении научных исследований.

ВВЕДЕНИЕ

Горная наука, находясь на стыке естественных и технических наук, в конечном итоге синтезирует достижения в области математики, физики, химии, экономики, машиностроения и других наук для решения основных проблем горного производства.

Необходимо отметить, что физические процессы, изучаемые горной наукой, отличаются большой сложностью. Это связано с большими трудностями, как при аналитических исследованиях, так и при непосредственных наблюдениях в натурных условиях. В связи с этим многие вопросы различных горных процессов еще не ясны и недостаточно изучены, хотя теоретический уровень горной науки, особенно за последние двадцатилетия, значительно возрос. Этому в известной мере способствовало широкое использование в исследованиях физических и теоретических процессов горного производства различных методов моделирования.

Задача дальнейшего развития горной науки наряду с теоретическими исследованиями настоятельно требует все более широкого применения методов моделирования и, главным образом, дальнейшего развития методов математического исследования по сравнению с физическими моделями и натурными экспериментами.

Как известно, процесс разрушения горных пород является основным при добыче твердых полезных ископаемых, и его совершенствование имеет большое экономическое значение. Научные исследования в области разрушения горных пород должны быть направлены не только на дальнейшее совершенствование механического и взрывного методов разрушения, но также и на изыскание новых методов: струей воды, термическим способом, микровзрывами ВВ, кумулятивными зарядами, токами низкой и высокой частоты и т.д. Многие из этих вопросов, особенно их теоретическая часть, могут быть решены только на базе экспериментальных исследований, и в частности с помощью моделирования физических процессов разрушения горных пород.

Весьма важные проблемы возникают при подземной разработке месторождений полезных ископаемых на больших глубинах. Недостаточно изучены такие

вопросы, как газовыделение (внезапные выбросы пород, угля и газа), проявления давления (горные удары, высыпания), повышение температуры рудничного воздуха, теплообмен в горных выработках и т.д.

Во всех этих вопросах наряду с дальнейшим более тщательным изучением физико-механических и особенно реологических свойств горных пород необходимы широкие исследования на моделях физических процессов сдвижений и деформаций пород с целью установления общих закономерностей теории горного давления, а также с целью прогнозирования внезапных выбросов и разработки предупредительных мероприятий. При решении этих задач применяют методы моделирования.

По мере развития горной промышленности во всех странах происходит процесс постепенного истощения месторождений полезных ископаемых с благоприятными горно-геологическими условиями. В связи с этим в эксплуатацию вводятся месторождения со сложными гидрогеологическими условиями, перекрытые мощными толщами обводненных и неустойчивых пород, в которых вскрытие, подготовка и эксплуатация требуют применения комплекса специальных мероприятий.

Ближайшими задачами в решении проблемы разработки месторождений в сложных условиях являются установление общих закономерностей и создание инженерных методов расчета в таких вопросах, как замораживание горных пород при сооружении глубоких стволов, низкотемпературное замораживание засоленных и фильтрующих вод, прогнозирование притоков подземных вод, увлажнение и дегазация горных пород с целью улучшения санитарно-гигиенических условий труда, планового и эффективного дренажа подземных вод, а также изыскание химических способов управления слабых водоносных пород.

Многие вопросы и задачи этих проблем, особенно изучение физической стороны процессов, успешно могут быть решены с применением методов моделирования.

Что касается других, не менее важных задач горной науки, касающиеся техники, комплексной механизации и автоматизации производственных процессов,

экономики, планирования и управления горным производством, то все эти вопросы выходят за рамки данного курса и не будут рассматриваться.

Таким образом, в курсе «Геомеханические процессы» будут рассмотрены, в основном, методы экспериментальных исследований (моделирование), которые применяют для изучения физических процессов горного производства, связанных с извлечением, разрушением, расслаблением и укреплением пород.

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ГЕОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ И МЕТОДАХ ИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Моделирование как метод научного исследования получило развитие в середине девятнадцатого столетия. Однако уже за долго до этого ряд ученых на основе полуинтуитивных соображений зачастую обращались при решении отдельных задач, в основном, строительных и архитектурных. Познавательные возможности таких моделей были довольно ограниченными, на что обратили свое внимание еще ученые средневековья Леонардо да Винчи и Галилео Галилей.

В XIX в. начинается период от спорадического применения моделей, при котором исследователь руководствовался лишь собственным чутьем и весьма непосредственными соображениями, обобщающие его собственный по необходимости ограниченный опыт, к систематическому применению моделирования, оказавшемуся возможным и плодотворным благодаря активизирующейся в это время разработке теоретических основ моделирования. С помощью моделей начинается изучение все более глубоких связей и отношений объективного мира. Успехи на этом пути привели к постепенному превращению моделирования из полуэмпирического способа исследований, которым пользовались некоторые ученые при решении частных задач, в метод научного исследования, широко используемый в физике, химии, технических и других науках. Были разработаны положения теории подобия, которые явились основой применения моделей в таких областях науки, как теплотехника, гидродинамика, строительная механика, гидродинамика, строительная механика, физика твердого тела и др.

Разработка математически точной теории подобия способствовала внедрению в научное мышление этого стиля исследований, который широко распространен в современной науке и который предполагает смелое, инициативное, но в то же время научно обоснованное использование одной, более развитой отрасли науки для решения задач другой; и в это же время применение теории подобия требовало более высокого уровня развития абстрактного мышления и наличия значительного количества фактов из различных областей науки.

Как блестящий образец использования моделирования, следует отметить разработку гениальным механиком-самоучкой И.П.Кулибиным проекта однопролетного арочного моста через р. Нева в Петербурге в конце XVIII в. Мост длиной 300 м должен был быть выполнен из дерева. Изобретатель построил модель моста 1/10 натурных его размеров и испытал ее под нагрузкой в 3870 пудов (61,92 т.) в течение 28 дней, при этом в модели не обнаружилось никаких изменений. Модель Кулибина просуществовала более 30 лет, выполняя в последствии роль одного из мостов Таврического сада. Важно отметить, что Кулибин при испытании своей модели правильно решил задачу о редуцировании нагрузки в соответствии с линейным масштабом модели и с учетом реологических свойств древесины.

Во второй половине XIX в. началось интенсивное применение моделей в различных областях физики. К этому времени законы механики были достаточно хорошо изучены и для большинства физиков объяснять явление значило построить его механическую модель.

Именно так поступил Дж. К. Максвелл, сформулировав важнейшие законы электродинамики на основе своих электромеханических аналогий. Модели Максвелла явились одними из первых в длинном ряду теоретических моделей, которым предстояло сыграть выдающуюся роль в развитии физики и других областей научного значения. В частности, электромеханические аналогии могут быть использованы как мощный инструмент при решении сложных задач петромеханики.

В качестве моделей используются довольно крупные и сложные объективно существующие устройства, природные объекты, знаковые системы постоянно возрастающей сложности разнообразные объекты, существующие лишь в сознании исследователей.

В настоящее время в энергетике, авиации и космонавтике, в кораблестроении, теплотехнике, гидротехнике, и ряде других отраслей науки моделирование является основным методом исследований.

Показательным примером стал эксперимент, осуществленный в Институте физики Российской Академии наук, в ходе которого на модели из фотоупругих материалов было воспроизведено одно из грозных явлений природы – извержение вулканов. Это дало возможность изучить перераспределение напряжения в земной коре и раскрыть некоторые стороны механизма вулканической деятельности.

Наибольший вклад в разработку теории моделирования внесли такие ученые как Кирпичев М.В., Седов Л.И., Павловский Н.Н., Гухман А.А., Михеев М.А., Насонов И.Д., Ньютон, Коши, Рейнольдс, Эйлер, Вебер, Рекле, Грасгоф, Прандль, Фруд, Фурье, Нуссельт и др.

Моделирование как метод исследования имеет целью воспроизведение на модели процесса, подобного процессу в природе. Этот метод позволяет на уменьшенной или увеличенной модели провести качественные и количественные исследования интересующего нас процесса в природе, который часто бывает малодоступным или вовсе недоступен для более или менее детального исследования.

Возможно, однако, и иное применение метода моделирования, когда образец (машина, комбайн, процесс, явление) еще не существует в природе. В этом случае исследования проводятся на модели, которая является «прообразом» всех будущих, подобных ей (в геометрическом и физическом смысле) образцов.

Второе назначение метода чаще встречается в производственной деятельности и отвечает, например, задаче изучения вновь запроектированного технологического процесса или какого-либо устройства на его модели.

В науке основной целью моделирования является познание посредством модели объективной действительности этого или иного физического процесса и изучение возможности управления им.

Таким образом, под термином моделирование понимается сам процесс, прием, метод. Модель же является средством познания объективной действительности и под этим термином надо понимать предмет или специальное устройство, искусственно созданное человеком для изучения, интересующего нас объекта.

В зависимости от способа построения и средств модели разделяют на две группы: технические, или материальные, модели и воображаемые или идеальные модели. Между этими группами моделей имеется тесная связь. Прежде чем построить техническую или материальную модель, последняя существует первоначально в голове исследователя как некоторая теоретическая схема, и в этом смысле она является идеальной (воображаемой).

Различают два типа идеальных моделей – модели из чувственно наглядных элементов (упругих шаров, пружин, цилиндров, рычагов и т.д.) и модели из специальных знаковых систем для машинных переходов.

Модели первого типа являются структурными (рис. 1.1.), изображающими реологические свойства среды. Они служат для изучения механизма какого-либо сложного физического процесса с входящими в него элементами: изучение физико-механических свойств горных пород. Эти комбинации составлены из идеальных сред (рис. 1.2.).

Материальные модели по существу являются макетами реальных объектов, в которых воспроизводят те же самые физические процессы или им аналогичные. Для изготовления моделей применяют как материалы природы, так и материалы физической природы. Такие модели позволяют решить ряд весьма сложных и важных практических задач.

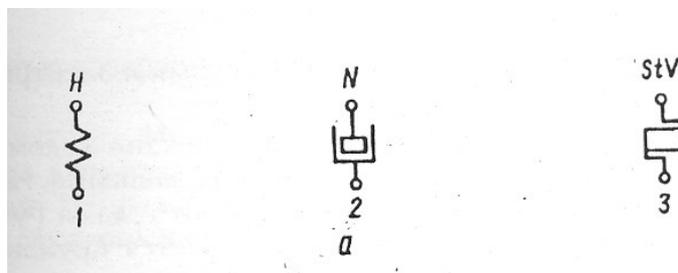


Рис. 1.1. Простые идеальные модели физических тел (горных пород)

- 1 – Гука (упругая модель); 2 – Ньютона (вязкая модель);
3 – Сен-Венана (модель пластичного тела)

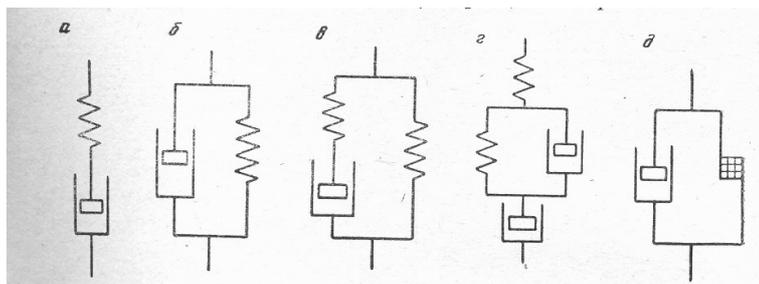


Рис. 1.2. Сложные механические модели физических тел (горных пород):
 а – Максвелла; б – Фойта (Кельвина); в – Пойтинга-Томсона (Зенера);
 г – Бургарса; д – Шведова-Бингама

Таким образом, моделирование в познании реальной действительности является звеном, связывающим теорию с практикой: теория – идеальная модель – эксперимент (моделирование) – действительность.

В современных научных исследованиях применяют три вида моделирования: физическое, математическое и функциональное. Наиболее широкое применение в технических науках получили два первых вида моделирования, которые будут нами рассматриваться.

Таким образом, метод моделирования – изучение явлений с помощью моделей – один их основных в современных исследованиях. Основой моделирования является положение о том, что единство природы обнаруживается в поразительной аналогичности дифференциальных уравнений, относящихся к разным областям явлений.

При физическом моделировании физика явлений в объекте, модели и их математические зависимости одинаковы. При математическом моделировании физика явлений может быть различной, а зависимости одинаковыми. Математическое моделирование приобретает особую ценность, когда возникает необходимость изучить особо сложные процессы.

При построении модели свойства и сам объект обычно упрощают, обобщают. Чем ближе модель к оригиналу, тем удачнее она описывает объект, тем эф-

фективнее теоретическое исследование и тем ближе полученные результаты к принятой гипотезе исследования.

Модели могут быть физические, математические, натурные. Физические модели позволяют наглядно представлять протекающие в природе процессы. С помощью физических моделей можно изучать влияние отдельных параметров на течение физических процессов.

Математические модели позволяют количественно исследовать явления, трудно поддающиеся изучению на физических моделях.

Натурные модели представляют собой масштабно изменяемые объекты, позволяющие наиболее полно исследовать процессы, протекающие в натуральных условиях.

Стандартных рекомендаций по выбору и построению моделей не существует. Модель должна отображать существенные явления процесса. Мелкие факторы, излишняя детализация, второстепенные явления и т. п. лишь усложняют модель, затрудняют теоретические исследования, делают их громоздкими, нецеленаправленными. Поэтому модель должна быть оптимальной по своей сложности, желательно наглядной, но главное – достаточно адекватной, т.е. описывать закономерности изучаемого явления с требуемой точностью. Естественно, что при построении модели необходимо учитывать особенности исследуемого явления: линейность и нелинейность, детерминированность и случайность, непрерывность и дискретность и др.

Для построения наилучшей модели необходимо иметь глубокие и всесторонние знания не только по теме, смежным наукам, но и хорошо знать практические аспекты исследуемой задачи.

В отдельных случаях модель исследуемого явления может быть ограничена лишь описанием сущности. Так, при изучении укрепления грунтов физико-химическую сущность взаимодействия минералов грунта с вяжущими материалами представить в виде математической модели очень трудно из-за большой сложности процесса. Однако по мере накопления научных данных, постепенно методы их изучения будут заменяться математическими. Это закономерно, поскольку наука может до-

стичь наибольшего совершенства лишь при широком использовании математических методов.

Изучить и проанализировать объект наиболее полно можно лишь при условии, что его модель представлена описанием физической сущности и имеет математический вид. Рассмотрим примеры по составлению моделей.

Анализируя работу грунтов, горных пород, строительных материалов и конструкций, необходимо знать закономерности деформирования их элементов. В зависимости от вида и характера нагрузки, свойств материала элемента могут быть различные условия деформирования, модель которой приведена на рис. 1.3. Модель 1, представленная пружиной, характеризует упругие свойства и подчиняется закону Гука – величина деформации пропорциональна прилагаемой нагрузке

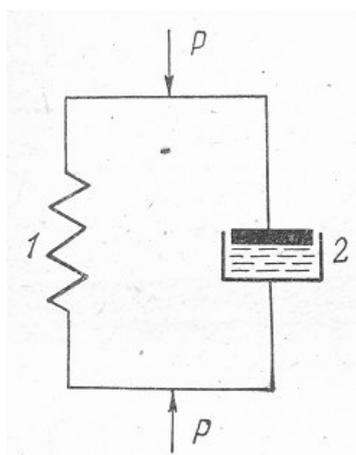


Рис. 1.3. Модель деформирования упруго-вязких материалов

1-2 в единое целое имеем модель деформирования упруго-вязкого тела, что характерно для строительных материалов и конструкций. Такое деформирование подчиняется закону Кельвина.

Математическая модель, соответствующая физической модели (см. рис. 3), может быть представлена в виде

$$P = P_y + P_B = E_y S_y + \eta \frac{dS}{dt}, \quad (1.1)$$

где P_y, P_B – упругое сжатие пружины в вязкое сопротивление жидкости;

$E_y S_e$ – модуль упругости и относительная деформация пружины;

η – коэффициент вязкости;

$\frac{dS}{dt}$ – скорость деформирования.

Решая (1) при $t = 0, S = 0$, имеем

$$S = \frac{P}{E_y} \left[1 - \exp\left(-\frac{E_y t}{\eta}\right) \right]. \quad (1.2)$$

Зависимость (1.2) в ряде случаев хорошо согласуется с экспериментом и позволяет изучить законы деформирования упруго-вязких материалов, (грунтов, бетонов, горных пород и др.).

Приведенный пример иллюстрирует процесс познания в соответствии с формулой – от живого созерцания (наблюдение за поведением материала) к абстрактному мышлению (физическая – рис.1.3 и математическая модель уравнения (1.2) и от него к практике. Рассмотренная модель соответствует функциональной зависимости, когда одному значению аргумента соответствует только одно значение функции.

Однако в природе встречаются процессы, когда одному значению аргумента соответствует несколько значений функции вследствие действия на явление различных случайных факторов.

Физическая модель, характеризующая закон вероятностного распределения песка, который вытекает из лейки через решето в ящик с вертикальными секциями, приведена на рис.1.4.

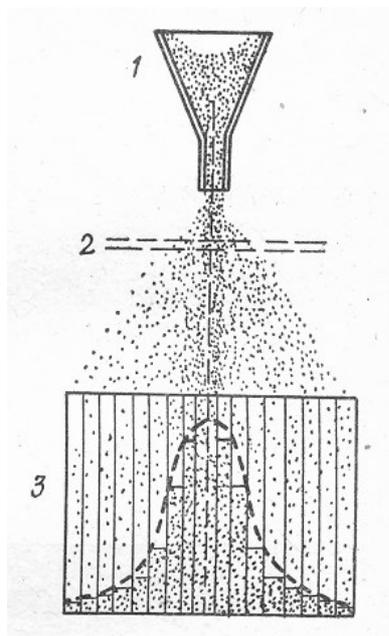
Наблюдения показывают, что распределение песка в ящике подчиняется закону нормального распределения:

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad (1.3)$$

Рис.1.4. Закономерность распределения песка:

1 – воронка; 2– решето; 3 – ящик с сек-

где y – ордината, частота распределения песка;



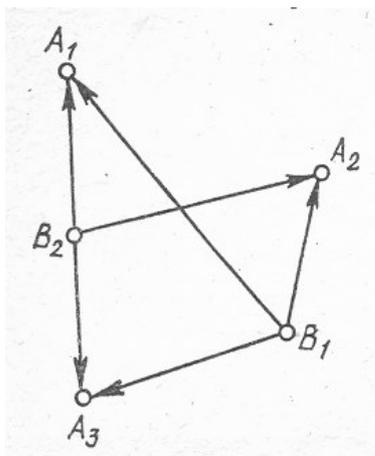
x – абсцисса, номер секции в ящике, отсчитываемой от середины;

σ – среднее квадратическое отклонение.

Выражение (1.3) является математической моделью вероятностного процесса физической модели, приведенного на рис.1.4.

В последнее время широкое распространение получили модели, обеспечивающие оптимизацию технологических процессов и их управления.

В связи с этим, рассмотрим так называемую транспортную задачу.



Пусть имеется A_1, A_2, A_3 объектов строительства, потребляющих соответственно a_1, a_2, a_3 щебня (рис.1. 5). В местах B_1 и B_2 есть притрассовые карьеры с запасами щебня v_1 и v_2 . При этом $a_1 + a_2 + a_3 = v_1 + v_2$. Стоимость единицы продукции из карьера B_1 на объект A_1 равна C_{11} , $A_2 - C_{12}$ на объект $A_3 - C_{13}$. Общее количество щебня x_{ij} , транспортируемое на объект A_i из карьера B_j равно

Рис. 1.5. Схема транспортных связей: A_i – объекты строительства; B_i – карьеры.

$$x_{11} + x_{21} = a_1;$$

$$x_{12} + x_{22} = a_2;$$

$$x_{13} + x_{23} = a_3;$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = v_1;$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = v_2,$$

(1.4)

где a_1, a_2, a_3 – потребности щебня на объектах.

В системе (1.4) первое уравнение означает количество щебня, транспортируемое на объект A_1 из карьеров B_1 и B_2 ; второе – на объект A_2 . Последнее уравнение – количество щебня, доставляемое на объекты A_1, A_2, A_3 из карьера B_2 .

Все исходные данные сведены в матрицу условия задачи (табл.1.1).

Исходные данные перевозки щебня

Карьеры	Объекты			Запасы
	A_1	A_2	A_3	
B_1	C_{11} x_{11}	C_{12} x_{12}	C_{13} x_{13}	b_1
B_2	C_{21} x_{21}	C_{22} x_{22}	C_{23} x_{23}	b_2
Общая потребность	a_1	a_2	a_3	

Требуется определить наиболее выгодный (экономичный вариант перевозки щебня.

В этом случае численными методами с помощью линейного программирования и ЭВМ находят функцию, которая удовлетворяет условию

$$C = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij} = \min. \quad (1.5)$$

Уравнение (1.5) является математической моделью, позволяющей оптимизировать транспортный процесс.

В последнее время большой интерес вызвала кибернетическая модель «черного ящика» (рис. 1.6), описывающая систему, структура которой неизвестна

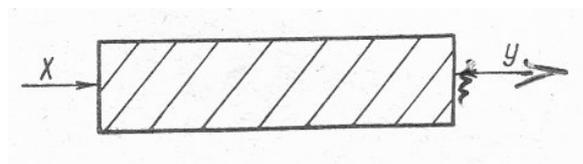


Рис. 1.6. Модель «черного ящика»

и недоступна для наблюдения. Известны лишь «X» (ввод) и «Y» (вывод). Задача сводится к подбору таких значений X, которые обеспечили бы соответствующие (в большинстве случаев) оптимальные значения Y. Статистическим путем находят мо-

дели исследуемого процесса. Во многих случаях для построения таких моделей целесообразно использовать метод математического планирования эксперимента.

В теоретических исследованиях применяют модели-аналоги и модели-подобия. Основываясь на подобии или аналогии объектов, процессов и т.п., изу-

чают экспериментально теоретическим путем явления на модели, а затем с помощью соответствующего математического аппарата устанавливают закономерности в натуре.

Электрическая модель-аналог для изучения напряженно-деформированного состояния балки на двух опорах приведена на рис.1. 7.

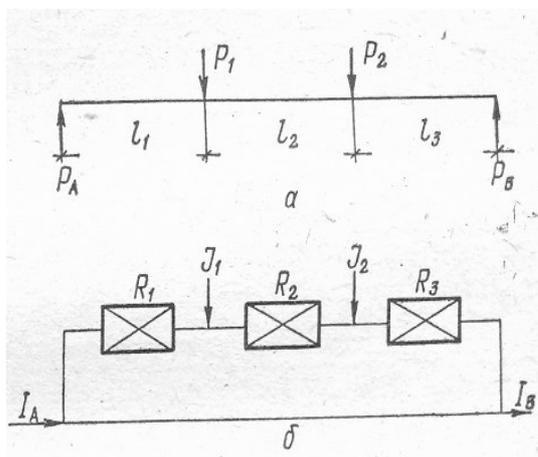


Рис. 1.7. Схема балки на опорах (а) и ее электрическая модель-аналог (б): P_1, P_2 – нагрузки; P_A, P_B – реакции; R_1, R_2, R_3 – электрические сопротивления; J_1, J_2 – сила тока, моделирующая нагрузки P_1 и P_2 .

Реакции на опорах балки вычисляются по формулам

$$P_A = \frac{P_1(l_2 + l_3) + P_2 l_3}{l_1 + l_2 + l_3}; \quad (1.6)$$

$$P_B = \frac{P_1 l_1 + P_2(l_2 + l_1)}{l_1 + l_2 + l_3}.$$

Силу тока на входе и выходе электрической цепи вычисляют аналогично:

$$J_A = \frac{J_1(R_2 + R_3) + J_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad (1.7)$$

$$J_B = \frac{J_1 R_1 + J_2(R_2 + R_1)}{R_1 + R_2 + R_3}.$$

Таким образом, меняя силу тока I_1, I_2 и сопротивление R_1 , можно изучать реакцию опор балки в зависимости от величины P_1 и P_2 .

Модели подобия используют давно. Например, нет необходимости теоретически вычислять или непосредственно измерять величину H Останкинской башни в Москве. Для этой цели достаточно использовать простейшую модель – треугольник и с помощью теоремы о подобии треугольников путем измерения расстояния к башне Z определить ее высоту по формуле

$$H = h \cdot K_p, \quad (1.8)$$

где K_p – критерий подобия, равный $K_p = Z : l$ (l – сторона треугольника).

Аналогичный прием широко используют и при исследовании процессов, но критерий подобия и уравнения в этом случае значительно сложнее. Анализ многообразных физических моделей изучаемых процессов исследуется математическими методами, которые могут быть разделены на такие основные группы:

Аналитические методы исследования (элементарная математика, дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление и другие разделы высшей математики), используемые для изучения непрерывных детерминированных процессов.

Методы математического анализа с использованием эксперимента (метод аналогий, теория подобия, метод размерностей) и др.

Вероятностно-статистические методы исследования (статистика и теория вероятностей, дисперсионный и корреляционный анализы, теория надежности, метод Монте-Карло и др.) для изучения случайных процессов – дискретных и непрерывных.

Дальнейшее развитие горной науки настоятельно требует наряду с проведением теоретических исследований все более широкого применения методов моделирования и, главным образом, дальнейшего развития методов математического моделирования, опережающего по сравнению с развитием физического моделирования и натурного экспериментирования.

2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ И УСЛОВИЯ ПОДОБИЯ

2.1. Общие сведения

Как отмечено выше, физические процессы, изучаемые горной наукой, отличаются, как правило, большой сложностью и описываются системой дифференциальных уравнений и условиями однозначности (граничными условиями) с большим количеством переменных. Попытка аналитического решения таких задач наталкивается на серьезные трудности. В связи с этим, при решении практических задач большое значение приобретает экспериментальный путь исследований. С помощью эксперимента для определенных значений аргументов можно получить числовые значения искомых переменных и затем подобрать уравнения, описывающие результаты опытов. Однако, при изучении таких сложных процессов, как горные, не всегда легко проводить и экспериментальные исследования.

Для исследования влияния на процесс какой-либо одной величины остальные нужно сохранять неизменными, что не всегда возможно или затруднительно из-за большого количества переменных. Кроме этого, при этом нужно быть уверенным, что результаты, получаемые с помощью какой-либо установки (модели), можно перенести и на другие аналогичные процессы (образцы). Эти трудности дает возможность разрешить теория подобия.

С помощью аппарата теории подобия ряд размерных физических величин можно объединить в безразмерные комплексы, причем число их меньше числа исходных величин, из которых составлены эти комплексы. Полученные с помощью приемов теории подобия новые безразмерные комплексы можно рассматривать как новые переменные.

При введении в уравнения исследуемого процесса безразмерных комплексов число величин под знаком исходной функции сокращается, что упрощает исследование физического процесса. Следует отметить, что новые безразмерные переменные отражают влияние не только отдельных факторов, но и их совокупности, что позволяет легче определить связи в исследуемом процессе.

2.2. Условия подобия

Теория подобия дает возможность устанавливать такие условия, при которых результаты экспериментальных исследований в лабораторных условиях можно перенести на другие явления, подобные рассматриваемому. Ввиду этого теория подобия является, прежде всего, теоретической базой эксперимента, в то же время она – важное подспорье теоретических исследований. Хотя методами подобия вид исходной функции не может быть определен, эта теория облегчает в ряде случаев анализ изучаемого процесса и описание полученных результатов.

Условиями подобия являются: геометрическое подобие, подобия физических полей и физических явлений.

Геометрическое подобие соблюдается, если два тела, размещенные одно в другом, в результате равномерной деформации полностью совпадают.

Физическое поле характеризуется стационарностью (не зависит от времени) или нестационарностью (зависит от времени) процесса.

Подобие физических полей – подобие стационарных и нестационарных процессов.

Подобие физических явлений – механическое, гидромеханическое, тепловое подобие и др.

В частности, при рассмотрении механического процесса (при решении задач механики горных пород) условием механического подобия является: геометрическое (масштаб), кинематическое (время), динамическое (масса).

2.3. Геометрическое подобие

Рассмотрим геометрическое подобие. Пусть имеются два тела 1 и 2 с центрами тяжести O_1 и O_2 (рис.2.1. а, б). Если поместить тело 2 внутри тела 1 так, чтобы центры тяжести их совпали, а затем тело 1 деформировать и вращать до тех пор пока, в результате равномерной деформации тела 1 все точки контура или границы обоих тел совпадут, то такие тела подобны. Такое расположение тел 1 и 2 называется сходственным расположением. Одновременные координатные оси O_1x_1 и O_2x_2 ; O_1y_1 и O_2y_2 , O_1z_1 и O_2z_2 также совпадут между собой, и будут называться сходственными.

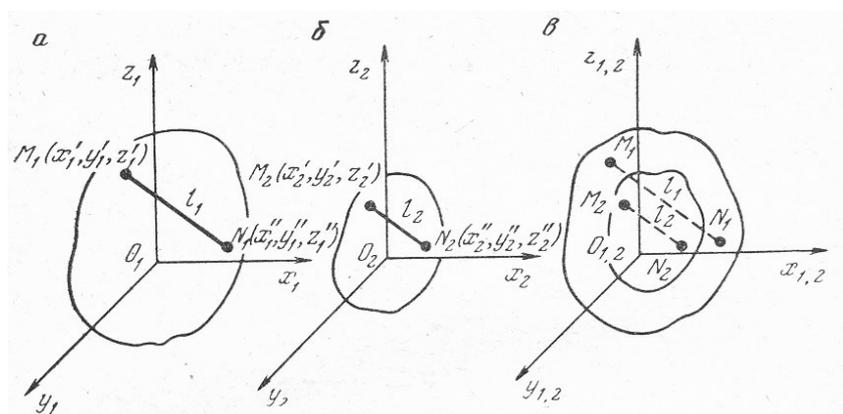


Рис. 2.1. Определение геометрического подобия:

а – тело; б – тело; в – совмещение тел 1 и 2

Нетрудно видеть, что при подобных телах 1 и 2 для любой точки в теле 1 может быть найдена сходственная точка в теле 2.

Проведем в телах 1 и 2 через две произвольные точки M_1N_1 отрезок l_1 , M_2N_2 – l_2 . Следовательно, отрезки l_1 и l_2 в результате равномерной деформации совпадут (рис. 8. в), т.е. l_1 и l_2 – сходственные линейные размеры, или сходственные параметры подобных тел. Очевидно, что в подобных телах сходственные криволинейные отрезки, а также замкнутые кривые могут быть совмещены в результате равномерной деформации. Примерами сходственных размеров могут явиться диаметры d_1 и d_2 , высоты h_1 и h_2 двух подобных цилиндров и т.д.

Так как при равномерной деформации все размеры тела изменяются в одинаковое число раз, то для двух подобных тел должно выполняться соотношение

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{l'_1}{l'_2} = \dots = \frac{l^i_1}{l^i_2} = C_l, \quad (2.1)$$

где x_1, y_1, z_1 – координаты тела 1;

l'_1, \dots, l^i_1 – параметры тела 1;

x_2, y_2, z_2 – координаты тела 2 (сходственные);

l'_2, \dots, l^i_2 – сходственные параметры тела 2;

C_l – множитель подобия, показывающий во сколько раз нужно изменить размеры одного тела, чтобы оба тела совпали.

При моделировании физических процессов большие удобства дает переход на безразмерные зависимости между параметрами.

Выразив все члены равенства (9) через один из сходственных членов, например, через параметр l^i , и обозначив

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{l_1'} &= X_1; \frac{x_2}{l_2'} = X_2; \frac{y_1}{l_1'} = Y_1; \\ \frac{y_2}{l_1'} &= Y_2; \dots \frac{l_1^{i-1}}{l_1^i} = L_1^{i-1}; \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

получим

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{L_1'}{L_2'} = \dots = \frac{L_1^{i-1}}{L_2^{i-1}} = 1 \quad (2.3)$$

откуда

$$X_1 = X_2; Y_1 = Y_2; Z_1 = Z_2; L_1' = L_2'; \dots \quad \text{и т.д.} \quad (2.4)$$

При этом X, Y, Z являются безразмерными величинами, выраженными в долях сходственных параметров l_1^i и l_2^i , которые выбраны произвольно в качестве единиц измерения или масштаба длин.

Таким образом, равенства (2.3) и (2.4) выражают весьма существенное свойство геометрически подобных систем: если в качестве масштабов для измерения длин выбрать сходственные параметры подобных систем, то у них (систем) безразмерные координаты сходственных точек, а также безразмерные сходственные параметры соответственно равны.

Соотношения, полученные из выражения (2.2)

$$\begin{aligned}
x_1 &= l_1^1 X_1; & x_2 &= l_2' X_2; \\
y_1 &= l_1^1 Y_1; & y_2 &= l_2' Y_2; \\
z_1 &= l_1^i Z_1; & z_2 &= l_2' Z_2; \\
l_1^i &= l_1^i L_1^i; & l_2^i &= l_1^i L_2^i; \\
----- \\
l_1^i &= l_1^i L_1^0; & l_2^i &= l_2^i L_2^i.
\end{aligned}
\tag{2.5}$$

называются масштабными преобразованиями, причем $L_1^i = L_2^i = 1$.

Пользуясь изложенными сведениями о геометрическом подобии, можно доказать основное свойство геометрически подобных систем: если в качестве масштабов выбрать сходственные параметры, то уравнения, описывающие подобные геометрические системы, после приведения их (с помощью масштабных преобразований) к безразмерному виду станут тождественно одинаковы.

Выше были рассмотрены подобные системы. Однако возможны случаи, когда совмещение двух геометрических систем может быть осуществлено только путем неравномерной деформации (неодинаковой для всех направлений). Такие системы называют аффинными.

Две системы аффинны, если для каждой точки A_1 системы 1 с координатами x_1, y_1, z_1 может быть найдена точка A_2 с координатами x_2, y_2, z_2 , чтобы удовлетворялись соотношения:

$$\begin{aligned}
\frac{x_1}{x_2} &= \frac{l_1'}{l_2'} = \dots = \frac{l_1^i}{l_2^i} = C_x; \\
\frac{y_1}{y_2} &= \frac{m_1'}{m_2'} = \dots = \frac{m_1^k}{m_2^k} = C_y; \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{n_1'}{n_2'} = \dots = \frac{n_1^p}{n_2^p} = C_z,
\end{aligned}
\tag{2.6}$$

где l, m, n – параметры;

C_x, C_y, C_z – множители аффинности.

Точки A_1 и A_2 являются сходственными точками аффинных систем, или аффинно-сходственными точками. Параметры l_1 и l_2 , m_1 и m_2 , n_1 и n_2 являются сходственными точками аффинных систем или аффинно-сходственными параметрами. Параметры l', l'', \dots, l^i называются соответственными осями x ; m', m'', \dots, m^k и n', n'', \dots, n^p соответственными осями y и z .

Для аффинных систем справедливо следующее положение: если отношения сходных масштабов координатных осей $x_{0,1}$ и $x_{0,2}$; $y_{0,1}$ и $y_{0,2}$; $z_{0,1}$ и $z_{0,2}$ равны отношениям соответственным этим осям сходственных параметров, т.е.:

$$\begin{aligned} \frac{x_{0,1}}{x_{0,2}} &= \frac{l'_1}{l'_2} = \dots = \frac{l^i_1}{l^i_2} = C_x; \\ \frac{y_{0,1}}{y_{0,2}} &= \frac{m'_1}{m'_2} = \dots = \frac{m^k_1}{m^k_2} = C_y; \\ \frac{z_{0,1}}{z_{0,2}} &= \frac{n'_1}{n'_2} = \dots = \frac{n^p_1}{n^p_2} = C_z, \end{aligned} \quad (2.7)$$

то функции или уравнения, которые описывают аффинные системы, после приведения с помощью аффинно-масштабных преобразований к безразмерному виду становятся тождественно одинаковыми.

Докажем это положение. Для этого возьмем две аффинные системы, описывающие в общем случае следующими уравнениями

$$\begin{aligned} f_1(x_1, y_1, z_1, l'_1, l''_1, \dots, l^i_1, m'_1, m''_1, \dots, m^k_1, n'_1, n''_1, \dots, n^p_1) &= 0; \\ f_2(x_2, y_2, z_2, l'_2, l''_2, \dots, l^i_2, m'_2, m''_2, \dots, m^k_2, n'_2, n''_2, \dots, n^p_2) &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Координаты и параметры уравнения (2.8) удовлетворяют равенствам (6).

Для приведения уравнений (2.8) к безразмерному виду введем аффинно-масштабные преобразования:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_{0,1}X_1, & l'_1 &= x_{0,1}L'_1, \dots, & l_1^i &= x_{0,1}L_1^i; \\
y_1 &= y_{0,1}Y_1, & m'_1 &= y_{0,1}M'_1, \dots, & m_1^k &= y_{0,1}M_1^k; \\
z_1 &= z_{0,1}Z_1, & n'_1 &= z_{0,1}N'_1, \dots, & n_1^p &= z_{0,1}N_1^p;
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
x_2 &= x_{0,2}X_2, & l'_2 &= x_{0,2}L'_2, \dots, & l_2^i &= x_{0,2}L_2^i; \\
\dots\dots\dots & & & & & \\
z_2 &= z_{0,2}z_z, & n'_2 &= z_{0,2}N'_2 \dots n_2^p = z_{0,2}N_2^p.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Масштабы координатных осей $x_{0,1}$ и $x_{0,2}$; $y_{0,1}$ и $y_{0,2}$; $z_{0,1}$ и $z_{0,2}$ в уравнениях (2.9) и (2.10) удовлетворяют равенствам (2.7).

Подставив масштабные преобразования (2.9) и (2.10) в равенство (2.6), получим

$$\begin{aligned}
\frac{x_1}{x_2} &= \frac{L'_1}{L'_2} = \dots = \frac{L_1^i}{L_2^i} = 1; \\
\frac{y_1}{y_2} &= \frac{M'_1}{M'_2} = \dots = \frac{M_1^k}{M_2^k} = 1; \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{N'_1}{N'_2} = \dots = \frac{N_1^p}{N_2^p} = 1.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Как видно из соотношений (2.11), безразмерные координаты аффинно-сходственных точек и аффинно-сходственные безразмерные параметры аффинных систем соответственно равны.

Существенное отличие этого вывода от аналогичного вывода, полученного для подобных систем, заключается в том, что все безразмерные коэффициенты и параметры систем выражены в долях одного и того же масштаба. Безразмерные же координаты и соответственные им параметры аффинных систем выражены в долях различных масштабов.

Подставляя преобразования (2.9) и (2.10) в уравнение (2.8) получим

$$\begin{aligned}
F_1(X_1, Y_1, Z_1, L'_1, \dots, L_1^i, M'_1, \dots, M_1^k, N'_1, \dots, N_1^p) &= 0; \\
F_2(X_2, Y_2, Z_2, L'_2, \dots, L_2^i, M'_2, \dots, M_2^k, N'_2, \dots, N_2^p) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Из (2.11) следует, что

$$X_1 = X_2, Y_1 = Y_2, Z_1 = Z_2, L'_1 = L'_2, \dots, L_1^i = L_2^i \quad (2.13)$$

$$M'_1 = M'_2, \dots, M_1^K = M_2^K; N'_1 = N'_2, \dots, N_1^P = N_2^P \quad (2.14)$$

Учитывая, что равенства (2.13) сохраняют свою силу для любой пары сходственных точек (т.е. при любых X, Y, Z), то функции F_1 и F_2 тождественно равны

$$F_1(X_1, Y_1, Z_1, L'_1, \dots, L_1^i, M'_1, \dots, M_1^K, N'_1, \dots, N_1^P) \equiv F_2(X_2, Y_2, Z_2, L'_2, \dots, L_2^i, M'_2, \dots, M_2^K, N'_2, \dots, N_2^P),$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Два подобных эллипсоида, у которых начало координат взято в центре, а направления координатных осей и главных осей эллипсоида совпадают, описываются уравнениями

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{y_1^2}{b_1^2} + \frac{z_1^2}{c_1^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{y_2^2}{b_2^2} + \frac{z_2^2}{c_2^2} = 1, \quad (a)$$

где a_1, b_1, \dots, c_2 – главные оси эллипсоида.

Так как эллипсоиды подобны, то в сходственных точках должно быть

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = C_e. \quad (б)$$

Составим безразмерные уравнения эллипсоидов. Для этого примем за масштабы главные полуоси a_1 и a_2 . Тогда масштабные преобразования

$$\begin{aligned}
 x_1 &= a_1 X_1; & x_2 &= a_2 X_2; \\
 y_1 &= a_1 Y_1; & y_2 &= a_2 Y_2; \\
 z_1 &= a_1 Z_1; & z_2 &= a_2 Z_2; \\
 a_1 &= a_1 A_1; & a_2 &= a_2 A_2; \\
 \vartheta_1 &= a_1 B_1; & \vartheta_2 &= a_2 B_2; \\
 c_1 &= a_1 C_1; & c_2 &= a_2 C_2.
 \end{aligned}
 \tag{B}$$

Вводя масштабные преобразования в уравнения эллипсоидов (а), получим

$$\frac{X_1^2}{A_1^2} + \frac{Y_1^2}{B_1^2} + \frac{Z_1^2}{C_1^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{X_2^2}{A_2^2} + \frac{Y_2^2}{B_2^2} + \frac{Z_2^2}{C_2^2} = 1
 \tag{Г}$$

Из условий (в) имеем

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \frac{x_1}{a_1}; & Y_1 &= \frac{y_1}{a_1}; & Z_1 &= \frac{z_1}{a_1}; \\
 A_1 &= 1; & B_1 &= \frac{\vartheta_1}{a_1}; & C_1 &= \frac{c_1}{a_1}; \\
 X_2 &= \frac{x_2}{a_2}; & Y_2 &= \frac{y_2}{a_2}; & Z_2 &= \frac{z_2}{a_2}; \\
 A_2 &= 1; & B_2 &= \frac{\vartheta_2}{a_2}; & C_2 &= \frac{c_2}{a_2}.
 \end{aligned}$$

Из условия (б) следует

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{a_1}{a_2}; \quad \frac{y_1}{y_2} = \frac{a_1}{a_2} \quad \text{и т.д.},$$

то

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2}; \quad \frac{y_1}{a_1} = \frac{y_2}{a_2} \quad \text{и т.д.}$$

или

$$X_1 = X_2; \quad Y_1 = Y_2; \quad \text{и т.д.}$$

Следовательно, уравнения эллипсоидов можно записать в виде одного безразмерного уравнения

$$X^2 + \frac{Y^2}{B^2} + \frac{Z^2}{C^2} = 1.$$

причем $A_1 = A_2 = 1$.

Пример 2. Те же эллипсоиды, если их безразмерные полуоси не равны $B_1 \neq B_2$ при $C_1 = C_2$; $B_1 = B_2$ при $C_1 \neq C_2$; $B_1 \neq B_2$ при $C_1 \neq C_2$, но для подобных эллипсоидов имеет место равенство отношений одноименных полуосей

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2},$$

а для аффинных

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}.$$

Покажем, что совмещение аффинных эллипсоидов возможно осуществить путем неравномерной деформации.

Введем аффинные масштабные преобразования, в которых масштабы в разных направлениях различны.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{1,0} X_1; & x_2 &= x_{2,0} X_2; \\ y_1 &= y_{1,0} Y_1; & y_2 &= y_{2,0} Y_2; \\ & \dots\dots\dots \\ c_1 &= z_{1,0} C_1; & c_2 &= z_{2,0} C_2. \end{aligned}$$

Подставив их в уравнения эллипсоидов, получим

$$\frac{X_1^2}{A_1^2} + \frac{Y_1^2}{B_1^2} + \frac{Z_1^2}{C_1^2} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{X_2^2}{A_2^2} + \frac{Y_2^2}{B_2^2} + \frac{Z_2^2}{C_2^2} = 1.$$

Для того чтобы эти уравнения были тождественны, необходимо соблюдение условий

$$A_1=A_2; \quad B_1=B_2; \quad C_1=C_2; \quad X_1=X_2 \quad \text{и т.д.}$$

или

$$\frac{a_1}{x_{1,0}} = \frac{a_2}{x_{2,0}}; \quad \frac{b_1}{y_{1,0}} = \frac{b_2}{y_{2,0}}; \quad \text{и т.д.,}$$

откуда получим

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{x_{1,0}}{x_{2,0}} = C_x; \quad \frac{b_1}{b_2} = \frac{y_{1,0}}{y_{2,0}} = C_y; \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{z_{1,0}}{z_{2,0}} = C_z \quad (\text{а})$$

Тогда имеем одно уравнение эллипсоида в безразмерном виде

$$\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} + \frac{Z^2}{C^2} = 1. \quad (\text{б})$$

Следовательно, с помощью аффинных масштабных преобразований, удовлетворяющих условию (а), уравнения эллипсоидов сведены к единому безразмерному уравнению (б), которое является тождественно одинаковым для всех подобных эллипсоидов.

Следует иметь в виду, что масштабные преобразования являются частным случаем аффинно-масштабных преобразований, когда масштабы различных осей равны друг другу, т.е. $\tilde{o}_{1,0} = \acute{o}_{1,0} = z_{1,0} = \ell_1^i$; $x_{2,0} = y_{2,0} = z_{2,0} = \ell_2^i$. В соответствии со сказанным можно представить, что уравнение

$$F(X, Y, Z, L', L'', \dots, L^i, M', M'', \dots, M^k, N', N'', \dots, N^p) = 0,$$

где F – функция определенного вида при одинаковых масштабах координатных осей, т.е. при $x_0=y_0=z_0$ описывает целый класс геометрических подобных систем. Если в двух системах имеет место неравенство хотя бы двух из одноименных безразмерных параметров (например, $(M_1^i \neq M_2^i)$), то такие системы будут не подобными, а аффинными.

Приведенные выше свойства подобных и аффинных геометрических систем будут использованы в дальнейшем при рассмотрении подобия физических полей, которые являются формальным аналогом геометрической аффинности.

2.4. Подобие физических полей

Подобие стационарных полей. Стационарным полем любой физической величины φ называется совокупность значений этой величины во всех точках изучаемого пространства или объема. Стационарное поле не изменяется во времени. Обычно математическая формулировка определяется уравнением

$$\varphi = f(x, y, z) \quad (2.15)$$

Однако такой прием аналитического описания поля физической переменной φ является не совсем правильным. Действительно, под значением φ понимают любую физическую переменную (температуру, скорость, плотность, концентрацию и т.д.) Согласно правилу Фурье размерность правой части должна соответствовать размерности левой. Поэтому под знак функции f кроме координат x, y, z должны быть введены еще некоторые физические параметры d', d'', \dots, d^k с различными размерностями, с тем, чтобы размерности правой и левой части уравнения (22) были одинаковы. Кроме физических параметров под знак функции следует ввести геометрические параметры l', l'', \dots, l^i .

$$\varphi = f(x, y, z, d', d'', \dots, d^k, l', l'', \dots, l^i) \quad (2.16)$$

Допустим, что имеется две геометрически подобные системы, у которых поля физических переменных φ_1 и φ_2 имеют одинаковую размерность, т.е.

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= f_1(x_1, y_1, z_1, d'_1, \dots, d_1^k, l'_1, \dots, l_1^i); \\ \varphi_2 &= f_2(x_2, y_2, z_2, d'_2, \dots, d_2^k, l'_2, \dots, l_2^i), \end{aligned} \quad (2.17)$$

где $l'_1, \dots, l_1^i, l'_2, \dots, l_2^i$ – сходственные геометрические параметры подобных систем;

$d'_1, \dots, d_1^k, d'_2, \dots, d_2^k$ – соответственно, физические одноименные параметры (имеют одинаковую размерность).

Пусть φ_1 и φ_2 разделяются в своих системах так, что любой паре сходственных точек, т.е. при равенстве отношений

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \dots, \frac{\ell'_1}{\ell'_2} = \dots \frac{\ell_1^i}{\ell_2^i} = C_\ell, \quad (2.18)$$

имеет место равенство отношений

$$\frac{\varphi'_1}{\varphi'_2} = \frac{\varphi''_1}{\varphi''_2} = \dots = \frac{\varphi_1^n}{\varphi_2^n} = C_\varphi, \quad (2.19)$$

При этом в общем случае $C_\varphi \neq C_\ell$.

Такие физические поля называются подобными стационарными. В подобных физических полях для сходственных одноименных физических параметров имеют место равенства

$$\frac{d'_1}{d'_2} = C_{d'}, \frac{d''_1}{d''_2} = C_{d''}, \dots, \frac{d_1^k}{d_2^k} = C_{d^k} \quad (2.20)$$

причем, в общем случае $C_\varphi \neq C_\ell \neq C_{d'} \neq C_{d''} \cdot C_{dk}$.

Таким образом, подобные стационарные физические поля с формально-геометрической точки зрения являются аффинными, т.к. их совмещение может быть осуществлено путем неравномерной деформации, т.е. если в качестве масштабов выбрать сходственные величины (геометрические, физические), то в сходственных точках подобных стационарных полей безразмерные координаты и безразмерные физические переменные соответственно равны.

Действительно, введя в равенство (2.18) и (2.19) масштабные преобразования

$$\begin{aligned}
x_1 &= \ell_1^i X_1; & x_2 &= \ell_2^i X_2; \\
y_1 &= \ell_1^i Y_1; & y_2 &= \ell_2^i Y_2; \\
\dots\dots\dots & & & \\
\ell_1' &= \ell_1^i L_1'; & \ell_2' &= \ell_2^i L_2'; \\
\ell_1^i &= \ell_1^i L_1^i; & \ell_2^i &= \ell_2^i L_2^i.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_1' &= \Phi_1^n \Phi_1'; & \Phi_2^1 &= \Phi_2^n \Phi_2'; \\
\Phi_1^n &= \Phi_1^n \Phi_1^n; & \Phi_2^n &= \Phi_2^n \Phi_2^n,
\end{aligned} \tag{2.22}$$

получим после сокращения на $\frac{\ell_1^i}{\ell_2^i}$ и $\frac{\Phi_1^n}{\Phi_2^n}$

$$\begin{aligned}
\frac{X_1}{X_2} &= \frac{Y_1}{Y_2} = \dots = \frac{L_1^i}{L_2^i} = 1 \\
\frac{\Phi_1'}{\Phi_2'} &= \dots = \frac{\Phi_1^n}{\Phi_2^n} = 1
\end{aligned} \tag{2.23}$$

или

$$\begin{aligned}
X_1 &= X_2, & Y_1 &= Y_2, \dots \\
\Phi_1' &= \Phi_2', & \Phi_1^n &= \Phi_2^n, \dots
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Дополним преобразования (2.21) и (2.22) преобразованиями физических параметров

$$\left. \begin{aligned}
d_1' &= d_{1,0}' D_1', \dots, d_1^k = d_{1,0}^k D_1^k \\
d_2' &= d_{2,0}' D_2', \dots, d_2^k = d_{2,0}^k D_2^k
\end{aligned} \right\} \tag{2.25}$$

где $d_{1,0}', \dots, d_{1,0}^k, d_{2,0}', \dots, d_{2,0}^k$ – масштабы физических параметров d_1', \dots и сходственные масштабы одноименных физических параметров d_2', \dots

Докажем равенство сходственных безразмерных параметров.

Введя масштабные преобразования (2.25) в выражение (2.20)

$$\frac{d'_{1,0}D'_1}{d'_{2,0}D'_2} = C'_d, \dots, \frac{d^k_{1,0}D_1^k}{d^k_{2,0}D_{2k}^k} = C_d^k \quad (2.26)$$

Но из выражения (2.20)

$$\frac{d'_{1,0}}{d'_{2,0}} = C', \dots, \frac{d^k_{1,0}}{d^k_{2,0}} = C^k, \quad \text{т.е.} \quad \frac{D'_1}{D'_2} = 1, \dots, \frac{D_1^k}{D_2^k} = 1$$

или $D'_1 = D'_2, \dots, D_1^k = D_2^k$, что и требовалось доказать.

Подобие нестационарных полей. Нестационарным полем любой физической переменной ψ называется совокупность мгновенных их значений этой переменной во всех точках изучаемого пространства или объема. Значения переменной ψ изменяется во времени. Математически эта формулировка описывается уравнением

$$\psi = f(x, y, z, \tau), \quad (2.27)$$

где τ – время.

Исходя из предыдущих рассуждений о равенстве левой и правой части уравнения (2,27), запишем

$$\psi = f(x, y, z, \tau, l', \dots, l^2, d', \dots, d^k). \quad (2.28)$$

Допустим, в двух геометрических подобных системах поля имеют одинаковую размерность и заданы уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= f_1(x_1, \dots, d_1^k) \\ \psi_2 &= f_2(x_2, \dots, d_2^k) \end{aligned} \right\}, \quad (2.29)$$

где τ_1, τ_2 – сходственные моменты времени.

Два промежутка времени τ_1 и τ_2 называются сходственными, если они имеют общее начало отсчета и связаны преобразованием подобия вида

$$\tau_1^n = C_\tau \tau_2^n. \quad (2.30)$$

Нестационарные поля ψ_1 и ψ_2 – подобны, если в каждой паре сходственных точек, т.е. при равенствах

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \dots = \frac{\ell_1^i}{\ell_2^i} = C_\ell,$$

и в сходственные моменты времени, т.е. при равенствах отрезков времени для первой и второй систем

$$\frac{\tau'_1}{\tau'_2} = \frac{\tau''_1}{\tau''_2} = \dots = \frac{\tau_1^n}{\tau_2^n} = C_\tau \quad (2.31)$$

будет иметь место равенство

$$\frac{\psi'_1}{\psi'_2} = \frac{\psi''_1}{\psi''_2} = \dots = \frac{\psi_1^n}{\psi_2^n} = C_\psi. \quad (2.32)$$

В общем случае множители подобия $C_\ell \neq C_\tau \neq C_\psi$.

Следовательно, нестационарные физические поля также являются аффинными системами, и совмещение этих полей может быть достигнуто при неравномерной деформации. Таким образом, нестационарные физические поля обладают теми же свойствами, что и аффинные системы.

Так же как и для стационарного поля, в данном случае с помощью масштабных преобразований можно доказать, что у подобных нестационарных физических полей безразмерные одноименные координаты сходственных точек и безразмерные сходственные моменты времени равны, т.е.

$$X_1 = X_2, Y_1 = Y_2, \dots, L_1^i = L_2^i, T'_1 = T'_2, \dots, T_1^n = T_2^n. \quad (2.33)$$

$$D_1' = D_2', \dots, D_1^k = D_2^k, \quad (2.34)$$

то
$$\Psi_1' = \Psi_2', \dots, \Psi_1^n = \Psi_2^n. \quad (2.35)$$

При этом в общем случае $C_\ell \neq C_\tau \neq C_\Psi \neq C_{dk}$.

В качестве простейшего примера рассмотрим скоростное поле течения жидкости в трубе при ламинарном режиме течения. Из гидродинамики известно, что это поле описывается уравнением

$$w = w_{oc} \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right), \quad (a)$$

где w – скорость в любой точке, находящейся на расстоянии r от оси трубы;

w_{oc} – скорость на оси трубы;

b – радиус трубы.

Допустим, имеем две трубы различных диаметров, тогда уравнения скоростных полей для них можно записать в виде

$$w_1 = w_{1oc} \left(1 - \frac{r_1^2}{b_1^2}\right); \quad (б)$$

$$w_2 = w_{2oc} \left(1 - \frac{r_2^2}{b_2^2}\right). \quad (в)$$

Для приведения уравнений (б) и (в) к безразмерному виду введем масштабные преобразования

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= w_{1,m} W_1; & w_{1,m} &= w_{1,m} W_{1,m}; & r_1 &= b_1 R_1; & b_1 &= b_1 B_1 \\ w_2 &= w_{2,m} W_2; & w_{2,m} &= w_{2,m} W_{2,m}; & r_2 &= b_2 R_2; & b_2 &= b_2 B_2 \end{aligned} \right\}. \quad (г)$$

Из этих соотношений

$$W_{1,m} = W_{2,m} = 1 \quad \text{и} \quad B_1 = B_2 = 1.$$

Введя масштабные преобразования (г) в уравнения (б) и (в), получим

$$W_1 = 1 - R_1^2; \quad (\text{д})$$

$$W_2 = 1 - R_2^2. \quad (\text{е})$$

Нетрудно видеть, что при $R_1 = R_2$ или $\frac{r_1}{b_1} = \frac{r_2}{b_2} = C_\ell$, т.е. в геометрически сходственных точках, должны быть $W_1 = W_2$ или

$$\frac{w_1}{w_{1,m}} = \frac{w_2}{w_{2,m}}, \quad \text{откуда} \quad \frac{w_1}{w_2} = \frac{w_{1,m}}{w_{2,m}} = C_w$$

Следовательно, поля скоростей в обеих трубах подобны.

2.5. Подобие физических явлений

Понятия подобия может быть распространено на любые физические процессы. Можно говорить, например, о подобии движения тел или потоков жидкости; о подобии сил, вызывающих подобные между собой движения; о подобии температур и тепловых потоков и т.д. Однако, чтобы использовать понятие подобия, необходимо знать условия подобия рассматриваемых явлений.

1. Понятие подобия физических явлений применимо только к явлениям одного и того же рода, которые качественно одинаковы и аналитически описываются одинаковыми уравнениями, как по форме, так и по содержанию. Если же аналитические описания двух каких-то явлений одинаковы по форме, но различны по физическому содержанию, то такие явления называются аналогичными. Такая аналогия существует, например, между явлениями теплопроводности и диффузии.

2. Обязательной предпосылкой подобия физических явлений должно быть геометрическое подобие, т.е. подобные явления протекают в геометрически подобных системах.

3. При анализе подобных явлений сопоставлять между собой можно только однородные величины (имеющие один и тот же смысл и одинаковую размерность) и лишь в сходственных точках пространства и в сходственные моменты времени, т.е. отвечающие условиям

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \dots = \frac{\ell_1^i}{\ell_2^i} = C_\ell;$$

$$\frac{\tau'_1}{\tau'_2} = \dots = \frac{\tau_1^n}{\tau_2^n} = C_\tau$$

4. Подобие двух физических явлений означает подобие всех физических величин, характеризующих рассматриваемое явление. Это означает, что любая физическая переменная первого явления в сходственных точках пространства и в сходственные моменты времени пропорциональна однородной с ней величине второго явления, т.е.

$$\frac{t'_1}{t'_2} = \dots = \frac{t_1^n}{t_2^n} = C_t \text{ (температура);}$$

$$\frac{v'_1}{v'_2} = \dots = \frac{v_1^n}{v_2^n} = C_v \text{ (скорость);}$$

$$\frac{P'_1}{P'_2} = \dots = \frac{P_1^n}{P_2^n} = C_p \text{ (давление).}$$

При этом в общем случае $C_\ell \neq C_\tau \neq C_t \neq C_v \neq C_p$.

Большинство физических процессов, подлежащих изучению при разработке полезных ископаемых и при строительстве подземных сооружений, описывается условиями подобия, которые могут быть разделены на три группы: условия механического (силового) подобия, гидромеханического подобия и теплового подобия.

Условия механического подобия. Из второго закона механики Ньютона для двух явлений имеет место

$$\begin{aligned} P_1 &= m_1 a_1; \\ P_2 &= m_2 a_2. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Приведем эти уравнения с помощью масштабных преобразований к безразмерному виду. После подстановки

$$\begin{aligned} p_1 &= p_{1,0} P_1; \quad p_2 = p_{2,0} P_2; \\ m_1 &= m_{1,0} M_1; \quad m_2 = m_{2,0} M_2; \\ a_1 &= a_{1,0} A_1; \quad a_2 = a_{2,0} A_2, \end{aligned} \tag{2.37}$$

и соответствующих преобразований получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{p_{1,0}}{m_{1,0} a_{1,0}}\right) P_1 &= M_1 A_1; \\ \left(\frac{p_{2,0}}{m_{2,0} a_{2,0}}\right) P_2 &= M_2 A_2. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Очевидно, уравнения (2.38) будут тождественно одинаковыми в том случае, если коэффициенты в скобках будут равны между собой

$$\begin{aligned} \left(\frac{p_{2,0}}{m_{2,0} a_{2,0}}\right) &= \left(\frac{p_{1,0}}{m_{1,0} a_{1,0}}\right); \\ \text{или} \quad \frac{p_{1,0}}{p_{2,0}} &= \frac{m_{1,0} a_{1,0}}{m_{2,0} a_{2,0}}. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Откуда

$$C_p = C_m C_a \tag{2.40}$$

Если массу выразить через объем и плотность, а ускорение через линейные размеры и время, то получим

$$\frac{p_{1,0} \tau_{1,0}^2}{\rho_{1,0} \ell_{1,0}^4} = \frac{p_{2,0} \tau_{2,0}^2}{\rho_{2,0} \ell_{2,0}^4} = \frac{p \tau^2}{\rho \ell^4} = \text{idem}(\text{идентичн}); \tag{2.41}$$

или

$$\frac{C_p C_\tau^2}{C_p C_l^4} = 1, \quad \frac{C_p}{C_p C_l^2 C_v^2} = 1. \quad (2.42)$$

Следовательно, для обеспечения условий механического подобия должно соблюдаться уравнение связей (2.42) между множителями подобия.

Условие гидромеханического подобия (случай несжимаемой вязкой жидкости).

Предполагаем, что процессы движения жидкости происходят в геометрически подобных системах, т.е. должно соблюдаться условие (2.1).

Законы, описывающие движение жидкости.

Уравнение сплошности для двух систем

$$\frac{\partial v'_x}{\partial x'} + \frac{\partial v'_y}{\partial y'} + \frac{\partial v'_z}{\partial z'} = 0; \quad \frac{\partial v''_x}{\partial x''} + \dots = 0; \quad (2.43)$$

Соответственно, уравнения движения жидкости, в частности в направлении x

$$\rho' \frac{\partial v'_x}{\partial \tau'} + \rho' (v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial v'_x}{\partial y'} + v'_z \frac{\partial v'_x}{\partial z'}) = \rho' g'_x - \frac{\partial p'}{\partial x'} + \mu' \left(\frac{\partial^2 v'_x}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 v'_x}{\partial z'^2} \right);$$

$$\rho'' \frac{\partial v''_x}{\partial \tau''} + \dots = \mu'' \left(\frac{\partial^2 v''_x}{\partial x''^2} + \dots + \frac{\partial^2 v''_x}{\partial z''^2} \right), \quad (2.44)$$

где v_x, v_y, v_z – проекции скорости на оси;

ρ – плотность жидкости;

g_x – проекции ускорения силы тяжести на оси;

p – удельное давление жидкости;

μ – коэффициент вязкости жидкости.

Учитывая большую громоздкость формул, приведение их к безразмерному виду сделаем иначе, не прибегая к масштабным преобразованиям. Так как устанавливаются условия, обеспечивающие подобие процессов, то допустим, что процессы, протекающие в двух системах, подобны, и для этого определим, какие тре-

бования должны быть выполнены. Для подобных систем должно быть справедливо

$$\frac{x''}{x'} = \frac{y''}{y'} = \frac{z''}{z'} = C_\ell; \frac{\tau''}{\tau'} C_\tau; \frac{\rho''}{\rho'} = C_\rho; \frac{g_x''}{g_x'} = C_g; \frac{p''}{p'} = C_p; \frac{\mu''}{\mu'} = C_\mu; \frac{v''}{v'} = C_v \quad (2.45)$$

На основании этого все переменные второй системы могут быть выражены через переменные первой, а именно

$$x'' = C_\ell x', \dots, v'' = C_v v' \text{ и т.д.} \quad (2.46)$$

Подставив (2.46) в (2.43) и (2.44) получим для второй системы

$$\left[\frac{C_v}{C_\ell}\right] \left(\frac{\partial v'_x}{\partial x'} + \frac{\partial v'_y}{\partial y'} + \frac{\partial v'_z}{\partial z'}\right) = 0; \quad (2.47)$$

$$\left[\frac{C_\rho C_v}{C_z}\right] \rho' \frac{\partial v_x}{\partial \tau'} + \left[\frac{C_\rho C_v^2}{C_z}\right] \rho' (v'_x \frac{\partial v'_x}{\partial x'} + \dots) = [C_\rho C_g] \rho' g_x' - \left[\frac{C_p}{C_\ell}\right] \frac{\partial p'_x}{\partial x'} + \left[\frac{C_\mu C_v}{C_\ell^2}\right] \mu'. \quad (2.48)$$

Очевидно, уравнения (2.43) и (2.44) будут подобны в том случае, если коэффициенты, состоящие из множителей подобия, могут быть сокращены и для этого они должны представлять собой:

из уравнения (2.47)

$$\frac{C_v}{C_\ell} = \text{const}, \quad (2.49)$$

а из уравнения (2.48)

$$\frac{C_\rho C_v}{C_\tau} = \frac{C_p C_v^2}{C_\ell} = C_p C_g = \frac{C_p}{C_\ell} = \frac{C_\mu C_v}{C_\ell^2}. \quad (2.50)$$

Таким образом, получены уравнения связи между множителями подобия. Следовательно, произвольно выбирать масштабы моделирования отдельных параметров нельзя, т.к. они связаны между собой зависимостями (2.49) и (2.50).

Рассматривая члены соотношения (2.50) попарно, имеем

$$\frac{C_p C_v}{C_\tau} = \frac{C_p C_v^2}{C_\ell} \quad \text{или} \quad \frac{C_v C_\tau}{C_\ell} = 1 \quad (2.51)$$

$$\frac{C_p C_v^2}{C_\ell} = C_p C_g \quad \text{или} \quad \frac{C_g C_\ell}{C_v^2} = 1 \quad (2.52)$$

$$\frac{C_p C_v^2}{C_\ell} = \frac{C_p}{C_\ell} \quad \text{или} \quad \frac{C_p}{C_p C_v^2} = 1 \quad (2.53)$$

$$\frac{C_p C_v^2}{C_\ell} = \frac{C_\mu C_v}{C_\ell^2} \quad \text{или} \quad \frac{C_p C_v C_\ell}{C_\mu} = 1 \quad (2.54)$$

Условия (2.51)-(2.54) можно представить в виде критериев подобия. Для этого подставим вместо констант подобия их значения из уравнений (2.45) и, сгруппировав все величины по индексам, получим

$$\frac{v' \tau'}{l'} = \frac{v'' \tau''}{l''} \quad \text{или} \quad \frac{v \tau}{l} = \text{idem} = H_0 \quad (\text{критерий гомохронности}) \quad (2.55)$$

$$\frac{g' l'}{v'^2} = \frac{g'' l''}{v''^2} \quad \text{или} \quad \frac{g l}{v^2} = \text{idem} = F_r \quad (\text{критерий Фруди}) \quad (2.56)$$

$$\frac{P}{\rho v^2} = \text{idem} = E_u \quad (\text{критерий Эйлера}) \quad (2.57)$$

$$\frac{\rho v l}{\mu} = \text{idem} = R_e \quad (\text{критерий Рейнольдса}) \quad (2.58)$$

Следовательно, чтобы получить гидромеханическое подобие систем, необходимо для любых сходственных точек иметь одни и те же значения подобия H_0 , F_r , E_u , Re .

Одновременное соблюдение условий (2.55)-(2.58) встречается на практике большие затруднения или просто невозможно. В связи с этим при моделировании стремятся выполнить условия наиболее существенных, определяющих критериев подобия, которые устанавливаются в зависимости от типа изученной задачи и целей исследования. Так, при исследовании движения воды в пористых средах при очень малых числах Рейнольдса, т.е. в области линейной зависимости осредненной фильтрации от градиента давления, критерии Рейнольдса и Фруда не определяют движения, и при моделировании фильтрации должны быть выполнены иные специфические условия подобия. Опытами по моделированию интерференции скважин при водонапорном режиме установлено, что в области линейного закона фильтрации для однородной жидкости осуществляется потенциальное течение. Это обосновывает возможность широкого применения в конкретных гидромеханических расчетах при проектировании разработки нефтяных месторождений электрических аналогий (метод ЭГДА).

Приближенное подобие при моделировании физических процессов применяются также в случаях, если известны не все определяющие параметры изучаемого процесса или среди определяющих параметров имеются такие, влияние на процесс которых наиболее значительно по сравнению с другими, а также, если при наличии переменных параметров или анизотропии невозможно обеспечить условия подобия.

В указанных случаях моделирования используют те параметры, которые известны, или исключают из рассмотрения параметры, влияние которых незначительно. Степень приближения в каждом конкретном случае моделирования устанавливаются на основании результатов исследований модели.

При решении конкретных задач к дифференциальным уравнениям (2.43), (2.44) и критериям подобия (2.55)-(2.58) необходимо присовокупить частные особенности, характеризующие свойство среды, ее форму и размеры, особенности

протекания процесса на ее границах и т.д., которые однозначно выделяют рассматриваемый процесс из целого класса однородных процессов.

Условие теплового подобия. Тепловое подобие процессов означает подобие температурных полей и тепловых потоков в геометрически и гидромеханически подобных системах.

Пусть имеем две подобные между собой системы, тепловые процессы в которых описываются следующими уравнениями.

$$\frac{\partial t'}{\partial \tau'} + v_{x'} \frac{\partial t'}{\partial x'} + v_{y'} \frac{\partial t'}{\partial y'} + v_{z'} \frac{\partial t'}{\partial z'} = a' \left(\frac{\partial^2 t'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 t'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 t'}{\partial z'^2} \right); \quad (2.59)$$

$$\frac{\partial t''}{\partial \tau''} + \dots = a'' \left(\frac{\partial^2 t''}{\partial x''^2} + \dots + \frac{\partial^2 t''}{\partial z''^2} \right). \quad (2.60)$$

Уравнение теплообмена (из законов Ньютона и Фурье)

$$\alpha' \Delta t' = -\lambda' \frac{\partial t'}{\partial y'}; \quad (2.61)$$

$$\alpha'' \Delta t'' = -\lambda'' \frac{\partial t''}{\partial y''}, \quad (2.62)$$

- где $\frac{\partial t}{\partial y}$ — нормальная производная к оси x
- t — температура тела (жидкости);
- v_x, v_y, v_z — проекции скорости на оси x, y, z ;
- a — коэффициент температуропроводности;
- α — коэффициент теплоотдачи;
- λ — коэффициент теплопроводности.

Допустим, что системы подобны, т.е.

$$\left. \begin{aligned} \frac{x''}{x'} = C_\ell; \frac{\tau''}{\tau'} = C_\tau; \frac{v_x''}{v_x'} = C_v = \frac{v_y''}{v_y'} = \frac{v_z''}{v_z'}; t'' = C_t \\ \frac{t''}{t'} = C_t; \frac{a''}{a'} = C_a; \frac{\alpha''}{\alpha'} = C_\alpha; \frac{\lambda''}{\lambda'} = C_\lambda \end{aligned} \right\}. \quad (2.63)$$

Заменяя переменные второй системы (2.60) и (2.62) через переменные первой, получим

$$\left[\frac{C_t}{C_\tau} \right] \frac{\partial t'}{\partial \tau'} + \left[\frac{C_v C_t}{C_\ell} \right] (v_x' \frac{\partial t'}{\partial x'} + \dots) = \left[\frac{C_a C_t}{C_\ell^2} \right] a' \left(\frac{\partial^2 t'}{\partial x'^2} + \dots + \frac{\partial^2 t'}{\partial z'^2} \right); \quad (2.64)$$

$$[C_a C_t] \alpha' \Delta t' = - \left[\frac{C_\lambda C_t}{C_\ell} \right] \lambda' \frac{\partial t'}{\partial y'}. \quad (2.65)$$

Из условия тождественности уравнения (2.59), (2.60) и (2.64), (2.65) имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{C_t}{C_\tau} = \frac{C_v C_t}{C_\ell} = \frac{C_a C_t}{C_\ell^2} \\ C_a C_t = \frac{C_\lambda C_t}{C_\ell} \end{aligned} \right\} \quad (2.66)$$

Откуда

$$\frac{C_t}{C_\tau} = \frac{C_a C_t}{C_\ell^2} \quad \text{или} \quad \frac{C_a C_\tau}{C_\ell^2} = 1; \quad (2.67)$$

$$\frac{C_v C_t}{C_\ell} = \frac{C_a C_t}{C_\ell^2} \quad \text{или} \quad \frac{C_v C_\ell}{C_a} = 1; \quad (2.68)$$

$$C_a C_t = \frac{C_\lambda C_t}{C_\ell} \quad \text{или} \quad \frac{C_a C_\ell}{C_\lambda} = 1 \quad (2.69)$$

Подставив вместо констант подобия их значения из (2.63), получим критерии подобия

$$\frac{a'\tau'}{\ell'^2} = \frac{a''\tau''}{\ell''^2} \quad \text{или} \quad \frac{a\tau}{\ell^2} = \text{idem} = F_0 \quad (\text{критерий Фурье}) \quad (2.70)$$

$$\frac{v'l'}{a'} = \frac{v''l''}{a''} \quad \text{или} \quad \frac{v\ell}{a} = \text{idem} = P_e \quad (\text{критерий Пекле}) \quad (2.71)$$

$$\frac{\alpha'l'}{\lambda'} = \frac{\alpha''l''}{\lambda''} \quad \text{или} \quad \frac{\alpha\ell}{\lambda} = \text{idem} = N_u \quad (\text{критерий Нуссельта}) \quad (2.72)$$

Таким образом, чтобы обеспечить тепловое подобие двух или нескольких систем, необходимо, чтобы в сходственных точках критерии подобия F_0 , P_e , N_u имели одни и те же значения. Здесь также необходимо отметить, что одновременное выполнения условий гидромеханического и теплового подобия невозможно. Поэтому в каждой конкретной задаче при моделировании должны соблюдаться только основные определяющие критерии подобия.

3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ РАЗМЕРНОСТЕЙ

3.1. Основные понятия теории размерностей

Необходимой предпосылкой теории подобия является математическое описание изучаемого процесса в виде дифференциальных или интегрирования дифференциальных уравнений и условий однозначности (граничных или начальных условий).

Из математической формулировки задачи следует перечень существенных для рассматриваемого процесса физических величин. Если перечень установлен, то выявление чисел подобия может быть произведено методом анализа размерностей.

Подробно теория размерностей рассматривается в специальной литературе. Мы ограничимся рассмотрением понятий и некоторых выводов, следующих из теории размерностей.

Известно, что измерить какую-либо величину A – это значит сравнить ее с другой величиной a той же физической природы, т.е. определить, во сколько раз A больше (меньше) a . Для единообразия устанавливают определенное значение величины a и называют ее единицей измерения. Так, например, за единицу длины (метр) принимается длина 1650768,33 волн излучения атома криптона, за единицу времени (секунда) принимается определенная часть года и т.д.

Единицы измерения различных физических величин, объединенные на основе непротиворечивости друг другу, образуют систему единиц.

В настоящее время существует Международная система единицы (СИ), в которой произвольно выбраны единицы измерения так называемых первичных (основных) величин.

В СИ в качестве первичных (основных) единиц приняты величины: массы (M), длины (L), времени (T), силы тока (I), температуры (θ), силы света (J). Здесь M, L, T, I, θ, J – называются символами соответствующих первичных величин. Эти величины характеризуют какое-либо физическое явление. Единицы измерения остальных величин выражаются через основные и называются вторичными (производными).

Формула, указывающая зависимость единицы измерения вторичной величины от первичных (основных) единиц измерения, называется размерностью.

Размерность величины указывается при помощи взятого в квадратные скобки символа этой величины.

Например, скорость $v = dl/dt$ $[v]=[L][[T^*]^{-1}]$, L, T – размерности длины и времени.

Размерность вторичных величин находится при помощи так называемого определительного уравнения, служащего определением этой величины в математической форме. Например, определительным уравнением для силы можно считать второй закон Ньютона $F = m \cdot a$. Тогда $[F] = [M][L][T]^{-2}$, для работы $A = FS$, $[A] = [M][L]^2[T]^{-2}$.

Размерность можно представить в виде степенной формулы. Применительно к системе СИ формула размерности имеет вид

$$[\varphi] = L^{n_1} M^{n_2} T^{n_3} \Theta^{n_4} I^{n_5} J^{n_6}, \quad (3.1)$$

где $[\varphi]$ – вторичная производная единица измерения;

n_i – действительные числа

Размерность вторичной величины относительно данной первичной i может быть охарактеризована значением показателя степени n_i при этой первичной величине. Поэтому безразмерные числа часто называют величинами с нулевой размерностью, т.к. для них все показатели степени в формуле размерности (3.1) равны нулю.

В учении о размерностях различают также размерности независимых и зависимых величин.

Если среди n физических величин $u_1, u_2, \dots, u_i, u_{i+1}, \dots, u_n$ часть величин u_1, u_2, \dots, u_i обладают тем свойством, что размерность каждой из них не может быть представлена из размерностей остальных рассматриваемых величин, то размерности $[u_1], [u_2], \dots, [u_i]$ называются независимыми. Размерности же остальных величин, т.е. $[u_{i+1}], [u_{i+2}], \dots, [u_n]$, могут быть выражены, как функции независимых размерностей, т.е.

$$[u_{i+1}] = \varphi_{i+1}([u_1], [u_2], \dots, [u_i]);$$

$$[u_{i+2}] = \varphi_{i+2}([u_1], \dots, [u_i]);$$

.....

$$[u_n] = \varphi_n([u_1], \dots, [u_i]).$$

В этом случае размерности $[u_{i+1}], \dots, [u_n]$ называются зависимыми.

При рассмотрении большинства задач очень редко бывает, что одновременно исследуются все шесть основных единиц измерения (3.1), так, если изучаются чисто механические задачи, то ампер, градус Кельвина, свеча не входят в размерность ни одной величины, т.к. размерности вторичных величин выражаются через метр, килограмм, секунду.

При решении конкретных задач зачастую возникает вопрос, можно ли переходить от одних единиц измерения к другим. Для этого рассмотрим пример механической системы, которая имеет три первичных (основных) единицы измерения. Общность получаемых ниже выводов от этого не теряется.

В качестве первичных величин можно выбрать какие-либо иные, чем $[L]$, $[M]$, $[T]$, например, u_1, u_2, u_3 , в том случае если:

а) размерности $[u_1], [u_2], [u_3]$ являются независимыми функциями $[L], [M], [T]$, т.е. $[u_1] \neq [u_2]^\alpha [u_3]^\beta$ при любых α и β ;

б) возможно однозначное обратное преобразование, т.е. $[L], [M], [T]$ единственным образом можно выразить через $[u_1], [u_2], [u_3]$.

Покажем, при каком условии оба эти требования удовлетворяются. Для этого предположим, что u_i ($i = 1, 2, 3$) имеют следующие размерности

$$[u_1] = [M]^{a_1} [L]^{b_1} [T]^{c_1}, \quad [u_2] = [M]^{a_2} [L]^{b_2} [T]^{c_2}, \quad [u_3] = [M]^{a_3} [L]^{b_3} [T]^{c_3} \quad (3.2)$$

Такая система уравнений, как известно из курса алгебры, имеет решение и при том единственное, если составленный из коэффициентов уравнения определитель отличен от нуля, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 b_1 c_1 \\ a_2 b_2 c_2 \\ a_3 b_3 c_3 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3.3)$$

Тем самым удовлетворяется требование «б», т.е. при выполнении условия (75) $[L]$, $[M]$, $[T]$ единственным образом выражаются через $[u_1]$, $[u_2]$, $[u_3]$.

Условие (3.3) указывает в то же время на независимость функций u_i . Действительно, если бы имело место равенство

$$[u_1] = [u_2]^\alpha [u_3]^\beta,$$

откуда

$$\lg [u_1] = \alpha \lg [u_2] + \beta \lg [u_3],$$

то тогда

$$a_1 = \alpha a_2 + \beta a_3; \quad b_1 = \alpha b_2 + \beta b_3; \quad c_1 = \alpha c_2 + \beta c_3,$$

т.е. первая строка определителя являлась бы линейной комбинацией второй и третьей, и определитель равнялся бы нулю, что противоречит условию (3.3).

Например, первичными величинами могут быть сила, время, длина, т.е. $u_1 = F$, $u_2 = T$, $u_3 = L$

$$[u_1] = [M]^1 [L]^1 [T]^{-2}, \quad [u_2] = [M]^0 [L]^0 [T]^1, \quad [u_3] = [M]^0 [L]^1 [T]^0,$$

Определитель такой системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

т.е. удовлетворяется условие (3.3).

Рассмотрим примеры использования метода размерностей:

1. Ламинарное движение вязкой жидкости в круглой трубе.

Из гидродинамики известно, что объемный расход жидкости описывается уравнением

$$Q = \frac{\pi^2 \Delta p}{8\mu \ell} r^4, \quad (\text{a})$$

где Q – объемный расход жидкости;
 μ – коэффициент вязкости жидкости;
 Δp – падение напора на участке длины ℓ ;
 r – радиус трубы.

Приведем уравнение (a) к безразмерному виду. С другой стороны

$$Q = \pi r^2 v, \quad (\text{б})$$

где v – среднее значение скорости по сечению трубы. Тогда

$$v = \frac{\Delta p r^2 \pi}{8\mu \ell} \quad \Delta p = \frac{8\mu \ell v}{\pi r^2}. \quad (\text{в})$$

Введя в (в) масштабные преобразования

$$v = v_0 V; \quad \ell = \ell_0 L; \quad \Delta p = \Delta p_0 \Delta P; \quad r = \ell_0 R; \quad \mu = \mu_0 M. \quad (\text{г})$$

Получим

$$[\Delta p_0] \Delta p = \left[\frac{\mu_0 v_0 \ell_0}{\ell_0^2} \right] \frac{8MVL}{\pi R^2}. \quad (\text{д})$$

Чтобы получить уравнение в безразмерном виде, нужно принять

$$\Delta p_0 = \frac{\mu_0 v_0}{\ell_0}. \quad (\text{е})$$

Полученное равенство называется уравнением связи между масштабом и намечает определенное ограничение на свободу выбора масштабов.

Так как получено одно уравнение связи, а число масштабов четыре, то три из них можно выбрать, а один определить, пользуясь уравнением связи между масштабами.

Приняв, $\mu_0 = \mu$; $v_0 = v$; $\ell_0 = r$, получим $\Delta p_0 = \mu v / r$ и значение безразмерных величин

$$\left. \begin{aligned} \Delta P &= \frac{\Delta p}{\Delta p_0} = \frac{\Delta p r}{\mu v}; & R &= \frac{r}{\ell_0} = 1; & L &= \frac{\ell}{\ell_0} = \frac{\ell}{r}; \\ M &= \frac{\mu}{\mu_0} = 1; & V &= \frac{v}{v_0} = 1 \end{aligned} \right\}. \quad (\text{ж})$$

После этого выражение (д) примет вид

$$\Delta P = \frac{8L}{\pi}. \quad (3)$$

Следовательно, выражение (а), включающее пять размерных величин, преобразовано в выражение (3), состоящее из двух безразмерных величин. При этом соотношение между масштабами подобия определяется зависимостью

$$\Delta p_0 = \frac{\mu v}{r}. \quad (\text{и})$$

2. Дифференциальное уравнение изгиба изотропной пластины под действием равномерно распределенной нагрузки q

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q. \quad (\text{А})$$

Введем безразмерные величины и обозначения

$$w = LW, \quad x = LX, \quad y = BY, \quad \frac{L^2}{B^2} = S, \quad S_1 = \frac{ql^3}{D}. \quad (\text{Б})$$

Подставляя (Б) в (А), получим

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2S \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + S^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = S_1 \quad (\text{В})$$

Таким образом, уравнение (А), имеющее пять размерных величин (D, q, x, y, w) преобразовано в выражение (В), состоящее из двух безразмерных величин: комплекса S_1 и симплекса S .

3.2. Определение вида критериев с помощью анализа размерностей

При физическом моделировании функциональная зависимость между переменными и параметрами, характеризующими рассматриваемый процесс, часто бывает неизвестной. В этом случае определение критериев-комплексов Π и критериев-симплексов S может быть осуществлено с помощью анализа размерностей. В основу этого метода положены два допущения.

Пусть при исследовании какого-либо физического процесса необходимо установить зависимость какой-либо физической переменной от всех существенных для данного процесса переменных параметров.

Будем считать, во-первых, что заранее известно, от каких параметров и переменных зависит указанная физическая переменная, и, во-вторых, что между всеми существенными для рассматриваемого процесса величинами имеет место степенная функциональная связь.

Оба допущения существенно снижают принципиальную и практическую ценность метода анализа размерностей. Действительно предположение о том, что любая важная для какого-либо физического процесса переменная представляет собой степенную функцию от остальных параметров и является в значительной мере произвольным. Что же касается первого допущения, то оно по существу означает утверждение о далеко идущих знаниях механизма изучаемого процесса.

Метод анализа размерностей также не дает никаких указаний для составления перечня переменных и параметров, существенных для рассматриваемого процесса. Ответственность за составление такого перечня каждый раз ложится цели-

ком на исследователя. Поэтому одна или несколько из существенных для процесса величин могут быть опущены, что легко может привести к неверным результатам.

Сущность метода анализа размерностей целесообразно пояснить на конкретном примере.

Рассмотрим гидравлическое сопротивление, возникающее при течении вязкой жидкости внутри круглой трубы. В соответствии с первым допущением будем считать, что падение давления Δp на участке трубы длиной l зависит от средней скорости жидкости v , диаметра трубы d , длины рассматриваемого участка l , плотности жидкости ρ и от ее коэффициента вязкости μ , т.е.

$$\Delta p = f(v, \mu, \rho, l, d).$$

В соответствии со вторым допущением f есть степенная функция, т.е.

$$\Delta p \cong v^n \mu^m \rho^r l^s d^t, \quad (A)$$

причем m, n, r, s, t – некоторые показатели степени, выбор которых вначале ничем не ограничен.

Размерности величин, входящих в соотношение (A), будут:

$$[\Delta p] = \text{кгс}/\text{м}^2, \quad [\rho] = \text{кгс}^2/\text{м}^4; \quad [v] = \text{м}/\text{с}; \quad [l] = \text{м}; \quad [\mu] = \text{кгс} \cdot \text{с}/\text{м}^2; \quad [d] = \text{м}.$$

Подставив в соотношение (A) указанные размерности, получим

$$\text{кгс}/\text{м}^2 = (\text{м}/\text{с})^n (\text{кгс} \cdot \text{с}/\text{м}^2)^m (\text{кг} \cdot \text{с}^2/\text{м}^4)^r (\text{м})^s (\text{м})^t. \quad (B)$$

Размерности обеих частей соотношения (B) должны быть одинаковыми. Поэтому, приравняв в соотношении (B) показатели степени при одинаковых основных размерностях (кг, м, с), получим:

$$\begin{aligned} (\text{кг}) \quad 1 &= m + r; \\ (\text{м}) \quad -2 &= n - 2m - 4r + s + t; \\ (\text{с}) \quad 0 &= -n + m + 2r. \end{aligned} \quad (B)$$

Система из трех уравнений (В) содержит пять неизвестных величин (n, m, r, s, t) . Решая эту систему относительно показателей n, m, r , находим для них следующие выражения:

$$\begin{aligned} n &= s + t + 2; \\ m &= -s - t; \\ r &= s + t + 1. \end{aligned} \quad (\Gamma)$$

Подставив выражение (Г) в выражение (А), получим

$$\Delta p \approx v^{2+s+t} \rho^{1+s+t} \mu^{-s-t} l^s d^t.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta p}{\rho v^2} = C \left(\frac{\rho v d}{\mu} \right)^{s+t} \left(\frac{l}{d} \right)^s, \quad (\Delta)$$

где C – безразмерный множитель пропорциональности.

Безразмерные величины

$$\frac{\Delta p}{\rho v^2}; \quad \frac{\rho v d}{\mu}; \quad \frac{l}{d}$$

представляют собой искомые выражения для критериев. Число последних находится в полном соответствии с Пи-теоремой. Действительно, общее число N величин, входящих в выражение (А), равно

$$N = 6 \text{ (т.е. } \Delta p, v, \mu, \rho, l, d \text{)}.$$

Число n величин с неодинаковыми размерностями составляют

$$n = 5 \text{ (т.е. } \Delta p, v, \mu, \rho, d \text{)}.$$

Число же k величин с независимыми размерностями

$$k = 3 \text{ (т.е. } \Delta p, v, d \text{)}.$$

Поэтому, согласно Пи-теореме число критериев-комплексов должно быть

$$t_{\dot{r}} = n - k = 5 - 3 = 2 \left(\frac{\Delta p}{\rho v^2}, \frac{\rho v d}{\mu} \right).$$

Число критериев-симплексов

$$ts = N - n = 6 - 5 = 1 \left(\frac{l}{d} \right)$$

и общее число критериев

$$t = N - k = 6 - 3 = 3.$$

Как видно из изложенного, значения показателей s и t , а также множителя C остались неизвестными. Они могут быть определены опытным путем, разумеется при условии, что между критериями, входящими в уравнение (Д), существует степенная функциональная связь.

Необходимо отметить, что при исследовании физических процессов с использованием метода анализа размерностей возможны грубые ошибки. Причины таких ошибок заложены в самом методе анализа размерностей, не дающем никаких указаний относительно того, какие переменные и параметры являются существенными для того или иного изучаемого процесса. Не учет одного существенного параметра может привести исследования к значительной ошибке.

В этом отношении метод, основанный на анализе дифференциальных уравнений математической физики и соответствующих начальных и краевых условий, свободен от недостатков, присущих методу анализа размерностей. Особенно отчетливо сказываются преимущества метода анализа дифференциальных уравнений в сочетании его с масштабными преобразованиями.

Эффективность методов теории размерностей покажем на примере определения масштаба времени при моделировании реологических процессов. Прежде всего,

необходимо обратить внимание на то, что до сих пор не выработано обоснованное общее решение, касающееся определения масштаба времени.

Так, в задачах фотоползучести принимается уравнение линейно-наследственной ползучести Больцмана-Вольтерра и определяются реологические параметры α и β уравнений состояния моделей и природы, на основании чего вычисляется масштаб времени

$$K_t = \frac{\tau_{0H}}{\tau_{0M}} = \left(\frac{\beta_M}{\beta_H} \right)^{\frac{1}{\alpha+1}},$$

где $\tau = \frac{1}{(-\beta)^{\frac{1}{\alpha+1}}}$ – время ретардации (последствия), принимаемое за единицу измерения.

При использовании метода эквивалентных материалов масштаб времени определяется из условия кинематического подобия:

$$K_t = \frac{t_H}{t_M}.$$

Рассмотрим задачу о смещении контура горной выработки, подверженной влиянию очистных работ в зависимости от следующих определяющих параметров:

H – глубина разработки (места заложения выработки);

φ – угол падения вмещающих пород;

E – модуль упругости вмещающих пород;

μ – коэффициент Пуассона пород;

η – коэффициент динамической вязкости боковых пород;

γ – объемный вес пород вышележащей толщи;

λ – коэффициент бокового распора $\lambda = \frac{\mu}{1-\mu}$;

d – характерный геометрический размер сечения выработки;

l – расстояние от контура выработки до очистного забоя;

v – скорость подвигания очистного забоя;

t – время.

Представим величину смещения контура выработки как функцию всех перечисленных параметров:

$$V = f(\gamma, H, E, v, h, \eta, \lambda, \phi, v, l, a, t). \quad (3.4)$$

Все величины, входящие в зависимость (3.4), за исключением v, λ, a , обладают определенной размерностью. Как известно, размерность любой физической величины можно представить в виде произведения возведенных в степень размерностей некоторых основных величин. Для поставленной задачи достаточно принять единицу длины $[L]$, единицу массы $[M]$ и единицу времени $[T]$. Заметим, что в качестве основных величин можно выбрать и любые другие, но при этом должны выполняться два условия:

а) размерности новых величин должны быть независимыми функциями

$$[M], [L], [T];$$

б) должно выполняться обратное преобразование $[L], [M], [T]$ через новые величины единственным образом.

В качестве основных величин примем η, v, E и выразим их размерности через основные единицы СИ.

$$\begin{aligned} [\eta] &= [L]^{-1} \cdot [M] \cdot [T]^{-1}; \\ [E] &= [L]^{-1} \cdot [M] \cdot [T]^{-2}; \\ [V] &= [L] \cdot [M]^0 \cdot [T]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Для выполнения указанных выше требований достаточно, чтобы определитель, составленный из показателей степеней, был отличен от нуля. В нашем случае будем иметь

$$\Delta = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} = 2 \neq 0 \quad (3.6)$$

Следовательно, условия независимости и обратного преобразования выполняются.

Функциональную зависимость (3.4) между величинами, характеризующими процесс конвергенции контура выработки можно представить в виде зависимости между составленными из них безразмерными комплексами. При этом учтем, что v, λ, α являются безразмерными, а H, h, l, a – имеют одинаковую размерность. Очевидно она может быть представлена следующим образом:

$$\Phi\left(\frac{v}{\eta^{\alpha} v^{\beta} E^{\gamma}}, \frac{t}{\eta^{\alpha t} v^{\beta t} E^{\gamma t}}\right) = 0 \quad (3.6)$$

или

$$\frac{v}{\eta^{\alpha} v^{\beta} E^{\gamma}} = \Psi\left(\frac{t}{\eta^{\alpha t} v^{\beta t} E^{\gamma t}}\right). \quad (3.7)$$

Получено два критерия подобия. Таким образом, задача свелась к нахождению зависимости между двумя величинами, характеризующими процесс смещения контура выработки. Это геометрические параметры рассматриваемой выработки и время.

Для определения неизвестных показателей степеней при η, v, E воспользуемся выражениями (3.5) и (3.7):

$$\frac{[v]}{[\eta]^{\alpha} [v]^{\beta} [E]^{\gamma}} = \frac{L}{L^{-\alpha} M^{\alpha} T^{-\alpha} L^{\beta} T^{-\beta} L^{-\gamma} M^{\gamma} T^{-2\gamma}}, \quad (3.8)$$

$$L^{\beta-\alpha-\gamma-1} M^{\alpha+\gamma} T^{-\alpha-\beta-2\gamma}, \quad (3.9)$$

откуда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \beta - \alpha - \gamma - 1 = 0; \\ -\beta - \alpha - 2\gamma = 0; \\ \alpha + \gamma = 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

Решив систему уравнений (3.10), получим

$$\alpha = 1; \quad \beta = 1; \quad \gamma = -1.$$

Следовательно, один из критериев подобия имеет вид:

$$\dot{I}_1 = \frac{v}{\eta v E^{-1}} = v \frac{E}{v \eta}. \quad (3.11)$$

Аналогично находим второй критерий подобия

$$\frac{[t]}{[\eta]^\alpha [v]^\beta [E]^\gamma} = \frac{T}{L^{-\alpha} M^\alpha T^{-\alpha} L^\beta T^{-\beta} L^\gamma M^\gamma T^{-2\gamma}}, \quad (3.12)$$

$$L^{\alpha+\beta-\gamma} M^{\alpha+\gamma} T^{-\alpha-\beta-2\gamma-1}, \quad (3.13)$$

$$\begin{cases} \beta - \alpha - \gamma = 0; \\ -\alpha - \beta - 2\gamma - 1 = 0; \\ \alpha + \gamma = 0. \end{cases} \quad (3.14)$$

Из решения системы (3.14) получим следующие значения показателей степени

$$\alpha = 1; \quad \beta = 0; \quad \gamma = -1.$$

Следовательно, второй критерий подобия

$$\dot{I}_2 = \frac{v}{\eta E^{-1}} = t \frac{E}{\eta}. \quad (3.15)$$

Учитывая зависимость (3.7) запишем:

$$\Pi_1 = \Psi(\Pi_2). \quad (3.16)$$

Очевидно, условие подобия модели и природы будет соблюдено при

$$\Pi_{1H} = \Pi_{1M};$$

$$v_H \frac{E_H}{v_H \eta_H} = v_M \frac{E_M}{v_M \eta_M}; \quad (3.17)$$

$$\Pi_{2H} = \Pi_{2M};$$

$$t_M \frac{E_M}{\eta_M} = t_H \frac{E_H}{\eta_H}. \quad (3.18)$$

Из последнего равенства определяется масштаб времени при моделировании

$$K_t = \frac{t_H}{t_M} = \frac{\eta_H E_M}{\eta_M E_H} = \frac{K_\eta}{K_E}. \quad (3.19)$$

Из формулы (3.17) аналогично определяется масштаб скорости при условии, что геометрический масштаб моделирования задан:

$$K_v = \frac{v_H}{v_M} = K_t \frac{E_H \eta_M}{E_M \eta_H} = \frac{K_t K_E}{K_\eta}. \quad (3.20)$$

Полученные критерии подобия (3.11) и (3.15) действительно являются безразмерными комплексами.

Результаты и выводы, полученные в этом примере, соответствуют, так называемой, Пи-теореме и теоремам подобия.

3.3. Пи-теорема

Впервые доказательство Пи-теоремы было опубликовано в 1912 г. в трудах аэродинамического института, возглавляемого русским ученым Н.К.Жуковским.

Пи-теорема формулируется следующим образом: всякое уравнение, связывающее между собой N физических величин, среди которых k величин обладают независимыми размерностями, может быть преобразовано в уравнение, связывающему $N-k$ безразмерных комплексов и симплексов (отношение двух одноименных величин) составленных из этих величин.

Согласно Пи-теореме, из N размерных величин, связанных физическим уравнением, можно составить не более $N-k$ независимых безразмерных комплексов и симплексов. Доказательства теоремы или ее пояснение не приводим, ввиду их громоздкости.

3.4. Теоремы подобия

Основные положения теории подобия формулируют в виде трех теорем.

Первая теорема подобия устанавливает связь между константами подобия и позволяет выявить критерии подобия. В общей форме эту теорему формулируют так: подобные между собой процессы имеют одинаковые критерии подобия.

Например, для первого процесса имеем критерии

$$P'_1, P''_1, \dots, P_1^k.$$

Аналогично для второго процесса имеем

$$P'_2, P''_2, \dots, P_2^k.$$

Для подобных явлений должно соблюдаться равенство одноименных критериев подобия

$$P'_1 = P'_2; \quad P''_1 = P''_2, \dots, P_1^k = P_2^k.$$

Вторая теорема подобия устанавливает возможность представления интеграла как функции от критериев подобия дифференциального уравнения. На ос-

новании этой теоремы любая зависимость между переменными, характеризующими какое-либо явление $f(v, \mu, \ell, d, \lambda, \dots) = 0$, может быть представлена в виде зависимости между критериями подобия

$$F(\Pi', \Pi'', \dots, \Pi^k) = 0.$$

Зависимость такого типа называется обобщенным или критериальным уравнением. Так как для всех подобных между собой явлений критерии подобия сохраняют одно и то же значение, то и критериальные зависимости для них одинаковы. Следовательно, представляя результаты какого-либо опыта в критериях подобия, мы получим обобщенную зависимость, которая справедлива для всех подобных между собой явлений. Помимо критериев подобия в критериальные уравнения могут входить также симплексы – безразмерные отношения однородных физических величин.

Третья теорема подобия устанавливает условия, достаточные и необходимые для того, чтобы процессы были подобны. Подобны те процессы, условия однозначности которых подобны, и критерии, составленные из условий однозначности, численно одинаковы.

Задача исследования какого-либо физического процесса по существу может считаться рашенной, если найдены функции, описывающие поля всех характерных для рассматриваемого процесса физических переменных. Однако, пользуясь одними только законами физики, невозможно без промежуточных математических операций описать протекание рассматриваемого процесса в любой момент времени во всем изучаемом пространстве. В связи с этим изучение процесса производится вначале не во всем пространстве, которое охвачено исследуемым процессом, и не за конечный промежуток времени, а в произвольно выделенной «материальной точке» и в течение элементарного промежутка времени. При этом материальная точка должна представлять собой объем, размеры которого настолько малы по сравнению с размерами всего изучаемого пространства или объема, что они могут рассматриваться как дифференциалы длины dx , dy , dz , т.е. материальная точка представляет собой элементарный параллелепипед, являясь «микроско-

мосом» по отношению ко всему изучаемому пространству, и в то же время должен быть «макрокосмосом» по отношению к молекулам. Это означает, что число молекул, находящееся в параллелепипеде, должно быть очень велико, а размеры dx , dy , dz должны быть достаточно велики по сравнению с молекулярными расстояниями.

Эти требования обычно легко удовлетворяются. Элементарный промежуток времени также должен быть достаточно малым, чтобы можно было считать, что на его протяжении в пределах материальной точки находятся одни и те же молекулы. Этому требованию удовлетворяет промежуток времени, равный дифференциалу $d\tau$.

Таким образом, промежуток времени $d\tau$ и объем dV , в пределах которых рассматривается изучаемый процесс, являясь математической точки зрения физики величины, достаточно большие (что позволяет среду, в которой протекает физический процесс, рассматривать как континуум).

Выбрав, таким образом, в качестве объекта первоначального исследования элементарный объем, формулируют для него соответствующие законы или принципы физики. В результате получается одно или система дифференциальных уравнений математической физики, которые устанавливают взаимосвязь между пространственно-временными изменениями всех физических переменных. Эта система уравнений описывает все без исключения явления одного класса независимо от геометрической конфигурации изучаемого тела, а также независимо от физических свойств и условий его взаимодействия с окружающей средой.

Чтобы из целого класса выделить единичный процесс, определить его однозначно, необходимо к дифференциальным уравнениям присоединить математическое описание всех частных особенностей, которые называются условиями однозначности. Эти условия определяются заданием:

- 1) геометрических условий, характеризующих форму и размеры тела, в котором протекает процесс;
- 2) физических условий, характеризующих физические свойства среды и тела;

3) граничных условий, характеризующих особенности протекания процесса на границах тела;

4) временных условий, характеризующих особенности протекания процесса во времени.

Условия 3) и 4) называют еще краевыми условиями.

Условия однозначности могут быть заданы в виде числового значения или в виде дифференциального уравнения.

После приведения дифференциальных уравнений, начальных и граничных условий к безразмерному виду и задания численных значений безразмерных параметров получают систему уравнений, которые охватывают уже не единичные процессы, а целую группу процессов.

4. ФИЗИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

4.1. Общие сведения

Как указывалось во введении, при разработке месторождений полезных ископаемых и строительстве подземных сооружений возникают сложные инженерные задачи, связанные с напряженно-деформированным состоянием массива горных пород и проявлением различных физических процессов – давление горных пород, горные удары, выбросы и т.д. Физическая сущность указанных процессов еще недостаточно изучена, а математическое описание процессов в обобщенном виде в большинстве случаев отсутствует. В этом случае на основании теории размерности с использованием Пи-теоремы составляются уравнения связей, и подготавливается модель для проведения экспериментов.

В простейшем случае модель воспроизводит изучаемое явление с сохранением физической природы и геометрического подобия, а отличается от оригинала (натуры) лишь размерами одноименных параметров и скоростью протекания исследуемого процесса. В некоторых случаях значительно проще, удобнее и рациональнее модель изготавливать из среды, отличной по своей физической природе от оригинала (натуры). Однако и здесь модель изготавливают с соблюдением условий подобия. В этом случае изучение какого-либо явления в оригинале заменяется изучением аналогичного явления на модели. Например, вместо исследования явления конвективного теплообмена в природе исследуют на модели процесс диффузии или наоборот. По мере накопления данных о закономерностях процесса в дальнейшем составляются уже достаточно обоснованные уравнения связей, которые в критериальной форме используют для практических расчетов процесса в природе.

Метод моделирования базируется на теории подобия. Однако в то время как теория подобия изучает свойства заведомо подобные системы, учение о моделировании призвано решать прикладную задачу, а именно: установить, каким требованиям должна удовлетворять модель, чтобы процессы, происходящие в ней, были подобны процессам, происходящим в природе.

В разработке теории подобия и моделирования первенство принадлежит русским ученым. Если заграничная практика дала сравнительно небольшое число разрозненных, относящихся к частным вопросам теории подобия, то русские ученые разработали общую теорию подобия, создав тем самым предпосылки, необходимые для построения учения о моделировании. Так, еще в 1907 г. М.В. Кирпичев дал блестящее изложение основ подобия. Уже в 1922 г. акад. Н.Н.Павловский опубликовал теорию электрогидродинамических аналогий. В 1924 г. М.В.Кирпичев начал экспериментальные исследования в области моделирования сначала тепловых, а затем и некоторых других явлений. Следует также указать на метод электрических аналогий, разработанный Л.И. Гу-тенмахером на основе развитой им теории С.А. Гершгорина.

Одной из первых попыток моделирования на физических моделях механических явлений в массиве горных пород являются исследования М. Файоля. В дальнейшем были разработаны теоретические основы и инженерные методы расчета физических моделей метода эквивалентных материалов проф. Г.Н. Кузнецовым, метода центробежного моделирования проф. Г.И.Покровским. Значительно развит и усовершенствован метод фотоупругости проф. В.Ф. Трумбачевым. Предложены и разработаны теоретические основы гидроинтегратора доктором т.н. В.С.Лукьяновым.

Основоположителем моделирования в горном деле по праву следует считать проф. М.М. Протодякова.

4.2. Правила моделирования

Выше указывалось, что вследствие трудностей математического характера аналитическое решение значительного числа практических задач с краевыми условиями либо вовсе невыполнимо, либо требует для своего выполнения введения упрощающих допущений. Последнее часто в значительной мере снижают практическую ценность теоретического решения. Поэтому при решении значительного числа задач приходится прибегать к эксперименту. Однако результаты единичного опыта, вообще говоря, не могут быть непосредственно распространенными на случаи, для которых краевые условия и значения физических параметров полно-

стью не совпадают с теми, которые имели место при экспериментальном исследовании. Такая ограниченность области применения результатов экспериментального исследования выдвигает вопрос о возможности обобщения опытных данных. Эту возможность открывает метод моделирования, позволяющий распространить результаты единичного опыта по изучению какого-либо процесса на целую группу процессов, подобных исследуемому.

На основании теории подобия было указано, что единичный процесс может быть однозначно выделен из целого класса путем присоединения к дифференциальным уравнениям, описывающим рассматриваемый класс процессов, краевых условий и задание значений физических параметров, входящих в дифференциальные уравнения, начальные и граничные условия. Но после приведения дифференциальных уравнений, начальных и граничных условий к безразмерному виду и задания численных безразмерных параметров получают систему уравнений, охватывающую группу процессов. Поэтому, если два процесса протекают в геометрически подобных системах и при этом безразмерные дифференциальные уравнения, граничные и начальные условия, описывающие оба явления, тождественно одинаковы, то рассматриваемые процессы подобны и результаты исследования одного из них могут быть распространены на второе.

На основании сказанного представляется возможным дать следующую формулировку правил моделирования.

Для того чтобы процесс в модели был подобен процессам в природе, необходимо и достаточно выполнить следующие требования:

- 1) модель должна быть геометрически подобна образцу;
- 2) процессы в модели и образце должны принадлежать к одному классу и описываться одинаковыми дифференциальными уравнениями;
- 3) начальные и граничные условия в модели должны быть реализованы таким образом, чтобы безразмерные начальные и граничные условия модели тождественно совпадали с такими же условиями в природе;
- 4) одноименные безразмерные параметры, входящие в дифференциальные уравнения, начальные и граничные условия, в модели и в природе должны быть соответственно равны.

Изложенные правила моделирования относятся к случаю, когда процессы в модели и в природе принадлежат к одному и тому же классу. Эти правила могут быть легко распространены на случай, когда процессы, протекающие в них, удовлетворяют определению аналогии. В этом случае условие 4) должно содержать равенство не только одноименных, а и аналогичных безразмерных параметров. Так, например, если рассматривается аналогия между процессами теплопроводности и диффузии, то аналогичными будут коэффициент диффузии s и коэффициент теплопроводности λ , играющие одинаковую роль в физических уравнениях. Следовательно, правило собственно моделирования является частным случаем более общего правила аналогии.

Сделаем некоторые замечания относительно реализации краевых условий при моделировании. Все краевые условия по признаку их реализации можно разделить на две категории: управляемые и неуправляемые. Первые могут быть реализованы по желанию экспериментатора; вторые же реализуются независимо от исследователя в силу самой природы физического явления.

Например, для стационарного процесса конвективного теплообмена при течении жидкости в трубе краевые условия могут быть сформулированы следующим образом:

- 1) во входном сечении трубы имеется вполне определенное распределение скоростей и температур;
- 2) в какой-либо точке потока имеется определенное давление;
- 3) на границе раздела потока и трубы скорость жидкости равна нулю, температуры жидкости и трубы равны друг другу, а также равны друг другу тепловые потоки, входящие в трубу и выходящие из жидкости.

Нетрудно видеть, что из перечисленных граничных условий, условия 1) и 2) являются управляемые и их выполнение зависит от желания исследователя. Условия же 3) имеет место всегда и не зависит от исследователя. Что же касается начальных условий, то они всегда являются управляемыми.

Для того, чтобы безразмерные неуправляемые краевые условия в модели и природе были тождественно одинаковыми, достаточно осуществить равенство без-

размерных одноименных параметров, входящие в соответствующие краевые условия модели и природы.

Управляемые краевые условия должны быть заданы на протяжении всех пространственных границ исследуемого процесса. Поэтому, прежде чем приступить к моделированию, необходимо сформулировать управляемые условия для природы и выбирать их таким образом, чтобы они были достаточно хорошо известны.

4.3. Метод эквивалентных материалов

Этот метод применяют для исследования вопросов, связанных с проявлением горного давления в очистных подготовительных выработках при разработке месторождений полезных ископаемых; в подземных капитальных выработках; при изучении вопросов, связанных с породами, сдвигения массивов и других физических процессов, происходящих в массивах в связи с проведением в них горных работ.

Изучение всех этих вопросов аналитическим методом и непосредственно на практике связано с большими трудностями, поэтому использование метода моделирования имеет большое теоретическое и практическое значение.

В предвоенные годы во ВНИМИ Г.Н. Кузнецовым был разработан метод моделирования, в основу которого была положена идея создания моделей горных массивов из искусственных материалов, эквивалентных по своим деформационным и плотностным свойствам горным породам при принятом масштабе моделирования. Сейчас этот метод широко используется под названием МЭМ.

Сущность метода эквивалентных материалов заключается в том, что на физических моделях с известными допущениями и при соблюдении условий подобия изучают интересующие нас физические процессы и результаты этих исследований используют для разработки теории «механизма» процесса, а также для разработки практических рекомендаций для промышленности. Например, МЭМ широко применяют для изучения процесса сдвигения пород массива при очистной выемке полезных ископаемых (рис. 4.1).

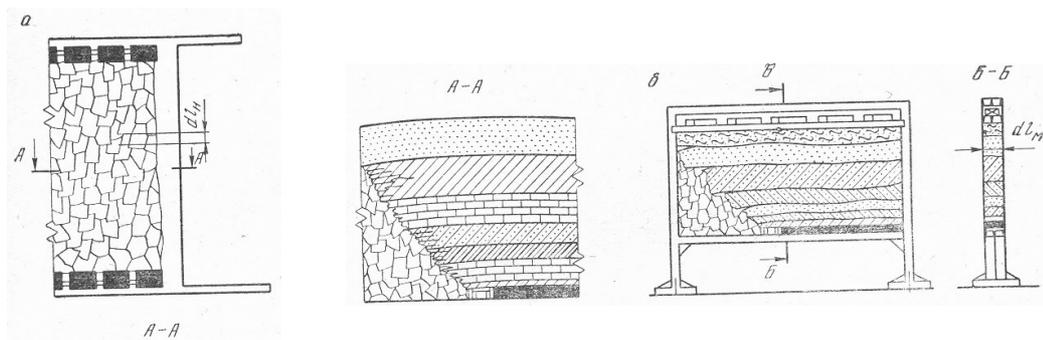


Рис. 4.1. Схема к моделированию задачи деформаций горных пород на эквивалентных материалах: *а* – образец; *б* – модель.

При достаточном удалении от штреков характер проявления давления горных пород на крепь во времени будет изменяться только в направлении движения очистного забоя. Следовательно, задача изучения давления пород в очистных выработках сводится к плоской модели и рассматривается для сечения А–А. На плоской модели (рис. 4.1, б) с соблюдением условий подобия воспроизводится процесс выемки полезного ископаемого, в результате которого в модели происходит процесс сдвижения пород, подобный натуре.

В основе метода лежит теория механического подобия Ньютона, которая предполагает геометрическое, кинематическое и динамическое подобия.

Геометрическое подобие. Обеспечивается в том случае, если все линейные размеры, как и ранее, будут уменьшены в определенное постоянное число раз по сравнению с той областью природы, в которой изучается данное явление, т.е.

$$\frac{l'_n}{l'_m} = \frac{l''_n}{l''_m} = \dots = \frac{l^i_n}{l^i_m} = C_l, \quad (4.1)$$

где l'_i, l''_i – линейные размеры модели и природы, соответственно.

Кинематическое подобие будет обеспечено в том случае, если сходственные частицы, двигаясь по геометрически подобным траекториям, проходят геометрически подобные пути в промежутки времени, отличающиеся постоянным множителем, т.е.

$$\frac{\tau'_i}{\tau_i} = \frac{\tau''_i}{\tau_i} = \dots = \frac{\tau_i^i}{\tau_i^i} = \tilde{N}_\tau. \quad (4.22)$$

Динамическое подобие имеет место в том случае, если массы двух сходственных частиц (соответствующим образом расположенных в пространстве и времени) отличаются друг от друга в одно и тоже число раз

$$\frac{m'_H}{m'_M} = \frac{m''_H}{m''_M} = \dots = \frac{m_H^i}{m_M^i} = C_m. \quad (4.3)$$

Выразив в равенствах (4.3) массу через объем и плотность, получим

$$C_m = \frac{\ell_H^3 \rho_H}{\ell_M^3 \rho_M} \quad (4.4)$$

или

$$C_m = C_\rho C_\ell^3, \quad (4.5)$$

где

$$C_\rho = \frac{\rho_H}{\rho_M}. \quad (4.6)$$

Так как множитель подобия C_ℓ задан геометрическим подобием, то для соблюдения условий динамического подобия достаточно задать соотношение плотностей, т.е. C_ρ . Из условия механического подобия

($\frac{C_p}{C_\rho C_\ell^2 C_v^2} = 1$), выражая множители подобия через соответствующие соотношения и произведя преобразования, будем иметь

$$\frac{\rho_H \ell_H^2 v_H^2}{\rho_M \ell_M^2 v_M^2} = iden = N_\ell \text{ (инвариант подобия Ньютона)} \quad (4.7)$$

Следовательно, определив параметры модели, при которых соотношения множителей подобия удовлетворяют условию (4.7), мы получим модель, динамические процессы в которой будут подобны соответствующим процессам в натуре.

Обращаясь к конкретной задаче о давлении пород на крепь подземной выработки, установим критерии подобия и множители подобия для моделирования указанного процесса методом ЭМ.

На основании вышеизложенного выделим основные силы, которые определяют характер физического процесса.

В первом приближении можно ограничиться учетом двух родов сил, а именно: внешних сил – тяжести и внутренних сил – напряжений, возникающих в породе.

Преобразуем формулу (4.7), выражающую общий закон подобия Ньютона для случая совместного действия сил тяжести и внутренних напряжений. Заменяя в ней значения квадратов скоростей через ускорения и длины, получим

$$\frac{P_n}{\rho_n a_n \ell_n^3} = \frac{P_m}{\rho_m a_m \ell_m^3} = idem \quad (4.8)$$

В данном случае деформация и разрушение породы происходит за счет действия сил тяжести, т.е. $a = g$.

$$\begin{aligned} \rho_m a_m &= \rho_m g_m = \gamma_m, \\ \rho_n a_n &= \rho_n g_n = \gamma_n. \end{aligned} \quad (4.9)$$

где γ – объемный вес материала.

Введем в (4.8) обозначение

$$\frac{P}{\ell^2} = N(\sigma), \quad (4.10)$$

под которым подразумеваем предельные напряжения: на растяжение, сжатие, сдвиг или деформационные характеристики пород.

Подставив зависимости (4.9), (4.10) в (4.8), получим

$$K = \frac{N_m}{\gamma_m \ell_m} = \frac{N_n}{\gamma_n \ell_n} = idem, \quad (4.11)$$

где K – безразмерное число, являющееся определяющим критерием подобия.

На основании полученного выражения можно установить основные требования к модели, обеспечивающие механические подобия явления. Если модель изготовить из материала природы, то будем иметь одинаковые физико-механические свойства и природы: $N_m = N_n$; $\gamma_m = \gamma_n$.

Однако смысл модулирования в данном случае заключается в том, чтобы геометрические размеры модели были меньше размеров природы, т.е. $\ell_i \neq \ell_i$.

В этом случае равенство (4.11) не имеет места. Для сохранения условий его инвариантности следует полагать, что $N_m = N_n$; $\gamma_m \neq \gamma_n$ или $N_m \neq N_n$; $\gamma_m \neq \gamma_n$.

В первом случае согласно (4.11)

$$\gamma_m = \gamma_n \frac{\ell_n}{\ell_m}, \quad (4.12)$$

т.е. объемный вес материала модели должен быть значительно больше объемного веса материала природы.

Во втором случае

$$N_m = \frac{\ell_m \gamma_m}{\ell_n \gamma_n} N_m \quad (4.13)$$

Зная механические свойства материала природы и задаваясь соотношениями ℓ_m / ℓ_n и γ_m / γ_n , получим значения механических свойств материала модели, которые необходимы для обеспечения подобия модели и природы.

При изучении процесса разрушения пород в качестве определяющих характеристик механических свойств пород должны быть взяты предельные значения прочности породы при ее разрушении, которые могут быть определены путем построения огибающей кругов Мора.

Таким образом, при подборе материалов-эквивалентов в качестве определяющих характеристик прочности пользоваться совокупностью значений временного сопротивления пород на сжатие R_c и растяжения R_p или же совокупностью значений коэффициента сцепления C_o и угла внутреннего трения $tg\phi$. В этом случае необходимо соблюдать следующие равенства:

условие подобия внешних сил

$$P_M = \frac{\gamma_M \ell_M^3}{\gamma_H \ell_H^3} P_H \quad (4.14)$$

условие подобия процессов разрушения

$$\left. \begin{aligned} R_{с.м.} \frac{\ell_M \gamma_M}{\ell_H \gamma_H} R_{с.н.} \\ R_{р.м.} \frac{\ell_M \gamma_M}{\ell_H \gamma_H} R_{р.н.} \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

или

$$\left. \begin{aligned} C_M = \frac{l_M \gamma_M}{l_H \gamma_H} C_H \\ tg\varphi_M = tg\varphi_H \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

Для подобия процессов механики горных пород в области упругих деформаций соблюдаются равенства

$$\left. \begin{aligned} E_M = \frac{\gamma_M \ell_M}{\gamma_H \ell_H} E_H \\ \mu_M = \mu_H \end{aligned} \right\} , \quad (4.17)$$

где E – модуль упругости; μ – коэффициент Пуассона.

Для подобия механических процессов в массиве горных пород в области пластических деформаций во всем диапазоне напряжений начальных до разрушающих без учета влияния времени должно быть соблюдено условие

$$\frac{\varepsilon_{nm}}{(\varepsilon_y + \varepsilon_n)_m} = \frac{\varepsilon_{nh}}{(\varepsilon_y + \varepsilon_n)_h} \quad (4.18)$$

При этом

$$(\varepsilon_y + \varepsilon_n) = f(\sigma),$$

где $\varepsilon_n, \varepsilon_y$ – пластическая и упругая относительные деформации.

Достоинством метода эквивалентных материалов следует считать возможность воспроизводить процессы неупругого деформирования и разрушения пород массива вблизи горных выработок. Необходимо также отметить, что этот метод позволяет строить объемные модели и на их основе решать трехмерные задачи петромеханики.

Указанные обстоятельства способствовали широкому внедрению метода эквивалентных материалов в лабораторную практику: более 150 конкретных задач горной механики решено на моделях из эквивалентных материалов, причем около 30 из них – на объемных моделях.

В то же время методу моделирования на эквивалентных материалах присущи серьезные недостатки.

1. Широкий диапазон физико-механических свойств пород, слагающих моделируемый массив, трудно воспроизвести на каком-либо типе эквивалентных материалов только за счет изменения его состава, поэтому при построении модели исследователь вынужден прибегать к целому ряду эквивалентных материалов, отличающихся по своим исходным компонентам и физико-математическим свойствам, что усложняет постановку эксперимента.

2. В большинстве случаев при изготовлении модели оказывается затруднительным, а иногда и вовсе невозможным выполнить условия подобия внешних сил, процессов разрушения и процессов деформирования (упругого и пластического) так как указанные условия подобия механических характеристик модели и природы должны удовлетворять равенствам

$$\frac{\sigma_{сж.н}}{\sigma_{сж.м}} = \frac{\sigma_{р.н}}{\sigma_{р.м}} = \frac{C_n}{C_m} = \frac{E_n}{E_m}. \quad (4.19)$$

3. Изучение деформационных процессов в окружающем выработки массиве требует сооружения моделей внушительных размеров, что сопровождается значительным повышением трудоемкости самого эксперимента.

4. Достоверность и репрезентативность результатов, полученных на моделях из эквивалентных материалов, в значительной степени зависит от технологии

изготовления, поэтому даже при правильно подобранных компонентах возможны существенные погрешности.

5. Модель, обеспечивающая удовлетворительную сходимость с натурой при изучении медленно протекающих процессов, не может быть использована для моделирования динамических процессов в горном массиве в силу невыполнения всех условий подобия.

6. Закладка динамометров в модель для измерения напряжений зачастую приводит к искажению напряженно-деформационного состояния изучаемого массива.

7. Измерение смещений на мелкомасштабных моделях не может быть выполнено с достаточной точностью, т.е. чувствительность серийных измерительных устройств не обеспечивает требуемую точность измерения смещений отдельных точек массива с учетом принятого масштаба.

Моделирование на эквивалентных материалах позволяет с большой степенью детальности проследить механизм процессов в толще пород при движении забоя выработки, особенно процессов деформирования пород с разрывом сплошности, что обычно исключено при других методах моделирования. Вследствие этого метод эквивалентных материалов является наиболее действенным, благодаря чему он получил широкое применение при решении различных задач механики горных пород.

Одним из преимуществ метода моделирования на эквивалентных материалах является возможность измерения показателей, отражающих напряженно-деформированное состояние (НДС) массива в интересующих областях, которые в натуральных условиях осуществить практически невозможно ввиду труднодоступности участков массива.

При условии удовлетворения всех критериев подобия для эквивалентных материалов и обеспечении геометрического подобия природы и модели, совпадение механических процессов может быть обеспечено при подобии граничных условий.

В принципе, модель достаточно полно отражает НДС массива в натуре. Соблюдение же граничных условий по торцам модели не представляется возмож-

ным, однако, в силу известного принципа Сен-Венана, можно утверждать, что роль торцов становится заведомо малой на расстояниях от них, равных толщине модели. Поэтому при отработке моделей замеры величин смещений кровли и давления на крепь являются достоверными только в ее средней части.

Лабораторный подбор и испытания эквивалентного материала для изготовления моделей направлены в сторону изыскания удобно обрабатываемых смесей, которые не обладали бы длительными сроками схватывания и твердения, а по своим физико-механическим свойствам обеспечивали бы подобие с горными породами. При этом безразмерные константы – коэффициенты Пуассона и углы внутреннего трения должны численно совпадать в эквивалентном материале и натуральных горных породах.

По природе связующих веществ, применяемые в настоящее время, эквивалентные материалы разделяются на четыре группы:

1. На основе углеводов нефтяного происхождения (вазелин, парафин, масла и др.) – обладают пластичными и упругопластичными свойствами.
2. На основе неорганических гидравлических связующих (цемент, гипс, жидкое стекло, тиосульфат натрия) – обладают хрупким характером разрушения, а при добавлении в состав глины приобретают пластичные свойства.
3. На основе синтетических полимеров (эпоксидная, карбомидная, кремнийорганическая и др. смолы) – обладают упруго-пластичными и хрупкими свойствами.
4. На основе смол естественного происхождения (пек, канифоль и др.) – обладают свойствами хрупких материалов.

В последние годы все более популярным становится также моделирование на кусочках пиленого сахара, который дает хорошие качественные результаты.

При подборе эквивалентных материалов с конкретными свойствами используют различные модификаторы, присадки и инертные заполнители. В качестве последних применяются мелкие кварцевые пески и мелкодисперсные материалы (цемент, мел, инертная пыль, порошки солей металлов и др.). Подбрав и уточнив рецептуры эквивалентных материалов для всей моделируемой толщи, приступают к следующему этапу - изготовлению самой модели.

Модели изготавливают непосредственно в испытательных стендах, представляющих собой жесткие рамные металлические конструкции. Для изготовления и испытания плоских моделей, выполненных в разрезе по простиранию перпендикулярно к плоскостям напластования, слоистости или полосчатости моделируемой толщи, применяют стенды, подобные представленному на рис.4.2.

Если необходимы плоские модели, выполненные для наклонного залегания пород в разрезе вкрест простирания, применяют поворотные (круговые) стенды. Для объемных моделей служат трехмерные поворотные стенды.

В зависимости от решаемых задач моделирование ведут в различных геометрических масштабах: мелких, от 1:400 до 1:100, или крупных, от 1:60 до 1:10. Толщи слабых пород моделируют только в крупных масштабах.

Разделение толщи пород в модели на отдельные слои обеспечивают путем присыпки поверхности каждого слоя крупной молотой слюдой, трещиноватость или кливаж воспроизводят насечкой свежеприготовленных слоев до отвердения или схватывания материалов.

При изготовлении плоских моделей вместо опалубки используют прозрачные ограждающие стенки, стационарно закрепляемые на весь период испытания модели. Для этих целей применяются листовые закаленные стекла, укрепляемые на стыках швеллерами, которые обеспечивают необходимую жесткость прозрачного бокового ограждения. После изготовления модели и набора эквивалентным



Рис. 4.2 Общий вид плоского стенда для моделирования на эквивалентных материалах (Национальный горный университет)

материалом прочности (или его остывания) на поверхность моделируемого массива наносится мерная сетка, в намеченных слоях устанавливаются марки и датчики для регистрации картины поля напряжений, деформаций и смещений в период испытания, а также выполняются полости, имитирующие горные выработки, в которые встраиваются приборы, воспроизводящие работу крепи.

Напряженное состояние и деформации элементов модели определяют также с помощью спаренных микроскопов, жестко соединенных между собой и позволяющих определять с высокой точностью смещения двух точек относительно друг друга. База измерений в моделях указанными выше приборами составляет (40...50) мм, а относительная погрешность $(1...2) \cdot 10^{-4}$, т. е. на порядок ниже, чем при измерениях в натуре.

Для определения сдвижений точек плоской модели в процессе ее испытания служит метод фотофиксации – периодическое фотографирование боковой поверхности модели с установленными в ней марками и последующие измерения смещений марок на фотоснимках, осуществляемые на компараторе. Метод фотофиксации позволяет быстро и одновременно регистрировать смещения всех точек на боковой поверхности модели, но точность определения смещений точек модели, учитывая масштаб моделирования, оказывается обычно ниже точности определения смещений соответствующих точек при измерениях непосредственно в натуральных условиях. Установка на боковой поверхности модели блочных тензометров позволяет повысить точность определения смещений точек методом фотофиксации в 20 раз. При масштабе фотоснимка 1:10 и геометрическом масштабе модели 1:100 значения сдвижений точек в пересчете на натуру могут быть определены в этом случае с точностью до 1 мм. Такую же точность определения смещений обеспечивают зеркальные и оптические тензометры, при этом смещения реперов в увеличенном виде фиксируют на экране.

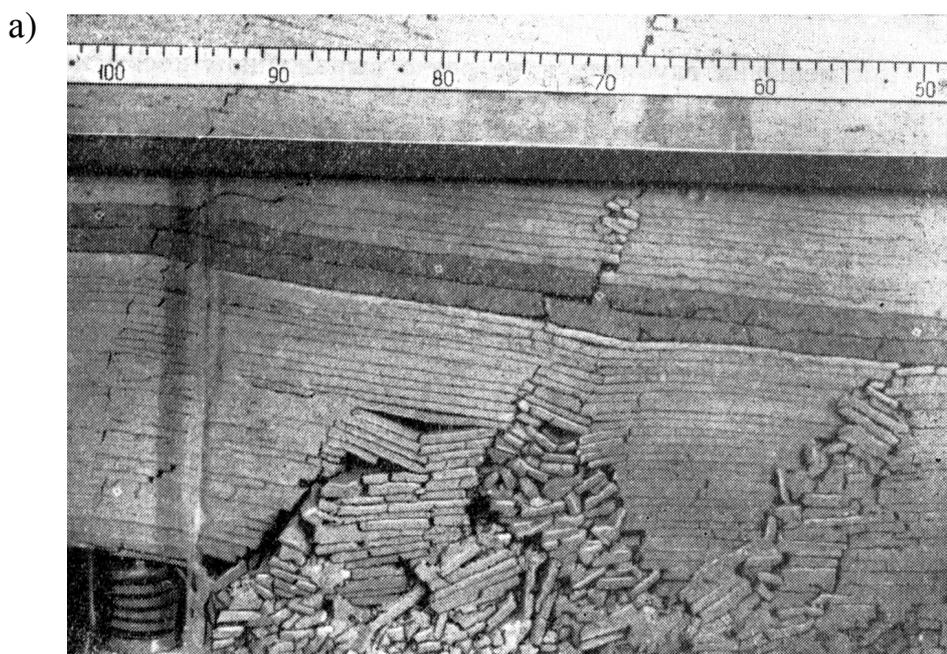
Для воспроизведения работы крепей применяют приборы пьезометрического и рычажного типов – для моделей мелких масштабов, рычажно-маятникового и гидравлического типов – для моделей крупных масштабов.

Завершающим этапом моделирования является собственно испытание модели, т.е. воспроизведение в определенном масштабе времени процесса изменений полей напряжений, деформаций и смещений с разрывом сплошности при разработке. Исходя из конкретной задачи, при испытании модели более подробно изучают распределение напряжений в массиве вокруг забоя выработки, либо развитие деформаций и сдвижений толщи пород и земной поверхности, либо развитие деформаций, разрушений и смещений пород в призабойном пространстве и взаимодействие пород с крепью и т. д.

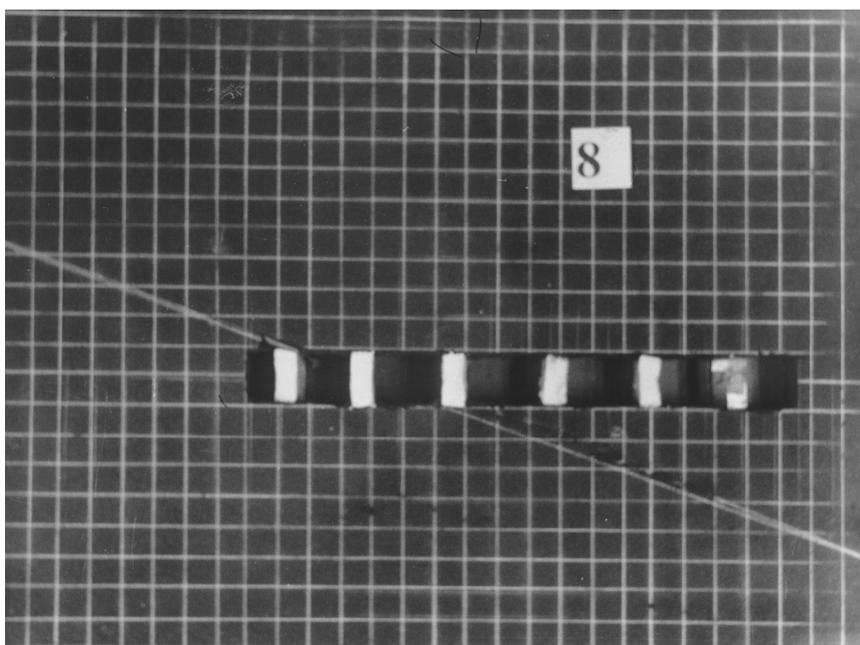
На рис.4.3 показаны виды некоторых моделей из эквивалентного материала с различными вариантами решаемых исследователями задач.

По окончании испытания модели обычно из ее части, не подвергнутой деформациям при испытаниях, вырезают образцы материалов-эквивалентов для проведения контрольных определений их свойств.

Обработка результатов исследований производится путем построения функциональных зависимостей изучаемых параметров от изменения горно-геологических и горнотехнических условий. Они представляются в виде относительных показателей, при этом полученные в результате зависимости должны сопоставляться с результатами натурных исследований.



б)



в)

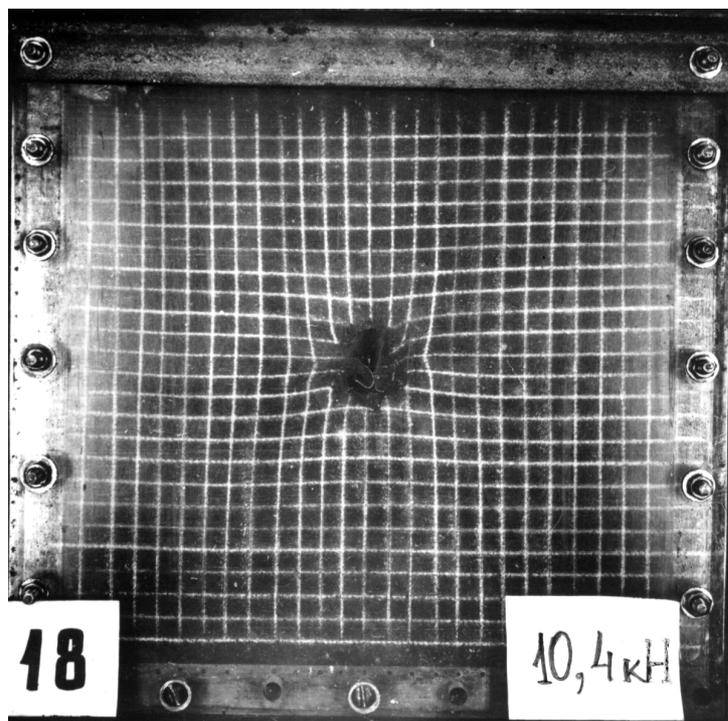


Рис. 4.3. Некоторые варианты моделей из эквивалентных материалов, выполненные на различных стендах: а) – изучение характера смещений толщи пород над выработанным пространством; б) – изучение характера смещения пород вокруг забоя подготовительной выработки пересекающей трещину; в) – изучение характера деформирования приконтурного массива в окрестности одиночной выработки, закрепленной металлической арочной крепью с обратным сводом.

Для построения прогнозных зависимостей серии опытов планируют так, чтобы максимально охватить все необходимые условия и получить надежные результаты, для чего используют современные научные методы планирования экспериментов, например, метод латинских квадратов.

4.4. Метод центробежного моделирования

Метод центробежного моделирования заключается в замене гравитационных сил инерционными, создаваемыми в модели в результате ее вращения в каретке центрифуги. В принципе, метод позволяет моделировать объемное НДС пород вокруг выработок как в упругой области, так и за ее пределами.

Модель объекта, выполненную в заданном геометрическом масштабе, помещают в центрифугу и путем равномерного вращения нагружают объемными инерционными силами, придавая тем самым породам модели некоторый фиктивный объемный вес. Это позволяет в ряде случаев для изготовления модели использовать материал, одинаковый по своим физико-механическим свойствам с материалом природы, что создает определенные преимущества перед методом эквивалентных материалов.

Центрифуга представляет собой коромысло, укрепляемое на вертикальной вращающейся оси (рис. 4.4). К нему прикрепляют съемные каретки, в которые помещаются исследуемые модели. Из условий безопасности и с учетом значительных размеров центрифуг (диаметр 3...5 м), их размещают в помещениях с массивными ограждениями, чаще всего – в подвалах.

С помощью специального устройства при работе центрифуги измеряют и контролируют скорость вращения и разворот кареток из вертикального в горизонтальное положение (при наборе скорости вращения) и обратный разворот (при снижении скорости).

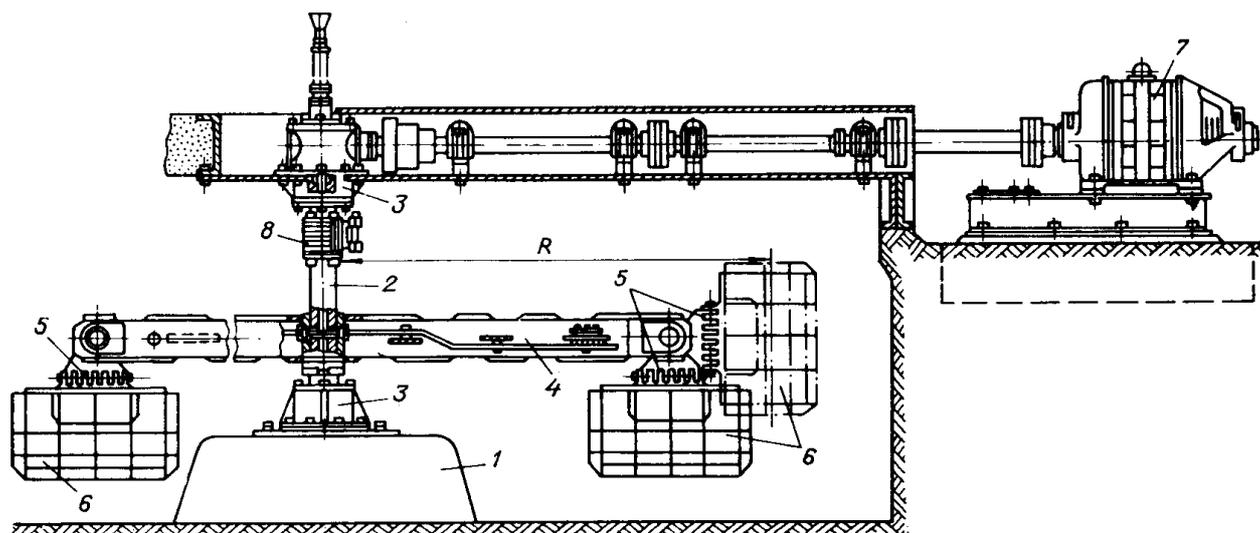


Рис.4.4. Конструктивная схема центрифуги: 1 – фундамент; 2 – ось вращения; 3 – подшипники; 4 – коромысло; 5 – коммутаторы; 6 – каретки; 7 – электродвигатель

Наблюдения за деформациями модели ведут с помощью электрических или других тензодатчиков, аэростатических динамометров, сельсиновых пар, индикаторов часового типа и пр. датчиков, позволяющих в процессе вращения центрифуги непрерывно получать информацию на пульте управления (дистанционно). Фиксируя деформации и напряжения пород модели в различных точках, изучают таким путем закономерности процессов для моделируемых условий, а также устанавливают оптимальные параметры горно-технических объектов и сооружений по фактору устойчивости.

Для непосредственного наблюдения за макродеформациями моделей в процессе центрифугирования применяют также дистанционные фото-, киноустановки и кино-телевизионно-стробоскопные установки, позволяющие проследить кинетику деформаций модели на киноплёнке. Стробоскопы (приборы, позволяющие фиксировать быстропротекающие периодические процессы) применяют также для визуального наблюдения.

При решении задач механики горных пород с применением центробежного моделирования обычно испытывают несколько (2...6) идентичных моделей (моделей-близнецов), помещая их попарно в каретки центрифуги. Результаты экспе-

риментов затем усредняют, одновременно контролируя достоверность опытов по признаку повторяемости результатов в пределах случайных отклонений, т. е. воспроизводимости эксперимента.

Метод центробежного моделирования с успехом и большой степенью надежности применяют при решении задач, связанных с определением размеров устойчивых потолочин камер, оптимальной формы и параметров бортов карьеров и отвалов, давления обрушенных пород на днища очистных блоков, влияния длительной нагрузки на крепь капитальных выработок, пройденных в пластичных глинистых породах и др. Использование специальных устройств позволяет моделировать в центрифуге одновременное действие статического поля напряжений и динамического поля, создаваемого при взрывных работах.

Достоинством центробежного моделирования является то, что это единственный из методов моделирования, в котором, благодаря использованию натуральных горных пород, соблюдается соответствие между размерами частиц и молекул. Для некоторых задач это имеет важное значение.

Вместе с тем данный метод имеет и ряд недостатков. Один из них – отсутствие однородности механического силового поля, т.к. вследствие ограниченного радиуса центрифуги силовые линии и эквипотенциальные поверхности в модели непараллельны. Кроме того, с удалением от центра тяжести модели в ту или иную сторону по ее высоте изменяется эффективный радиус вращения, соответственно, изменяется и масштаб моделирования. Указанное обстоятельство и технические возможности ограничивают предельные размеры моделей по высоте, а, следовательно, и возможные глубины моделируемой толщи пород.

При центробежном моделировании также крайне затруднительно, а иногда и совсем невозможно, воспроизводить слоистые толщи разнородных по составу и свойствам пород, большие технические трудности представляет и воспроизведение в модели перемещения забоя во времени, что ограничивает область эффективного применения данного метода, поэтому в ряде случаев возникает необходимость обращения к другим методам моделирования.

Метод применяют в случаях, когда необходимо смоделировать объемные силы, обусловленные весом вышележащих пород, и, в частности, для исследова-

ния устойчивости откосов, напряжений выработки и в грунтах под фундаментами зданий и сооружений, осадки сооружений и т.д. МЦМ успешно применен для исследований процессов взрывного разрушения горных пород и сейсмических колебаний.

Метод заключается в том, что при соблюдении геометрического подобия исследуемой области в натуре изготавливают модель, которую затем помещают на центрифуге, и под действием центробежных сил в модели создается механическое подобие сил, действующих в натуре. Размеры модели в основном определяются техническими возможностями центрифугирующих установок.

В связи с этим практическая сторона вопроса значительно усложняется. При работе с мелкими моделями, для которых вопрос создания соответствующих центрифуг решается сравнительно просто, возникают непреодолимые трудности соблюдения геометрического подобия структуры породы, ее слоистости и т.д., а также весьма затруднительно проведение замеров и измерений отдельных параметров в моделях. При работе с крупными моделями возникают значительные трудности в создании необходимых конструкций центрифуг. В силу этих обстоятельств метод центробежного моделирования в чистом виде не нашел широкого применения в практике.

В настоящее время ведутся работы по использованию метода центробежного моделирования в сочетании с методом эквивалентных материалов и методом фотоупругости.

Сочетание методов центробежного моделирования и эквивалентных материалов имеет значение в тех случаях, когда необходимо произвести исследования механических процессов в больших объемах массивов горных пород, т.е. когда геометрический масштаб моделирования достаточно велик. В этом случае при моделировании механических процессов необходимо иметь очень небольшие по размерам физические модели, в которых практически невозможно выполнить исследования с достаточной для инженерных расчетов точностью. Сочетание указанных методов позволит разбить геометрический масштаб моделирования на два множителя таким образом, чтобы их произведение было равно заданному масштабу.

Метод центробежного моделирования, так же как и метод эквивалентных материалов, основывается на динамическом подобии Ньютона. Рассмотрим условия подобия при центробежном моделировании статических и динамических процессов массива горных пород.

Условия подобия статических процессов. Как уже указывалось выше, при рассмотрении метода эквивалентных материалов для обеспечения механического подобия процессов, связанных с устойчивостью пород при обнажении необходимо соблюдать соотношение (4.12).

Изучение многих физических явлений удобно проводить на естественных материалах. В этом случае физико-механические свойства среды остаются постоянными. Поэтому для сохранения условий инвариантности формулы (4.12) следует положить, что $N_m = N_n$, а $\gamma_m \neq \gamma_n$.

Не изменяя физико-механических свойств материала природы, величину γ_m можно увеличить за счет инерционных сил, подвергая модель движению с некоторым ускорением a . Тогда, согласно выражению (4.9), получаем

$$\gamma_m = \rho a; \quad \gamma_n = \rho g,$$

где a – полное ускорение какой-либо точки модели на центрифуге, равное сумме тангенциального и нормального ускорений, т.е. $a = a_\tau + a_n$;

ρ – плотность материала модели.

Подставив значения γ_m и γ_n в выражение (4.12), получим

$$a = g \cdot C_\ell. \quad (4.20)$$

Следовательно, основное правило центробежного моделирования статических процессов состоит в том, чтобы в том, чтобы на модель действовали объемные силы, превосходящие силы тяжести во столько раз, во сколько раз модель меньше исследуемой области в натуре.

Если модель размещена на центрифуге с вертикальной осью, то скалярная величина полного ускорения должна равняться выражению

$$a = \sqrt{g^2 + \omega^4 R^2}, \quad (4.21)$$

где ω – угловая скорость вращения;

R – расстояние рассматриваемой точки модели от оси вращения;

g – ускорение силы тяжести.

Используя формулу (4.21) нетрудно подобрать угловую скорость вращения ω в соответствии с принятым масштабом моделирования. Из формул (4.20) и (4.21) получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R}} \cdot \sqrt[4]{C_\ell^2 - 1}, \quad (4.22)$$

откуда частота вращения центрифуги

$$\dot{i} = \frac{30}{\pi} \sqrt[4]{\frac{g(C_\ell - 1)}{R^2}} \quad (4.23)$$

Как видно из формулы (4.22), для соблюдения условия подобия необходимо, чтобы различные точки модели, расположенные на одной линии по радиусу, вращались с различной угловой скоростью в соответствии с расстоянием их от оси вращения, что практически не осуществимо.

Если обозначить размер модели в направлении R , равным h , то согласно выражению (4.21)

$$a + \Delta a = \sqrt{g^2 + \omega^4 (R + h)^2}, \quad (4.24)$$

где Δa – приращение ускорения в пределах высоты модели h .

При условии $\Delta a \ll a$, $h \ll R$ и $\omega^2 R \gg g$, будем иметь с известным приближением

$$\Delta a = \omega^2 h \quad (4.25)$$

В этом случае относительная ошибка ускорений по высоте модели будет

$$\frac{\Delta \dot{a}}{\dot{a}} = \frac{\omega^2 h}{\omega^2 R} = \frac{h}{R}. \quad (4.26)$$

Очевидно, что отношение $\frac{h}{R}$ при моделировании на центрифуге не может быть достигнуто очень малым, и относительная ошибка в величине ускорения может оказаться заметной.

В связи с этим при моделировании на центрифуге имеют место некоторое допущение и отступление от идеальных условий моделирования. Как показала практика проведения экспериментов, влияние этих допущений на точность моделирования будет минимальным, если размеры модели незначительны по сравнению с радиусом вращения R . Поэтому необходимо строить или очень малую модель, или очень большую центрифугу. Но уменьшение модели имеет свои пределы, определяемые точностью способов изготовления модели, однородностью употребляемых материалов и чувствительностью измерительной аппаратуры.

Исходя из практических соображений и имеющегося опыта считают, что наиболее реальные размеры радиуса вращения центрифуги R лежат в пределах от 2 до 3 м.

Профессор Г.И. Покровский считает, что ошибка наблюдений в результате принятых допущений будет расти прямо пропорционально масштабу геометрического подобия, т.е.

$$\delta_n = \delta_{из} C_\ell, \quad (4.27)$$

где δ_n – среднеквадратичная ошибка наблюдений;

$\delta_{из}$ – среднеквадратичная ошибка принятого метода измерения;

C_ℓ – геометрический множитель подобия.

Из этих соображений считают, что центробежное моделирование годится в основном для исследования статических или почти статических задач распределений напряжений и деформаций.

Как указывалось выше, методом центробежного моделирования успешно были решены некоторые статические задачи в грунтах, связанные с устойчивостью откосов, осадкой зданий и сооружений, распределением напряжений под

фундаментами и т.д. Известно, что грунт, значительно увлажненный и подвергнутый действию тех или иных сил, приходит в то или иное окончательное состояние не сразу. Это вызывается тем, что при сжатии сильно увлажненного грунта вода, находящаяся в нем, должна перемещаться. Однако, как указывает проф. Н.М. Герсеванов, для стабилизации мелкозернистого грунта с малым коэффициентом фильтрации могут потребоваться десятки лет. Очевидно, при сохранении столь длительных сроков стабилизации в лабораторных опытах моделирование физических процессов, связанных со стабилизацией, утратило бы всякий смысл. Однако применение центробежного моделирования весьма ускоряет процесс стабилизации. Действительно, при центробежном моделировании все напряжения, а, следовательно, и давление на воду воспроизводятся в соответствии с действительностью. Вместе с тем все линейные размеры, а значит и длина фильтрационных каналов в модели в C_ℓ раз меньше, чем в действительности. Отсюда, применяя закон Дарси для движения вязкой жидкости, получим, что скорость фильтрации равна

$$\left. \begin{aligned} v_n &= K_n \frac{\Delta p_n}{l_n}; \\ v_m &= K_m \frac{\Delta p_m}{l_m}, \end{aligned} \right\} \quad (4.28)$$

где K – коэффициент фильтрации;

Δp – разность давления на участке фильтрации длиной l .

Так как модель изготавливается из материала природы, то $K_n = K_m$. Кроме того, как указывалось выше, $\Delta p_n = \Delta p_m$, а $l_n = l_m \cdot C_\ell$.

Тогда из выражений (4.28) получим

$$v_m = v_n \cdot C_\ell. \quad (4.29)$$

Следовательно, скорости фильтрации на модели должны быть во столько раз больше скорости фильтрации в натуре, во сколько раз линейные размеры модели меньше исследуемой области в натуре.

Что же касается масштаба времени, то исходя из формул:

$$\left. \begin{aligned} \tau_n &= \frac{l_n}{v_n}; \\ \tau_m &= \frac{l_m}{v_m}, \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

получим после соответствующих преобразований

$$\tau_m = \frac{\tau_n}{C_\ell^2}. \quad (4.31)$$

Таким образом, все процессы, связанные с фильтрацией и вообще с вязкими деформациями, ускоряются при центробежном моделировании в C_ℓ^2 раз. Следовательно, задачи, связанные со стабилизацией влажных грунтов, вполне могут быть исследованы методом центробежного моделирования.

Условия подобия динамических процессов. Сейсмические и сейсмозрывные процессы могут быть в некоторых случаях воспроизведены и изучены на моделях с применением метода центробежного моделирования. При этом все возможные случаи можно разделить на две группы:

общее сейсмическое воздействие, когда источник возмущения находится далеко от изучаемого объекта (землетрясение, сейсмозрывное действие отдаленных взрывов);

местное сейсмозрывное действие, когда источник возмущения находится от изучаемого объекта в непосредственной близости.

Основными параметрами статического процесса являются: ускорение a_n , период колебаний T_n и смещение S_n .

Ускорение a_n при сейсмическом воздействии имеет не самостоятельное значение, а сопоставляется с величиной, определяющей устойчивость и прочность исследуемых объектов. Такой величиной является ускорение g_m , заменяющее ускорение силы тяжести g_n на модели. На основании условий подобия механических систем можно записать

$$g_m = g_n \cdot C_l. \quad (4.32)$$

Чтобы обеспечить на модели те же условия устойчивости при систематическом воздействии, какие имеются в натуре, необходимо выполнить условие

$$\frac{a_m}{g_m} = \frac{a_n}{g_n}. \quad (4.33)$$

На основании этих выражений

$$a_m = a_n \cdot C_l. \quad (4.34)$$

Ускорение a_n при землетрясениях от 1 до 12 баллов обычно составляет $(\frac{1}{1000} - \frac{1}{10}) g_n$. Период колебаний также изменяется в широких пределах – от нескольких сотых долей секунд до нескольких секунд. Если допустить, что сейсмические колебания имеют синусоидальный характер (гармонические колебания), то перемещения могут быть определены по формуле

$$S_n = \frac{T_n^2}{4\pi^2} a_n. \quad (4.35)$$

Основываясь на условии геометрического подобия и используя выражения (4.34) и (4.35), определим масштаб моделирования периода колебаний

$$T_m = 2\pi \sqrt{\frac{S_m}{a_m}} = 2\pi \sqrt{\frac{S_n}{a_n C_l^2}} = \frac{T_n}{C_l}. \quad (4.36)$$

Если модель изготовлена из материала природы, то скорости распространения продольных и поперечных волн в натуре и на модели будут одинаковыми.

Тогда длина волн

$$\lambda_m = CT_m; \quad \lambda_n = CT_n,$$

где C – скорость распространения деформаций.

На основании изложенного с учетом выражения (4.36) следует

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_m} = \frac{T_n}{T_m} = C_\ell.$$

Основным исходным условием при технической реализации критериев моделирования сейсмических воздействий следует считать вопрос о направлении действия ускорения a_n . Таким направлением, как показывает практика, следует считать горизонтальное, при котором наблюдается наиболее сильное разрушение. Для решения такой задачи можно применить так называемую «маятниковую» подвеску каретки с моделью (рис. 4.5).

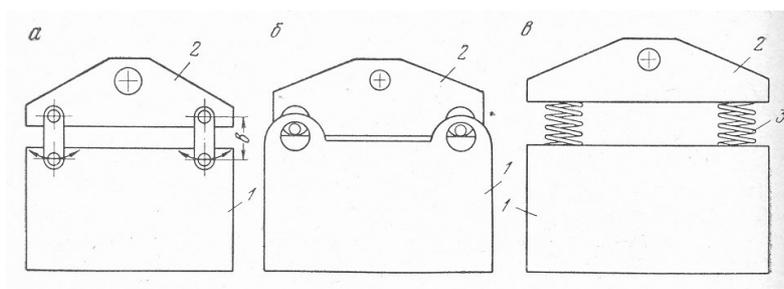


Рис. 4.5. Способы подвески каретки:

- а) – «маятниковый»; б – обеспечивающий малый период колебаний;
в) – пружинный; 1 – каретка; 2 – подвесное устройство; 3 – пружина

Чтобы обеспечить заданный период колебаний, необходимо длину качающихся подвесок b определить исходя из закона качания математического маятника

$$T_m = 2\pi \sqrt{\frac{b}{g_m}}.$$

Принимая во внимание масштабы моделирования T_m (4.36) и g_m (4.32) получаем

$$b = \frac{N_n^2}{4\pi C_\ell}.$$

Если, например, $T_n = 3,16$ с, $g_n = 10$ м/с², $C_\ell = 100$, то $b = 2,5$ см, что технически вполне осуществимо. Однако, если задаться $T_n = 1$ с, то $b = 0,25$ см, то в этом случае конструкция подвески каретки может быть выполнена по схеме (рис. 5, б), где $b = 2(R - r)$ (R – радиус отверстия, r – радиус валика, вложенного в отверстие).

Для придания модели вертикальных колебаний применяют пружинную подвеску каретки (рис. 13, в). Первоначальное удлинение пружины, которое затем обеспечивает колебательный процесс модели, должно равняться

$$S_{пр.} = \frac{g_n T_n^2}{4\pi C_\ell} = b.$$

При этом коэффициент жесткости пружины должен быть

$$\kappa = 4\pi^2 \frac{G_m \cdot C_\ell^2}{g_n T_n^2},$$

где G_m – вес модели вместе с кареткой.

Приведение каретки с моделью в колебательное движение заключается в том, что заранее, до подвески к коромыслу центрифуги, каретка выводится из положения равновесия в ту или другую сторону и удерживается в этом положении стопорным устройством, управляемым с пульта экспериментальной установки.

В некоторых случаях стопорные механизмы могут быть заменены устройствами для активной раскачки каретки при ее вращении энергией взрыва заряда взрывчатого вещества соответствующего веса.

Условия подобия действия взрыва при применении метода центробежного моделирования весьма подробно изложены в научных трудах проф. Г.И.Покровского. Ниже приводятся условия подобия в общем виде при моделировании различных видов действия взрыва.

При действии взрыва в грунте возникают в очень короткий отрезок времени (10^{-4} с) огромные давления взрывной волны, иногда превышающие 10^6 МПа. Существующие расчетные формулы в основном базируются на эмпирическом материале и не отвечают действительной картине физических явлений, протекающих при взрыве в дисперсных системах. Поэтому применение моделирования для столь сложных явлений может дать особый эффект.

На основании термодинамического критерия проф. Г.И. Покровский устанавливает следующие условия подобия при моделировании взрыва в горных породах:

1) геометрическое подобие

$$\frac{\ell_n}{\ell_m} = C_\ell;$$

2) силовое подобие

$$\frac{f_n}{\mu_n W_n^2} = \frac{f_m}{\mu_m W_m^2}, \quad (4.37)$$

на основании которого имеем $W_n = W_m$;

3) подобие критерия Коши

$$\frac{1}{Co_n} = \frac{1}{Co_m}; \quad (4.38)$$

на основании которого должно быть $E_n = E_m$, так как

$$Co = \frac{\rho W^2}{E};$$

4) подобие критерия Фруда

$$\frac{1}{Fr_n} = \frac{1}{Fr_m}, \quad (4.39)$$

на основании которого должно быть $W_m = \frac{W_n}{\sqrt{C_\ell}}$, поскольку при

$$\ell_n = C_\ell \ell_m \text{ имеет место } \frac{g_n \ell_n}{W_n^2} = \frac{g_m \ell_m}{W_m^2};$$

5) подобие критерия Эйлера

$$\frac{P_{in}}{E_n} Eu_n = \frac{P_{im}}{E_m} Eu_m, \quad (4.40)$$

на основании которого получим $W_n = W_m$, так как имеем из условия подобия и значения критерия Эйлера

$$Eu = \frac{dp}{\omega_0 \rho W^2},$$

где f – энергия взрывчатых газов;

W – скорость движения разрушенной массы;

p_i – давление в элементе объема ΔV_i ;

μ – масса моля газа;

На первый взгляд, исходя из приведенных зависимостей (4.37)-(4.40) при одном и том же материале модели и натуре и аналогичном составе взрывчатых веществ добиться полного подобия невозможно. Однако, при центробежном моделировании, в связи с увеличением ускорения силы тяжести g_m по сравнению с g_n в C_ℓ раз, никаких изменений материала натуре в модели для достижения полного подобия не требуется – достаточно выполнить требования геометрического подобия.

4.5. Методы фотомеханики

Впервые в горном деле оптико-поляризационный метод исследований был применен А.К. Зайцевым и Ф.Ю. Левинсон-Лесенгом для решения задачи о наиболее рациональной форме поперечного сечения тоннеля. Эксперименты проводились на пластинках из целлулоида с различными по форме отверстиями. Цель этих опытов – выяснить влияние отверстия и его формы на характер распределения напряжений под действием приложенной внешней нагрузки. Широкое при-

менение для решения задач геомеханики получил этот метод в послевоенный период.

Оптико-поляризационный метод изучения НДС реализуется в виде методов фотомеханики, рассматривающих следующие свойства.

Фотоупругость – исследование процессов упругого деформирования материалов.

Фотопластичность – исследование процессов остаточного деформирования материалов при известных предшествующих состояниях.

Фотоползучесть – исследование поведения материалов во времени под нагрузкой.

Напряженное деформированное состояние исследуемых объектов зависит от характера внешних воздействий на них до и в момент проведения экспериментов. В задачах **статической** фотомеханики физические воздействия, их интенсивность и направление остаются практически неизменными в течение достаточно длительного времени; силами инерции можно пренебречь.

В задачах **динамической** фотомеханики, наоборот, учитывается изменение характеристик при механических воздействиях во времени и влияние сил инерции.

В основе методов фотомеханики лежит эффект двойного лучепреломления, проявляющийся в оптически чувствительных материалах под воздействием механических напряжений. При просвечивании таких материалов поляризованным светом в моделях наблюдается оптическая картина, по которой судят о напряженно-деформированном состоянии моделируемого объекта.

Допустим, что в результате проведения горизонтальной выработки в массиве горных пород произойдет нарушение силового равновесия. Вокруг выработки возникает поле напряжений (рис.4.6, *a*), характер которого в случае однородных изотропных пород будет оставаться постоянным для любого поперечного сечения по длине выработки. Следовательно, задача может быть представлена как плоская для сечения, перпендикулярного оси выработки, которая имеет аналитическое решение.

Для изучения напряженного состояния пород вокруг выработки изготавливают модель из оптически активного материала с соблюдением условий геомет-

рического и силового подобия. Через модель пропускают луч поляризованного света, и на экране получают поле напряжений (рис. 4.6, б) в виде линий

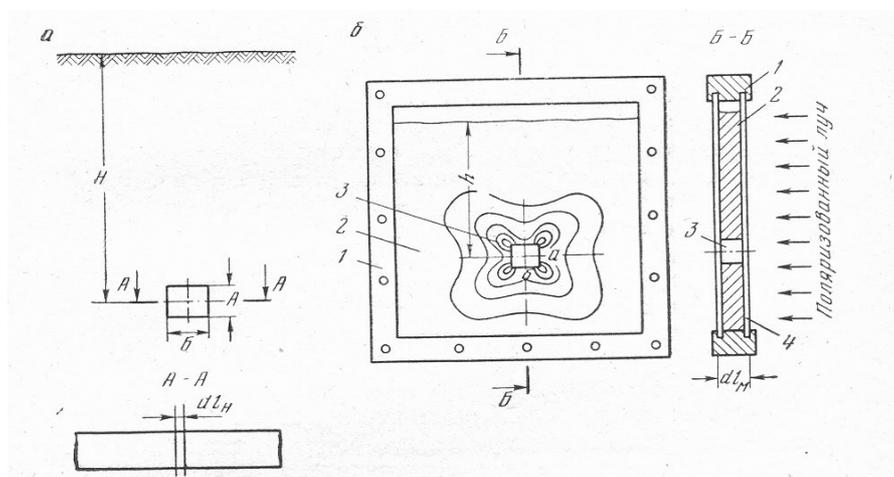


Рис. 4.6. Схема к моделированию оптическим методом задачи напряженного состояния пород вокруг выработки: *а* – образец; *б* – модель; 1 – рамка модели; 2 – оптически активный материал; 3 – модель выработки; 4 – стекло.

различных цветов и оттенков. На основании этого судят о качественной характеристике поля напряжений, о направлении векторов напряжений, о концентрации напряжений и о точках или районах, наиболее опасных с точки зрения устойчивости или прочности обнажения.

Методы фотомеханики позволяют применить и объемные модели. Так, например, при изучении оптическим методом прочности бурового инструмента и разрушаемости пород широко применяют объемные модели, на основании которых становится возможным составить тензор напряжений в контактных зонах, подойти к решению вопроса о роли ядра уплотнения в процессе воздействия бурового инструмента и о влиянии предварительных выколов и свободных поверхностей в процессе разрушения породы.

Кроме того, оптический метод позволяет оценить влияние параметров удара на разрушаемость горной породы и затупления лезвия бурового инструмента на эффективность бурения, а также помогает решить вопрос об участии волн напряжений в процессе разрушения горных пород при ударном бурении.

Методы объемной фотомеханики также применяют и для исследования статической работы подземных сооружений. В круг таких задач входит исследование напряженного состояния горного массива вокруг вертикальных и горизонтальных выработок, пройденных в слоистых породах с наклонным залеганием пластов и различными физико-механическими свойствами, исследование распределения напряжений в сопряжениях различных выработок, определение напряжений в крепях и массиве при переменном сечении выработок небольшой протяженности и т.д.

Наибольшее практическое значение имеют следующие типовые задачи механики горных пород:

I тип. Определение условий сохранения и потери устойчивости элементов массивов и сооружений при различных исходных состояниях и комплексах воздействий на них, в том числе при ведении горных работ. Элементами исследуемых объектов, устойчивость которых должна быть обеспечена, являются: поверхности подземных выработок (кровли, почвы, бока), целики, потолочные камеры и кровли лав, борты карьеров, земная поверхность. Учитывают стадийность процессов деформирования и разрушения элементов, предельные их состояния, а также видоизменения сочетаний условий.

II тип. Установление закономерностей взаимодействия элементов массивов между собой и с элементами сооружений, в том числе с крепями горных выработок, в зависимости от естественно-геологических условий и видов взаимодействий. Взаимодействием считается взаимозависимое изменение в пространстве и времени граничных поверхностей контакта. Вид закономерности механического взаимодействия крепи и пород, определяющий условия их совместной работы, реализуется в различных режимах, включая заданную нагрузку, заданную деформацию, взаимовлияющую деформацию, комбинированный режим.

III тип. Изучение влияния горных выработок и комплексов горных работ на окружающие породные массивы различных структур и свойств, находящиеся в различных состояниях и подвергающиеся различным воздействиям.

Основными вопросами изучения являются: установление зон опорного давления, разгрузки, сдвижений и разрушений массивов, определение очертаний и

размеров защищенных зон, выяснение распространения волн напряжений, вызванных взрывами, на различные подземные и наземные объекты.

Таким образом, оптический метод исследования напряжений позволяет решать весьма сложные задачи, которые недоступны математическому анализу.

Теоретические основы оптического метода исследования упругих полей напряжений и смещений базируется на использовании закона Гука о прямой пропорциональности между напряжением и деформацией и на явлении оптической анизотропии изотропных тел, подвергнутых действию внешних сил, или при наличии внутренних напряжений. С помощью оптического метода обнаруживают не сами величины нормальных напряжений, а разность между ними, т.е. максимальные касательные напряжения τ_{max}

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad (4.41)$$

где σ_1, σ_2 – главные нормальные напряжения.

Поэтому с помощью оптического метода определяется существенная характеристика для суждения о прочности конструкции по теории Кулона.

Второй принцип, использованный при оптическом моделировании, вытекает из общей теории света. Если, например, световой луч от обычного источника света направить на стеклянную пластинку под углом, то луч делится на две части: одна часть – отражается, другая – преломляется. Опыты показывают, что отраженный и преломленный лучи оказываются плоско-поляризованными и их колебания будут происходить в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

Наибольшей поляризации световой луч достигает в том случае, если отраженный и преломленный лучи перпендикулярны друг другу (рис. 4.7).

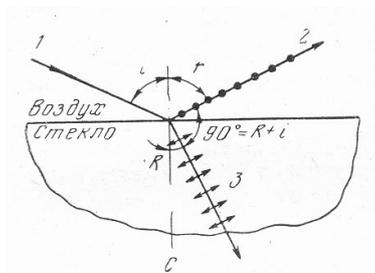


Рис.4.7. Отражение и преломление световых лучей:

i – угол падения; γ – угол отражения; R – угол преломления; 1 – падающий луч; 2 – отраженный луч; 3 – преломленный луч.

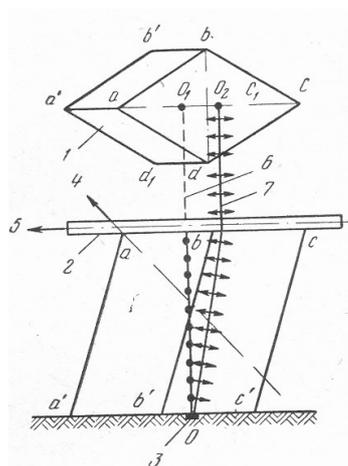


Рис. 4.8. Двойное лучепреломление:

1 – кристалл кальцита; 2 – пластинка турмалина; 3 – метка; 4 – оптическая ось кристалла кальцита; 5 – ось поляризации пластинки турмалина; 6 – обыкновенный луч; 7 – необыкновенный луч.

Интересными оптическими свойствами обладает ряд кристаллов (турмалин, слюда, кальций). Если кристалл кальцита поставить своим основанием на бумагу с черной точкой и посмотреть сверху, то можно увидеть два изображения точки (рис. 4.8).

В этом случае имеет место двойное лучепреломление. Если теперь с помощью пластинки турмалина проанализировать обыкновенный и необыкновенный лучи, то оказывается, что оба луча являются плоско-поляризованными.

При этом колебания обыкновенного луча происходят в плоскости, перпендикулярной диагональной плоскости a, a', c', c , а колебания необыкновенного луча лежат в этой плоскости a, a', c', c , т.е. колебания лучей происходят в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

Явление двойного лучепреломления можно также наблюдать и в изотропных веществах под действием нагрузки. Например, сформированный или напряженный кусок стекла, целлулоида, акелита и т.д. обнаруживает все свойства двойного лучепреломления. Свойство двойного лучепреломления изотропных тел под нагрузкой (открыто Брюстером в 1816 г.) положило начало методу фотоупругости.

Как известно, при плоском напряженном состоянии тела в каждой точке имеются площадки, по которым касательные напряжения отсутствуют и действуют только главные нормальные напряжения σ_1 и σ_2 . Под действием этих напряжений создаются деформации, которые приводят материал к оптической анизотропии. Вследствие этого луч света, проходящий через напряженное прозрачное тело, будет разлагаться на два плоско-поляризованных луча, колебания которых лежат в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, параллельных направлению распространения луча.

При этом распространение лучей в напряженно-деформированной пластине происходит с различными скоростями в соответствии с величинами σ и ε , что приводит к оптическому сдвигу фаз и линейной разности хода. Как показывают многочисленные опыты, разность хода в общем случае определяется по формуле

$$\Gamma = C_\sigma \delta (\sigma_1 - \sigma_2) + C_\varepsilon \delta (\varepsilon_1 - \varepsilon_2), \quad (4.42)$$

где C_ε и C_σ – постоянные, называемые оптическими коэффициентами деформации и напряжения, зависящими от применяемых материалов;

δ – толщина пластинки;

σ_1 и σ_2 – главные нормальные напряжения;

ε_1 и ε_2 – деформации в направлении главных нормальных напряжений.

Поскольку в стадии упругого деформирования материалов существует строгая пропорциональность между σ и ε , обобщенная зависимость (4.42) преобразуется к виду

$$\Gamma = C_\sigma \delta (\sigma_1 - \sigma_2). \quad (4.43)$$

В этом случае выражение (4.42) согласно выражению (4.43) можно представить в виде

$$\Gamma = 2C_\sigma \delta \tau_{\max}. \quad (4.44)$$

При пластичном деформировании материалов на интерференционную картину полос решающее влияние оказывают деформации, так как напряжения на этой стадии деформации изменяются незначительно. В связи с этим зависимость (4.44) может быть представлена в виде линий

$$\Gamma = C_{\sigma} \delta (\epsilon_1 - \epsilon_2). \quad (4.45)$$

Следовательно, зная толщину модели δ , оптическую постоянную C_{σ} и определив разность хода Γ , можно установить значение максимальных скалывающих напряжений при исследовании модели в стадии упругого деформирования и относительных деформаций при изучении процессов ползучести или пластического деформирования.

Определение разности хода Γ основывается на свойстве поляризованного света в зависимости от частоты колебаний давать различные цвета. Точно так же, как частота звукового колебания определяет высоту звука, частота светового колебания определяет качество света, которое глаз воспринимает как цвет.

Следовательно, определенной частоте колебания соответствует определенный цвет. Луч света, составленный только из одного цвета, называется монохроматическим, или однородным.

Очевидно, для каждого монохроматического света имеется вполне определенная длина волны. Так как длина волны определяется выражением

$$\lambda = \nu T,$$

где ν – скорость распространения света;

T – период колебания волны,

а частота колебания при этом определяется как величина, обратная периоду колебания:

$$\nu = \frac{1}{T},$$

то можно установить связь между частотой колебания и длиной волны, а, следовательно, и цветом света. В пустоте все лучи монохроматического света распространяются с одинаковой скоростью $C^* = 3 \cdot 10^{10}$ см/с.

Следовательно, длина волны для каждого монохроматического света будет определяться только в зависимости от частоты колебания P_k :

$$\lambda = \frac{C^*}{P_k}. \quad (4.46)$$

Поэтому, получив на экране различные цвета, можно определить, имея таблицу соотношений цвета и длины волн, величину разности хода $\Gamma = n\lambda$, а следовательно, пользуясь формулой (4.41), можно получить величину максимальных касательных напряжений

$$\tau_{max} = n \frac{\lambda}{2C_\sigma \delta} = n \frac{\tau_0^{1,0}}{\delta} = n \frac{\sigma_0^{1,0}}{2\delta}, \quad (4.47)$$

где n – порядок полосы;

$\sigma_0^{1,0}$ – цена полосы оптически чувствительного материала.

Разность хода может быть определена по методу сопоставления цветов, по методу полос и по методу компенсаций. При методе сопоставления цветов искомую разность хода определяют непосредственно по цветной картинке изохром, полученной при белом источнике света, и последующем сопоставлении с интерференционными цветами эталонных колец Ньютона, для которых составлена таблица. При методе полос используется монохроматический источник света и учитываются порядковый номер полосы в исследуемой области, а также цена полосы материала. При методе компенсаций к искомой разности хода, создаваемой в упругой напряженной области объекта, оператор добавляет компенсатором разность хода, равную по величине, но обратную по знаку. При результирующей разности хода, равной нулю, при скрещенных поляроидах в измеряемой точке модели наблюдается затемнение.

После этих замечаний можно приступить к рассмотрению принципа действия оптико-поляризационной установки.

Рассмотрим образец изотропного прозрачного тела, подвергнутого равномерной нагрузке (рис. 4.9).

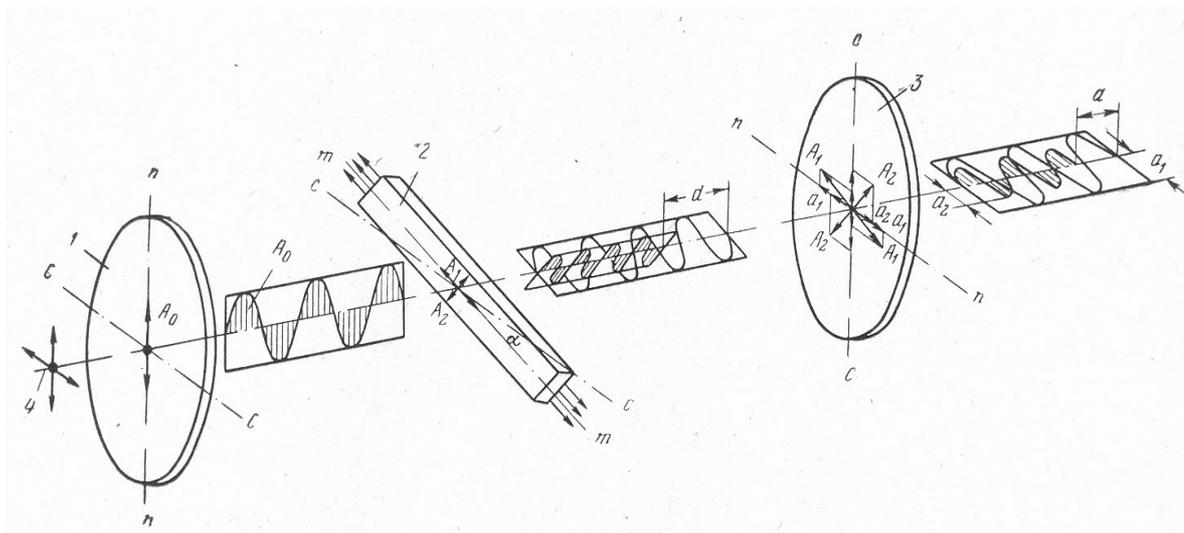


Рис. 4.9. Принципиальная схема оптической установки.

1 – поляризатор; 2 – образец; 3 – анализатор; 4 – источник света;
 A_0, A_1, A_2, a_1, a_2 – амплитуда колебания; $C-C$ – горизонтальная ось поляризатора; $n-n$ – вертикальная ось поляризатора; $m-m$ – ось модели.

Обыкновенный луч, проходя через поляризатор 1, приобретает только вертикальные колебания и падает на образец 2, повернутый на угол α к горизонтальной оси. В результате напряженного состояния образца поляризованный свет, преломляясь, распадается на два луча. Колебания лучей идут в плоскостях главных напряжений. В результате преломления в зависимости от напряженности образца лучи приобретают разные скорости распространения. Пройдя образец, лучи падают на анализатор 3, ориентированный так, что он пропускает только колебания, перпендикулярные плоскости поляризации поляризатора 1. Таким образом, через анализатор пройдут только лучи a_1 и a_2 . Так как после образца лучи вследствие разной скорости распространения получили некоторую разность хода, то следовательно и после анализатора получили некоторую разность хода между горизонтальными составляющими колебаний.

Если обозначить через A_0 амплитуду колебаний луча после поляризатора: a_1 и a_2 – амплитуды колебаний лучей после анализатора, то можно написать следующую зависимость для результирующей амплитуды колебаний после анализатора:

$$A_3 = a_1 + a_2 = A_0 \sin \alpha \cos \alpha [\sin(\varphi - 2\pi n) - \sin \varphi].$$

Значение A_{\max} достигается при $\varphi = -\pi n$

$$A_{\max} = A_0 \sin 2\alpha \sin \pi n.$$

Интенсивность света

$$J = A^2 \sin^2 2\alpha \sin^2 \pi n.$$

Максимальная интенсивность света имеет место при $\alpha = 45^\circ$, давая наиболее яркую картину цветов на экране, а, следовательно, распределения, скалывающие напряжения τ_{\max} . Кроме ярких цветов на экране получают и темные места, которые удовлетворяют одному из трех условий:

1. Свободные от напряжения точки, не дающие двух преломлений (поляризатор и анализатор скрещены, свет будет в них погашен).
2. Точки, в которых главные напряжения равны. В этих точках нет сдвига фаз, как нет и разности хода (скорости распространения лучей равны друг другу). Следовательно, амплитуды a_1 и a_2 при этом равны и тогда имеем

$$a_1 + a_2 = A_0 \sin \alpha \cos \alpha \sin \varphi + (-A_0 \cos \alpha \sin \alpha \sin \varphi) = 0.$$

Это дает в результате темноту на экране. Наличие таких особых точек является весьма значительным при изучении моделей, так как в них $\sigma_1 = \sigma_2$.

3. Точки, для которых плоскости направления главных напряжений совпадают с плоскостями поляризатора и анализатора. В этом случае $\alpha = 0$ при 90° и $J = 0$, т.к. $\sin 2\alpha = 0$.

Последний случай представляет большую ценность для исследования напряжений, т.к. он дает точные сведения о направлении двух главных напряжений в любой точке образца. Следовательно, вращая образец (или поляризатор – анализатор) с одновременным отсчетом углов, для каждого угла получим систему черных точек для линий, в которые эти точки могут сливаться. В этих точках будем знать направления главных напряжений. Линии, соединяющие точки, где направления главных напряжений совпадают с плоскостями поляризации поляризатора и анализатора, называются изоклинами. Допустим, имеем изоклину 1, соответствующую углу поворота образца на угол α_1 , изоклину 2, соответствующую углу поворота образца на угол $\alpha_2 = \alpha_1 + \Delta\alpha$ и т.д. (рис.4.10).

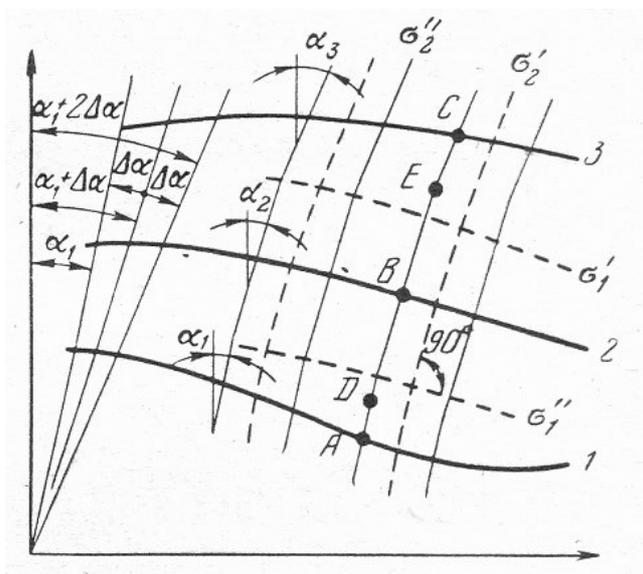


Рис. 4.10. Построение изостат:
1,2,3 – изоклины;
A, D, B, E, C, σ_1' , σ_1'' , σ_2' , σ_2'' – изостаты.

Проведем из точек A, B, C прямые под углами к вертикали, равными соответственно $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и т.д. Точки пересечения прямых между собой обозначим через D, E . Получим, таким образом, ломаные линии, которые являются изостатами (кривые направления одной из главных сил напряжения σ_1). В каждой точке изостаты под углом 90° к изолинии σ_1 направлена σ_2 . Таким образом, изостаты представляют собой ортогональное семейство кривых, касательные к которым совпадают с направлением главных нормальных напряжений.

Чтобы отличить темные места, соответствующие изоклинам, от тех, которые являются следствием условий 1 и 2, надо помнить, что изоклины изменяют свое положение при последовательных поворотах образца или системы поляризатора-анализатора. Точки образца, где $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$ (т.е. свободные от напряжения), при любом повороте остаются на тех же местах.

Таким образом, при исследовании образца или модели на изолированной установке получают значение τ_{\max} , после напряжений σ_1 и σ_2 , а, следовательно, определяют область пониженных и повышенных напряжений.

Изучение напряжений на объемных моделях основано на методе «замораживания» напряжений (деформаций) и методе рассеянного света. Первый метод, в котором предусматривается использование обычных поляризационных установок, нашел более широкое применение. Второй требует специального оптического оборудования, промышленное изготовление которого еще не налажено.

При методе рассеянного света нагруженная модель помещается в иммерсионную жидкость и просвечивается тонкой полоской плоско-поляризованного монохроматического света большой яркости, который проходя через модель, освещает рассматриваемую плоскость внутри модели. В просвечиваемом сечении при наблюдении со стороны, перпендикулярной к плоскости сечения, видна картина полос интерференции света, связанных с коэффициентом преломления, а следовательно, и с деформацией в каждой точке модели.

Разность квазиглавных нормальных напряжений, лежащих в плоскости, перпендикулярной к проходящему лучу, определится по формуле

$$\sigma'_1 - \sigma'_2 = \frac{C_\sigma}{a}, \quad (4.48)$$

где σ'_1, σ'_2 – квазиглавные напряжения (наибольшие и наименьшие нормальные напряжения в исследуемой плоскости);

a – расстояние между полосами интерференции;

Направляя плоский пучок поляризованного света различным образом по отношению к модели, можно определить напряжение в любом сечении модели без предварительного приготовления специальных срезов, как это делается при методе «замораживания».

Метод «замораживания» основан на способности некоторых оптически активных материалов, нагруженных при нагреве и охлажденных под нагрузкой до комнатной температуры, сохранять оптический эффект после снятия нагрузки.

Модели изготавливают из оптически активных материалов, имеющих двухфазную структуру. При нагревании модели из таких материалов до определенных температур, в зависимости от вида и марки материала, большая часть материала размягчается и не оказывает сопротивления прилагаемой нагрузке. Часть материала (скелет), оставшаяся в твердом состоянии, полностью воспринимает прилагаемую нагрузку, под действием которой в модели возникают деформации и напряжения. Если затем, не снимая нагрузки, модель охладить до комнатной температуры, то размягченная при нагревании часть материала затвердевает (замораживается) и будет удерживать полученную скелетом деформацию при снятии нагрузки, а также и после распиливания модели в различных направлениях на тонкие пластинки толщиной (2...4) мм. В дальнейшем, через каждую такую пластинку, представляющую уже плоскую модель, пропускается луч поляризованного света, и на экране получается плоское поле напряжений. В результате на основании просвечивания поляризованным светом всех пластинок получим объемную картину распределения напряжений в модели, соответствующую характеру распределения напряжений в натуре.

Оптический эффект, получающийся при прохождении поляризованного света через объемную модель, связан с понятием квазиглавных напряжений σ'_1 и σ'_2 . При нормальном просвечивании среза (пластинки) квазиглавные напряжения σ'_1 и σ'_2 действуют так же, как главные напряжения σ_1 и σ_2 в плоской модели.

Квазиглавные напряжения могут быть выражены через неглавные напряжения, действующие в той же плоскости, аналогично плоской задаче. Например, для плоскости $x y$, нормальной к оси z , напряжения $\sigma_{\delta}, \sigma_{\delta}, \tau_{\delta\delta}$, отнесенные к осям x и y , связаны с разностью квазиглавных напряжений соотношениями:

$$\sigma_x - \sigma_y = (\sigma'_1 - \sigma'_2) \cos 2\varphi_0; \quad (4.49)$$

$$\tau_{xy} = \frac{(\sigma'_1 - \sigma'_2)}{3} \sin 2\varphi_0, \quad (4.50)$$

где φ_0 – угол между направлением x и направлением квазиглавногo напряжения σ'_1 .

Поляризованный луч света, пройдя пластинку с «замороженными» напряжениями, приобретает некоторую разность хода \tilde{A} , пропорциональную разности квазиглавных напряжений $(\sigma'_1 - \sigma'_2)$, лежащих в плоскости, перпендикулярной к оси распространения света:

$$G = C_0 \delta(\sigma'_1 - \sigma'_2), \quad (4.51)$$

или выражая разность хода через число полос, получаем

$$n = \frac{C_0 \delta(\sigma'_1 - \sigma'_2)}{\lambda}, \quad (4.52)$$

где λ – длина волны применяемого света;

n – число полос.

Таким образом, полученные из объемной модели, исследуют аналогично плоской модели.

Подобие при оптическом методе. При изучении оптических явлений с помощью оптического метода необходимо так же, как при других методах моделирования физических явлений, соблюдать подобие соответственных одноименных параметров и комплексов. Установление связей между константами подобия и выявление критериев подобия находят из анализа размерностей самых общих уравнений, описывающих изучаемое явление. Поэтому в зависимости от постановки задачи: изучается ли процесс резания, удара или статического давления, для каждого процесса должны быть установлены значения критериев и множителей подобия.

Например, при моделировании задач в стадии упругого деформирования, связанных с установлением общей картины напряженно-деформированного состояния массива горных пород при разработке месторождений полезных иско-

паемых, необходимо обеспечить условия подобия и применять для перехода от модели к натуре исходя из зависимостей, приведенных в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Действующие нагрузки	Условия подобия		
	смещения	деформации	напряжения
Объемные силы тяжести	$C_u = C_l^2 C_v C_E$	$C_\varepsilon = C_i C_v C_E$	$C_\sigma = C_l C_v$
Объемные центробежные силы	$C_u = \frac{C_l^2 C_v}{K_{Ц}} C_E$	$C_\varepsilon = \frac{C_i C_v}{K_{Ц}} C_E$	$C_\sigma = \frac{C_l C_v}{K_{Ц}}$
Распределенная нагрузка по площади	$C_u = C_l C_A C_s$	$C_\varepsilon = C_s C_v$	$C_\sigma = C_s$
Распределенная нагрузка по длине	$C_u = C_q C_E$	$C_\varepsilon = \frac{C_q C_E}{C_l}$	$C_\sigma = \frac{C_q}{C_l}$
Сосредоточенные силы	$C_u = \frac{C_p C_E}{C_l}$	$C_\varepsilon = \frac{C_p C_E}{C_l^2}$	$C_\sigma = \frac{C_p}{C_l^2}$
<p>Примечание. $K_{Ц}$ – масштаб центрифугирования; $K_{Ц} = \frac{R_{Ц} \omega^2}{g}$,</p> <p>$R_{Ц}$ – радиус вращения; ω – угловая скорость;</p> <p>g – ускорение силы тяжести.</p>			

Временное условие подобия определяется исходя из выражения

$$C_\tau = \frac{C_\eta}{C_v C_l}, \quad (4.53)$$

где $C_\eta = \frac{\eta_n}{\eta_m}$ – множитель подобия вязкости.

Выполнение граничных условий достигается при равенстве коэффициентов бокового распора:

$$\lambda_n = \lambda_m. \quad (4.54)$$

При моделировании задач горной механики в стадии пластического деформирования горных пород помимо требований геометрического и силового подобия, приведенного в табл.4.1, должны быть выполнены дополнительные требования:

$$\eta_m = \eta_n, \quad \mu_m = \mu_n. \quad (4.55)$$

Кроме того, должны быть подобными кривые $\sigma - \epsilon$ для материалов модели и природы.

Метод фотопластичности основан на способности полимерных материалов переходить при определенных условиях напряжений из упругого состояния в пластическое и сохранять остаточные деформации после снятия внешних нагрузок. Поэтому при фотопластичности в основном используют модели с «замораживанием» напряжений.

Моделировать ползучесть массива горных пород более сложно, чем процессы упругого или пластического деформирования, так как необходимо соблюдать условия подобия как в первый момент после нагружения, так и в процессе ползучести. Условия подобия определяются исходя из анализа уравнений равновесия, соотношений Коши, связывающих напряжения с деформациями, граничных условий совместности деформаций и уравнений состояния.

Как показали исследования, масштаб напряжений в области линейной ползучести не зависит от параметров, характеризующих физико-механические свойства среды. Он определяется, как в случае упругой задачи, соотношением

$$C_\sigma = \frac{C_p}{C_l^2}. \quad (4.56)$$

Коэффициенты силового и геометрического подобия могут быть произвольными. Обычно их выбирают исходя из удобства проведения экспериментов.

Дополнительные критерии подобия, связанные с реологическими свойствами горных пород, выводят в зависимости от принятого уравнения состояния,

анализируя размерности. Например, для уравнения линейно-наследственной ползучести Больцмана-Вольтерра:

$$\varepsilon_{\tau} = \frac{\sigma(\tau)}{E} + \int_0^{\tau} L_{(\tau-\nu)} \sigma_{(\nu)} d\nu, \quad (4.57)$$

$$\sigma_{(\tau)} = E\varepsilon_{(\tau)} - \int_0^{\tau} R_{(\tau-\nu)} \varepsilon_{(\nu)} d\nu. \quad (4.58)$$

На основании аппроксимирующей функции определяются ядра ползучести $L_{(\tau-\nu)}$ и релаксации $R_{(\tau-\nu)}$ и реологические параметры α и β уравнения состояния.

В этом случае дополнительными требованиями к условию подобия (156) являются

$$(\alpha_M) = (\alpha_H) \quad (4.59)$$

и
$$(\delta\tau^{1-\alpha})_M = (\delta\tau^{1-\alpha})_H, \quad (4.60)$$

где α – безразмерный параметр;

δ – имеет размерность $C^{\alpha-1}$.

Сходственные моменты времени, когда поля напряжений в натуре и модели подобны, определяют из условия

$$\tau_H = \left(\frac{\delta_M}{\delta_H} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tau_M \quad (4.61)$$

Для ядра в виде дробно-экспоненциальной функции (ядра Работнова) критерии подобия

$$(\alpha)_M = (\alpha)_H \quad (4.62)$$

Масштаб времени определяют на основании

$$C_{\tau} = \frac{\tau_{OH}}{\tau_{OM}} = \left(\frac{\beta_M}{\beta_H} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}, \quad (4.63)$$

где τ_0 – время ретардации (последствия), которое принимается за единицу измерения,

$$\tau_0 = \frac{1}{(-\beta) \frac{1}{\alpha + 1}}. \quad (4.64)$$

При изучении напряженно-деформированного состояния массива горных пород и крепи выработок в натуральных условиях известное применение получил метод фотоупругих элементов и покрытий.

Для измерения напряжений и деформаций исследуемого объекта на его поверхность наносят или наклеивают тонкий слой оптически чувствительного материала – фотоупругого покрытия, который деформируется упруго независимо от характера деформирования исследуемого объекта. Измерение разности хода поляризованных лучей в покрытии позволяет определить на основании основного закона фотомеханики, разность главных деформаций или разность главных напряжений и их направления в исследуемой точке.

Связь между напряжениями в исследуемом объекте и фотоупругом покрытии определяется зависимостью

$$\sigma_{1,2} = \frac{E}{E_{II}(1 - \mu^2)} [(1 - \mu_{II}\mu)\sigma_{1II.2II} - (\mu_{II} - \mu)\sigma_{2II.1II}]. \quad (4.65)$$

Для отдельного определения главных напряжений σ_{1II} и σ_{2II} или главных деформаций применяют известные в фотомеханике методы – интегрирования уравнений равновесия плоской задачи, косоугольного (наклонного) просвечивания покрытия, электроаналогии, а также способы измерения поперечных деформаций и абсолютных разностей хода с помощью квантовых оптических генераторов (лазеров).

При разделении напряжений с помощью наклонного просвечивания фотоупругого покрытия возможны два случая: одно нормальное и одно наклонное просвечивание либо только два наклонных. В первом случае напряжения определяют из выражений:

$$\sigma_{1\Pi} = \frac{1}{2tC_{\sigma}} \left(\frac{\Gamma_{\theta 1} \cos \theta - \Gamma \cos^2 \theta}{1 - \cos^2 \theta} \right); \quad (4.66)$$

$$\sigma_{2\Pi} = \frac{1}{2tC_{\sigma}} \left(\frac{\Gamma_{\theta 1} \cos \theta - \Gamma}{1 - \cos^2 \theta} \right),$$

во втором

$$\sigma_{1\Pi, 2\Pi} = \frac{1}{2tC_{\sigma}} \left(\frac{\Gamma_{\theta 1, \theta 2} + \Gamma_{\theta 1, \theta 1} \cos^2 \theta}{1 - \cos^4 \theta} \right) \cos \theta, \quad (4.67)$$

где θ – угол наклонного просвечивания.

При исследовании объектов, находящихся в условиях плоско-напряженного состояния, компоненты деформаций и напряжений определяют с помощью наклейки двух фотоупругих датчиков в непосредственной близости друг от друга, что при отсутствии высоких градиентов деформаций соответствует измерению напряжений в одной точке исследуемого объекта, при этом один датчик наклеивают по всей площади, а второй – лишь по концам, аналогично наклейке одноосного фотоупругого тензометра.

Определение параметра изоклины φ и относительной разности хода поляризованных лучей Γ_1 в первом датчике в сочетании с измерениями относительной разности хода лучей Γ_2 во втором датчике позволяют найти компоненты тензора напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, а также главные нормальные напряжения σ_1, σ_2 .

4.6. Моделирование тепловых процессов в горном деле

Дифференциальное уравнение теплопроводности в случае постоянных физических параметров тела имеет следующий вид:

$$\partial t / \partial \tau = a \nabla^2 t. \quad (4.68)$$

где t – температура тела, отсчитанная от температуры среды, окружающей твердое тело, как от нуля;

τ – время;

a – коэффициент температуропроводности, постоянный во всем теле;

$\nabla = \partial / \partial x + \partial / \partial y + \partial / \partial z$ – оператор Лапласа;

x, y, z – координаты.

Приведенное уравнение (4.68) описывает бесконечное множество рассматриваемых тепловых процессов. Чтобы из целого класса явлений выделить единичное явление, необходимо к этому уравнению присоединить начальные и граничные условия, а также задать значение коэффициента температуропроводности a .

Начальное условие должно представлять собой распределение температур во всей исследуемой области для момента времени $\tau = 0$ и может быть записано в виде

$$t_{\text{нач}} = t^*, \quad (4.69)$$

где t^* – известная температура в фиксированной точке тела с координатами

$x = x^*, y = y^*, z = z^*$ в начальный момент времени.

Граничные условия могут быть заданы в виде равенства тепловых потоков на поверхности тела.

$$-\lambda(\partial t / \partial n)_{\text{пов.}} = \alpha(t)_{\text{пов.}}, \quad (4.70)$$

где λ – коэффициент теплопроводности, постоянный во всем теле;

α – коэффициент теплоотдачи;

n – внешняя нормаль к поверхности тела.

Коэффициент теплоотдачи α в общем случае зависит от координат поверхности и времени. Поэтому, выражение для коэффициента теплоотдачи может быть записано в следующем виде:

$$\alpha = f(x_r, y_r, z_r, \tau, a, \lambda), \quad (4.71)$$

где x_r, y_r, z_r – координаты границы (поверхности) твердого тела.

Для установления подобия процессов в рассматриваемом случае необходимо дифференциальные уравнения, начальные и краевые условия привести к безразмерному виду и обеспечить равенство безразмерных параметров, начальных и краевых условий. С этой целью введем следующие масштабные преобразования:

$$\begin{aligned}
 x &= l_0 X; & \tau &= \tau_0 T^0; \\
 y &= l_0 Y; & t &= t_0 T; \\
 z &= l_0 Z; & n &= l_0 N; \\
 a &= l_0 A; & t^* &= t_0 T^*; \\
 \alpha &= \alpha_0 A^0; & t_{\text{нач}} &= t_0 T_{\text{нач}}; \\
 \lambda &= \lambda_0 \Lambda;
 \end{aligned} \tag{4.72}$$

где величины, отмеченные индексом «нуль», являются размерными масштабными, выбор которых вначале произволен.

После введения преобразований (4.72) в уравнения (4.68)-(4.71) получаем

$$\left[\begin{array}{c} t_0 \\ \tau_0 \end{array} \right] \frac{\partial T}{\partial T^0} = \left[\begin{array}{c} t_0 a_0 \\ l_0^2 \end{array} \right] A \nabla^2 T \tag{4.73}$$

при $T^0 = 0$ и $T_{\text{нач}} = T^*$. (4.74)

На поверхности тела

$$-[\lambda_0 t_0 / l_0] \Lambda (\partial T / \partial N)_{\text{пов}} = [t_0 \alpha_0] A^0 (T_{\text{пов}}), \tag{4.75}$$

причем

$$A^0 = f(X_r, Y_r, Z_r, A, \Lambda, T^0). \tag{4.76}$$

Чтобы уравнения (4.73) и (4.75) стали безразмерными, необходимо принять

$$1 / \tau_0 = a_0 / l_0^2 \text{ и } \alpha_0 = \lambda_0 / l_0. \tag{4.77}$$

Система уравнений связи между масштабами (4.77) состоит из двух уравнений, содержащих пять масштабов. Поэтому три из них, имеющие независимые размерности, могут быть выбраны произвольно. Уравнения связи не со-

держат вовсе масштаба температур t_0 , а поэтому он должен быть выбран произвольно.

Таким образом, выбирая произвольно следующие четыре масштаба с независимыми размерностями t_0, λ_0, a_0, l_0 , полагаем

$$t_0 = t^*, \quad \lambda_0 = \lambda; \quad a_0 = a; \quad l_0 = l_0. \quad (4.78)$$

Равенство $l_0 = l_0$ следует понимать в том смысле, что в качестве масштаба длин можно выбирать любой геометрический параметр твердого тела.

Масштабы τ_0 и α_0 определяют с помощью уравнений (4.77) и равенства (4.78):

$$\tau_0 = l^2 / a; \quad \alpha = \lambda / l_0. \quad (4.79)$$

Тогда выражения для безразмерных величин будут

$$\begin{aligned} X &= x/l_0; \quad Y = y/l_0; \quad Z = z/l_0; \quad T^0 = a\tau/l_0^2; \\ T &= t/t^*; \quad T_{\text{нач}} = t_{\text{нач}}/t^*; \quad A_0 = al_0/\lambda; \\ \Lambda &= 1; \quad A = 1; \quad N = n/l_0. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Дифференциальное уравнение (4.68), начальное 4.69) и граничное (4.70) условия теперь могут быть переписаны в безразмерном виде:

$$\partial t / \partial T^0 = \nabla^2 T; \quad (4.81)$$

$$T_{\text{нач}} = T^* \text{ при } T^0 = 0; \quad (4.82)$$

$$-(\partial T / \partial N)_{\text{пов}} = A^0(T)_{\text{пов}}, \quad (4.83)$$

причем

$$A^0 = f_a(X_r, Y_r, Z_r, T^0). \quad (4.84)$$

Интеграл уравнения (4.84), удовлетворяющий начальному и граничному условиям (4.82) и (4.83) должен являться выражением, в котором зависимая пе-

ременная T представлена как функция всех величин (координат, времени и параметров), входящих в дифференциальные уравнения, начальные и граничные условия:

$$T = F(X, Y, Z, T^0, A^0, T_{\text{нач}}), \quad (4.85)$$

причем $T_{\text{нач}}$ и A^0 определяются условиями (4.82) и (4.84).

Поэтому для обеспечения подобия необходимо и достаточно, чтобы в модели все критерии, входящие в интеграл исходного дифференциального уравнения (4.85) (кроме критериев X, Y, Z, T^0), были равны соответствующим критериям образца.

Следовательно, задача осуществления подобия сводится к реализации следующих требований:

- обеспечения геометрического подобия модели и образца;
- тождественности в модели и образце безразмерных начального и граничного условий, т.е.:

$$\begin{aligned} T_{\text{нач.м}} &= T_{\text{нач.н}} \text{ или } (t/t^*)_{\text{м}} = (t/t^*)_{\text{н}}, \\ A_{\text{м}}^0 &= A_{\text{н}}^0 \text{ или } (al_0/\lambda)_{\text{м}} = (al_0/\lambda)_{\text{н}}. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Если эти требования выполнены, то в сходственные моменты времени, т.е. при

$$T_{\text{м}}^0 = T_{\text{н}}^0 \text{ или } (a\tau/l_0^2)_{\text{м}} = (a\tau/l_0^2)_{\text{н}},$$

и во всех сходственных точках, т.е. при

$$X_{\text{м}} = X_{\text{н}} \text{ или } (x/l_0)_{\text{м}} = (x/l_0)_{\text{н}};$$

$$Y_{\text{м}} = Y_{\text{н}} \text{ или } (y/l_0)_{\text{м}} = (y/l_0)_{\text{н}};$$

$$Z_{\text{м}} = Z_{\text{н}} \text{ или } (z/l_0)_{\text{м}} = (z/l_0)_{\text{н}},$$

будет иметь место равенство

$$T_{\text{м}} = T_{\text{н}} \text{ или } (t/t^*)_{\text{м}} = (t/t^*)_{\text{н}},$$

т.е. будет иметь место подобие температурных полей модели и образца.

Большой практический интерес представляют задачи теплопроводности в случае, когда физические параметры зависят от температуры.

Дифференциальное уравнение, описывающее такие явления, имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} (ct), \quad (4.87)$$

где $\lambda = f_\lambda(t)$ – коэффициент теплопроводности;

$c = f_c(t)$ – объемная теплоемкость, причем при $t = t^*$ $\lambda = \lambda^*$, $c = c^*$.

Начальное и граничное условия по-прежнему выражаются уравнениями (169) и (170), причем величина a как и ранее, определяется уравнением (4.71).

На основании рассуждений, аналогичных приведенным в предыдущей задаче, можно доказать, что после приведения уравнения (4.77) начального (4.78) и граничного (4.79) условий с помощью масштабных преобразований, подобных (4.73), получим два уравнения связи:

$$\lambda_0 / l_0^2 = c / \tau_0; \quad \lambda_0 / l_0 = \alpha_0, \quad (4.88)$$

включающее пять масштабов. Поэтому три из них, обладающие независимыми размерностями, могут быть выбраны произвольно. Кроме того, так же как и ранее, произвольно надлежит выбрать масштаб температуры. Таким образом, принимаем:

$$t = t^*; \quad c_0 = c^*; \quad \lambda_0 = \lambda^*; \quad l_0 = l_0. \quad (4.89)$$

Остальные масштабы определяем из уравнений связи (4.88) и равенств (4.89):

$$\tau_0 = c^* l_0^2 / \lambda^* = l_0^2 / a^*; \quad \alpha_0 = \lambda^* / l_0. \quad (4.90)$$

где $a^* = \lambda^* / c^*$ – коэффициент температуропроводности.

После этого можно выписать выражения для безразмерных величин:

$$\left. \begin{aligned} X = x/l_0; \quad Y = y/l_0; \quad Z = z/l_0; \quad T = t/t^*; \quad T_{\text{нач}} = t_{\text{нач}}/t^*; \\ A^0 = \alpha l_0/\lambda^*; \quad \Lambda = \lambda/\lambda^*; \quad C = c/c^*; \quad T^0 = a^* \tau/l_0^2; \\ N = n/l_0; \quad \Lambda^* = 1; \quad C^* = 1; \quad T^* = 1; \quad a^* = \lambda^*/c^*. \end{aligned} \right\} \quad (4.91)$$

Тогда дифференциальное уравнение (4.87), начальное (4.70) и граничное (4.71) условия в безразмерном виде будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} \left(\Lambda \frac{\partial T}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\Lambda \frac{\partial T}{\partial Y} \right) + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\Lambda \frac{\partial T}{\partial Z} \right) = \frac{\partial}{\partial T^0} (CT); \\ \Lambda = F_{\Lambda}(T); \quad C = F_C(T). \end{aligned} \right\} \quad (4.92)$$

$$\text{При} \quad T_0 = 0; \quad T_{\text{нач}} = T^*, \quad (4.93)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial N} = A^0 T. \quad (4.94)$$

Интеграл дифференциального уравнения (4.92), удовлетворяющий условиям (193) и (194) может быть записан в виде

$$T = F(X, Y, Z, T^0, \Lambda, C, A^0, T_{\text{нач}}). \quad (4.95)$$

Таким образом, чтобы осуществить подобие явлений теплопроводности в случае, когда физические параметры зависят от температуры, необходимо и достаточно в геометрически подобных телах реализовать тождественно одинаковое распределение критериев Λ, C, A^0 и $T_{\text{нач}}$, т.е. осуществить равенства:

$$\begin{aligned} \Lambda_{\text{м}} = \Lambda_{\text{н}} \quad \text{или} \quad \left(\frac{\lambda}{\lambda^*} \right)_{\text{м}} = \left(\frac{\lambda}{\lambda^*} \right)_{\text{н}}; \\ C_{\text{м}} = C_{\text{н}} \quad \text{или} \quad \left(\frac{c}{c^*} \right)_{\text{м}} = \left(\frac{c}{c^*} \right)_{\text{н}}; \\ A_{\text{м}}^0 = A_{\text{н}}^0 \quad \text{или} \quad \left(\frac{\alpha l_0}{\lambda^*} \right)_{\text{м}} = \left(\frac{\alpha l_0}{\lambda^*} \right)_{\text{н}}; \end{aligned} \quad (4.96)$$

$$T_{\text{нач.м}} = T_{\text{нач.н}}.$$

Отсюда следует, что при выполнении условий (4.96) во всех сходственных точках модели и образца, т.е. при

$$(x/l_0)_M = (x/l_0)_H; \quad (y/l_0)_M = (y/l_0)_H; \quad (z/l_0)_M = (z/l_0)_H$$

и в исходные моменты времени, т.е. при

$$(a\tau/l_0^2)_M = (a\tau/l_0^2)_H,$$

будет иметь место не только равенство

$$(t/t^*)_M = (t/t^*)_H,$$

но такие равенства

$$(\lambda/\lambda^*)_M = (\lambda/\lambda^*)_H \text{ и } (c/c^*)_M = (c/c^*)_H,$$

т.е. будет обеспечено подобие не только температурных полей, но также и подобие полей физических параметров λ и c .

4.7. Моделирование гидродинамических процессов

Рассмотрим подобие стационарного течения несжимаемой вязкой жидкости для следующих случаев:

- при наличии влияния веса;
- при отсутствии влияния веса;
- вязкостное и инерционное течение.

Последние три вида течения являются частными случаями первого.

Течение при наличии влияния веса.

Дифференциальные уравнения движения

$$\begin{aligned} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + q + \nu \nabla^2 v_x; \\ v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + q + \nu \nabla^2 v_y; \end{aligned} \quad (4.97)$$

$$v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + q + \nu \nabla^2 v_z;$$

уравнение сплошности

$$\partial v_x / \partial x + \partial v_y / \partial y + \partial v_z / \partial z = 0 . \quad (4.98)$$

Уравнения движения (4.97) и сплошности (4.98) могут быть записаны в векторной форме:

$$(V, \text{grad})v = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + q + \nu \nabla^2 V \quad (4.99)$$

уравнение сплошности

$$\text{div } V = 0 , \quad (4.100)$$

где V – вектор скорости;

v – скалярная величина того же вектора;

v_x, v_y, v_z – проекции вектора V на координатные оси x, y, z (причем x направлена вертикально);

p – давление, отсчитанное от давления в некоторой точке потока, как от нуля;

ρ – плотность жидкости;

$\nu = \mu / \rho$ – коэффициент кинематической вязкости жидкости;

μ – коэффициент вязкости жидкости;

q – ускорение свободного падения;

∇ – оператор Лапласа.

Величины ρ, ν, q – рассматриваются как постоянные во всем поле.

Краевые условия в рассматриваемой задаче не могут содержать никаких других физических переменных, кроме скорости, которая может быть задана на границе в виде уравнения, выражающего скорость как функцию координат точек границы. Если рассматривают течение жидкости внутри какого-либо аппарата, то границами потока следует считать входное сечение потока, где имеют

место управляемые краевые условия, и поверхности твердых стенок, окаймляющих поток, где имеют место неуправляемые граничные условия (в случае неподвижных стенок $v = 0$). Поскольку это условие автоматически соблюдается и в модели, и в образце, то задание краевых условий сводится к заданию скорости на входном сечении изучаемого объекта. Это заключение можно отнести и ко всем задачам, разбираемым в дальнейшем.

Так как в рассматриваемой задаче размерность скорости может быть представлена как

$$[v] = [v/l_0] \text{ или } [v] = [\sqrt{ql_0}],$$

то граничные условия могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} v_{r,x} &= f_x(x_r, y_r, z_r, l_i, q); \\ v_{r,y} &= f_y(x_r, y_r, z_r, l_i, q); \\ v_{r,z} &= f_z(x_r, y_r, z_r, l_i, q). \end{aligned} \tag{4.101}$$

или

$$\begin{aligned} v_{r,x} &= \Phi_x(x_r, y_r, z_r, l_i v); \\ v_{r,y} &= \Phi_y(x_r, y_r, z_r, l_i v); \\ v_{r,z} &= \Phi_z(x_r, y_r, z_r, l_i v). \end{aligned} \tag{4.102}$$

Как показали исследования, оба способа записи краевых условий приводит к одному и тому же конечному результату.

Для приведения уравнений (4.97), (4.98), (4.101) и (4.102) к безразмерному виду напомним масштабные преобразования:

$$x = l_0 X; \quad v_x = v_0 V_x; \quad p = p_0 P; \quad q = q_0 G; \quad y = l_0 Y; \quad v_y = v_0 V_y; \quad v = v_0 N;$$

$$v_{rx} = v_0 V_{rx}; \quad z = l_0 Z; \quad v_z = v_0 V_z; \quad \rho = \rho_0 R; \quad v_{ry} = v_0 V_{ry}; \quad v_{rz} = v_0 V_{rz}.$$

После введения преобразований в уравнения (4.97) и (4.98) получаем

$$\left[\frac{v_0^2}{l_0} \right] \left(V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) = - \left[\frac{p_0}{\rho_0 l_0} \right] \frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial X} + [q_0]G + \left[\frac{V_0 v}{l_0^2} \right] N \nabla^2 V_x;$$

$$\left[\frac{v_0^2}{l_0} \right] \left(V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) = - \left[\frac{p_0}{\rho_0 l_0} \right] \frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial Y} + [q_0]G + \left[\frac{V_0 v}{l_0^2} \right] N \nabla^2 V_y;$$

$$\left[\frac{v_0^2}{l_0} \right] \left(V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = - \left[\frac{p_0}{\rho_0 l_0} \right] \frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial Z} + [q_0]G + \left[\frac{V_0 v}{l_0^2} \right] N \nabla^2 V_z;$$

$$\left[\frac{v_0}{l_0} \right] \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) = 0;$$

$$[v_0]V_{r,x} = f_x(l_0 X_r, l_0 Y_r, l_0 Z_r, l_0 L_i, q_0 G);$$

$$[v_0]V_{r,y} = f_y(l_0 X_r, l_0 Y_r, l_0 Z_r, l_0 L_i, q_0 G);$$

$$[v_0]V_{r,z} = f_z(l_0 X_r, l_0 Y_r, l_0 Z_r, l_0 L_i, q_0 G).$$

Для приведения этих уравнений к безразмерному виду необходимо, чтобы

$$v_0^2 / l_0 = p_0 / (\rho_0 l_0) = q_0 = V_0 v_0 / l_0^2. \quad (4.103)$$

Из условий (4.103) можно получить три уравнения связи, которые содержат шесть масштабов. Следовательно, любые три из них, имеющие независимые размерности, можно выбрать в качестве основных, например, $l_0 = l$; $\rho_0 = \rho$; $q_0 = q$, а три остальных определить из этого уравнения

$$v_0 = (ql_0)^{1/2}; \quad p_0 = \rho ql_0; \quad V = (ql_0^3)^{1/2}.$$

Тогда выражения для безразмерных величин можно записать:

$$X = \frac{x}{l_0}; \quad V_x = \frac{v_x}{(ql_0)^{1/2}}; \quad V_{r,x} = \frac{v_{r,x}}{(ql_0)^{1/2}};$$

$$Y = \frac{y}{l_0}; \quad V_y = \frac{v_y}{(ql_0)^{1/2}}; \quad V_{r,y} = \frac{v_{r,y}}{(ql_0)^{1/2}};$$

$$Z = \frac{z}{l_0}; \quad V_z = \frac{v_z}{(ql_0)^{1/2}}; \quad V_{r,z} = \frac{v_{r,z}}{(ql_0)^{1/2}};$$

$$L_i = \frac{l_i}{l_0}; \quad R = 1; \quad P = \frac{p}{\rho ql_0}; \quad (4.104)$$

$$N = \frac{V}{(ql_0^3)^{1/2}}; \quad G = 1.$$

или

$$\begin{aligned} L = 1/l_0; \quad V = v/(ql_0)^{1/2}; \quad P = p/\rho ql_0; \quad N = v/(ql_0^3)^{1/2}; \\ G = 1; \quad R = 1. \end{aligned} \quad (4.105)$$

где l – радиус вектора;

L – безразмерный радиус-вектор какой-либо точки в потоке;

G – единичный вектор.

Уравнение движения:

$$V_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = 1 - \frac{\partial p}{\partial x} + N \nabla^2 V_x;$$

$$V_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = 1 - \frac{\partial p}{\partial y} + N \nabla^2 V_y; \quad (4.106)$$

$$V_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = 1 - \frac{\partial p}{\partial z} + N \nabla^2 V_z,$$

или в векторной форме

$$(V, \text{grad})V = 1 - \text{grad} P + N \nabla^2 V. \quad (4.107)$$

Уравнение сплошности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (4.108)$$

или в векторной форме

$$\operatorname{div} V = 0. \quad (4.109)$$

Граничные условия

$$\begin{aligned} V_{r,x} &= F_x(X_r, Y_r, Z_r, L_i); \\ V_{r,y} &= F_y(X_r, Y_r, Z_r, L_i); \\ V_{r,z} &= F_z(X_r, Y_r, Z_r, L_i). \end{aligned} \quad (4.110)$$

Решение системы дифференциальных уравнений (4.106) и (4.108), удовлетворяющей граничным условиям (209), можно представить в виде:

$$\begin{aligned} V_x &= F_x(X, Y, Z, V_{r,x}, V_{r,y}, V_{r,z}, N); \\ V_y &= F_y(X, Y, Z, V_{r,x}, V_{r,y}, V_{r,z}, N); \\ V_z &= F_z(X, Y, Z, V_{r,x}, V_{r,y}, V_{r,z}, N); \\ P &= F_p(X, Y, Z, V_{r,x}, V_{r,y}, V_{r,z}, N). \end{aligned} \quad (4.111)$$

Следовательно, для соблюдения подобия двух потоков необходимо и достаточно осуществить равенство безразмерной скорости на границе потока в модели и образца и равенство критерия N в сравниваемых потоках, т.е. (в векторной форме)

$$(V_r)_M = (V_r)_H \text{ и } (N)_M = (N)_H,$$

или

$$\left[V_r / (ql_0)^{1/2} \right]_M = \left[V_r / (ql_0)^{1/2} \right]_H \text{ и } \left[v_r / (ql_0^3)^{1/2} \right]_M = \left[v_r / (ql_0^3)^{1/2} \right]_H. \quad (4.112)$$

Если эти условия будут соблюдены, то в сходственных точках модели и образца, т.е. при

$$(l/l_0)_M = (l/l_0)_H$$

будут иметь место равенства:

$$\left[V/(ql_0)^{1/2} \right]_M = \left[V/(ql_0)^{1/2} \right]_H \text{ и } \left[p/(\rho ql_0) \right]_M = \left[p/(\rho ql_0) \right]_H.$$

Интересно заметить, что имеющие широкое применение критерии Re, Eu, Fr могут быть представлены как степенные функции критериев V, P, N . Действительно, воспользовавшись равенством (4.105), можно получить

$$V/R = vl_0/v = Re; \quad R/V^2 = p/(\rho v^2) = Eu; \quad V^2 = v^2/(ql_0) = Fr.$$

Из условий (4.112) видно, что осуществление требования $(N)_M = (N)_H$ при условии, что жидкость в модели и образце одна и та же, т.е. $v_M = v_H$, возможно только при $l_{0,M} = l_{0,H}$, т.е. когда размеры модели и образца одинаковы. В этом случае для выполнения условий $V_{r,M} = V_{r,H}$ должно иметь равенство $\bar{v}_{r,M} = \bar{v}_{r,H}$.

Установление вида функций F_x, F_y, F_z, F_p в большинстве практических задач осуществляется опытным путем. Однако экспериментальное определение указанных функций связано с большими трудностями (вести измерения скоростей и давлений в значительном количестве точек). Поэтому для практических задач нередко переходят на средние значения скорости и давления и устанавливают равенство ускоренных по сечению критериев давления \bar{P}_F и скорости \bar{V}_F .

Перейдя к замене критериев \bar{P}_F, \bar{V}_F и N критериями Re, Eu, Fr , было установлено на основании многочисленных экспериментальных исследований, что функциональная связь между критериями \bar{P}_F, \bar{V}_F и N может быть представлена в виде

$$\bar{Eu} = \psi(\bar{Re}, \bar{Fr}), \quad (4.113)$$

где

$$\bar{E}u = (p_1 - p_2) / (\rho \bar{v}_i^2); \quad \bar{R}e = \bar{v}_i l_0 / \nu; \quad \bar{F}r = \bar{v}_i^2 l / (q l_0).$$

В гидравлике для подсчета сопротивления, возникающего вследствие трения при движении жидкости в канале или трубе, обычно пользуются формулой Дарси:

$$\Delta p = \xi_{\text{тр}} \frac{\rho (\bar{v})^2 l}{2 d},$$

а при определении местных сопротивлений – формулой Вейсбаха:

$$\Delta p = \xi_{\text{тр.м}} \frac{\rho (\bar{v})^2 l}{2 d},$$

где Δp – падение напора между двумя сечениями;

\bar{v} – средняя по сечению трубы скорость;

ρ – плотность жидкости;

l – длина трубы;

d – гидравлический диаметр.

При сопоставлении приведенных формул с выражением для критерия $\bar{E}u$ можно заключить, что

$$\xi_{\text{тр.м}} = 2\bar{E}u;$$

$$l/d = 1\xi_{\text{тр}} = 2\bar{E}u,$$

т.е. коэффициенты сопротивления $\xi_{\text{тр}}$ и $\xi_{\text{тр.м}}$ в общем случае в соответствии с выражением (4.113) являются функции критериев $\bar{R}e$ и $\bar{F}r$.

Течение при отсутствии влияния веса характеризуется отсутствием свободных поверхностей, т.е. имеет место напорное течение. В этом случае влиянием веса можно пренебречь по сравнению с влиянием остальных сил, действующих на элементарную частицу жидкости.

На основании анализа дифференциальных уравнений:

движения

$$(\bar{V}, \text{grad})\bar{V} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \nabla^2 \bar{V};$$

сплошности

$$\text{div } V = 0;$$

граничных условий

$$V_r = \varphi(1_r, l_i, \nu),$$

где V_r – вектор скорости в точках, расположенных на границах потока;

1_r – радиус-вектор этих точек,

можно получить систему уравнений связи

$$\frac{v_0^2}{l_0} = \frac{p}{\rho_0 l_0} = \frac{V_0 v_0}{l_0^2}, \quad (4.114)$$

Используя уравнения связи, можно показать так же как это было сделано при рассмотрении предыдущей задачи, что для осуществления подобия нужно на границах модели осуществить распределение критерия V , тождественно одинаковое с тем, которое имеет место в образце, т.е. выполнить условие

$$\left(\frac{V_r l_0}{\nu} \right)_i = \left(\frac{V_r l_0}{\nu} \right)_i.$$

Переходя к усредненным по сечению критериям \bar{V} и \bar{P} и заменяя их критериями $\bar{E}u$ и $\bar{R}e$, результаты опытов, имеющих целью установление эмпирических законов сопротивления при напорном течении, обычно обрабатывается в виде функциональной зависимости

$$\bar{E}u = \psi(\bar{R}e).$$

Вязкостный режим течения.

Вязкостный режим течения характеризуется исчезающе малым влиянием инерционных сил по сравнению с силами трения и давления. В этом случае на основании анализа уравнений:

движения

$$-\text{grad} + \mu \nabla^2 V = 0;$$

сплошности

$$\text{div} V = 0;$$

граничных условий

$$V_{\Gamma} = \psi(1_{\Gamma}, l_i, v^*),$$

где v^* – параметрическое значение скорости,
получается одно уравнение связи

$$\frac{p_0}{l_0} = \frac{\mu_0 v_0}{l_0^2}, \quad (4.115)$$

на основании которого устанавливается подобие двух потоков.

Для осуществления подобия необходимо выполнить равенство критериев V на границах потоков в модели и в образце, т.е.

$$V_{\Gamma.м} = V_{\Gamma.н} \text{ или } \left(\frac{V_{\Gamma}}{v^*} \right)_м = \left(\frac{V_{\Gamma}}{v^*} \right)_н.$$

Отсюда видно, что подобие может быть осуществлено независимо от размеров модели.

Инерционный режим течения. В этом случае влиянием сил трения, ввиду их малости по сравнению с силами давления и инерции, на режим течения можно пренебречь.

Тогда после приведения уравнений:

движения

$$(v, \text{grad})v = \frac{1}{\rho} \text{grad} p;$$

сплошности

$$\text{div} v = 0;$$

граничных условий

$$V_{\Gamma} = f(l_{\Gamma}, l, v^*)$$

и безразмерному виду получим уравнение связи

$$v_0^2 = \frac{P_0}{\rho_0}. \quad (4.116)$$

Следовательно, для установления подобия между двумя потоками необходимо выполнить то же условие, что и при вязкостном режиме, т.е.

$$\left(\frac{V_{\Gamma}}{v^*} \right)_{\text{н}} = \left(\frac{V_{\Gamma}}{v^*} \right)_{\text{м}}.$$

В данном случае подобие может быть осуществлено, так же как при вязкостном режиме, независимо от размеров модели, которая, разумеется, должна быть геометрически подобна образцу.

Сопоставим условия, необходимые для осуществления подобия в рассматриваемых задачах:

при наличии сил тяжести:

$$\left[v_r / (ql_0^3)^{1/2} \right]_{\text{м}} = \left[v_r / (ql_0^3)^{1/2} \right]_{\text{н}};$$

$$\left[v / (ql_0^3)^{1/2} \right]_{\text{м}} = \left[v / (ql_0^3)^{1/2} \right]_{\text{н}};$$

при напорном течении

$$\left(\frac{V_{\Gamma} l_0}{v} \right)_{\text{м}} = \left(\frac{V_{\Gamma} l_0}{v} \right)_{\text{н}};$$

при вязкостном течении

$$\left(\frac{V_{\Gamma}}{v^*} \right)_{\text{м}} = \left(\frac{V_{\Gamma}}{v^*} \right)_{\text{н}};$$

при инерционном течении

$$\left(\frac{V_{\Gamma}}{v^*}\right)_{\text{М}} = \left(\frac{V_{\Gamma}}{v^*}\right)_{\text{Н}}$$

$$\frac{v_{\text{М}}}{v_{\text{Н}}} = C_v; \quad \frac{l_{\text{М}}}{l_{\text{Н}}} = C_e; \quad \frac{q_{\text{М}}}{q_{\text{Н}}} = C_q = 1; \quad \frac{v_{\text{М}}}{v_y} = C_v,$$

получим при наличии влияния сил тяжести

$$C_v = C_e^{1/2}; \quad C_v = C_e^{3/2};$$

при напорном течении

$$C_v C_l = C_V;$$

при вязкостном и инерционном течении

$$C_v = C_V.$$

Следовательно, для первых двух режимов имеем ограничения в выборе множителей подобия. Действительно, выбрав в первом случае множитель геометрического подобия C_l , мы тем самым предопределяем множители подобия C_v и C_V . Аналогично и в случае напорного течения.

В противоположность рассмотренным двум первым видам течения, при осуществлении подобия вязкости и инерционного течения мы свободны в выборе множителей подобия. В последних двух случаях подобие обеспечивается одним лишь подобием распределения скоростей. Это свойство инерционного и вязкостного режимов течения называется автомоделью. При этом для вязкостного режима имеет место

$$\overline{Eu} \overline{Re} = \text{const},$$

а для инерционного режима

$$\overline{Eu} = \text{const}.$$

Вязкостный режим наблюдается в области малых значений числа \overline{Re} , а инерционный – в области больших значений числа \overline{Re} . В соответствии с этим

принято говорить о первой и второй автомодельных областях. Значение автомодельности для практики моделирования совершенно очевидно, так как оно позволяет осуществить подобие на модели любых размеров с использованием любой рабочей жидкости.

4.8. Моделирование конвективного теплообмена

Рассмотрим стационарный конвективный теплообмен между твердым телом и омывающей его несжимаемой вязкой жидкостью. При этом физические параметры будем считать зависящими от температуры и давления.

Для сокращения запишем уравнения конвективного теплообмена в векторной форме:

уравнение движения

$$\rho(V, \text{grad})v = -\text{grad } p + \rho q + \mu \nabla^2 V; \quad (4.117)$$

уравнение сплошности

$$\text{div} \rho V = 0; \quad (4.118)$$

уравнение переноса тепла или уравнение энергии

$$(V, \text{grad } t) = a \nabla^2 t \quad (4.119)$$

где $a = \lambda / \rho c q$ – коэффициент температуропроводности;

μ – коэффициент вязкости;

$$(V, \text{grad } t) = v_x \frac{\partial t}{\partial x} + v_y \frac{\partial t}{\partial y} + v_z \frac{\partial t}{\partial z}.$$

Параметры μ, ρ, c, λ в общем случае являются переменными и зависят от температуры, т.е.:

$$\mu = f_\mu(t); \quad c = f_c(t); \quad \rho = f_\rho(t); \quad \lambda = f_\lambda(t). \quad (4.120)$$

краевые условия будут

$$V_r = f_V(1_r, l_i, v_0); \quad t_r = f_t(1_r, l_i, t^*). \quad (4.121)$$

Составим масштабные преобразования и, введя их в уравнения (4.117)-(4.119) получим в конечном итоге систему уравнений связи:

$$\frac{v_0^2}{l_0} = \frac{p_0}{\rho_0 l_0} = q_0 = \frac{\mu_0 v_0}{\rho_0 l_0^2}; \quad \rho_0 q_0 v_0 c_0 = \frac{\lambda_0}{l_0}. \quad (4.122)$$

Из девяти масштабов, связанных четырьмя уравнениями (4.122), пять масштабов могут быть выбраны произвольно:

$$q_0 = q; \quad t_0 = t^*; \quad \rho_0 = \rho_0; \quad c_0 = c_0; \quad l_0 = l_0, \quad (4.123)$$

а остальные четыре определены из условия (4.123):

$$p_0 = \rho_0 q l_0; \quad v_0 = (q l_0)^{1/2}; \quad \mu_0 = \rho_0 (q l_0^3)^{1/2}; \quad \lambda_0 = \rho_0 c_0 (q^3 l_0^3)^{1/2}. \quad (4.124)$$

Равенства $\rho_0 = \rho_0$; $c_0 = c_0$; $l_0 = l_0$ следует понимать в том смысле, что выбор указанных масштабов является произвольным.

Выражения для безразмерных величин:

$$V = \frac{v}{\sqrt{q l_0}}; \quad L = \frac{1}{l_0}; \quad P = \frac{p}{\rho_0 q_0 l_0};$$

$$T = \frac{t}{t^*}; \quad M = \frac{\mu}{\rho_0 \sqrt{q l_0^3}}; \quad R = \frac{\rho}{\rho_0}; \quad G = 1;$$

$$\Lambda = \frac{\lambda}{\rho_0 c_0 \sqrt{q^3 l_0^3}}; \quad C = \frac{c}{c_0}; \quad T^* = 1.$$

После этого дифференциальные и характеристические уравнения и краевые условия в безразмерном виде запишем следующим образом:

уравнение движения

$$R(V, \text{qgrad})V = -\text{qgrad} P + R + M \nabla^2 V; \quad (4.125)$$

уравнение сплошности

$$\operatorname{div}RV = 0; \quad (4.126)$$

уравнение энергии

$$RC(V, \operatorname{grad}T) = \operatorname{grad} \Lambda \nabla^2 T. \quad (4.127)$$

характеристические уравнения:

$$\Lambda = F_\Lambda(T); \quad C = F_C(T); \quad M = F_M(T); \quad R = F_R(T). \quad (4.128)$$

Краевые условия:

$$V_r = F_V(L_r, L_i); \quad T_r = \Phi(L_r, L_i). \quad (4.129)$$

На основании безразмерных уравнений (4.125)-(4.129) можно заключить, что решение рассматриваемой задачи может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} V &= \Phi_V(L, V_r, T_r, \Lambda, C, M, R); \\ P &= \Phi_P(L, V_r, T_r, \Lambda, C, M, R); \\ T &= \Phi_T(L, V_r, T_r, \Lambda, C, M, R). \end{aligned} \quad (4.130)$$

Так как подобие двух систем означает тождество полей безразмерных переменных, то для осуществления подобия необходимо:

в сходственных точках рассматриваемых систем, т.е.

$$L_M = L_H, \quad (4.131)$$

иметь тождественно одинаковое распределение критериев V и T на границах рассматриваемых систем, т.е.

$$V_{r.M} = V_{r.H} \quad \text{или} \quad \left(\frac{v_r}{\sqrt{ql_0}} \right)_M = \left(\frac{v_r}{\sqrt{ql_0}} \right)_H ;$$

$$T_{r.M} = T_{r.H} \text{ или } \left(\frac{t_r}{t^*} \right)_M = \left(\frac{t_r}{t^*} \right)_H, \quad (4.132)$$

и чтобы безразмерные характеристические параметры сравниваемых систем были также одинаковыми, т.е.

$$\begin{aligned} P_M &= P_H \text{ или } \left(\frac{p}{\rho_0 q_0 l_0} \right)_M = \left(\frac{p}{\rho_0 q_0 l_0} \right)_H ; \\ \Lambda_M &= \Lambda_H \text{ или } \left(\frac{\lambda}{\rho_0 c_0 \sqrt{q^3 l_0^3}} \right)_M = \left(\frac{\lambda}{\rho_0 c_0 \sqrt{q^3 l_0^3}} \right)_H ; \\ C_M &= C_H \text{ или } \left(\frac{c}{c_0} \right)_M = \left(\frac{c}{c_0} \right)_H ; \\ M_M &= M_H \text{ или } \left(\frac{\mu}{\rho_0 \sqrt{q l_0^3}} \right)_M = \left(\frac{\mu}{\rho_0 \sqrt{q l_0^3}} \right)_H ; \\ R_M &= R_H \text{ или } \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)_M = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)_H . \end{aligned} \quad (4.133)$$

4.9. Моделирование конвективной теплопередачи

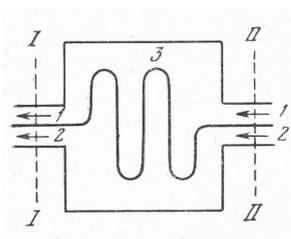


Рис. 4.8. Схема к моделированию процесса конвективной теплопередачи: 1—жидкость 1; 2—жидкость 2; 3—твердая перегородка; I-I и II-II — сечения входа и выхода жидкостей.

Конвективная теплопередача — это передача тепла с помощью конвекции от одной жидкости к другой через разделяющую их твердую стенку (рис.4.8). Ограничимся рассмотрением стационарного процесса вынужденного конвективного теплообмена.

Дифференциальные уравнения, характеризующие рассматриваемый процесс:

для жидкости 1:

уравнение движения

$$(v_1, \text{grad})v_1 = -\frac{1}{\rho_1} \text{grad } p_1 + v_1 \nabla^2 v_1;$$

уравнение сплошности

$$\text{div } v_1 = 0;$$

уравнение переноса тепла

$$(v_1, \text{grad } t_1) = a_1 \nabla^2 t_1; \quad (4.134)$$

для разделяющей твердой стенки:

уравнение теплопроводности

$$\nabla^2 t_c = 0; \quad (4.135)$$

для жидкости 2:

уравнение движения

$$(v_2, \text{grad})v_2 = -\frac{1}{\rho_2} \text{grad } p_2 + v_2 \nabla^2 v_2;$$

уравнение сплошности

$$\text{div } v_2 = 0;$$

уравнение переноса тепла

$$(v_2, \text{grad } t_2) = a_2 \nabla^2 t_2. \quad (4.136)$$

Неуправляемые краевые условия могут быть получены исходя из следующих соображений. На поверхности твердых стенок, ограничивающих обе жидкости, скорости последних равны нулю, т.е.

$$v_{1,r} = v_{2,r} = 0. \quad (4.137)$$

Автоматически также выполняется на поверхности раздела перегородки и жидкости 1 равенство температур и тепловых потоков, т.е.

$$t_1 = t_c; \quad \lambda_1 \text{grad } t_1 = \lambda_c \text{grad } t_c. \quad (4.138)$$

Аналогичным образом для границы раздела стенки и жидкости 2 будем иметь:

$$t_{\bar{n}} = t_2; \quad \lambda_{\bar{n}} \text{grad} t_{\bar{n}} = \lambda_2 \text{grad} t_2. \quad (4.139)$$

Что касается теплообмена через наружные стенки теплообменного аппарата, то будем считать, что теплотери отсутствуют, т.е.:

$$(\lambda_1 \text{grad} t_1)_{f.i.} = 0; \quad (\lambda_2 \text{grad} t_2)_{f.i.} = 0. \quad (4.140)$$

Управляемые краевые условия на границе входа жидкостей могут быть заданы уравнениями скорости и температуры потока:

$$v_{1,s} = f_{1,s}(l_{1,s}^i, v_1); \quad v_{2,s} = f_{2,s}(l_{2,s}^i, v_2); \quad (4.141)$$

$$t_{1,s} = \psi_{1,s}(l_{1,s}^i, t_1^*); \quad t_{2,s} = \psi_{2,s}(l_{2,s}^i, t_2^*). \quad (4.142)$$

Для уравнений (4.134)-(4.140) к безразмерному виду составим масштабные преобразования:

для жидкости 1:

$$v_1 = v_{0,1} V_1; \quad p_1 = p_{0,1} P_1; \quad \rho_1 = \rho_{0,1} R_1;$$

$$v_1 = v_{0,1} N_1; \quad a_1 = a_{0,1} A_1; \quad \lambda_1 = \lambda_{0,1} \Lambda$$

$$t_1 = t_{0,1} T_1; \quad t_1^* = t_{0,1} T_1^*; \quad l_1^i = l_{0,1} L_1^i;$$

для жидкости 2:

$$v_2 = v_{0,2} V_2; \quad p_2 = p_{0,2} P_2; \quad \rho_2 = \rho_{0,2} R_2;$$

$$v_2 = v_{0,2} N_2; \quad a_2 = a_{0,2} A_2; \quad \lambda_2 = \lambda_{0,2} \Lambda; \quad (4.143)$$

$$t_2 = t_{0,2} T_2; \quad t_2^* = t_{0,2} T_2^*; \quad l_2^i = l_{0,2} L_2^i;$$

для стенки

$$t_c = t_{0,c} T_c; \quad \lambda_c = \lambda_{0,c} \Lambda_c; \quad 1 = l_0 L. \quad (4.144)$$

После введения преобразований (4.143) в уравнения (4.134)-(4.140) получим следующую систему уравнений связи:

$$\begin{aligned} \frac{v_{0,1}^2}{l_0} &= \frac{p_{0,1}}{\rho_{0,1} l_{0,1}} = \frac{v_{0,1} v_{0,1}}{l_{0,1}^2}; & (a') & \quad \frac{v_{0,2}^2}{l_0} = \frac{p_{0,2}}{\rho_{0,2} l_{0,2}} = \frac{v_{0,2} v_{0,2}}{l_{0,2}^2}; & (a'') \\ v_{0,1} &= \frac{a_{0,1}}{l_{0,1}}; & (б') & \quad v_{0,2} = \frac{a_{0,2}}{l_{0,2}}; & (б'') \\ t_{0,1} &= t_{0,c}; & (в') & \quad t_{0,2} = t_{0,c}; & (в'') \\ v \lambda_{0,1} t_{0,1} &= \lambda_{0,c} t_{0,c}; & (г') & \quad v \lambda_{0,2} t_{0,2} = \lambda_{0,c} t_{0,c}. & (г'') \end{aligned} \quad (4.145)$$

Выбрав произвольно масштабы для каждой системы и положив

$$\begin{aligned} v_{0,1} &= v_1; \quad \rho_{0,1} \rho_1; \quad \lambda_{0,1} = \lambda_1; \quad t_{0,1} = t_1^*; \\ v_{0,2} &= v_2; \quad \rho_{0,2} \rho_2; \quad \lambda_{0,2} = \lambda_2; \quad t_{0,2} = t_2^*, \end{aligned}$$

получим следующие выражения для безразмерных величин:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{v_1 l_0}{v_1}; \quad P_1 = \frac{p_1 l_0^2}{\rho_1 v_1^2}; \quad R_1 = 1; \quad N_1 = 1; \\ A_1 &= \frac{a_1}{v_1}; \quad \Lambda_1 = 1; \quad T_1 = \frac{t_1}{t_1^*}; \quad T_1^* = 1; \\ V_2 &= \frac{v_2 l_0}{v_2}; \quad P_2 = \frac{p_2 l_0^2}{\rho_2 v_2^2}; \quad R_2 = 1; \quad N_2 = 1; \\ A_2 &= \frac{a_2}{v_2}; \quad \Lambda_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}; \quad T_2 = \frac{t_2}{t_1^*}; \quad T_2^* = \frac{t_2^*}{t_1^*}; \\ T_c &= \frac{t_c}{t_1^*}; \quad \Lambda_c = \frac{\lambda_c}{\lambda_1}; \quad L = \frac{1}{l_0}; \\ L_1 &= \frac{l_1^i}{l_0}; \quad L_2 = \frac{l_2^i}{l_0}. \end{aligned} \quad (4.146)$$

Тогда дифференциальные уравнения и краевые условия в безразмерной форме будут следующими:

для жидкости 1:

$$\begin{aligned}(V_1, \text{qgrad})V_1 &= -\text{qgrad} P_1 + \nabla^2 V_1; \\ \text{div} V_1 &= 0; \\ (V_1, \text{qgrad} T_1) &= A_1 \nabla^2 T_1;\end{aligned}\tag{4.147}$$

для твердой стенки

$$\nabla^2 T_c = 0;\tag{4.148}$$

для жидкости 2:

$$\begin{aligned}(V_2, \text{qgrad})V_2 &= -\text{qgrad} P_2 + \nabla^2 V_2; \\ \text{div} V_2 &= 0; \\ (V_2, \text{qgrad} T_2) &= A_2 \nabla^2 T_2.\end{aligned}\tag{4.149}$$

Неуправляемые краевые условия:

на поверхности твердых стен

$$V_1 = V_2 = 0;$$

на поверхности перегородки:

$$T_1 = T_c; \quad \Lambda_1 \text{qgrad} T_1 = \Lambda_c \text{qgrad} T_c;$$

$$T_2 = T_c; \quad \Lambda_c \text{qgrad} T_c = \Lambda_2 \text{qgrad} T_2;$$

на наружных поверхностях стен

$$\Lambda_1 \text{qgrad} T_1 = 0;$$

$$\Lambda_2 \text{qgrad} T_2 = 0.\tag{4.150}$$

Управляемые краевые условия:

$$\begin{aligned} V_{1,s} &= F_{1,s}(L_{1,s}, L_1^i); & V_{2,s} &= F_{2,s}(L_{2,s}, L_1^i); \\ T_{1,s} &= \Phi_{1,s}(L_{1,s}, L_1^i); & T_{2,s} &= \Phi_{2,s}(L_{2,s}, L_1^i). \end{aligned} \quad (4.151)$$

Решение системы дифференциальных уравнений (4.147)-(4.149), удовлетворяющее краевым условиям (4.150) и (4.151), может быть представлено в виде системы уравнений, каждое из которых представляет соответствующую безразмерную зависимую переменную ($V_1; V_2; P_1; P_2; T_1; T_2; T_c$) как функцию безразмерных координат управляемых краевых условий и безразмерных физических параметров, входящих в систему дифференциальных уравнений и в краевых условиях. Так, например, температурные поля в обеих жидкостях и разделяющей их перегородке могут быть представлены уравнениями:

$$\begin{aligned} T_1 &= \Phi_1(L_1, V_{1,s}, T_{1,s}, T_{2,s}, A_1, A_2, \Lambda_2, \Lambda_c); \\ T_c &= \Phi_c(L_1, V_{1,s}, V_{2,s}, T_{1,s}, T_{2,s}, A_1, A_2, \Lambda_2, \Lambda_c); \\ T_2 &= \Phi_2(L_1, V_{1,s}, V_{2,s}, T_{1,s}, T_{2,s}, A_1, A_2, \Lambda_2, \Lambda_c), \end{aligned} \quad (4.152)$$

причем краевые условия $V_{1,s}, V_{2,s}, T_{1,s}, T_{2,s}$ задаются уравнениями (4.151).

Таким образом, для осуществления подобия температурных полей T необходимо осуществить равенство критериев краевого подобия:

$$\begin{aligned} (V_{1,s})_M &= (V_{1,s})_H; & (T_{1,s})_M &= (T_{1,s})_H; \\ (V_{2,s})_M &= (V_{2,s})_H; & (T_{2,s})_M &= (T_{2,s})_H, \end{aligned} \quad (4.153)$$

и равенство безразмерных параметров:

$$(A_1)_M = (A_1)_H; \quad (A_2)_M = (A_2)_H;$$

$$(\Lambda_2)_i = (\Lambda_2)_i; \quad (\Lambda_{\bar{n}})_i = (\Lambda_{\bar{n}})_i. \quad (4.154)$$

Выполнение условий (4.153) означает реализацию подобия на входных сечениях модели и образца или подобия управляемых краевых условий. Подобие неуправляемых краевых условий, выражаемых равенствами (4.150), осуществляется «автоматически», если выполнены условия (4.154). Осуществление этих условий существенно отличается, если жидкости 1 и 2, а также материалы стенок в модели и образца соответственно одинаковы, т.е. если:

$$\begin{aligned} (v_1)_M &= (v_1)_H; & (v_2)_M &= (v_2)_H; & (a_1)_M &= (a_1)_H; \\ (a_2)_M &= (a_2)_H; & (\lambda_1)_M &= (\lambda_1)_H; & (\lambda_2)_M &= (\lambda_2)_H; \\ (\lambda_c)_M &= (\lambda_c)_H; & (\rho_1)_M &= (\rho_1)_H; & (\rho_2)_M &= (\rho_2)_H. \end{aligned}$$

В этом случае условия (4.154) осуществляются «автоматически». Однако экспериментальное исследование полей температур, скоростей и давлений во всем объеме модели является очень трудоемкой задачей. Поэтому при моделировании задач конвективного теплообмена обычно исследуют коэффициент теплопередачи k , определяемый из равенства:

$$q = k(\bar{t}_1 - \bar{t}_2) f_c, \quad (4.155)$$

где q – количество тепла, проходящего через единицу площади и в единицу времени, причем

$$q = -\lambda_1 \int_c \left(\frac{\partial t_1}{\partial n} \right) df_c;$$

где $\partial t_1 / \partial n$ – температурный градиент на поверхности раздела жидкости;

f_c – площадь перегородки, разделяющей обе жидкости;

\bar{t}_1 и \bar{t}_2 – средние температуры жидкости, причем способ усреднения произвольный.

Введя в уравнение (4.155) масштабные преобразования $k = k_0 K$; $\lambda_1 = \lambda_{0,1} \Lambda$; $\bar{t}_1 = t_{0,1} T$; $\bar{t}_2 = t_{0,2} T_2$; $f_c = l_0^2 F_c$; $n_1 = l_0 N_1$ получим следующее уравнение связи:

$$K = \frac{kl_0}{\lambda} = K_i, \quad (4.156)$$

где K_i – критерий Кирпичева.

При выполнении условий (4.153) и (4.154) может иметь место равенство

$$K_{iM} = K_{iH} \text{ или } \left(\frac{kl_0}{\lambda_1} \right)_M = \left(\frac{kl_0}{\lambda_1} \right)_H,$$

откуда

$$k_H = k_M \left(\frac{l_0}{\lambda_1} \right)_M \left(\frac{\lambda_1}{l_0} \right)_H. \quad (4.157)$$

Таким образом, изменение коэффициента теплопередачи всего теплообменного аппарата в зависимости от различных факторов (скорости движения и температур жидкости, ее физических свойств, площади и формы перегородки и т.д.) может быть изучено на модели, а результаты исследований перенесены на образец.

4.10. Моделирование конвективного теплообмена при изменении агрегатного состояния

Конвективный теплообмен с изменением агрегатного состояния имеет место при кипении жидкости, конденсации паров, кристаллизации и плавлении.

Вначале рассмотрим случай конвективного теплообмена при кипении жидкости или конденсации паров. Как показали экспериментальные исследования ряда ученых (С.С. Кутателадзе, С.И. Костерин и др.) можно считать, что

жидкость, в которой происходит изменение агрегатного состояния, представляет собой двухфазную среду, состоящую из дискретных паровых и жидких областей. Для простоты изложения в дальнейшем будем считать обе фазы несжимаемыми, а физические параметры обеих фаз постоянными.

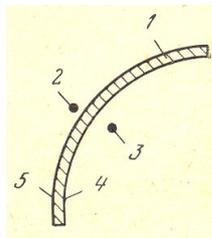


Рис. 4.9. Схема к моделированию конвективного теплообмена при изменении агрегатного состояния:

1-твердая стенка; 2-тепло или хладоноситель; 3-конденсирующий пар или кипящая жидкость; 4-внутренняя поверхность; 5-наружная поверхность.

В этом случае процесс конвективной теплоотдачи через разделяющую стенку (рис.4.9) с изменением агрегатного состояния жидкости может быть описан следующей системой дифференциальных уравнений:

для первой фазы:

уравнение движения

$$\frac{\partial v_1}{\partial \tau} + (v_1, \text{grad})v_1 = -\frac{1}{\rho_1} \text{grad} p_1 + q + v_1 \nabla^2 v_1;$$

уравнение неразрывности

$$\text{div} v_1 = 0;$$

уравнение переноса тепла

$$\frac{\partial t_1}{\partial \tau} + (v_1, \text{grad} t_1) = a_1 \nabla^2 t_1, \quad (4.158)$$

для второй фазы:

уравнение движения

$$\frac{\partial v_2}{\partial \tau} + (v_2, \text{grad})v_2 = -\frac{1}{\rho_2} \text{grad} p_2 + q + v_2 \nabla^2 v_2;$$

уравнение неразрывности

$$\text{div} v_2 = 0;$$

уравнение переноса тепла

$$\frac{\partial t_2}{\partial \tau} + (v_2, \text{grad} t_2) = a_2 \nabla^2 t_2, \quad (4.159)$$

для твердой стенки:

уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial t_{\bar{n}}}{\partial \tau} = a_{\bar{n}} \nabla^2 t_{\bar{n}}. \quad (4.160)$$

Управляемые краевые условия определяются заданием распределения скоростей и температур одной из фаз (например, первой фазы) во втором сечении теплообменного аппарата, а также заданием распределения коэффициента теплоотдачи α на наружной поверхности твердой стенки, т.е.:

$$v_{1,s} = f_v(1_s, l_1^i, v_0);$$

$$t_{1,s} = f_t(1_s, l_1^i, t_0); \quad (4.161)$$

$$\alpha = f_\alpha(1_s, l_1^i, \alpha_0).$$

Неуправляемые краевые условия имеют место на границе соприкосновения каждой из фаз со стенкой, а также на границе раздела фаз.

На внутренней поверхности стенки должны иметь место равенства:

$$\text{скоростей } v_1 = 0; \quad v_2 = 0;$$

$$\text{тепловых потоков } \lambda_c \text{ grad} t_c = \lambda_1 \text{ grad} t_1; \quad \lambda_c \text{ grad} t_c = \lambda_2 \text{ grad} t_2. \quad (4.162)$$

На поверхности раздела фаз должны иметь место равенства:

скоростей

$$v_1 = v_2;$$

сил трения

$$v_1 \rho_1 \text{ grad} v_1 = v_2 \rho_2 \text{ grad} v_2;$$

давлений

$$p_1 \pm \varepsilon \left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} \right) = p_2^*;$$

температур

$$t_1 = t_2 = t_k;$$

ТЕПЛОВЫХ ПОТОКОВ

$$-\lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial n} = -\lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial n_2} \pm \rho_1 g q_k \frac{dn}{d\tau}, \quad * \quad (4.163)$$

где ϵ – коэффициент поверхностного натяжения;

r' и r'' – главные радиусы кривизны поверхности раздела фаз;

t_k – температура кипения или конденсации;

q_k – теплота фазового превращения;

$\frac{dn}{d\tau}$ – скорость перемещения границы раздела фаз;

* – выбор знака определяется тем, к какой из фаз обращена выпуклость поверхности раздела.

На наружной поверхности стенки должно быть обеспечено равенство количества подводимого тепла

$$-\lambda_{\bar{n}} \frac{\partial t_c}{\partial n_c} = \alpha t_c. \quad (4.164)$$

После приведения с помощью масштабных преобразований уравнений (4.158)-(4.164) к безразмерному виду, получаем:

для первой фазы:

$$\frac{\partial V_1}{\partial T^0} + (V_1, \text{grad})V_1 = -\text{grad} P_1 + G + N_1 \nabla^2 V_1;$$

$$\text{div} V_1 = 0;$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial T^0} + (V_1, \text{grad} T_1) = A_1 \nabla^2 T_1, \quad (A)$$

для второй фазы

$$\frac{\partial V_2}{\partial T^0} + (V_2, \text{qgrad})V_2 = -\text{qgrad} P_2 + G + N_2 \nabla^{21} V_2;$$

$$\text{div} V_2 = 0;$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial T^0} + (V_2, \text{qgrad} T_2) = A_2 \nabla^2 T_2, \quad (\text{Б})$$

для стенки

$$\frac{\partial T_c}{\partial T^0} = A_c \nabla^2 T_c. \quad (\text{В})$$

Управляемые краевые условия:

$$V_{1,s} = F_V(L_s, L_i);$$

$$T_{1,s} = F_T(L_s, L_i); \quad (\text{Г})$$

$$A^0 = F_A(L_s, L_i).$$

Неуправляемые краевые условия:

на внутренней поверхности стенки:

$$T_c = T_1;$$

$$T_c = T_2;$$

$$V_1 = V_2 = 0; \quad (\text{Д})$$

$$\Lambda_c, \text{qgrad} T_c = \text{qgrad} T_1;$$

$$\Lambda_c, \text{qgrad} T_c = \text{qgrad} T_2,$$

на границе раздела фаз:

$$V_1 = V_2;$$

$$\text{qgrad} V_1 = N_2 R_2 \text{qgrad} V_2;$$

$$P_1 \pm E \left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} \right) = P_2;$$

$$T_1 = T_2 = T_k = 1;$$

$$-\frac{\partial T_1}{\partial N_1} = -\Lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial N_2} \pm G Q_k \frac{\partial N}{\partial T^0}, \quad (\text{Е})$$

на наружной поверхности стенки:

$$-\Lambda_c \frac{\partial T_c}{\partial N_c} = A^0 T_c.$$

При этом:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{l_0}; \quad T^0 = \frac{v_1 \tau}{l_0^2}; \quad V_1 = \frac{v_1 l_0}{v_1}; \quad V_2 = \frac{v_2 l_0}{v_1}; \\ P_1 &= \frac{p_1 l_0^2}{\rho_1 v_1^2}; \quad P_2 = \frac{p_2 l_0^2}{\rho_1 v_1^2}; \quad T_1 = \frac{t_1}{t_k}; \quad T_2 = \frac{t_2}{t_k}; \\ T_c &= \frac{t_c}{t_k}; \quad T_k = 1; \quad N_2 R_2 = M_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1}; \quad R_1 = 1; \\ R_2 &= \frac{\rho_2}{\rho_1}; \quad N = 1; \quad N_2 = \frac{v_2}{v_1}; \quad \Lambda = 1; \quad \Lambda_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}; \quad (\text{Ж}) \\ \Lambda_{\bar{n}} &= \frac{\lambda_{\bar{n}}}{\lambda_1}; \quad A_1 = \frac{a_1}{v_1}; \quad A_2 = \frac{a_2}{v_1}; \quad A_c = \frac{a_c}{a_1}; \\ G &= \frac{g l_0^3}{v_1^2}; \quad E = \frac{\varepsilon l_0}{\rho_1 v_1^2}; \quad Q_k = \frac{q_k \rho_1 v_1^3}{\lambda_1 t_k l_0^3}; \\ A^0 &= \frac{a l_0}{\lambda_1}; \quad R' = \frac{r'}{l_0}; \quad R'' = \frac{r''}{l_0}; \quad L = \frac{l_i}{l_0}; \quad V_{1,r} = \frac{v_1 r l_0}{v_1}. \end{aligned}$$

Решение безразмерных уравнений (А, Б, В), удовлетворяющее крайевым условиям (Г, Д, Е, Ж), может быть представлено в виде системы равенств, каждое из которых выражает одну из безразмерных зависимых переменных ($T_1, T_2, T_c, V_1, V_2, P_1, P_2$) как функцию безразмерных координат, времени, управляемых краевых условий и параметров, входящих в дифференциальные уравнения и граничные условия. Например, для T_1 решение может быть записано в виде

$$T_1 = F(L, T^0, V_{1,s}, A^0, G, E, Q_k, A_1, A_2, N_2, R_2, \Lambda_2, \Lambda_c). \quad (4.165)$$

Таким образом, для осуществления подобия, необходимо, чтобы при наличии геометрического подобия $(L)_H = (L)_M$ и в сходственные моменты времени $(T^0)_H = (T^0)_M$ должно быть обеспечено равенство соответствующих критериев модели и образца, т.е.:

$$(V_{1,s})_M = (V_{1,s})_H \text{ или } \left(\frac{v_{1,s} l_0}{v_1} \right)_M = \left(\frac{v_{1,s} l_0}{v_1} \right)_H ; \quad (4.166)$$

$$(T_{1,s})_M = (T_{1,s})_H \text{ или } \left(\frac{t_{1,s}}{t_k} \right)_M = \left(\frac{t_{1,s}}{t_k} \right)_H ; \quad (4.167)$$

$$(A^0)_M = (A^0)_H \text{ или } \left(\frac{\alpha l_0}{\lambda_1} \right)_M = \left(\frac{\alpha l_0}{\lambda_1} \right)_H ; \quad (4.168)$$

$$(E)_M = (E)_H \text{ или } \left(\frac{\varepsilon l_0}{\rho_1 v_1^2} \right)_M = \left(\frac{\varepsilon l_0}{\rho_1 v_1^2} \right)_H ; \quad (4.169)$$

$$(G)_M = (G)_H \text{ или } \left(\frac{g l_0^3}{v_1^2} \right)_M = \left(\frac{g l_0^3}{v_1^2} \right)_H ; \quad (4.170)$$

$$(Q_k)_M = (Q_k)_H \text{ или } \left(\frac{q_k}{c_1 t_k} \right)_M = \left(\frac{q_k}{c_1 t_k} \right)_H ; \quad (4.171)$$

$$(A_1)_M = (A_1)_H \text{ или } \left(\frac{a_1}{v_1} \right)_M = \left(\frac{a_1}{v_1} \right)_H ; \quad (4.172)$$

$$(A_2)_M = (A_2)_H \text{ или } \left(\frac{a_2}{v_1} \right)_M = \left(\frac{a_2}{v_1} \right)_H ; \quad (4.173)$$

$$(A_c)_M = (A_c)_H \text{ или } \left(\frac{a_c}{v_1} \right)_M = \left(\frac{a_c}{v_1} \right)_H ; \quad (4.174)$$

$$(N_2)_M = (N_2)_H \text{ или } \left(\frac{v_2}{v_1} \right)_M = \left(\frac{v_2}{v_1} \right)_H ; \quad (4.175)$$

$$\frac{\Delta \lambda_t}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial t} \right) \Delta t \text{ или } m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + R \frac{\partial x}{\partial t} + kx + \text{const} = P(t) \quad (4.176)$$

$$(\Lambda_2)_M = (\Lambda_2)_H \text{ или } \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)_M = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)_H ; \quad (4.177)$$

$$(\Lambda_c)_M = (\Lambda_c)_H \text{ или } \left(\frac{\lambda_c}{\lambda_1} \right)_M = \left(\frac{\lambda_c}{\lambda_1} \right)_H . \quad (4.178)$$

Моделирование конвективного теплообмена при кристаллизации или плавлении рассмотрим на примере образования ледопородного цилиндра в фильтрующих породах вокруг замораживающей колонки (рис.4.10).

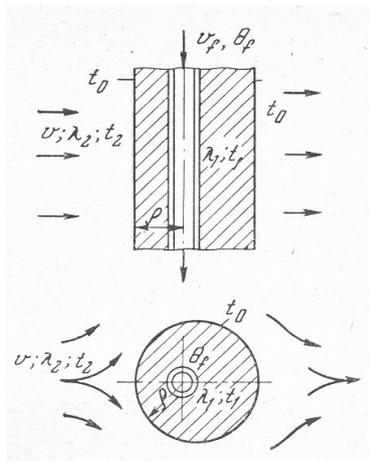


Рис.4.10. Образование ледопородного цилиндра вокруг замораживающей колонки в фильтрующих породах

Замораживание пород происходит благодаря постоянной циркуляции в колонке охлажденного до необходимой отрицательной температуры водного раствора хлористых солей натрия, магния или кальция.

Теплопередача в замороженных породах осуществляется путем теплопроводности и естественной конвекции, а в фильтрующих породах еще и путем вынужденной конвекции. Известно, что замороженные породы представляют собой многофазную систему, состоящую из минеральных частиц, воды и льда. Необходимо отметить, что указанные фазы имеют различные термические сопротивления. В ряде исследований отмечается зависимость теплофизических свойств пород от температуры. Кроме того,

установлено также, что в мелкозернистых породах на границе раздела мерзлых и талых пород не вся вода замерзает при 0 °С; в процессе замораживания наблюдается миграция влаги и, как следствие этого, имеют место процессы пучения и трещинообразования. Все эти обстоятельства затрудняют математическое выражение процесса теплопередачи в замороженных породах, и точных методов расчета процесса замораживания до настоящего времени не найдено.

Поэтому при исследовании подобных задач, учитывая их инженерный характер, прибегают к ряду упрощающих допущений. Принимают: замороженную и талую породы как изотропные; теплофизические свойства пород постоянными, но различными для талых и замороженных пород; замерзание среды происходит полностью при 0 °С; термическое сопротивление на границе промерзания отсутствует; замороженную породу как твердое тело, а фильтрующую среду как жидкость с усредненными теплофизическими свойствами; рассматриваемую задачу как плоскорадиальную; температуру теплоносителя в колонке по длине рассматриваемого участка постоянной.

Физическое моделирование процесса замораживания фильтрующих пород основывается на общей теории подобия тепловых и гидромеханических процессов, достаточно хорошо разработанной М.В. Кирпичевым, С.С. Кутателадзе, М.А. Михеевым и др. Согласно этой теории для реализации подобия температурных полей и тепловых потоков в натуре и на модели необходимо и достаточно соблюдения геометрического, гидромеханического, теплового и краевого подобия.

Из анализа дифференциальных уравнений, описывающих теплопередачу соответственно в замороженных и талых породах:

$$\frac{\partial t_1}{\partial \tau_1} = a_1 \nabla^2 t_1; \quad (4.167)$$

$$\frac{\partial t_2}{\partial \tau_2} + \left(v_x \frac{\partial t_2}{\partial x_2} + v_y \frac{\partial t_2}{\partial y_2} \right) = a_2 \nabla^2 t_2, \quad (4.168)$$

а также уравнений, описывающих краевые условия на границе раздела фаз и на границе хладоносителя со стенкой замораживающей колонки

$$\sigma n \frac{\partial \rho'}{\partial \tau} = \left(\lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial r_1} - \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial r_2} \right); \quad (4.169)$$

$$r_1 = r_2 = \rho';$$

$$\frac{\partial t}{\partial r} = \frac{\alpha_f}{\lambda_\omega} (t_0 - \theta_f), \quad (4.170)$$

где σ – теплота ледообразования, ккал/м³;

ρ' – размер замороженной зоны, м;

n – пористость породы;

r – линейный размер по направлению нормали к границе промерзания в рассматриваемой точке, м;

α_f – коэффициент теплоотдачи теплоносителя, ккал/м²·ч·°С;

θ_f – температура хладоносителя, °С,

после приведения этих уравнений к безразмерному виду с помощью масштабных преобразований приходим к выводу о том, что для обеспечения подобия процесса замораживания фильтрующих пород необходимо выполнить равенство на модели и в натуре следующих критериев подобия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{a_1 \tau_1}{l_1^2} = Fo_1; \quad \frac{a_2 \tau_2}{l_2^2} = Fo_2; \\ \frac{vl_2}{a_2} = Pe; \quad \frac{\sigma n}{\gamma_1 c_1 t_1} = \frac{\sigma_0}{c_1 t_1} = K; \\ \frac{\lambda_1 t_1}{\lambda_2 t_2} = I; \quad \frac{\alpha_f l}{\lambda_\omega} = Bi, \end{aligned} \right\} \quad (4.171)$$

где a – коэффициент температуропроводности, м²/ч;

τ – время, ч;

l – характерный линейный размер, м;

Fo – критерий Фурье;

v – скорость фильтрации и движения теплоносителя, м/ч;

Pe – критерий Пекле;

\tilde{n} – теплоемкость теплоносителя, ккал/(м³ · °С);

t – температура, °С;

K – критерий Кутателадзе;

λ – коэффициент теплопроводности, ккал/(м · ч · °С);

I – критерий инвариантности тепловых потоков;

Bi – критерий Био.

Индекс «1» относится к области замороженных пород и температуре теплоносителя, индекс «2» – к области незамороженных пород и их начальной температуре, индекс ω – к замораживающей колонке, индекс f – к теплоносителю.

Соблюдение условий подобия в общем случае (4.171) представляет значительные трудности, связанные в частности, с подбором исследуемой породы и рассола для модели по их физическим и теплофизическим характеристикам в соответствии с натурой и принятым геометрическим масштабом. В то же время нетрудно заметить, что условия моделирования упрощаются, если порода и теплоноситель на модели и в натуре одинаковы. В этом случае для обеспечения условий подобия необходимо выполнить равенство соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau}{l^2} &= idem; \\ vl &= idem; \\ t_1 &= idem; \\ t_2 &= idem; \\ v_f l &= idem. \end{aligned} \right\} \quad (4.172)$$

Выбрав линейный масштаб в качестве основного, из условий (4.172) получим, что определяющими являются следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau}{l^2} &= idem; \\ \nu l &= idem; \\ \nu_f l &= idem. \end{aligned} \right\} \quad (4.173)$$

5. ИЗМЕРЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ. ОБОБЩЕНИЕ ДАННЫХ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОШИБКИ

5.1. Измерение параметров при моделировании

При проведении экспериментов на моделях большое значение приобретает вопрос об оценке приемлемости получаемых результатов, анализе полученных результатов, их интерпретации.

Измерение физических величин производится сравнением их с другими однородными величинами, принятыми за единицу измерения. Для измерения используют меры, измерительные приборы и аппаратуру. В случае прямых измерений измеряемая величина сравнивается с мерой непосредственно, при косвенных измерениях используют математические зависимости, которые позволяют вычислить искомую величину.

Различают образцовые и рабочие меры и измерительные приборы.

Образцовые используют только для проверки и градуировки других мер и приборов.

Рабочие меры и приборы используют для самых разных измерений. Они дают номинальное значение измеряемой величины.

В каждом паспорте прибора обычно кроме условий эксплуатации указываются: абсолютная ошибка (погрешность); номинальная относительная ошибка; приведенная относительная ошибка.

Меры, служащие для измерений определенной величины, делятся на классы и разряды, обозначаемые целыми числами: обычно, чем больше число, тем меньше точность меры.

Выше при рассмотрении ряда методов физического моделирования описывались методы измерения ряда физических величин. Ниже остановимся на общих вопросах измерения ряда теплотехнических и гидродинамических параметров.

Измерение температуры. В настоящее время для измерения температуры поверхности или среды каких-либо моделей широкое распространение получили термопары и термометры сопротивления.

Термопары должны быть выбраны такими, чтобы они обладали большой термо-э.д.с. и неизменными свойствами при повторных нагреваниях или охлаждениях.

В зависимости от температурных условий опытов применяют различные материалы для изготовления термопар. Наибольшее распространение в интервале температур до 350 °С получили медь-константановые и медь-копелевые термопары. При изменении температур до 800 °С применяют хромель-копелевые термопары, а при измерении температур до 900 – 1000 °С – хромель-алюминиевые (95% Ni + 5% Al) термопары. Для замера более высоких температур применяют специальные термопары, выполненные, как правило, из благородных металлов и конструкция которых здесь не рассматривается.

Для правильного измерения температур необходимо, чтобы термопара имела тесное соприкосновение в месте измерения температуры с исследуемым образцом материала или с какой-либо другой поверхностью тела.

Термопары обычно изготавливают из термопарной проволоки толщиной (0,2...0,5) мм, иногда около 1 мм.

Применение термопар с малым диаметром электродов снижает погрешности измерений температуры, т.к. обладая малой теплоемкостью, они не искажают существенно температурного поля в области расположения термопары.

Изготовленные термопары должны пройти предварительную проверку на однородность, а также градуировку. Для снятия внутренних напряжений электродную проволоку после изготовления термопары подвергают отжигу.

Целесообразно стремиться к тому, чтобы материал термопар имел теплопроводность, близкую к теплопроводности модели. Это необходимо для того, чтобы отвод тепла вдоль электродов термопар был пренебрежимо малым по сравнению с расчетными тепловыми потоками. Чтобы не было искажения показаний, электроды термопар необходимо располагать вдоль изотермических по-

верхностей. В отдельных случаях возможна неравномерность температурного поля в месте спаивания вследствие разных значений коэффициентов теплопроводности электродов.

Электроды термопар соединяются путем пайки или сварки. В качестве припоя используют олово, серебро и другие металлы. В тех случаях, когда требуется весьма точное измерение перепадов температур на моделях, применяют дифференциальные многоспайные термопары, которые представляют систему нескольких последовательно соединенных термопар. При этом четные спаивания соединяют в один пучок, а нечетные – в другой. Спаивания должны иметь электрическую изоляцию. В случае измерения перепада температур среды по длине измерительного участка модели, спаивания дифференциальной термопары обычно устанавливают во входном и выходном сечениях.

Измерение температур жидкости на входе и выходе измерительного участка модели производят также односпайными дифференциальными термопарами, зачеканенными в медные болванки, которые помещают в соответствующие гильзы.

Измерение термо-э.д.с. термопар производят с помощью компенсационных приборов – потенциометров: гальванометров, милливольтметров. Для весьма точных измерений используют пятидекадные потенциометры с нормальным элементом высокого класса точности. Для измерения и записи температур одновременно в нескольких точках применяют электронные автоматические приборы ЭПП-09-М1 класса точности 0,5 % и др.

Термометр сопротивления представляет материал, электрическое сопротивление которого значительно изменяется с изменением температур. К таким материалам относятся: платина (до 660 °С), медь (до 200 °С). Сопротивление термометров измеряется потенциометрическим методом.

Для надежного измерения температур в исследуемой модели применяемые термометры должны быть предварительно градуированы. Градуировку термопар производят в специальных учреждениях или же непосредственно в лабораторных условиях. Для этого сличают показания изготовленной термопа-

ры с показаниями эталонной термопары (термометра сопротивления). При низких температурах могут быть использованы ртутные термометры. Для этого горячие спаи исследуемой и эталонной термопары закрепляют вместе и опускают в термостат с постоянной температурой. Холодные спаи погружают в сосуд с тающим льдом или в среду с температурой ± 0 °С.

Градуировку термопар проводят при нескольких различных температурах, охватывающих весь температурный интервал исследования. На основании данных градуировки составляют таблицы, графики или эмпирические уравнения для зависимости термо-э.д.с. термопары от температуры.

Градуировку термометров сопротивления осуществляют специализированными организациями, в частности Донецким центром стандартизации, метрологии и сертификации. В лабораторных условиях проводят периодическую проверку сопротивления при температуре 0 °С.

Измерение расходов. Расход жидкости в большинстве случаев определяют весовым (объемным) способом или с помощью дроссельных шайб (диафрагм). При измерении расхода весовым (объемным) способом взвешивают или измеряют объем некоторого количества жидкости, протекаемого за выбранный промежуток времени, который определяют с помощью секундомера. Этот способ самый простой и рекомендуется к применению в том случае, если массовые расходы не очень велики. Для измерения значительных расходов жидкостей применяют диафрагмы, при которых массовый расход жидкости определяется по перепаду в них давлений. Диафрагма представляет собой дроссельное устройство. Скорость движения жидкости при прохождении через него возрастает, а статическое давление падает. Перепад давлений измеряется с помощью дифференциального манометра, присоединенного к отверстиям, сделанным в стенках трубы перед диафрагмой и после нее. Отверстия для отбора статического давления должны иметь малый диаметр, закругленные края и быть строго перпендикулярными к поверхности стенки. Перед диафрагмой и после нее необходимо предусматривать прямые участки трубы или канала длиной 30-40 дециметров.

Перепад статического давления ($p_1 - p_2$) связан с расходом G зависимостью

$$G = c\sqrt{\rho(p_1 - p_2)},$$

где $c = f(\text{Re})$ – определяется тарировочными опытами;

ρ – плотность жидкости, кг/м^3 .

Скорость течения жидкости или газа в расчетном сечении может быть найдена по массовому расходу или по данным измерения динамического давления, которое обычно осуществляется с помощью трубки Прандтля. Обычно эту трубку устанавливают на оси канала или трубы в таком сечении, где скорость практически постоянна.

При измерении скоростей движения газовой среды широкое распространение получили термоанемометры, принцип действия которых основан на зависимости теплоотдачи тела от скорости движения охлаждающего его потока газа. В термоанемометре с термопарой чувствительный элемент – тонкая металлическая проволока – нагревается электрическим током, величина которого в процессе нагревания поддерживается постоянной. Скорость газа определяется по температуре нити, измеряемой с помощью термопары, или по величине электрического сопротивления нити, соответствующего этой температуре.

В термоанемометре без термопары поддерживается постоянная температура нити (сопротивление нити). В этом случае скорость движения газа определяется по результатам измерения силы тока, проходящего по нити. Термоанемометры с нагретой нитью используют для измерения скоростей до 15 м/с.

Давление измеряют с помощью манометров и микроманометров. Малые давления и перепады давления измеряют Π – или V образными дифференциальными микроанемометрами. Их изготавливают из стеклянных трубок постоянного поперечного сечения и заполняют жидкостью (ртутью, водой, спиртом, толуолом и др.). Концы трубок манометра присоединяют к местам отбора давления. При измерении статического давления, как упоминалось выше, местами отбора могут служить небольшие отверстия в стенках трубы или канала. При

необходимости замера давления внутри жидкости, используют трубки отбора давлений с отверстием, параллельным потоку. Такая одноканальная трубка позволяет измерить полное давление.

Измерение тепловых потоков. Методы определения тепловых потоков отличаются большим разнообразием. Они зависят от рода поставленной теплотехнической задачи, от способа подвода и отвода тепла к моделям и многих других факторов. В связи с этим рассмотрим измерение тепловых потоков для случаев, когда необходимо определить коэффициент теплопроводности горной породы и при конвективном теплообмене.

Для определения коэффициентов теплопроводности в стационарном режиме тепловой поток в большинстве случаев создают с помощью электрических нагревателей, которые имеют различную форму и расположение относительно образца в зависимости от его формы и требований применяемого метода исследования. Нагреватели изготавливают из тонких проволок или тонкого листового материала в форме стержней полых трубок и т.д.

Во всех случаях в процессе экспериментов они должны создавать тепловой поток, равномерно распределенный по расчетной поверхности образца, с пренебрежимо малыми тепловыми потерями в окружающую среду по сравнению с потоками тепла, идущим на нагревание исследуемого образца. В таком случае тепловой поток к образцу может быть определен из выражения

$$Q = J\Delta U, \text{ Вт},$$

где J – сила тока;

ΔU – падение напряжения в нагревателе.

Измерение мощности, силы тока и падения напряжения в нагревателе производят ваттметрами, амперметрами и вольтметрами.

Для точных измерений небольших тепловых потоков используют потенциометрический метод измерения с образцовым сопротивлением.

Образцовое (нормальное) сопротивление включается в электрическую цепь последовательно с основным нагревателем. Исходя из этого мощность, Q , Вт, (тепловой поток) нагревателя находится по формуле

$$Q = \Delta U \frac{\Delta U_N}{R_N}, \text{ Вт,}$$

где $\Delta U, \Delta U_N$ – падение напряжения нагревателей и на нормальном сопротивлении, которое измеряют с помощью потенциометров;

R_N – величина нормального сопротивления.

Если исследуются электропроводные материалы, процесс нагревания осуществляется за счет непосредственного пропускания электрического тока через образец, и тогда он сам одновременно является нагревателем. В этом случае определение теплового потока производят по вышеприведенным зависимостям. Тепловой поток может быть найден по методу калориметрирования, если через опытный образец циркулирует калориметрическая жидкость с известной удельной теплоемкостью

$$Q = G_k C_{P.k} (t''_{ж} - t'_{ж}),$$

где $G_k, C_{P.k}$ – массовый расход и удельная теплоемкость калориметрической жидкости;

$t''_{ж} - t'_{ж}$ – изменение температуры жидкости на исследуемом участке.

В некоторых случаях для измерения тепловых потоков используют тепломеры, работающие по методу дополнительной стенки. Этот метод состоит в том, что к поверхности, тепловой поток через которую необходимо определить, плотно прижимается дополнительная стенка с известной величиной теплового сопротивления ($R_0 = \delta_0 / \lambda_0$). Тогда, измеряя перепад температур Δt_0 в дополнительной стенке, можно найти тепловой поток q_f , проходящий через нее,

$$q_f = \frac{\lambda_0}{\delta_0} \Delta t_0.$$

Если термическое сопротивление дополнительной стенки невелико по сравнению с термическим сопротивлением исследуемого материала, то при установившемся тепловом состоянии тепловые потоки через дополнительную и через основную стенки будут одинаковы.

При конвективном теплообмене величина теплового потока в зависимости от обогрева определяется соотношениями, аналогичными приведенным выше для процессов теплопроводности.

Применительно к жидкости, протекающей внутри цилиндрической трубы, тепловой поток можно определить методом толстостенной трубы по зависимости

$$Q = \frac{2\pi\lambda(\bar{t}_{c1} - \bar{t}_{c2})l}{\ln d_2 / d_1},$$

где l – длина трубы;

λ – коэффициент теплопроводности стенки трубы;

d_2, d_1 – соответственно наружный и внутренний диаметр трубы.

Вышеприведенную зависимость можно использовать применительно к местным значениям величин. Этот метод определения Q требует наличия данных о λ стенки трубы и его зависимости от температуры. Кроме того, для надежного измерения перепада температур $\bar{t}_{c1} - \bar{t}_{c2}$ по толщине стенки она должна быть относительно толстой, поэтому такой метод определения теплового потока получил название метода толстостенной трубы. Этот метод удобен, если необходимо получить высокие значения тепловых потоков, которые обычно создаются с помощью электрических нагревателей на внешней поверхности толстостенной трубы.

5.2. Методы экспериментального определения коэффициента теплоотдачи

Как указывалось выше, основной величиной, подлежащей опытному исследованию при конвективном теплообмене, является коэффициент теплоотдачи. Для его определения в настоящее время применяют в основном метод стационарного теплового потока и метод регулярного теплового режима.

Метод стационарного теплового потока основан на законе Ньютона-Рихмана

$$dQ = \alpha_F (t_{CT} - t_{ж}),$$

где Q – количество тепла, тепловой поток;

F – поверхность нагревания (охлаждения).

Если все величины, входящие в это уравнение, относить к небольшим элементам поверхности трубы, то из него определяются местные значения коэффициента теплоотдачи.

Среднее значение коэффициента теплоотдачи может быть найдено двумя способами.

Первый способ:

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{F} \int_0^F \alpha_F dF \quad (5.1)$$

В случае изменения местного коэффициента теплоотдачи в одном направлении, например по длине трубы (канала), уравнение (5.1) переходит в зависимость

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{l} \int_0^l \alpha_x dx. \quad (5.2)$$

где l – конечная длина трубы.

Второй способ:

$$\bar{\alpha} = \frac{\frac{1}{l} \int_0^l q_{(x)} dx}{\frac{1}{l} \int_0^l (t_{CT} - t_{ж}) dx} = \frac{Q}{F(\bar{t}_{CT} - \bar{t}_{ж})}, \quad (5.3)$$

где q – средняя плотность теплового потока,

$$q = \frac{1}{l} \int_0^l q_{(x)} dx = \frac{Q}{F};$$

$\bar{t}_{\text{ж}}$ – среднее арифметическое значение температуры по длине потока,

$$\bar{t}_{\text{ж}} = \frac{t'_{\text{ж}} - t''_{\text{ж}}}{2};$$

$t'_{\text{ж}}, t''_{\text{ж}}$ – средняя по сечению температура жидкости на входе и выходе из канала.

Этот способ усреднения применяют при небольшом изменении температуры жидкости по длине канала. В общем случае усреднение температуры производится по логарифмическому закону:

$$\bar{t}_{\text{ж.л}} = \bar{t}_{\text{СТ}} \pm \Delta \bar{t}_{\text{ЛОГ}},$$

где $\Delta \bar{t}_{\text{ЛОГ}}$ – средний логарифмический напор между температурами стенки и жидкости,

$$\Delta \bar{t}_{\text{ЛОГ}} = \frac{t'_{\text{ж}} - t''_{\text{ж}}}{\ln \frac{\bar{t}_{\text{СТ}} - t'_{\text{ж}}}{\bar{t}_{\text{СТ}} - t''_{\text{ж}}}};$$

$\bar{t}_{\text{СТ}}$ – средняя температура поверхности стенки, определяемая как среднее арифметическое нескольких значений ее в отдельных точках поверхности стенки;

$$\bar{t}_{\text{СТ}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_{\text{СТ}i}.$$

Иногда среднюю температуру определяют как средневзвешенную величину. При достаточном количестве термопар можно построить сглаженную кривую изменения температуры поверхности и по ней найти среднее интегральное планиметрическое значение.

Естественно, что значение коэффициента теплоотдачи, определенное по формулам (5.2) и (5.3), будет различным.

По первому способу для определения местных значений коэффициента теплоотдачи надо знать температуру жидкости и плотность теплового потока во многих сечениях трубы. При этом необходимо располагать надежными данными

ми о тепловых потерях на соответствующих расчетных участках, что не всегда представляется возможным и весьма затруднено.

Исходя из этого, данный способ не нашел широкого применения для определения коэффициента теплоотдачи.

Большое практическое распространение получил второй способ определения среднего коэффициента теплоотдачи как наиболее простой. В нем требуется знать среднее интегральное значение плотности теплового потока и температуры жидкости по длине, которые легко находятся по температурам жидкости на входе и выходе из трубы. В этом случае нет надобности знать распределение утечек тепла по длине канала, а достаточно располагать данными по суммарной величине этих потерь.

Тепловой поток при нагревании (охлаждении) жидкостью определяется по ее массовому расходу и изменению температуры (метод энтальпии):

$$q = GC_p (t'_{ж} - t''_{ж}),$$

где C_p – удельная теплоемкость жидкости;

G – массовый расход жидкости.

Важнейшими условиями надежности определения этого расхода является соблюдение постоянства расхода жидкости. Для его выполнения необходимо, чтобы напоры, под которыми движется жидкость, сохранялись постоянными во времени. Постоянство напоров осуществляется применением уравнительных бачков, устанавливаемых в определенных положениях.

Метод регулярного теплового режима. При определении коэффициента теплоотдачи методом регулярного режима экспериментально измеряется лишь одна величина – скорость охлаждения. Измерять температуру поверхности тела не требуется, что особенно удобно при исследовании тел сложной геометрической формы.

В методе регулярного теплового режима скорость охлаждения тела измеряется в стадии регулярного режима, т.е. в той стадии охлаждения, когда на скорость охлаждения тела уже не влияют начальные условия.

Основным условием регулярного режима является постоянство температуры охлаждающей среды.

5.3. Обобщение данных единичных опытов

Вид критериальных зависимостей остается одинаковым для всех геометрических подобных систем, поскольку сохраняют силу исходные дифференциальные уравнения и условия однозначности. Количественная связь между критериями подобия на основании теории размерности обычно представляется в виде степенных зависимостей, позволяющих описать практически любую экспериментальную зависимость, тем более что критериальные уравнения представляют собой функции, изменяющиеся монотонно. Поэтому они легко могут быть аппроксимированы по отдельным интервалам приближенными степенными уравнениями.

В настоящее время эта форма критериальных уравнений получила очень большое распространение.

Прежде чем обрабатывать опытные данные в числах подобия, нужно знать, от каких чисел зависит определяемое значение. Для этого составляют систему дифференциальных уравнений, описывающих экспериментально изучаемый процесс, и формируют условия однозначности. Затем математическое описание процесса приводится к безразмерному виду.

Предположим, было получено, что $Nu = f(Re)$, т.е. опыты проводились с теплоносителем, критерий Прандтля которого является постоянной величиной, не зависящей от температуры.

В этом случае зависимость между числами подобия обычно представляют в виде степенных функций, т.е.

$$Nu = C Re^{n_1}, \quad (5.4)$$

где C, n_1 – постоянные безразмерные числа.

Постоянные C, n_1 подлежат определению. Для этого вычисляют значения критериев Nu, Re по найденным из опыта величинам коэффициента теплоотдачи и скорости движения жидкости. По этим значениям критериев строят график. В нем по оси ординат откладывают $\ln Nu$, а по оси абсцисс – $\ln Re$. В указанных координатах опытные данные описываются прямолинейной зависимостью, что следует из уравнения (5.4).

$$\ln Nu = \ln C + n_1 \ln Re.$$

Последнее уравнение является уравнением прямой линии. Показатель степени n_1 представляет собой тангенс угла наклона прямой к оси абсцисс.

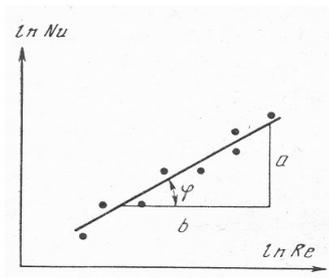


Рис.5.1. Схема к установлению зависимости $Nu = c Re^{n_1}$ при одной переменной [$Nu = f(Re)$].

Следовательно, значение n_1 можно определить с помощью графического представления опытных данных в координатах $\ln nu = f(\ln Re)$ (рис.5.1).

Показатель степени

$$n_1 = \operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b}.$$

Постоянная C определяется из уравнения

$$C = Nu / Re^{n_1}.$$

Проверкой применимости степенной зависимости является тот факт, что в логарифмических координатах все полученные точки укладываются на прямую. Если же опытные точки располагаются по кривой, то эту кривую заменяют ломанной. Для отдельных участков такой кривой значения C и n_1 различны.

В случае, если искомая величина Nu является функцией двух аргументов, например $Nu = f(Re, Pr)$, т.е. $Nu = C Re^{n_1} Pr^{n_2}$, на графике получается семейство прямых, второй аргумент берется в качестве параметра (рис.5.2).

Тогда по одной из прямых определяют показатель при числе Re , а затем

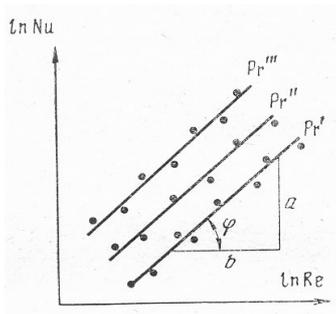


Рис. 5.2. Схема к установлению зависимости $Nu = c Re^{n_1}$ при двух переменных [$Nu = f(Re, Pr)$]

опытные данные представляют на графике в

виде зависимости $\ln \frac{Nu}{Re^{n_1}} = f(\ln Pr)$. Из по-

следнего графика определяют показатель степени n_2 при критерии Pr , а значение коэффициента C определяют из уравнения

$$C = \frac{Nu}{Re^{n_1} Pr^{n_2}}.$$

Аналогичным путем можно установить и более сложные зависимости.

Критерии подобия, а, следовательно, и уравнения связи между ними обычно получают в предположении о независимости физических параметров жидкости от температуры.

Однако в процессе теплообмена, протекающих при высоких тепловых потоках и при больших скоростях, физические параметры жидкости нельзя считать постоянными. В этих случаях может иметь место резкое изменение температуры по сечению потока. При исследовании капельных жидкостей теплоотдача оказывается различной в условиях нагревания и охлаждения. Явная зависимость теплоотдачи от направления теплового потока объясняется тем, что при нагревании и охлаждении жидкости закономерности изменения скорости и температуры в пограничном слое различны вследствие различного характера изменения ее физических свойств. Поэтому процессы теплообмена, одни из которых протекают в условиях нагревания, а другие — в условиях охлаждения, строго говоря, не являются подобными процессами.

Физические параметры капельных жидкостей изменяются с температурой существенно, особенно вязкость. Для учета неизотермичности в этом случае применяются параметрические критерии в виде отношения значений вязкости или в виде отношений критериев Прандтля соответственно при температурах потока вдали (в центре) и у стенки трубы

$$(\mu_{ж} / \mu_{СТ})^n \text{ и } (P_{rж} / P_{rСТ})^n.$$

Критерии подобия имеют нулевую размерность. Определяющая температура, по которой выбираются физические параметры, может быть принята произвольно. Она принимается, в основном, исходя из соображения удобства расчетов. В качестве определяющей температуры принимают такую температуру, которая в технических расчетах бывает задана или легко вычислена.

В качестве линейного характерного размера можно принимать расстояния x или l и другие величины.

Для каналов круглого сечения в качестве определяющего размера обычно принимается внутренний диаметр. Для каналов некруглого сечения широко применяется эквивалентный диаметр

$$d_{\text{экв}} = \frac{4f}{P},$$

где f и P – площадь и периметр поперечного сечения канала соответственно.

Для кольцевых каналов рекомендуется еще вводить множитель, характеризующий соотношение между диаметрами, так как для случая ламинарного стабилизированного течения вязких жидкостей пользоваться эквивалентным диаметром для расчета теплоотдачи нельзя.

5.4. Оценка и определение ошибки при моделировании

При проведении экспериментов по моделированию какого-либо процесса важную роль играет изучение ошибок и неопределенностей. Результаты экспериментов содержат ошибки, которые могут быть как существенными, так и ничтожно малыми. Ни один эксперимент нельзя правильно спланировать без тщательного изучения этого фактора. Если неопределенности игнорируются или оцениваются небрежно, то это может приводить к убыткам, потере времени и труда.

Чтобы правильно поставить опыты по выбранной методике, необходимо заранее знать источники возможных ошибок. Кроме того, надо иметь в виду, что повышение точности иногда позволяет найти новые, неизвестные ранее закономерности. Поэтому для правильной постановки опыта производят предварительный анализ погрешности. К источникам возможных ошибок относятся: применение измерительных приборов невысокого класса точности и неправильная их настройка, неточная градуировка термопар, отклонение от расчетного теплового режима работы установки, недостаточно строгое выполнение граничных условий, с которыми связаны применяемые расчетные уравнения, неполный учет тепловых потерь, неспособность наблюдателя правильно регистрировать показания прибора и т.д.

Вышеназванные причины приводят к двум основным классам ошибок: систематические и случайные.

Систематические ошибки представляют собой фиксированные величины отклонения отсчета относительно известного или калиброванного значения независимо от того, сколько раз производится измерение, т.е. систематические ошибки имеют постоянные величины. Систематические ошибки могут быть легко устранены путем тщательной калибровки и проверки приборов и всей измерительной схемы или путем введения специальных поправок при обработке опытных данных.

Случайные ошибки имеют место, когда при последовательных измерениях постоянной величины получаются различные числовые значения. Величина ошибки зависит от того, насколько хорошо прибор может воспроизвести последовательные отсчеты при постоянном входном воздействии. Случайные ошибки являются принципиально неустраняемыми. В некоторых случаях удается лишь уменьшить их численные значения.

Количественной оценкой точности результатов измерений является относительная ошибка. Относительная ошибка опыта представляет собой частное от деления абсолютной ошибки опыта ΔV на абсолютное значение измеряемой величины V .

Если величина V является заданной функцией нескольких независимых переменных, определяемых опытом,

$$V = f(K_1, K_2, K_3, \dots, K_n),$$

то

$$\frac{dV}{V} = d(\ln V) = d \ln f(K_1, K_2, K_3, \dots, K_n)$$

и относительная ошибка измерения V составит значение, равное сумме абсолютных значений всех слагаемых этих уравнений.

Это положение вытекает из того, что поскольку в первом приближении можно принять $\Delta V / V = dV / V$, а, как правило, $dV / V = d(\ln V)$, то относительная ошибка одного опыта определяется полным дифференциалом от натурального логарифма измеряемой переменной величины V .

Рассмотрим определение коэффициента теплопроводности, который для плоской стенки неограниченных размеров выражается уравнением вида

$$\lambda = \frac{Q\delta}{(t_{c_1} - t_{c_2})F_p}, \quad (5.5)$$

где Q – тепловой поток;

δ – толщина плоского слоя;

$(t_{c_1} - t_{c_2})$ – перепад температур на изотермических поверхностях плоского слоя;

F_p – расчетная поверхность, нормальная к направлению теплового потока.

Логарифмируя уравнение (5.5), получим

$$\ln \lambda = \ln Q + \ln \delta - \ln(t_{c_1} - t_{c_2}) - \ln F_p.$$

Полный дифференциал рассматриваемой функции будет иметь вид

$$d(\ln V) = \frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{dQ}{Q} + \frac{d\delta}{\delta} - \frac{d(t_{c1} - t_{c2})}{t_{c1} - t_{c2}} - \frac{dF_p}{F_p}.$$

Следовательно, относительная ошибка измерений коэффициента теплопроводности составит величину

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta Q}{Q} + \frac{\Delta\delta}{\delta} + \frac{\Delta(t_{c1} - t_{c2})}{t_{c1} - t_{c2}} + \frac{\Delta F_p}{F_p}. \quad (5.6)$$

В выражении (5.6) Δ – абсолютные ошибки при измерении отдельных величин с помощью имеющихся приборов.

При умножении обеих частей уравнения (5.6) на 100 получим значение относительной ошибки по определению коэффициента теплопроводности в процентах. Аналогично относительная ошибка определяется и при измерении других величин, для этого необходимо знать расчетное уравнение, по которому определяется тот или иной параметр.

Пример. Определить максимальную относительную ошибку опыта по определению коэффициента теплоотдачи в трубе, если последний определяется уравнением вида

$$\alpha = \frac{qf}{(t_c - t_{ж})}.$$

При этом удельный тепловой поток $qf = 500$ ккал/(м²·ч).

Температура поверхности трубы $t_c = -25$ °С, жидкости – 35 °С.

Измерение температуры производится с ошибкой 0,1 °С.

Максимальная относительная ошибка опыта в этом случае составит

$$\frac{\Delta\alpha}{\alpha} = \frac{\Delta qf}{qf} + \frac{\Delta t_c + \Delta t_{ж}}{t_c - t_{ж}} = \frac{10}{500} + \frac{0,1 + 0,1}{35 - 25} = 2 + 2 = 4 \%.$$

При проведении экспериментов оперируют средней арифметической и средней квадратичной ошибками. Для того, чтобы случайные ошибки результатов эксперимента были незначительными по сравнению с систематическими ошибками, каждый единичный опыт следует повторить достаточное количество раз.

При проведении n измерений единичного результата среднее арифметическое величин $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ составит

$$\bar{V} = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + \dots + V_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n V_i}{n}.$$

Средняя абсолютная арифметическая ошибка единичного результата при n измерениях выражается величиной

$$\Delta \bar{V}_{ap} = \frac{|\bar{V} - V_1| + |\bar{V} - V_2| + \dots + |\bar{V} - V_n|}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n |\bar{V} - V_i|}{n}.$$

Средняя квадратичная ошибка единичного результата при n измерениях представляется зависимостью

$$\Delta \bar{V}_{кв} = \sqrt{\frac{(\bar{V} - V_1)^2 + (\bar{V} - V_2)^2 + \dots + (\bar{V} - V_n)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{u} - u_i)^2}{n-1}}.$$

Относительные величины средних арифметической и квадратичной ошибок можно получить путем деления абсолютных их значений на величину \bar{V} .

Чем больше проведено измерений, тем меньше влияние будут оказывать случайные ошибки.

В отдельных случаях при определении полной ошибки к ошибкам измерения должна быть прибавлена ошибка отнесения.

Ошибка отнесения возникает тогда, когда какие-либо величины зависят от других величин. Например, коэффициент теплопроводности λ , коэффициент температуропроводности a , теплоемкость C_p зависят от температуры. Поэтому измеренные их значения относят к какой-либо определенной температуре, например к средней.

Однако эта средняя температура сама измеряется с некоторой абсолютной погрешностью Δt . В таком случае ошибка отнесения по температуре составит величину (если известна относительная скорость изменения изучаемой величины λ от температуры)

$$\frac{\Delta\lambda_t}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\partial\lambda}{\partial t} \right) \Delta t.$$

В случае зависимости измеряемой величины от нескольких параметров процесса ошибка отнесения будет иметь соответствующие слагаемые, учитывающие ошибки отнесения по всем этим параметрам.

6. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ МОДЕЛЕЙ-АНАЛОГОВ

6.1. Метод электромеханических аналогий

В примерах, рассмотренных выше, модель и оригинал имели одинаковую физическую природу. Если же оригинал описывается той же системой уравнений, что и модель, но имеет иную физическую природу, то применяется математическое моделирование. В настоящее время широко известны аналогии механических, электрических, акустических, гидравлических, тепловых и других явлений и процессов.

Академик А.Н. Крылов писал: «Таких аналогий между вопросами совершенно разных областей, но приводящих к одинаковым дифференциальным уравнениям, можно привести множество. Казалось бы, что может быть общего между движением небесных светил под действием притяжения к Солнцу и между собой и качкой корабля на волнении или между определением, так называемых вековых неравенств в движении небесных тел и крутильными колебаниями вала многоцилиндрового двигателя Дизеля, работающего на корабельный винт или электрогенератор, между тем, если написать только формулу и уравнение без слов, то нельзя отличить, какой из этих вопросов решается: уравнение одни и те же.

При математическом моделировании основой соотношения модель – натура является такое обобщение теории подобия, которое учитывает качественную разнородность модели и натуры, принадлежность их к разным формам движения материи. Такое обобщение принимает форму более абстрактной теории изоморфизма систем. Основой такого подхода является аналогия – правдоподобное и вероятное заключение о сходстве двух предметов или явлений в каком-либо признаке на основании установленного их сходства в других признаках. Принцип математической аналогии позволяет экспериментально находить решение дифференциальных уравнений на модели в той области, где эксперимент осуществляется наиболее легко и точно. Трудно найти более подходящую

для этой цели область техники, чем электротехника. Необходимые для этой цели элементы электрических цепей (емкости, индуктивности и резисторы) портативны, дешевы и могут быть выполнены просто и с большой степенью точности, а электроизмерительные приборы обладают высокой точностью измерений.

В 1881 г. Максвелл изложил языком механики Лагранжа теорию электромагнитных явлений, приняв в качестве обобщенной величины перемещения электрический заряд, в качестве обобщенной скорости – силу тока и в качестве механической силы – величину электродвижущей силы.

Электрическое моделирование механических систем производится при физической постановке задачи, когда механическая система характеризуется массой, упругостью, трением и связями. По этой ее физической характеристике и строится модель-схема, в которой все элементы заменены аналогичными.

Электрическое моделирование возможно при математической постановке задачи. В этом случае сначала составляется дифференциальное уравнение исследуемой механической системы и для его решения создается электрическая, характеризующаяся точно таким же дифференциальным уравнением – математическая модель.

В настоящее время результатом развития электрического моделирования явилось создание двух систем электромеханических аналогий.

Эти системы установлены путем сопоставления уравнений поступательного и вращательного движений механической системы и уравнений для электрической цепи, состоящей из индуктивности, емкости и активного сопротивления, соединенных последовательно и параллельно.

Уравнения поступательного и вращательного движений механической системы имеют вид

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + R \frac{\partial x}{\partial t} + kx + \text{const} = P(t). \quad (6.1)$$

$$J \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + R_{\text{вр}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + k_{\text{вр}} x + \text{const} = M(t), \quad (6.2)$$

где m – масса;

x – перемещение;

$R, R_{\text{вр}}$ – сопротивления трению соответственно при поступательном и вращательном движениях;

$k, k_{\text{вр}}$ – коэффициенты, учитывающие упругие свойства пружины, т.е. жесткость соответственно при сжатии (растяжении) и закручивании (раскручивании);

J – момент инерции;

φ – угол поворота (закручивания);

M – механический момент;

P – механическая сила.

При последовательном соединении индуктивности, активного сопротивления и емкости уравнение электрического состояния цепи согласно второму закону Кирхгофа можно представить в виде

$$L \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + R \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{C} q + \text{const} = U(t), \quad (6.3)$$

где L – индуктивность;

C – емкость;

R – активное сопротивление;

q – электрический заряд;

U – электрическое напряжение.

При параллельном соединении этих элементов согласно первому закону Кирхгофа получим

$$C \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{L} \Phi + \text{const} = i(t), \quad (6.4)$$

где Φ – магнитный поток;

i – сила электрического тока.

В уравнениях (6.1) и (6.2) слагаемые представляют собой силы, действующие соответственно на сосредоточенную массу, элемент сопротивления

(демпфер), элемент упругости (пружину) или моменты, действующие на аналогичные элементы при вращательном движении механической системы.

В уравнении (6.3) слагаемые представляют собой напряжения на индуктивности, емкости и активном сопротивлении при последовательном их соединении.

В уравнении (6.4) слагаемые представляют собой токи в ветвях цепи с параллельным соединением емкости, активного сопротивления и индуктивности.

Физической основой механической системы являются законы Кирхгофа. Каждому уравнению равновесия сил в механической системе соответствует уравнение балансов напряжений цепи с последовательным соединением L, R, C или уравнение токов для отдельного узла с параллельным соединением:

$$P = P_m + P_E + P_\eta, \quad (6.5)$$

$$U = U_L + U_C + U_R, \quad (6.6)$$

$$i = i_L + i_C + i_R. \quad (6.7)$$

Механические параметры системы и соответствующие им электрические величины приведены в табл.6.1. При изучении физико-механических свойств горных пород используются механические системы, представляющие собой всевозможные комбинации, составленные из идеальных сред: Гука, Ньютона и Сен-Венана.

Таким образом, можно считать, что электрический заряд соответствует относительной деформации ϵ , сила тока $i = \frac{dq}{dt}$ – скорости деформации $\epsilon = \frac{d\epsilon}{dt}$; электрическое напряжение U – напряжению в образе горной породы σ .

Упругие, вязкие и пластические свойства горных пород могут быть представлены механическими и электрическими моделями.

Таблица 6.1

Механические и электрические параметры систем

Характер величин	Механическая система		Электрическая система	
	Поступательное движение	Вращательное движение	I система аналогий	II система аналогий
Параметры системы	Инертная характеристика		Индуктивность	Емкость
	m	J	L	C
	Сопротивление трению		Омическое сопротивление R	Проводимость $q = \frac{1}{R}$
	R_n	R_b		
	Податливость		Емкость C	Индуктивность L
S	S_b			
Параметры состояния	Перемещение		Заряд	Потокоцепление Φ Напряжение U
	x	φ	q	
	Скорость		Ток $i = \frac{dq}{dt}$	Напряжение U
	$v = \frac{dx}{dt}$	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$		
	Усилие		Напряжение U	Ток i
P	M			
Энергия	Кинетическая энергия		Магнитная энергия $T_M = \sum \frac{1}{2} Li^2$	Электрическая энергия $T_{\mathcal{E}} = \sum \frac{1}{2} CU^2$
	$T = \sum \frac{1}{2} mv^2$	$T_b = \sum \frac{1}{2} J\omega^2$		
	Потенциальная энергия		Электрическая энергия	Магнитная энергия
	$W = \sum \frac{1}{2} \frac{x^2}{S}$	$W_b = \sum \frac{1}{2} \frac{\varphi^2}{S_b}$	$W_{\mathcal{E}} = \sum \frac{1}{2} \frac{g^2}{C}$	$W_M = \sum \frac{1}{2} \frac{\Phi^2}{L}$
Рассеяние энергии	$A = \sum \frac{1}{2} R_n v^2$	$A_b = \sum \frac{1}{2} R_b \omega^2$	$A_{\mathcal{E}} = \sum \frac{1}{2} Ri^2$	$A_M = \sum \frac{1}{2} gU^2$

1. Упругость. Твердые тела, при механическом нагружении которых наблюдается линейная зависимость между напряжением и деформацией, называют телами Гука. Механической моделью такого тела является пружина. Деформации тела упруги (при снятии нагрузки полностью восстанавливается равновесное состояние) и определяются приложенной силой и тяжестью пружины

$$F = ks, \quad (6.8)$$

где F – приложенная к пружине сила;

k – коэффициент, учитывающий жесткость пружины;

s – деформация пружины.

Зависимость между напряжением и деформацией (для случая упругой деформации) выражается законом Гука:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (6.9)$$

где σ – напряжение, Н/м²;

ε – относительная деформация.

Идентичность зависимостей (6.8) и (6.9) послужила причиной тому, что упругие свойства горных пород в механических моделях аппроксимируется пружиной.

В качестве электрического анализа упругих свойств горных пород может служить емкость, для которой справедливо выражение

$$U = \frac{1}{C}q, \quad (6.10)$$

где U – приложенное напряжение, В;

C – емкость конденсатора, Ф;

q – заряд на обкладках конденсатора, Кл.

Энергия, накопленная электрическим полем,

$$W_{эл} = \frac{CU^2}{2} = \frac{U^2}{2\frac{1}{C}}, \quad (6.11)$$

полностью возвращается источнику при разряде конденсатора.

Потенциальная энергия упругой деформации, запасенная в единице объема деформируемого тела,

$$W_M = \frac{\sigma^2}{2E}, \quad (6.12)$$

полностью возвращается при исчезновении возмущающей силы.

2. Вязкость.

Механической моделью, характеризующей свойства вязкости твердого тела, является тело Ньютона (N – тело). Напряжения в нем прямо пропорциональны скорости деформирования

$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} = \eta \dot{\varepsilon}, \quad (6.13)$$

где η – вязкость среды, Н·с/м²;

$\dot{\varepsilon}$ – скорость деформирования, с⁻¹;

σ – напряжение, Н/м².

Элемент, отражающий поведение такого тела при нагружении, представляется в виде поршня с отверстиями, движущегося в цилиндре, наполненном вязкой жидкостью.

Аналогом вязких свойств горных пород при электрическом моделировании может служить омическое сопротивление.

Величина падения напряжения на сопротивлении определяется уравнением

$$U = R \frac{dq}{dt} = R_i i, \quad (6.14)$$

где U – напряжение на сопротивлении, В;

R – величина омического сопротивления, Ом;

i – сила электротока, А.

Известно, что процесс деформации жидкости необратим и энергия не может быть накоплена в теле или возвращена им.

Затраченная в таком необратимом процессе работа полностью рассеивается – переходит в тепло.

Энергия электрического тока выделяется в виде тепла в омическом сопротивлении.

3. Пластичность.

Особенность пластического течения состоит в том, что оно возникает в твердом теле под действием напряжений, превосходящих определенное критическое значение и прекращается тогда, когда напряжения становятся меньше этого критического значения.

Элементарной моделью, отражающей пластическую деформацию при нагружении, является модель сухого трения лежащего на горизонтальном основании массивного тела, сдвигаемого внешними силами.

Смещение его возможно лишь при достижении внешним усилием определенной величины. При равенстве сил трения покоя и внешних сил начинается перемещение тела, причем для поддержания движения тела достаточно приложить силу, меньшую силы трения покоя, т.е.

$$F_{\text{тр.дв.}} < F_{\text{тр.пок.}} \quad (6.15)$$

Тело, деформируемое по такому закону, называется средой Сен-Венана (*StV*-тело). Механической моделью этого тела будет груз, лежащий на горизонтальном основании, последовательно соединенный с пружиной.

В качестве электрического аналога этой механической модели может быть двухэлектродный ионный прибор (неоновая лампа).

Если на электроны неоновой лампы подать напряжение, то до тех пор, пока оно будет оставаться меньше напряжения зажигания лампы, ток в цепи лампы практически проходить не будет.

При достижении равенства разности потенциалов между электродами лампы величины $U_{\text{зж}}$ за счет ударной ионизации газа внутри лампы ее внутреннее сопротивление резко снижается и между электродами происходит разряд, сопровождающийся свечением.

Для поддержания разряда достаточно приложить напряжение, несколько меньшее величины $U_{\text{зж}}$. Так же, как и в механической модели, вся энергия, расходуемая источником тока на поддержание разряда в межэлектродном пространстве, носит необратимый характер и полностью диссипируется.

4. Инерционность. В качестве инерционного элемента в механических моделях используется материальная точка, имеющая массу и обладающая абсолютной жесткостью.

В соответствии со вторым законом механики инерционная сила может быть выражена:

$$F_{\text{и}} = m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad (6.16)$$

где m – масса, кг;

x – перемещение, м;

v – скорость, м/с.

Напряжения, вызванные силами инерции, можно выразить:

$$\sigma_{\text{ин}} = m_3 \frac{d^2x}{dt^2}, \quad (6.17)$$

где m_3 – приведенная масса, определяемая произведением плотности горной породы на площадь взаимодействия;

ε – относительная деформация, вычисляемая как относительное перемещение центра масс системы.

В электрических цепях мерой инерции является индуктивность цепи. Для цепи с индуктивностью справедливо равенство

$$U = L \frac{di}{dt} = L \frac{d^2q}{dt^2}, \quad (6.18)$$

где L – индуктивность, Гн;

U – напряжение, В;

q – заряд, Кл;

i – сила тока, А.

Следовательно, для механических моделей можно составить дифференциальные уравнения напряженного состояния горных пород, решение которых возможно на электрических моделях.

Действительно, поведение вязко-упругого тела при его нагружении можно объяснить с помощью механической модели, получившей название среды Кельвина-Фойгта.

Идеально упругая пружина E и демпфер η соединены в жесткую систему, находящуюся под напряжением σ (рис.6.1, а).

Для такой механической системы может быть построена (по первой системе аналогий) электрическая модель, представляющая собой электрическую цепь с последовательным соединением активного сопротивления и емкости (рис.6.1, б).

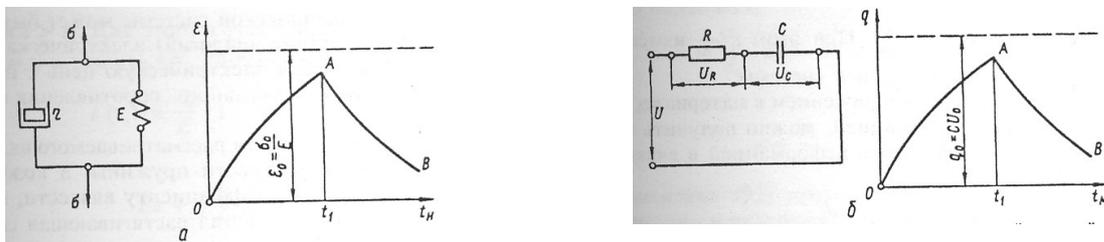


Рис.6.1. Сопоставление механической и электрической моделей:

а – механическая модель упруго-вязкой среды Кельвина-Фойгта и ее деформация при нагружении и разгрузке;

б – Электрический аналог модели Кельвина-Фойгта и характер изменения величины электрического заряда при зарядке и разрядке конденсатора.

Пусть модуль упругости рассматриваемого вязко-упругого тела E равен жесткости пружины, а коэффициент вязкого тела η равен коэффициенту вязкости, в которой перемещается поршень. Тогда растягивающая сила σ будет уравниваться сопротивлением пружины E_ϵ и сопротивлением жидкости

$\eta \frac{d\epsilon}{dt}$. При этом ϵ – изменение расстояния между точками A и B системы.

Отождествляя силу σ с напряжением в материале, а перемещение – с его деформацией, можно получить зависимость между напряжением и деформацией в вязко-упругом теле:

$$\sigma = E_\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt}. \quad (6.19)$$

Закон изменения деформации при растяжении вязко-упругого тела постоянной силой можно найти, решив дифференциальное уравнение (6.19) и приняв в нем $\sigma = \sigma_0 = \text{const}$, а при $t = 0$ $\varepsilon = 0$, решением его будет

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} (1 - e^{-\frac{t}{T}}), \quad (6.20)$$

где $T = \frac{\eta}{E}$ – время релаксации.

Из формулы (304) следует, что деформация вязко-упругого тела остается все время меньше деформации

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E}, \quad (6.21)$$

которая соответствует упругой деформации. Она достигает этой величины при $t \rightarrow \infty$, т.е. кривая деформаций имеет асимптоту $\varepsilon = \varepsilon_0$ (рис.6.1, а). После снятия напряжений в момент $t = t_1$. можно получить закон изменения деформаций при $t > t_1$.

Для этого в уравнении (6.19) следует положить $\sigma = 0$ и решить его, считая что при $t = t_1$

$$\varepsilon(t_1) = \frac{\sigma_0}{E} (1 - e^{-\frac{t_1}{T}}), \quad (6.22)$$

то есть

$$E_\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} = 0. \quad (6.23)$$

Таким образом,

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} (e^{\frac{t_1}{T}} - 1) e^{-\frac{t}{T}} = \frac{\sigma_0}{T} (e^{\frac{t_1-t}{T}} - e^{-\frac{t}{T}}) \quad (6.24)$$

или

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} (1 - e^{-\frac{t_1}{T}}) e^{-\frac{t-t_1}{T}}. \quad (6.25)$$

Уравнение (6.25) представляет собой закон изменения деформаций в вязко-упругом теле при сжатии нагрузки.

Аналогично можно определить величину заряда конденсатора в цепи с последовательным соединением активного сопротивления в емкости. Согласно второму закону Кирхгофа приложенное напряжение

$$U = U_c + R_i. \quad (6.26)$$

Напряжение на конденсаторе

$$U_c = \frac{1}{C} q, \quad (6.27)$$

а ток в цепи есть скорость изменения заряда на обкладках конденсатора, т.е.

$$i = \frac{dq}{dt}. \quad (6.28)$$

Тогда уравнение (6.26) можно представить в виде

$$U = \frac{1}{C} q + R \frac{dq}{dt}. \quad (6.29)$$

Сравнивая уравнения (6.19) и (6.26), можно заключить, что зависимость между напряжением в вязко-упругом теле и зависимость между электрическим напряжением и величиной заряда описывается аналогичными уравнениями.

Закон изменения заряда q конденсатора при включении его через сопротивление на постоянное напряжение, можно определить решением дифференциального уравнения (6.29).

Решением этого уравнения будет:

$$q = \frac{U_0}{\frac{1}{C}} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad (6.30)$$

где $\tau = RC$ – постоянная времени. Из уравнения (6.30) следует, что величина заряда конденсатора изменяется по экспоненциальному закону от нуля при $t = 0$, асимптотически приближаясь к

$$q = q_0 = \frac{U_0}{\frac{1}{C}} \text{ или } q = CU_0, \quad (6.31)$$

где U_0 – напряжение источника.

Сравнив уравнения (6.20) с (6.30) и (6.21) с (6.31) нетрудно заметить соответствие (аналогично) процессов, происходящих в вязко-упругом теле, и процессов, происходящих в электрических цепях с последовательным соединением активного сопротивления и емкости.

Для определения закона изменения заряда при $t > t_1$, необходимо в уравнении (6.20) принять $U = 0$ (разряд конденсатора) и решить его, считая, что $t = t_1$:

$$q(t_1) = \frac{U_0}{\frac{1}{C}} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad (6.32)$$

то есть

$$\frac{1}{C}q + R \frac{dq}{dt} = 0. \quad (6.33)$$

Решением дифференциального уравнения (6.33) будет

$$q = \frac{U_0}{\frac{1}{C}} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) e^{-\frac{t-t_1}{\tau}}. \quad (6.34)$$

На основании полученных выражений (6.25) и (6.34) можно заключить, что процессы, происходящие в вязком упругом теле после снятия напряжений, аналогичны процессам, происходящим в цепи с последовательным соединением активного сопротивления и емкости при заряде конденсатора (рис. 6.2, б).

При постоянных деформациях твердого тела напряжения будут постепенно уменьшаться. Явление уменьшения напряжения в теле при постоянных деформациях называется релаксацией напряжений. Это явление можно объяснить, рассмотрев механическую систему, называемую средой Максвелла (рис. 24, а).

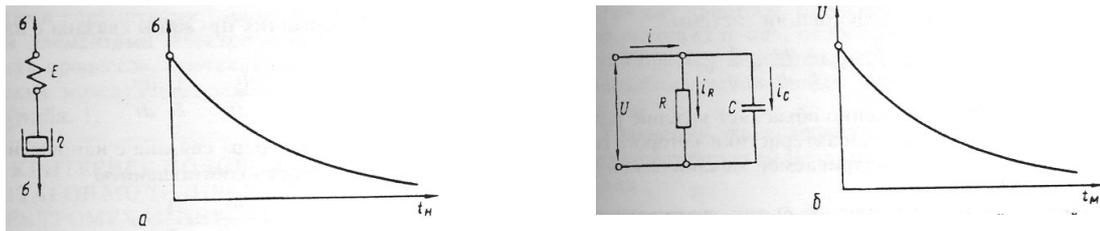


Рис.6.2. Сопоставление механической и электрической моделей в режиме релаксации напряжений: *a* – механическая модель среды Максвелла и релаксация в ней напряжений при фиксированной начальной деформации; *б* – электрический аналог модели Максвелла и изменение напряжения на конденсаторе при фиксированном начальном заряде на его обкладках.

Упругая пружина \dot{A} и демпфер η соединены в податливую систему последовательно и находятся под напряжением σ .

Скорость продольной деформации системы складывается из скорости деформации пружины

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} = \varepsilon_1 \quad (6.35)$$

и скорости деформации демпфера

$$\frac{d\varepsilon_2}{dt} = \varepsilon_2 \quad (6.36)$$

Так как деформация пружины связана с напряжением законом Гука, то

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} \quad (6.37)$$

Деформация демпфера связана с напряжением σ и коэффициентом вязкости соотношением

$$\frac{d\varepsilon_2}{dt} = \frac{1}{\eta} \sigma \quad (6.38)$$

Следовательно, скорость деформации системы

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon_1}{dt} + \frac{d\varepsilon_2}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\eta} \sigma. \quad (6.39)$$

Уравнение (6.39) упрощенно объясняет явление релаксации напряжений в теле, характеристики которого соответствуют свойствам рассматриваемой системы.

В электрической цепи (рис.6.2, б) ток, протекающий в ветви с емкостью

$$i_C = \frac{dq}{dt}. \quad (6.40)$$

Ток, протекающий в ветви с активным сопротивлением

$$i_R = \frac{1}{R} U. \quad (6.41)$$

Ток в неразветвленной части цепи согласно первому закону Кирхгофа

$$i = i_C + i_R \quad (6.42)$$

так как

$$q = CU, \quad (6.43)$$

то

$$\frac{dq}{dt} = C \frac{dU_0}{dt} \quad (6.44)$$

и, следовательно, ток в неразветвленной части цепи или скорость изменения заряда

$$i = \frac{dq}{dt} = i_C + i_R = C \frac{dU_C}{dt} + \frac{1}{R} U. \quad (6.45)$$

Установленная аналогия между упругими, вязкими и пластическими параметрами горных пород и соответствующими им элементами электрических цепей, а также идентичность процессов, протекающих в механических и электрических моделях, позволяет обобщить эти закономерности.

6.2. Критерии подобия и масштабы моделирования на основе электромеханических аналогий

Уравнения, характеризующие электрическую цепь и соответствующую ей механическую систему (рис.6.3),

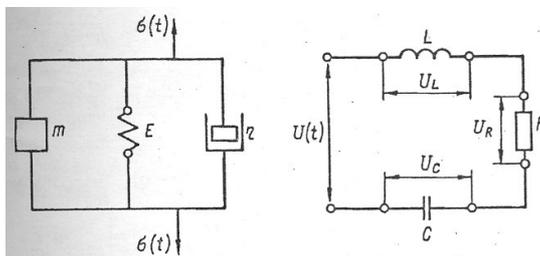


Рис.6.3. Принципы механической и электрической моделей.

имеют вид

$$U(t) = \frac{1}{C}q + R\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2q}{dt^2}; \quad (6.46)$$

$$\sigma(t) = E\varepsilon + \eta\frac{d\varepsilon}{dt} + m\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}. \quad (6.47)$$

После введения безразмерных величин

$$U = U_0\bar{U}; \quad C = C_0\bar{C}; \quad q = q_0\bar{q}; \quad R = R_0\bar{R}; \quad L = L_0\bar{L}; \quad t_M = t_{0M}\bar{t}_M; \\ \sigma = \sigma_0\bar{\sigma}; \quad E = E_0\bar{E}; \quad \varepsilon = \varepsilon_0\bar{\varepsilon}; \quad \eta = \eta_0\bar{\eta}; \quad m = m_0\bar{m}; \quad t_H = t_{0H}\bar{t}_H,$$

и подстановки их в уравнения (6.46), (6.47), группировки постоянных величин, деления на $(R_0q_0)/t_{0M}$ и $(\eta_0\varepsilon_0)/t_{0H}$ и приравнивания коэффициентов в этих уравнениях получим критерии подобия

$$\left[\frac{E_0 t_{0H}}{\eta_0} \right] = \left[\frac{t_{0M}}{C_0 R_0} \right]; \quad (6.48)$$

$$\left[\frac{\sigma_0 t_{0M}}{\varepsilon_0 \eta_0} \right] = \left[\frac{U_0 t_{0M}}{q_0 R_0} \right]; \quad (6.49)$$

$$\left[\frac{m_0}{t_{0н} \eta_0} \right] = \left[\frac{L_0}{t_{0м} R_0} \right]. \quad (6.50)$$

Для уравнений, характеризующих электрическую и механическую системы, получено по $i = 3$ независимых критерия подобия. Действительно, количество величин, определяющих каждое из явлений $k = 6$, а количество величин, обладающих независимыми равномерностями в обоих случаях, – $k = 3$. Полученное количество критериев подобия удовлетворяет требованиям Пи-теоремы

$$t = N - k = 3.$$

В этом случае для моделирования упругих свойств горных пород масштаб определяется следующим образом:

$$K_E = \frac{E_0}{1/C_0} = \frac{\eta_0 t_{0м}}{R_0 t_{0н}} = \frac{K_\eta}{K_l}. \quad (6.51)$$

Масштаб напряжений определится аналогично:

$$K_\sigma = \frac{\sigma_0}{U_0} = \frac{\varepsilon_0 t_{0м} \eta_0}{q_0 t_{0н} R_0} = \frac{K_\eta}{K_l K_t}. \quad (6.52)$$

Отсюда масштабы времени K_t и вязких свойств горных пород K_η имеют вид

$$K_t = \frac{K_\eta}{K_E}; \quad K_\eta = \frac{K_\sigma K_l}{K_t}. \quad (6.53)$$

Для случая моделирования нестационарных процессов инерционные силы учитываются масштабом K_m

$$K_m = \frac{t_{0м} \eta_0}{t_{0н} R_0} = K_t K_\eta. \quad (6.54)$$

6.3. Метод электрогидродинамических аналогий (метод ЭГДА)

Метод ЭГДА успешно применяют для изучения стационарных физических процессов, которые описываются уравнениями эллиптического вида.

В этом случае метод ЭГДА применяется в горном деле и гидротехнике для решения задач фильтрации жидкости; в электротехнике – для решения задач электропередачи; в строительной механике – при решении задач теории упругости; в теплотехнике – для решения задач теплообмена, а также для решения задач диффузии газа и жидкости, распространения магнитных, электрических и взрывных волн и др.

В ряде случаев, используя метод суперпозиций, метод ЭГДА может быть применен и для решения нестационарных физических процессов, которые описываются уравнениями параболического типа, например, задачи замораживания горных пород и фильтрации жидкости и газа в пористых средах, физические процессы которых протекают весьма медленно во времени. В этом случае изучение процесса в заданный период времени разбивается на сравнительно короткие промежутки времени, в течение которого физический процесс может рассматриваться как стационарный с соответствующим заданием граничных условий.

Метод ЭГДА основан на математической аналогии между некоторыми физическими процессами: например, между стационарным движением электрического тока в проводящей среде или стационарным распространением тепла в твердых телах, диффузией газа и жидкости и т.д.

Рассмотрим аналогию указанных выше процессов на примере аналогии между стационарным движением электрического тока в проводящей среде и стационарным движением жидкости в пористых средах. Для упрощения процесса рассмотрим для плоскости (двухмерная задача). В этом случае процессы описываются следующими уравнениями

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sigma_{x,y} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\sigma_{x,y} \frac{\partial u}{\partial y_1} \right) = 0; \quad (6.55)$$

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial j_x}{\partial x_1} + \frac{\partial j_y}{\partial y_1} = 0. \quad (6.56)$$

Для фильтрующих пород:

уравнение движения

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(k_{x,y} \frac{\partial h}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(k_{x,y} \frac{\partial h}{\partial y_2} \right) = 0; \quad (6.57)$$

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x_2} + \frac{\partial v_y}{\partial y_2} = 0, \quad (6.58)$$

где u – электрический потенциал;

σ – электропроводность материала;

h – пьезометрический напор;

k – коэффициент фильтрации;

j – компоненты плотности тока;

v – компоненты скорости потока;

x, y – координаты поверхности.

Если среды однородные, то коэффициенты электропроводности и фильтрации будут постоянными. В этом случае вместо уравнений (6.55), (6.57) получим уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y_2^2} = 0.$$

Исходя из этих уравнений, устанавливают аналогию между процессами и отдельными параметрами (табл.6.2).

Таблица 6.2

Аналогия электрического, магнитного полей, фильтрации и температур

Электрическое поле тока	Поле фильтрации жидкости	Магнитное поле	Поле температур
<p>Закон Ома:</p> $j = -\sigma \text{grad } u ;$ $I = \int j ds ,$ <p>где j – плотность тока; σ – электропроводность; u – электрический потенциал; I – сила тока.</p>	<p>Закон Дарси:</p> $v = -k \text{grad } h ;$ $Q_{\phi} = \int v ds ,$ <p>где v – скорость фильтрации; k – коэффициент фильтрации; h – пьезометрический напор; Q_{ϕ} – фильтрационный расход.</p>	<p>Закон магнитной индукции:</p> $B = -\mu \text{grad } u ;$ $\Phi = \int B ds ,$ <p>где B – магнитная индукция; μ – магнитная проницаемость; u – магнитный потенциал; Φ – магнитный поток.</p>	<p>Закон Фурье:</p> $q = -\lambda \text{grad } t ;$ $Q_T = \int q ds ,$ <p>где q – тепловой поток; λ – коэффициент теплопроводности; t – температура; Q_T – тепловой поток.</p>

Таким образом, исследование вопросов фильтрации в натуре сводят к изучению соответствующих (аналогичных) электрических процессов и параметров на электрических моделях, и результаты этих исследований распространяют на процессы фильтрации.

При осушении месторождений полезных ископаемых в результате работы водопонижительных скважин образуется депрессионная поверхность, на основании которой ведутся все гидрогеологические расчеты (дебит скважин и установки в целом, расположение скважин в плане, приток воды в горные выработки, закладка фильтров и т.д.). Для получения на электрической модели процессов аналогичных процессам фильтрации жидкости в натуре, необходимо выполнить ряд условий, вытекающих из общей теории подобия.

1. Электрическая модель должна представлять изучаемую область фильтрации жидкости в натуре в некотором масштабе без всякого искажения, т.е. должно быть соблюдено геометрическое подобие.

2. Коэффициент электропроводности модели должен быть прямо пропорционален в сходственных точках коэффициенту фильтрации жидкости, т.е. между моделью и натурой должно быть соблюдено физическое подобие

$$\frac{k}{\sigma} = C_{k,\sigma}. \quad (6.59)$$

3. Также должны быть подобны граничные условия модели и природы, т.е. должно быть соблюдено динамическое подобие

$$\frac{h}{u} = C_{h,u}. \quad (6.60)$$

Подставив значения параметров фильтрации из выражений (6.59) и (6.60) в выражение (6.57), после преобразований получают

$$\left[\frac{C_{k,\sigma} C_{h,u}}{C_l^2} \right] \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\sigma_{x,y} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\sigma_{x,y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] = 0. \quad (6.61)$$

Следовательно, уравнения (6.55) и (6.61) будут аналогичными в том случае, если произведение коэффициентов в квадратных скобках будет постоянно:

$$\frac{C_{k,\sigma} C_{h,u}}{C_l^2} = \text{const}. \quad (6.62)$$

Для однородной среды при $k(x, y) = \text{const}$ и $\sigma(x, y) = \text{const}$ условия физического подобия выполняются автоматически, т.е. имеет место автомодельность. Поэтому при моделировании физических процессов необходимо соблюдать только геометрическое и динамическое подобие.

Исследование процесса осушения водоносных пород в конечном счете сводится к определению напоров воды на различных участках изучаемого пространства. Следовательно, на электрической модели необходимо построить поле потенциала, которое было бы аналогичным депрессионной поверхности воды в натуре. Пересчет электрического потенциала на напоры воды производится на основании граничных условий моделирования, которые могут быть записаны следующим образом:

$$y = ha + b, \quad (6.63)$$

где a и b – постоянные коэффициенты.

При этом:

при $h = \text{const}$ должно быть $u = \text{const}$;

при $\partial h / \partial n = 0$ должно быть $\partial u / \partial n = 0$.

В этом случае будем иметь:

$$u_{\max} = ah_{\max} + b; \quad (6.64)$$

$$u_{\min} = ah_{\min} + b. \quad (6.65)$$

Значения максимальных и минимальных напоров воды обычно известны. Максимальный напор воды h_{\max} имеет место на границе области питания и определяется гидрогеологическими разведочными скважинами. Контур питания определяется гидрогеологическими расчетами или непосредственными наблюдениями в скважинах при опытных откачках. Минимальный напор воды h_{\min} задают из условий работы водопонижительных скважин. На электрической модели в соответствии с заданием максимального и минимального напоров воды задают максимальные и минимальные напряжения u_{\max} и u_{\min} . Обычно на модели эквипотенциальные поля строятся в относительных величинах. При этом u_{\max} берется за 1, а u_{\min} 0. Подставив значения $u_{\max} = 1$ и $u_{\min} = 0$ в выражения (6.64) и (6.65), получим:

$$a = \frac{1}{h_{\max} - h_{\min}}; \quad b = \frac{h_{\min}}{h_{\max} - h_{\min}}. \quad (6.66)$$

Следовательно, значение потенциала в любой точке поля будет определяться формулой

$$u_{x,y} = \frac{h_{x,y}}{h_{\max} - h_{\min}} - \frac{h_{\min}}{h_{\max} - h_{\min}}. \quad (6.67)$$

Зная значения h_{\max} и h_{\min} и значение потенциала u на модели (определяется прибором), получим для напорной фильтрации значение напора h в любой точке изучаемой области природы:

$$h_{x,y} = (h_{\max} - h_{\min})u_{x,y} + h_{\min}. \quad (6.68)$$

В случае безнапорной фильтрации пересчет от потенциалов к напорам производится по формуле

$$h_{x,y} = \sqrt{(h_{\max}^2 - h_{\min}^2)u_{x,y} + h_{\min}^2}. \quad (6.69)$$

При напорно-безнапорной фильтрации каждая из вышеприведенных формул (6.68) и (6.69) применяется в соответствующей области. Граница между ними определяется из условия

$$h_{x,y} = m, \quad (6.70)$$

где m – мощность водоносного пласта.

Принцип действия установки ЭГДА основан на использовании для про-

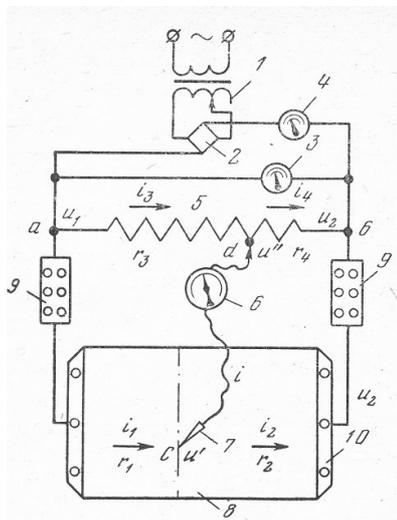


Рис.6.4. Принципиальная схема установки ЭГДА:

1-трансформатор; 2-выпрямитель; 3-вольтметр; 4-миллиамперметр; 5-потенциометр; 6-нуль-индикатор; 7-поисковая игла; 8-модель; 9-магазин сопротивлений; 10-зажимные шины.

(гальванометр) 6 и поисковая игла 7.

изводства экспериментов мостового (компенсационного) метода измерений электрического потенциала в поле модели. Принципиальная электрическая схема установки ЭГДА (рис.6.4) состоит из блока питания и блока измерения.

В блок питания входят: понижающий трансформатор 1, выпрямитель 2 и измерительные приборы – вольтметр 3 и миллиамперметр 4. В блок измерений входит: градуированный потенциометр 5, нуль-индикатор

Если поисковой иглой подключиться к модели в какой-то точке \tilde{N} , то будут иметь место отмеченные на схеме токи i и потенциал u . Если же градуированное сопротивление потенциометра 5 отрегулировать так, чтобы потенциал u' в точке c был равен потенциалу u'' в точке d , то мост будет уравновешен, в чем убеждаются по отсутствию отклонения стрелки гальванометра: так как $u' = u''$, то $i = 0$.

При уравновешенном мосте в силу разности потенциалов в точках a и b ток пойдет частично через модель, а частично через градуированный потенциометр и тогда:

$$u_1 - u' = i_1 r_1; \quad u' - u_2 = i_2 r_2;$$

$$u_1 - u'' = i_3 r_3; \quad u'' - u_2 = i_4 r_4.$$

Если $u' = u''$, то $i_1 r_1 = i_3 r_3$; $i_2 r_2 = i_4 r_4$.

Разделив их, получим

$$\frac{i_1 r_1}{i_2 r_2} = \frac{i_3 r_3}{i_4 r_4}, \quad (6.71)$$

а так как $i = 0$ (в сети гальванометра), то $i_1 = i_2$ и $i_3 = i_4$.

Отсюда получаем уравнение равновесия моста

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_3}{r_4} \quad \text{или} \quad r_1 r_4 = r_2 r_3 \quad (6.72)$$

Принимая сопротивление модели за усредненно-линейное, получаем значение потенциала u' на всей линии $c' - d'$. Это и есть линия равного потенциала u' . Но так как $u' = u''$, то по шкале градуированного потенциометра в момент равновесия мостовой схемы получим значение потенциала u' в той точке, где установлена поисковая игла.

Из теории моста следует, что

$$\frac{r_3}{r_0} = \frac{r_3}{r_1 - r_2} = \frac{u_2 - u''}{u_1 - u_2}. \quad (6.73)$$

Отсюда ясно, что результаты измерений потенциалов на моделях не зависят от величины напряжения, приложенного на шинах модели, т.е. при изменении напряжения $u_1 - u_2$ (при колебании напряжения в питательной сети) одновременно и пропорционально изменяется падение напряжения $u_1 - u''$. Поэтому разность потенциалов $u_1 - u_2$ может быть условно принята равной единице, а различные эквипотенциальные линии на модели будут лежать в пределах от нуля до единицы.

Зная значения отдельных эквипотенциалей [или в пересчете по формулам (352), (353) напоров] и кратчайшие расстояния между ними, можно определить величину градиентов, а также плотность тока или скорости фильтрации.

Таким образом, метод ЭГДА дает возможность заменить исследования фильтрационного потока в натуре исследованием электрического поля на модели и результаты исследования перенести в натуру.

6.4. Метод тепло-гидравлических аналогий

При разработке месторождений полезных ископаемых часто приходится встречаться с тепловыми задачами, например, теплообмен при замораживании горных пород, при разработке месторождений полезных ископаемых на больших глубинах или в условиях вечномерзлых пород и т.д. В большинстве случаев задачи теплообмена представляют собой весьма сложные физические процессы, которые в общем случае описываются уравнениями параболического типа с первой производной во времени. Для решения указанных задач успешно применяют метод гидравлических аналогий, разработанный проф. В.С. Лукьяновым. Метод гидравлических аналогий применяют также для решения фильтрационных, диффузных и других задач. Аналогия между термическим и гидравлическим процессами легко устанавливается при сравнении основных уравнений рассматриваемых процессов. Однако, придерживаясь основных положений моделирования, принятых в настоящей книге, установим аналогию между

процессом распространения тепла в пластине и движением вязкой жидкости по капиллярам.

Как известно, расход жидкости за участком стабилизации может быть определен по формуле

$$q_r = -kF_r \frac{\Delta h}{\Delta x_r}, \quad (6.74)$$

где k – гидравлическая проводимость капилляра;

F_r – площадь сечения капилляра;

$\Delta h / \Delta x_r$ – падение напора на участке капилляра Δx_r .

Рассмотрим теперь распространение тепла в пластине (рис.6.5),

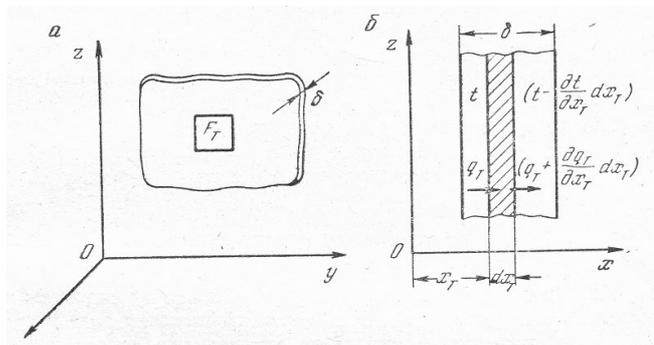


Рис.6.5. Схема к расчету теплообмена в пластине:

а-общая схема;

б-теплообмен через элементарный слой.

толщина которой исчезающе мала по сравнению с ее высотой и шириной. Если подвод или отвод тепла осуществляется равномерно к каждой из внешних поверхностей пластины, то температура будет изменяться только вдоль оси x_T . При этом количество тепла, проходящего через площадку F_T в направлении оси x_T

$$q_T = -\lambda \frac{\Delta t}{\Delta x_T} F_T, \quad (6.75)$$

где q_T – количество тепла, проходящего через площадку F_T ;

λ – коэффициент теплопроводности пластины;

$\Delta t / \Delta x_T$ – падение температуры на участке пластины толщиной Δx_T .

Нетрудно видеть, что уравнения (6.74) и (6.75) имеют одинаковую структуру. При этом q_r является аналогом q_T ; k является аналогом λ ; h является аналогом t ; F_r является аналогом F_T ; x_r является аналогом x_T .

Таким образом, законы, управляющие распространением тепла в пластине и ламинарным течением вязкой жидкости, выражаются аналогичными уравнениями. Это дает основание полагать, что дифференциальные уравнения, полученные из этих законов, будут аналогичными.

Выделим в пластине (см. рис. 6.5, а), в которой происходит нестационарный режим распространения тепла, элементарный слой толщиной dx_T (см. рис. 6.5, б).

При этом физические параметры пластины (λ – теплопроводность; C – теплоемкость; γ_T – удельный в материала пластины) будем рассматривать как постоянные величины.

Количество тепла, входящего за время $d\tau_T$ в левую поверхность элементарного слоя, определится как

$$Q'_T = q'_T d\tau_T = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x_T} F_T d\tau_T. \quad (6.76)$$

Но так как тепловой поток распространяется только в сторону понижения температуры, а температурный градиент, представляющий вектор, имеет положительное направление в сторону возрастания температуры, то в формуле температурный градиент берется с обратным знаком.

Количество тепла, выходящего за то же время через правую поверхность элементарного слоя,

$$Q''_T = q''_T d\tau_T = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x_T} \left(t + \frac{\partial t}{\partial x_T} dx_T \right) F_T d\tau_T. \quad (6.77)$$

Разность между количеством тепла, которое вошло в рассматриваемый элементарный слой за время $d\tau_T$ и вышло из него за тот же промежуток времени

$$dQ_T = Q'_T - Q''_T = \lambda F_T \frac{\partial^2 t}{\partial x_T^2} dx_T d\tau_T. \quad (6.78)$$

Очевидно, эта разность тепла пошла на изменение теплосодержания элементарного слоя за то же время, т.е.

$$dQ_T = C\gamma_T E_T dx_T \frac{\partial t}{\partial \tau_T} d\tau_T, \quad (6.79)$$

где C – удельная теплоемкость материала пластины;

$\partial t / \partial \tau_T$ – температурный градиент.

Согласно закону сохранения энергии при отсутствии источников тепла в рассматриваемом элементарном слое правые части формул (6.78) и (6.79) должны быть равны и тогда будем иметь

$$c\gamma_T \frac{\partial t}{\partial \tau_T} = \lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x_T^2} \quad \text{или} \quad \frac{\partial t}{\partial \tau_T} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x_T^2}, \quad (6.80)$$

где $a = \frac{\lambda}{c\gamma_T}$ – коэффициент температуропроводности.

Перейдем к выводу дифференциального уравнения для гидравлической системы. С этой целью представим схему (рис.6.6).

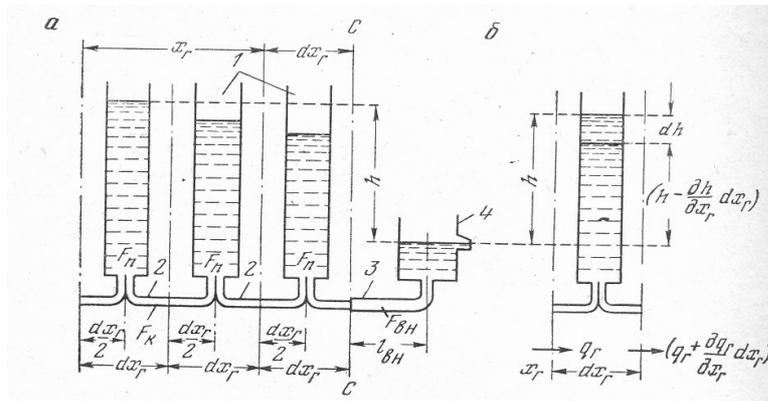


Рис. 6.6. Схема к расчету гидравлической модели:
 а – общая схема; б – схема одного капилляра; 1 – пьезометры; 2 – капилляры; 3 – внешний капилляр; 4 – сосуд постоянного уровня.

К системе цилиндрических сосудов (пьезометров) 1, открытых сверху, подсоединены капилляры 2. Площадь сечения пьезометров F_k . Пьезометры отстоят друг от друга на равном расстоянии dx_r .

Разобьем рассматриваемую систему на элементарные слои толщиной dx_r . Каждый такой слой включает в себя один пьезометр и примыкающие к нему справа и слева два участка капилляра длиной $dx_r/2$ каждый. После этого разберем материальный баланс элементарного слоя, ограниченного координатами x_r и $x_r + dx_r$ (рис. 6.6, б).

Согласно формуле (6.74) количество жидкости, втекающей по капилляру в элементарный слой за время $d\tau_r$,

$$Q'_r = -k \frac{\partial h}{\partial x_r} F_k d\tau_r, \quad (6.81)$$

где $\frac{\partial h}{\partial x_r}$ – гидравлический градиент, взятый с обратным знаком по тем же соображениям, что и при тепловой системе.

За тот же промежуток времени из элементарного слоя вытекает

$$Q''_r = -k \frac{\partial}{\partial x_r} \left(h + \frac{\partial h}{\partial x_r} dx_r \right) F_k d\tau_r. \quad (6.82)$$

Разность между указанными величинами свидетельствует об изменении содержания жидкости в пьезометре за время $d\tau_r$ и составляет

$$dQ_r = Q'_r - Q''_r = k \frac{\partial^2 h}{\partial x_r^2} F_k d\tau_r dx_r. \quad (6.83)$$

С другой стороны, изменение количества жидкости в пьезометре за время $d\tau_r$ может быть определено из формулы

$$dQ_r = F_n \frac{\partial h}{\partial \tau_r} d\tau_r dx_r. \quad (6.84)$$

Согласно закону сохранения материи, левые части уравнений (6.83) и (6.84) будут равны, а, следовательно, равны и правые части. Тогда будем иметь

$$\frac{\partial h}{\partial \tau_r} F_n = k \frac{\partial^2 h}{\partial x_r^2} F_k dx_r \quad \text{или} \quad \frac{\partial h}{\partial \tau_r} = b \frac{\partial^2 h}{\partial x_r^2}, \quad (6.85)$$

где $b = \frac{kF_k dx_r}{F_n}$ – коэффициент-аналог теплопроводности.

Таким образом, имеют место аналогичные системы дифференциальных уравнений (6.80) и (6.85). Следовательно, приходим к выводу, что процесс неустановившейся теплопередачи и процесс перетекания жидкости в системе сообщающихся сосудов, соединенных капиллярными трубками, описываются аналогичными дифференциальными уравнениями.

Для возможности применения метода гидравлических аналогий к исследованию тепловых процессов остается показать, что и краевые условия решения задач неустановившейся теплопередачи имеют соответствующие гидравлические аналогии.

Как известно, краевые условия подразделяются на начальные – характеризующие состояние системы в некоторый «начальный» момент, от которого ведется отсчет времени, и граничные – характеризующие условия взаимодействия системы с окружающей средой.

В тепловых задачах начальным условием будет служить распределение температур в момент начала процесса.

При $\tau_r = 0$ $t(0, x, y, z) = F(x, y, z)$, т.е. распределение температур в теле в начальный момент времени определится известной функцией пространственных координат.

В гидравлическом процессе аналог начальных условий очевиден – это будет распределение уровней жидкости в системе сообщающихся сосудов до начала процесса перетекания: при $\tau_r = 0$ $h_i(0) = h_i^*$, где $h_i = h_1, h_2, \dots, h_n$ – известная система заданных условий.

В тепловых задачах обычно приходится встречаться с тремя видами граничных условий.

Граничные условия I рода предполагают, что в течение всего рассматриваемого времени известны температуры во всех точках поверхности, ограничивающей тело:

$$t_s(x_T, y_T, z_T, \tau_T) = F_s(x_T, y_T, z_T, \tau_T).$$

Для приведенного простейшего примера пластины, если считать начало координат ($x_T = 0$) лежащим на средней поверхности, условия примут вид при $x_T = \pm\delta_T$

$$t(x_T, \tau_T) = f(\tau_T),$$

где $f(\tau)$ – известная функция времени;

δ_T – половина толщины пластины.

Граничные условия II рода предполагают известным плотность теплового потока через граничную поверхность:

$$q_{T_s}(x_T, y_T, z_T, \tau_T) = \Phi_s(x_T, y_T, z_T, \tau_T)$$

или в рассматриваемом случае при $x_T = \pm\delta_T$

$$q_T(x_T, \tau_T) = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x_T} = \varphi(\tau).$$

Граничное условие III рода заключается в задании температуры окружающей среды и закона теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой.

Принимая для теплообмена закон Ньютона, граничное условие получаем в виде

$$\alpha[t_n(\tau) - t_c(\tau)] = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} \Big|_s,$$

где α – коэффициент теплоотдачи от поверхности, ккал/(м·с·°С);

t_n – температура поверхности, °С;

t_c – температура окружающей среды, °С;

$\partial t / \partial n_s$ – значение градиента температур в направлении нормали к поверхности тела в точках поверхности.

Или в нашем случае при $x_T = \pm\delta_T$

$$\alpha[t(x_T, \tau) - t_c(\tau)] = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x_T}.$$

Переходя к рассмотрению граничных условий в гидравлической модели, заметим, что точке поверхности ($x_T = \delta_T$) будет соответствовать окончание ка-

пилляра (см. рис. 6.6, сечение С – С), соответствующего элементарному слою dx . контактирующему с внешней поверхностью.

Следовательно, создавая на выходе из этого капилляра некоторый, в общем случае переменный во времени, но известный напор h_Γ , получаем очевидную аналогию: при $x_\Gamma = \pm\delta_\Gamma$, $h = h_\Gamma(\tau)$.

Очевидна также аналогия и в случае граничных условий II рода, если осуществить управление подаваемым напором $h_\Gamma(\tau)$ таким образом, чтобы заданной величиной явилась разность между уровнем жидкости в пьезометре, соответствующим граничному слою, и заданным напором: при $x_\Gamma = \pm\delta_\Gamma$

$$q_\Gamma = -kF_k \frac{\partial h}{\partial x_\Gamma} = -\frac{2kF_k}{\Delta x_\Gamma} (h - h_\Gamma) = \Delta h_\Gamma(\tau),$$

где $\Delta h = q^*(\tau) / \frac{2kF_k}{\Delta x_\Gamma}$.

Для обоснования гидравлической аналогии граничных условий III рода заметим, что физическая сущность закона Ньютона заключается в том, что между температурой поверхности тела и температурой окружающей среды возникает градиент $|\Delta t| = |t_n t_c|$, обратно пропорциональный коэффициенту теплоотдачи от поверхности и прямо пропорциональный плотности теплового потока через поверхность, $\Delta t = q_T / \alpha$.

Представим себе мысленно, что поверхность тела покрыта слоем вещества толщиной δ_α с коэффициентом теплопроводности λ_α , не имеющем теплоемкости.

В среде, не имеющей теплоемкости, не существует тепловой инерции и распределение температур по толщине всегда будет линейным, а плотность теплового потока через слой составит

$$q_T = -\lambda_\alpha \frac{\partial t}{\partial x_\Gamma} = -\lambda_\alpha \frac{\Delta t}{\delta_\alpha},$$

откуда

$$|\Delta t| = \frac{q_T \delta_\alpha}{\lambda_\alpha},$$

где λ_α и δ_α – постоянные величины.

Приравнивая полученные величины градиента температур между поверхностью тела и внешней средой, получаем

$$\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{\delta_\alpha} \quad (6.86)$$

Следовательно, влияние закона теплообмена на поверхности эквивалентно влиянию некоторого «фиктивного» вещества, параметры которого можно подобрать исходя из уравнения (6.86), чем граничное условие III рода сводится к граничному условию I рода.

Таким образом, приходим к выводу, что и краевые условия тепловых задач имеют обоснованные гидравлические аналогии.

Следовательно, описанную гидравлическую систему можно рассматривать как модель пластины, в которой происходит тепловой процесс при краевых условиях III рода. При этом пьезометры являются аналогами теплоемкостей элементарных слоев; высота уровня жидкости в пьезометре – аналогом температуры соответствующего элементарного слоя; количество жидкости в пьезометре – аналогом теплосодержания соответствующего слоя; течение жидкости через капилляр – аналогом переноса тепла в пластине и т.д. (табл. 6. 3).

Температура внешней среды имитируется уровнем жидкости в сосуде постоянного уровня 4 (см. рис. 6.6).

Условия моделирования. После установления аналогии между тепловыми и гидравлическими процессами можно перейти к выявлению условий, при которых стало бы возможным изучение теплового процесса, протекающего в природе, заменить изучением гидравлического процесса на модели в лабораторных условиях. С этой целью приведем дифференциальные уравнения, начальные и граничные условия, описывающие аналогичные явления, к безразмерному виду и установим на основании этих преобразований уравнения связи

и критерия подобия, обеспечивающие возможность такой замены при изучении указанных процессов.

Таблица 6. 3

Подобие теплового и гидравлического процессов

Тепловой процесс	Гидравлический процесс
$q_T = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x_T} F_T, \text{ ккал/с}$	$q_T = -k \frac{\partial h}{\partial x_T} F_k, \text{ м}^3/\text{с}$
$q_T d\tau_T = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x_T} F_T d\tau_T, \text{ ккал}$	$q_T d\tau_T = -k \frac{\partial h}{\partial x_T} F_k d\tau_T, \text{ м}^3$
$dq_T = -c\gamma_T F_T \frac{\partial t}{\partial x_T} dx_T d\tau_T, \text{ ккал}$	$dq_T = -F_T \frac{\partial h}{\partial x_T} dx_T d\tau_T, \text{ м}^3$
$\frac{\partial t}{\partial \tau_T} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x_T^2}, \text{ }^\circ\text{C/с}$	$\frac{\partial h}{\partial \tau_T} = b \frac{\partial^2 h}{\partial x_T^2}, \text{ }^\circ\text{C/с}$
$-\lambda \left(\frac{\partial t}{\partial x_T} \right)_n = \alpha t_n, \text{ ккал/м}^2\text{с}$	$-k \left(\frac{\partial h}{\partial x_T} \right)_n = m h_n, \text{ м/с}$
$q_T, \text{ ккал/с}$ $\lambda, \text{ ккал/(м}\cdot\text{с}\cdot^\circ\text{C)}$	$q_T, \text{ м}^3/\text{с}$ $k, \text{ м/с}$
$a = \frac{\lambda}{c\gamma_T}, \text{ м}^2/\text{с}$	$b = k \frac{F_k}{F_n}, \text{ м/с}$
$\alpha, \text{ ккал/(м}^2\cdot\text{с}\cdot^\circ\text{C)}$	$m = \frac{k_b F_b}{l_b F_k}, \text{ с}^{-1}$
$x_T, \text{ м}$	$x_T, \text{ м}$
$\tau_T, \text{ с}$	$\tau_T, \text{ с}$
$F_T, \text{ м}^2$	$F_T, \text{ м}^2$
$t, \text{ }^\circ\text{C}$	$h, \text{ м}$

Запишем масштабные преобразования для тепловой и гидравлической систем

для пластины		для гидрогенератора
$t = t_0 T;$		$h = h_0 H;$
$x_T = l_{0,T} X_T;$		$x_\Gamma = l_{0,\Gamma} X_\Gamma;$
$\tau_T = \tau_{o,T} T_T^0;$		$\tau_\Gamma = \tau_{o,\Gamma} T_\Gamma^0;$
$\lambda = \lambda_0 \Lambda;$	(6.87 П)	$k = k_0 K;$
$a = a_0 A;$		$b = b_0 B;$
$\alpha = \alpha_0 A^0;$		$m = m_0 M^0;$
$t_H = t_0 T_H;$		$h_H = h_0 H_H;$
$t_\Pi = t_0 T_\Pi;$		$h_\Gamma = h_0 H_\Pi;$
$\delta_T = l_{0,T} \Delta_T,$		$\delta_\Gamma = l_{0,\Gamma} \Delta_\Gamma,$
		(6.87 Г)

После введения масштабных преобразований (6.87) в дифференциальные уравнения, начальные и краевые условия, приведенные в таблице аналогов, получим:

$$\frac{\partial(t_0 T)}{\partial(\tau_{o,T} T_T^0)} = a_0 A \frac{\partial^2(t_0 T)}{\partial(l_{0,T}^2 X_T^2)}$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial T_T^0} = A \frac{\partial^2 T}{\partial X_T^2} \left[\frac{a_0 t_0 \tau_{o,T}}{t_0 l_{0,T}^2} \right]; \quad (6.88Т)$$

для гидроинтегратора

$$\frac{\partial(h_0 H)}{\partial(\tau_{o,\Gamma} T_\Gamma^0)} = b_0 B \frac{\partial^2(h_0 H)}{\partial(l_{0,\Gamma}^2 X_\Gamma^2)}$$

или

$$\frac{\partial H}{\partial T_\Gamma^0} = B \frac{\partial^2 H}{\partial X_\Gamma^2} \left[\frac{b_0 h_0 \tau_{o,\Gamma}}{h_0 b_{0,\Gamma}^2} \right]. \quad (6.88Г)$$

Начальные условия:

$$T_T^0 = 0; \quad T_H = f_H(X_T); \quad (6.89\Gamma)$$

$$T_\Gamma^0 = 0; \quad H_H = f_\Gamma(X_\Gamma); \quad (6.89\Gamma)$$

Граничные условия:

$$-\lambda_0 \Lambda \frac{\partial(t_0 T)_\Pi}{\partial(l_{0,\Gamma} X_T)_\Pi} = \alpha_0 A^0 t_0 T_\Pi; \quad -k_0 K \frac{\partial(h_0 H)_\Pi}{\partial(l_{0,\Gamma} X_\Gamma)_\Pi} = m_0 h_0 H_\Pi$$

или

$$-\Lambda \left(\frac{\partial T}{\partial X_T} \right)_\Pi = A^0 T_\Pi \left[\frac{\alpha_0 t_0 l_{0,\Gamma}}{\lambda_0 t_0} \right]; \quad (6.90\Gamma)$$

$$-k \left(\frac{\partial H}{\partial X_\Gamma} \right)_\Pi = M H_\Pi \left[\frac{m_0 h_0 l_{0,\Gamma}}{k_0 h_0} \right]. \quad (6.90\Gamma)$$

Дифференциальные уравнения (6.88)-(6.90) для обоих случаев отличаются друг от друга лишь численной величиной безразмерных коэффициентов, заключенных в квадратные скобки. При равенстве этих коэффициентов уравнения становятся взаимозаменяемыми. Следовательно, результаты исследования физических параметров на гидроинтеграторе могут быть распространены на соответствующие параметры тепловых процессов в натуре.

Таким образом, приходим к выводу, что решения указанных дифференциальных уравнений будут тождественно одинаковыми, если будут выполнены следующие требования:

$$\frac{a_0 \tau_{0,\Gamma}}{l_{0,\Gamma}^2} = \frac{b_0 \tau_{0,\Gamma}}{l_{0,\Gamma}^2}, \quad \frac{a_0 \tau_{0,\Gamma}}{b_0 \tau_{0,\Gamma}} = \frac{l_{0,\Gamma}^2}{l_{0,\Gamma}^2}; \quad (6.91)$$

$$\frac{\alpha_0 l_{0,\Gamma}}{\lambda_0} = \frac{m_0 l_{0,\Gamma}}{k_0}, \quad \frac{\alpha_0 l_{0,\Gamma}}{m_0 l_{0,\Gamma}} = \frac{\lambda_0}{k_0}. \quad (6.92)$$

Из двух уравнений связи имеем пять неизвестных. Поэтому три пары параметров могут быть выбраны произвольно, а две остальные пары определены из уравнений (6.91) и (6.92).

Приняв произвольно три пары соотношений между аналогичными параметрами или три масштаба модели:

$$\frac{a_0}{b_0} = C_{a,b} - \text{масштаб температуропроводности};$$

$$\frac{l_{0,T}}{l_{0,\Gamma}} = C_l - \text{линейный масштаб};$$

$$\frac{\lambda_0}{k_0} = C_{\lambda,k} - \text{масштаб теплопроводности},$$

определим масштаб времени и теплоотдачи:

$$\frac{\tau_{0,T}}{\tau_{0,\Gamma}} = \frac{l_{0,T}^2}{l_{0,\Gamma}^2} \cdot \frac{a_0}{b_0} = \frac{C_l^2}{C_{a,b}} \text{ или } C_T = \frac{C_l^2}{C_{a,b}}; \quad (6.93)$$

$$\frac{a_0}{m_0} = \frac{\lambda_0}{k_0} \cdot \frac{l_{0,T}}{l_{0,\Gamma}} = \frac{C_{\lambda,K}}{C_l} \text{ или } C_{\alpha,m} = \frac{C_{\lambda,K}}{C_l}. \quad (6.94)$$

Очевидно, при соблюдении указанных условий в сходственных точках пластины и гидроинтегратора и в сходственные моменты времени, т.е. при $X_T = X_\Gamma$ и $T_T^0 = T_\Gamma^0$, будем иметь равенство безразмерных переменных

$$T = H \text{ или } \frac{t}{t_0} = \frac{h}{h_0},$$

откуда $t/h = t_0/h_0 = t_i/h_i = \dots = \text{const}$. Следовательно, имеем аналогию.

Пользуясь таблицей аналогий, вводим систему непосредственных масштабных соотношений между элементами термических расчетных схем и гидравлической модели:

Масштаб температур

$$M_t = t/h, \text{ } ^\circ\text{C}/\text{см}.$$

Масштаб теплоемкости

$$M_C = C_i / \omega_i, (\text{ккал}/^\circ\text{C})/\text{см}^2.$$

Масштаб количеств тепла и скрытых теплот фазовых переходов

$$M_Q = Q/v, \text{ ккал}/\text{см}^3.$$

Масштаб сопротивлений

$$M_R = \frac{R_{i,i-1}}{\rho_{i,i-1}}, \text{ ч} \cdot ^\circ\text{C} \cdot \text{см}^2/\text{ккал} \cdot \text{мин}.$$

Масштаб времени

$$M_\tau = \tau_T / \tau_\Gamma.$$

Из анализа размерностей становится очевидным, что если три масштабных соотношения, например M_t , M_C и M_R , принять за основные, то оставшиеся два масштабных соотношения будут получены как комбинация основных:

$$M_Q = M_C M_t;$$

$$M = M_C M_R = \frac{C_i R_{i,i-1}}{\omega_i \rho_{i,i-1}}.$$

Раскрывая выражения комплексных параметров, можно убедиться, что приведенная частная система аналогий и масштабных соотношений полностью эквивалентна общим условиям подобия и аналогий.

Применение методов математического моделирования особенно целесообразно для продолжения исследований физических процессов, выполненных на физических моделях, в результате которых предоставляется возможность установления аналогий. В этом случае математическое моделирование позволяет значительно расширить и углубить область исследований интересующего нас физического процесса.

В настоящем курсе рассматривается математическое моделирование процессов, которые описываются линейными уравнениями в частных производных второго порядка. К числу таких уравнений в общем виде относятся:

Уравнения эллиптического типа (Уравнение Пуассона)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(f_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(f_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(f_3 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = F(x, y, z) \quad (6.95)$$

где φ – искомая функция, зависящая только от координат;

f – известные функции, зависящие от координат и характеризующие неоднородность среды;

F – известная функция координат.

Этим уравнением описываются все установившиеся стационарные процессы фильтрации, диффузии, водопонижения, увлажнения и т.д.

При однородной среде и функции $F(x, y, z) = 0$ уравнение (6.95) переходит в известное уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (6.96)$$

Упрощенно это выражение записывается

$$\nabla^2 \varphi = 0. \quad (6.97)$$

Уравнение параболического типа (уравнение теплопроводности)

$$\nabla^2 \varphi + A \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = F(x, y, z), \quad (6.98)$$

где φ – искомая функция, зависящая от координат и времени;

A – известная функция координат ($A < 0$);

τ – время.

Этим уравнением описываются неустановившиеся процессы и, в частности, задачи теплообмена. При функции $F(x, y, z) = 0$ уравнение (6.98) переходит в известное уравнение Фурье

$$\nabla^2 \varphi + A \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = 0. \quad (6.99)$$

Уравнение гиперболического типа

$$\nabla^2 \varphi + B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} = F(x, y, z), \quad (6.100)$$

где B – известная функция координат ($B < 0$).

Уравнением (6.100) описываются также неустановившиеся процессы, в частности волновые и колебательные процессы.

Приведенные уравнения имеют бесчисленное множество решений. Для выделения из этого множества нужного решения необходимо задать начальные и граничные условия. Если независимым переменным является время, то обычно задают только начальные условия (задача Коши). Если независимым переменным является пространственная координата, то тогда задача решается для определенной области. Для этого задают условия на границах области и соответственно задачи называются краевыми. При решении краевых задач возможны три типа граничных условий:

1) на границе задана сама искомая функция $\varphi|_{\dot{s}} = f(s)$ (задача Дирихле), где s – точка на границе;

2) на границе задана нормальная производная искомой функции

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_{\dot{s}} = f(s) \text{ (задача Неймана);}$$

3) на границе задана линейная комбинация первых двух условий (смешанная задача).

Для решения нестационарных краевых задач задание только граничных условий недостаточно. Здесь необходимо еще задать начальные условия по

времени. Следовательно, нестационарные задачи являются смешанными: по пространственным координатам задачи являются краевыми, а по временной координате ставится задача Коши.

6.5. Решение краевых задач методом конечных разностей

В большинстве случаев, найти аналитическое решение дифференциальных уравнений ряда краевых задач невозможно, а для приближенного решения с достаточной точностью требуется большой объем вычислительных работ. В связи с этим на практике для решения краевых задач используют различные приближенные методы и в особенности метод конечных разностей, или метод сеток. Сущность метода заключается в замене производной ее приближенным значением, выраженным через разности значений функции в отдельных точках.

Допустим, требуется найти значение второй производной искомой функции $\nabla^2 \varphi = 0$ для плоскости в точке 0 через значения этой функции в точках 1, 2, 3, 4 (рис. 6.7).

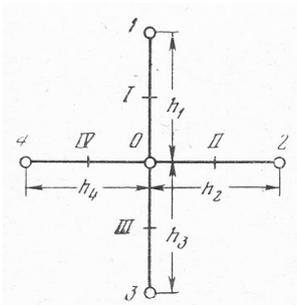


Рис.6.7. Схема к выводу конечно-разностных уравнений:
0 – узловая точка;
1, 2, 3, 4 – граничные точки.

Для нахождения второй производной в точке 0 найдем вначале значения первой производной для точек I, II, III, IV:

для точки I

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_I = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta y} \cong \frac{\varphi_1 - \varphi_0}{h_1};$$

для точки II

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{II} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta x} \cong \frac{\varphi_2 - \varphi_0}{h_2};$$

для точки III

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{III} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta y} \cong \frac{\varphi_0 - \varphi_3}{h_3};$$

для точки IV

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{IV} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta x} \cong \frac{\varphi_0 - \varphi_4}{h_4}.$$

Тогда вторая производная функции в точке 0 составит:

по оси x

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_0 \cong \frac{\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{II} - \left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{IV}}{\frac{h_2 + h_4}{2}} \cong \frac{\frac{\varphi_2 - \varphi_0}{h_2} + \frac{\varphi_4 - \varphi_0}{h_4}}{\frac{h_2 + h_4}{2}};$$

по оси y

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right|_0 \cong \frac{\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_I - \left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{III}}{\frac{h_1 + h_3}{2}} \cong \frac{\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{h_1} + \frac{\varphi_3 - \varphi_0}{h_3}}{\frac{h_1 + h_3}{2}}.$$

Следовательно, лапласиан $\nabla^2 \varphi$ для плоской задачи будет равняться

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_0 + \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right|_0 \cong \frac{\frac{\varphi_2 - \varphi_0}{h_2} + \frac{\varphi_4 - \varphi_0}{h_4}}{\frac{h_2 + h_4}{2}} + \frac{\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{h_1} + \frac{\varphi_3 - \varphi_0}{h_3}}{\frac{h_1 + h_3}{2}}. \quad (6.101)$$

если $h_1 = h_3 = h_y$ и $h_2 = h_4 = h_x$, то получим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \cong \frac{\varphi_2 - 2\varphi_0 + \varphi_4}{h_x^2} + \frac{\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_3}{h_y^2}. \quad (6.102)$$

Точность решения задачи по формуле (6.101) – порядка h , а по формуле (6.102) порядка h^2 , т.е. более высокая. Следовательно, при разбиении области сеткой величину шага h_i целесообразно брать равной.

Рассмотрим применение разностного метода для решения краевых задач. Пусть в однородной среде дана область S , ограниченная контуром l (рис.6.8).

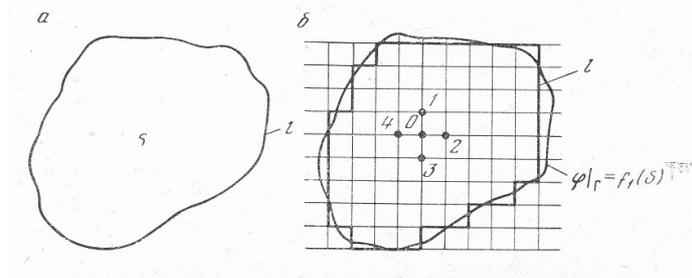


Рис.6.8. Схема разбивки исследуемой области сеткой:
a – исследуемая область; *b* – разбивка области сеткой;
l – граница области;
 0, 1, 2, 3, 4 – узловые точки.

Требуется найти внутри области решение уравнения $\nabla^2 \varphi = F(x, y)$ при условии, что на контуре l значения искомой функции заданы, т.е. $\varphi|_r = f(s)$.

Построим на плоскости прямоугольную сетку из взаимно перпендикулярных и параллельных прямых линий. Точка пересечения двух линий называется узловой. Для любой узловой точки, расположенной внутри контура l , можно написать разностное уравнение (6.101).

После преобразования получим

$$\begin{aligned} \frac{h_1 + h_3}{2h_2}(\varphi_2 - \varphi_0) + \frac{h_1 + h_3}{2h_4}(\varphi_4 - \varphi_0) + \frac{h_2 + h_4}{2h_1}(\varphi_1 - \varphi_0) + \frac{h_2 + h_4}{2h_3}(\varphi_3 - \varphi_0) = \\ = \frac{1}{4}(h_1 + h_3)(h_2 + h_4)F(x, y). \end{aligned} \quad (6.103)$$

Для неоднородной среды это уравнение примет вид

$$\begin{aligned} \frac{h_1 + h_3}{2h_2} f_2(\varphi_2 - \varphi_0) + \frac{h_1 + h_3}{2h_4} f_4(\varphi_4 - \varphi_0) + \frac{h_2 + h_4}{2h_1} f_1(\varphi_1 - \varphi_0) + \\ + \frac{h_2 + h_4}{2h_3} f_3(\varphi_3 - \varphi_0) = \frac{1}{4}(h_1 + h_3)(h_2 + h_4)F(x, y). \end{aligned} \quad (6.104)$$

где f_1, f_2, f_3, f_4 – значения известных функций координат в точках 1, 2, 3, 4, характеризующие неоднородность среды.

Таким образом, для каждой узловой точки сетки составляется подобное уравнение. Количество неизвестных в этих уравнениях равно числу внутренних узловых точек, т.к. значения функции на границе известны.

При решении второй краевой задачи (задачи Неймана), кроме уравнений (6.103) для узловых точек внутри области, составляются также разностные выражения для всех граничных узловых точек, в которых заданы значения нормальных производных искомой функции.

Систему таких уравнений решают методом последовательных приближений. Сначала задают нулевое приближение или производное значение исходя из физических соображений. Затем решают систему уравнений и находят значения функции в первом приближении и т.д. до момента, когда два последующих приближения совпадут. В этом случае задачу считают решенной.

Разбиение области на прямоугольники не является единственно возможным: можно покрывать данную область системой параллелограммов, треугольников, шестиугольников или использовать диагональную сетку. Наиболее высокую точность дает диагональная сетка (рис.6.9).

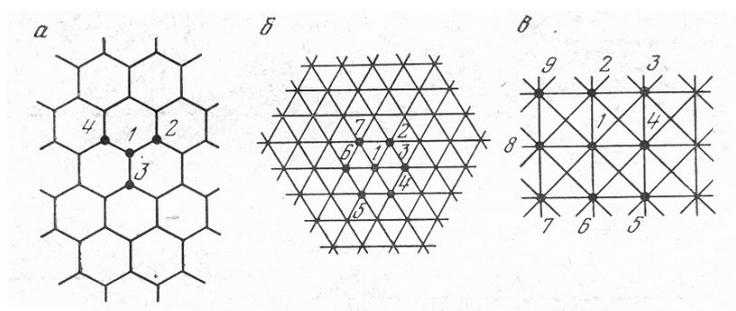


Рис.6.9. Типы сеток:
a – шестиугольная; *б* – треугольная; *в* – диагональная;
 1, 2, 3, 4 – узловые точки.

Применение разностного метода для решения нестационарных задач с целью упрощения рассмотрим на примере одномерной задачи.

Для плоского случая все выводы получаются аналогично.

Допустим, требуется найти внутри области (рис.6.10) решение уравнения

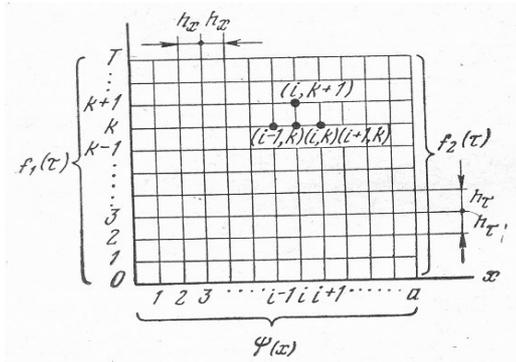


Рис.6.10. Схема к решению одномерных тепловых задач:

1, 2, 3, ..., i – вертикальные колонки;
 1, 2, 3, ..., k – горизонтальные ряды;
 h_x – шаг сетки по оси x ; h_τ – шаг сетки по оси τ ;
 $i-1, k; i, k; i+1, k$ – узловые точки.

сеткой и напишем сеточные уравнения для узловых точек i, k . Шаги по осям x и τ будем брать равными. Тогда можем записать

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_{i,k} \cong \frac{\varphi(i-1, k) - 2\varphi(i, k) + \varphi(i+1, k)}{h_x^2};$$

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} \right|_{i,k} \cong \frac{\varphi(i, k+1) - \varphi(i, k)}{h_\tau}.$$

Подставив эти значения производных в уравнение (6.105) и решив его относительно функции $\varphi(i, k+1)$, получим

$$\varphi(i, k+1) = \frac{h_\tau \varphi(i-1, k)}{h_x^2 A} - \frac{h_\tau 2\varphi(i, k)}{h_x^2 A} + \varphi(i, k) + \frac{h_\tau \varphi(i+1, k)}{h_x^2 A}. \quad (6.106)$$

Из формулы следует, что, зная значения функции в узловых точках слоя k , можно найти значения функции в узловых точках слоя $k+1$. Поэтому, зная значения функции нулевого слоя (начальные условия), с помощью уравнения (6.106) находят решения сначала для первого слоя, затем для второго и т.д.

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = A \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}; \quad (6.105)$$

при заданных краевых условиях, т.е.

$$\left. \begin{aligned} \varphi(0, \tau) &= f_1(\tau) \\ \varphi(a, \tau) &= f_2(\tau) \end{aligned} \right\} \text{— граничные условия;}$$

ловия;

$\varphi(x, 0) = f_3(x)$ – начальные условия.

Как и в первом случае, разобьем область прямоугольной

Таким образом, решение краевых задач методом сеток требует больших вычислительных работ. Поэтому применение в этом случае счетно-решающих и моделирующих машин является весьма целесообразным.

6.6. Решение краевых задач методом электрических сеток

Краевые задачи, описываемые уравнениями эллиптического и параболического типов, значительно быстрее и проще, чем при использовании приближенного аналитического метода, решаются на электрических моделирующих машинах, специально созданных для этой цели. В основе метода математического моделирования лежит возможность замены метода сеток электрическими сетками, в которых протекающие электрические процессы описываются уравнениями, подобными конечно-разностным уравнениям (6.101)-(6.103), (6.106). Следовательно, на электрических сеточных машинах моделируют конечно-разностные уравнения, к которым были сведены дифференциальные уравнения эллиптического и параболического типов. Электрические схемы составляют так, чтобы удовлетворить заданной системе конечно-разностных уравнений. При этом электрические элементы рассматриваются как арифметические (суммирующие и множительные) устройства, а в некоторых случаях – как дифференцирующие и интегрирующие.

Рассмотрим применение метода электрических сеток для моделирования стационарных и нестационарных физических полей, описываемых уравнениями эллиптического и параболического типов.

Метод ячеек. Происходящие в природе процессы находятся в непрерывной зависимости от той среды, в которой они протекают. Имея в виду, что при решении практических задач исходные данные о свойствах среды известны с невысокой степенью точности, следовательно и решение задачи исследователь не в состоянии выполнить с неограниченной степенью точности, в соответствии с методом сеток следуют непрерывно меняющееся в пространстве функции, характеризующие свойства среды, аппроксимировать некоторыми ступен-

чатыми (кусочно-постоянными функциями). В этом случае подлежащая исследованию область разбивается прямыми линиями на совокупность подобластей q_i , каждая из которых представляет собой ячейку с некоторыми усредненными параметрами (рис. 6.11).

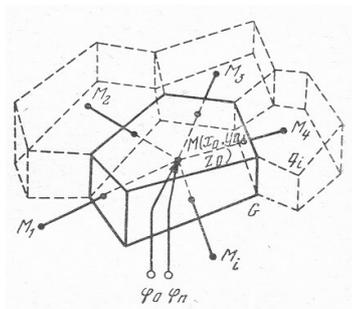


Рис. 6.11. Схема разбивки области исследований.

Подобно принятому в механике методу сосредоточенных масс, в каждой подобласти следует наилучшим образом выбрать точку $M(x_0, y_0, z_0)$ с координатами x_0, y_0, z_0 — в качестве центра сосредоточенных параметров, которому приписываются все усредненные свойства данной подобласти. Далее для каждой такой точки следует указать условия связи центра данной подобласти с центрами граничащих с ней подобластей. При этом в общем случае конфигурации подобластей могут меняться в процессе решения задачи.

В дальнейшем каждую такую подобласть будем называть элементарной ячейкой. Практически удобно пользоваться ячейками в виде прямоугольника. В качестве сосредоточенных параметров могут выступать: температура, давление, напор, теплоемкость, упругость, влажность, содержание одной из фаз многофазной жидкости и т.п. В качестве условий связи между ячейками могут выступать: теплопроводность, пьезопроводимость, площадь границы между ячейками, поток тепла жидкости или некоторых фаз для многофазной жидкости и др.

Такое представление метода математических сеток применительно к аналогиям позволяет значительно сократить объем вычислительных работ и моделировать сложность по конфигурации области сравнительно небольшим количеством узлов электрической сетки. При выборе центра сосредоточенных параметров для каждой элементарной ячейки в общем случае следует принять точку, в которой $\varphi = \varphi_{\max}$, полученное из решения уравнения Пуассона для данной

подобласти при нулевых условиях на границе подобласти $\varphi|_r = 0$ и постоянной правой части.

Условия связи центра сосредоточенных параметров с начальными условиями определяются емкостными свойствами элемента среды, условия фазовых превращений определяются значением φ_n .

Условия связи между двумя соседними центрами сосредоточенных параметров определяются проводящими свойствами среды. В основу выбора этого параметра связи может быть положена интегральная формула Грина

$$\iiint_V u \nabla \varphi dV = \iint_s u \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds,$$

где V – объем ячейки;

s – поверхность, ограничивающая подобласть.

Исходя из этой формулы, для задач на плоскости можно приблизительно записать

$$-\int_L \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl = \sum \frac{l_{i0}}{h_{i0}} (\varphi_i - \varphi_0),$$

где l_{i0} – расстояние между избранным и соседним центром сосредоточенных параметров;

h_{i0} – размер общей границы между ячейками, проведенной через середину линии l_{i0} и перпендикулярно к ней.

В большинстве практических случаев для решения двумерных задач используют не произвольную конфигурацию ячеек, а квадратную или прямоугольную, соответствующую декартовой или цилиндрической системе координат. Однако при решении задач, требующих большого количества узловых точек модели, нередко приходится прибегать к грубой аппроксимации прилегающих к району исследования областей. В этом случае формализованный метод ячеек позволяет сравнительно легко и детерминировано назначить пара-

метры элементов модели. Такая практика моделирования позволяет легко переходить в случае надобности от прямоугольных к криволинейным координатам. Однако в дальнейшем будут рассматриваться только случаи исключительно с прямоугольными ячейками.

Аппроксимация стационарных полей. При решении уравнений эллиптического типа конечно-разностным методом исследуемую область разбивают сеткой из взаимно параллельно-перпендикулярных линий. Дифференциальные уравнения заменяют системой арифметических (сеточных) уравнений для каждой узловой точки области.

В общем случае сеточные уравнения для стационарных процессов имеют вид:

для неоднородных уравнений (правая часть уравнения не равна нулю)

$$\begin{aligned} & \frac{h_1 + h_3}{2h_2} f_2(\varphi_2 - \varphi_0) + \frac{h_1 + h_3}{2h_4} f_4(\varphi_4 - \varphi_0) + \frac{h_2 + h_4}{2h_1} f_1(\varphi_1 - \varphi_0) + \\ & + \frac{h_2 + h_4}{2h_3} f_3(\varphi_3 - \varphi_0) = \frac{1}{4} (h_1 + h_3)(h_2 + h_4) F(x, y). \end{aligned} \quad (6.107)$$

для однородных уравнений (правая часть уравнения равна нулю)

$$\begin{aligned} & \frac{h_1 + h_3}{2h_2} f_2(\varphi_2 - \varphi_0) + \frac{h_1 + h_3}{2h_4} f_4(\varphi_4 - \varphi_0) + \frac{h_2 + h_4}{2h_1} f_1(\varphi_1 - \varphi_0) + \\ & + \frac{h_2 + h_4}{2h_3} f_3(\varphi_3 - \varphi_0) = 0. \end{aligned} \quad (6.108)$$

Для моделирования уравнений (6.107) и (6.108) составляют электрические схемы, представляющие собой такие же сетки, на которые была разбита исследуемая область для конечно-разностного метода (рис.6.12).

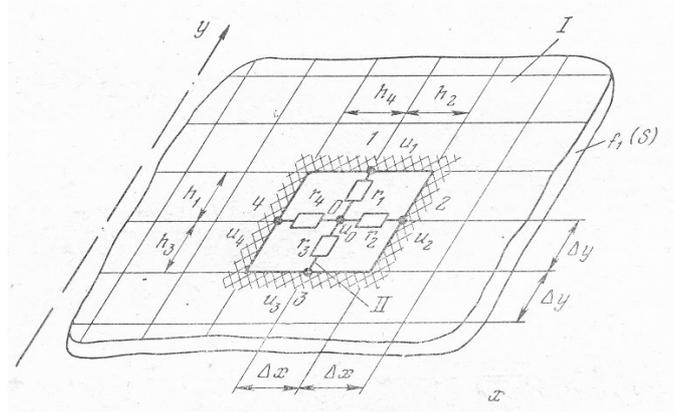


Рис.6.12. Схема замены сплошной среды на электрические цепи: I-сплошная среда; II-электрические цепи; 0, 1, 2, 3, 4 – узловые точки

Для каждой узловой точки электрической сетки можно записать одно из уравнений Кирхгофа:

$$\sum_{i=1}^n J_i + J_0 = 0; \quad \sum_{i=1}^n J_i = 0,$$

или

$$\frac{u_1 - u_0}{r_1} + \frac{u_2 - u_0}{r_2} + \frac{u_3 - u_0}{r_3} + \frac{u_4 - u_0}{r_4} = 0, \quad (6.109)$$

или

$$\frac{u_1 - u_0}{r_1} + \frac{u_2 - u_0}{r_2} + \frac{u_3 - u_0}{r_3} + \frac{u_4 - u_0}{r_4} + \frac{V - u_0}{R} = 0; \quad (6.110)$$

где u_i – потенциал в узловых точках электрического поля,

r_i – активные сопротивления между узловыми точками;

J_i – сила тока;

V – напряжение, подаваемое в узловую точку через активное сопротивление R ;

J_0 – суммарный ток в узловой точке.

Будем считать, что электрический потенциал u_i – пропорционален искомой функции φ_i , т.е.

$$u_i = k_1 \varphi_i, \quad (6.111)$$

где k_i – коэффициент пропорциональности.

Тогда уравнения (393) можно записать в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^n \frac{u_i - u_0}{r_i} = k_1; \quad \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_i - \varphi_0}{r_i} = 0. \quad (6.112)$$

Сравнивая уравнения (6.108) и (6.109) можно заключить, что они аналогичны и могут быть взаимозаменяемыми, если значения r_i будут пропорциональны коэффициентам при конечных разностях, т.е.

$$r_i = k_2 \tilde{r}_1; \quad r_2 = k_2 \hat{r}_2, \quad (6.113)$$

где k_2 – коэффициент пропорциональности,

$$\tilde{r}_1 = \frac{2h_1}{f_1(h_1 + h_4)}; \quad \hat{r}_2 = \frac{2h_2}{f_2(h_1 + h_3)}; \quad \tilde{r}_3 = \frac{2h_3}{f_3(h_2 + h_4)}; \quad \hat{r}_4 = \frac{2h_4}{f_4(h_1 + h_3)}.$$

Для определения искомой функции φ внутри какой-то области необходимо решить систему алгебраических уравнений (6.107) для всех внутренних узловых точек при заданных значениях искомой функции на границах области. Используя аналогию формул (6.107) и (6.112), решение задачи можно значительно упростить. Для этого достаточно между узловыми точками электрической сетки включить сопротивления, рассчитанные из условий (6.113), а на граничных узловых точках задать напряжения, равные или пропорциональные заданным значениям искомой функции на границе. После этого задача решается мгновенно: необходимо только произвести замеры напряжений во внутренних узловых точках и их значения пересчитать по формуле (6.111).

При выборе коэффициентов пропорциональности k_1 и k_2 исходят из практических возможностей электрических машин.

Значение напряжения, подаваемого на машину и максимальное сопротивление машины принимаются за 100 %.

Тогда значения k_1 и k_2 определяются из условий, чтобы максимальные значения напряжений в узловых точках и на границе и максимальные рассчитанные сопротивления были меньше допустимых, т.е.:

$$k_1 \leq \frac{100}{u_{\max}}; \quad k_2 \leq \frac{100}{r_{\max}}. \quad (6.114)$$

При решении неоднородного дифференциального уравнения (6.95) левая часть алгебраического уравнения (6.108) аппроксимируется так же, как при решении первой краевой задачи, рассмотренной выше. Правая же часть уравнения (6.108) из аналогии уравнений (6.110) аппроксимируется током J_0 . Необходимо задать этот ток так, чтобы он был пропорционален правой части уравнения (6.108), т.е.

$$J_0 = k_3 \frac{1}{4} (h_1 + h_3)(h_2 + h_4), \quad (6.115)$$

где k_3 – коэффициент пропорциональности.

Так как

$$J_0 = \frac{V - u_0}{R},$$

то при $|V| \gg |u_0|$ можно записать

$$J_0 = \frac{V_0}{R}, \quad (6.116)$$

где R – сопротивление.

Следовательно, при очень малых значениях напряжений на сетке ток можно считать примерно пропорциональным напряжению, поданному на R .

Чтобы $|V| \gg |u_0|$, необходимо сопротивление R брать гораздо большим,

чем сопротивление в узловых точках сетки, т.е. $|R| \gg u_i, r_i, J_0$.

Подставив значения u_i, r_i, J_0 в формулу (6.109), получим

$$\begin{aligned} & \frac{k_1(h_2 + h_4)f_1}{k_2 2h_1}(\varphi_1 - \varphi_0) + \frac{k_1(h_1 + h_3)f_2}{k_2 2h_2}(\varphi_2 - \varphi_0) + \frac{k_1(h_2 + h_4)f_3}{k_2 2h_3}(\varphi_3 - \varphi_0) + \\ & + \frac{k_1(h_1 + h_3)f_4}{k_2 2h_4}(\varphi_4 - \varphi_0) = k_3 \frac{1}{4}(h_1 + h_3)(h_2 + h_4)F(x, y). \end{aligned} \quad (6.117)$$

Сопоставляя формулы (6.107) и (6.117), можно заключить, что они будут взаимозаменяемыми в том случае, если коэффициенты будут связаны между собой зависимостью

$$\frac{k_1}{k_2} = k_3 \quad \text{или} \quad \frac{k_1}{k_2 k_3} = 1. \quad (6.118)$$

Значения коэффициентов k_1 или k_2 определяют из условий (398), а значение коэффициента k_3 – из условия (6.118). Значение R всегда задано и берется из паспорта машины.

Таким образом, для решения второй краевой задачи необходимо составить электрическую сетку из сопротивлений, определяемых из условий (6.113), и в каждую узловую точку через сопротивление R подать напряжение, пропорциональное значению правой части уравнения (6.108) в данной точке. Кроме этого необходимо задать граничные условия.

7. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ В ГЕОМЕХАНИКЕ

7.1. Общие сведения

Массивы горных пород (кровля, выработка, шахтный ствол, целик, монтажные камеры и т.д.) являются слоистыми, состоят из слоев анизотропных пород, которые могут иметь переменную толщину и различные граничные условия и нагружения.

Оценим возможность применения некоторых известных методов к исследованию их напряженно-деформируемого состояния как многослойных толстых пластин (плит) с учетом поперечного сдвига (влиянием поперечных сил).

Тот факт, что на одних краях массива горных пород (толстой пластины или оболочки) заданы перемещения, а на других усилия, делает задачу смешанной. Задачи об их изгибе со смешанными условиями опирания сложнее обычных, поэтому, в обширной литературе о пластинах (оболочках) имеется сравнительно мало работ, посвященных изгибу даже обычных однослойных пластин (оболочек) со смешанными краевыми условиями.

В общем случае, когда жесткость – функция координат и отсутствуют свободные противоположные края, сложность дифференциальных разрешающих уравнений и граничных условий вынуждает применять приближенные методы.

Одним из широко используемых численных методов решения краевых задач является метод сеток, который приведен выше и, несмотря на простоту и возможность применения его к пластинам (оболочкам) с произвольной толщиной при любых условиях крепления и нагрузке, в таких задачах используется редко, так как дифференциальное уравнение равновесия имеет переменные коэффициенты и шаг сетки должен быть меньше, чем при постоянной толщине и нагрузке. Кроме этого, при учете анизотропии слоев и поперечного сдвига значительно увеличивается количество подлежащих составлению и решению алгебраических уравнений. Матрица системы получается плохо обусловленной,

большой по объему, имеет мало отличных от нуля элементов, программа составления программы усложняется формулами, вытекающими из краевых условий.

По методу «прямых» конечными разностями заменяют частные производные только по одному направлению. При этом получают систему дифференциальных уравнений в обыкновенных производных, общее решение которых можно найти для некоторых частных случаев переменных толщин, нагрузки, слоистости и анизотропии горных пород. Получить точное решение системы дифференциальных уравнений методом «прямых» можно только при изменении толщины и нагрузки по простым законам с учетом только изотропии слоев. В общем случае это сделать не удастся, поэтому для отыскания решения необходимо использовать один из численных методов интегрирования. Недостатком метода прямых является необходимость составления и решения алгебраических уравнений для удовлетворения краевым условиям на противоположных краях пластины (оболочки) при любых способах их закрепления.

Приведенная краткая характеристика конечноразностных методов показывает, что применение их для расчета массивов горных пород, в принципе возможно, однако связано с определенными трудностями.

По методу «коллокаций» прогибы пластины (оболочки) представляются в виде конечного ряда заданных функций, умноженных на параметры. Для их определения строится система алгебраических уравнений из условий, что уравнения и граничные условия удовлетворяются в ряде точек пластины (оболочки). Метод «коллокаций» дает хорошие результаты, если заданные функции удовлетворяют уравнению равновесия и граничным условиям. В общем случае такие функции подобрать трудно.

Более широкое распространение в настоящее время, особенно в строительной промышленности, получили **метод конечных элементов (МКЭ)** и **метод граничных элементов (МГЭ)**. Другое название последнего – метод граничных интегралов (МГИ). Интенсивное их развитие и применение в практике инженерных расчетов стало возможным с развитием и доступностью вычисли-

тельной техники. В последние два десятилетия благодаря применению этих методов существенно расширился класс задач, решаемых в механике горных пород.

7.2. Метод конечных элементов

Метод конечных элементов заимствован из строительной механики. Его суть заключается в следующем.

Из бесконечного массива выделяется некоторая интересующая нас область, например, в окрестности подлежащей изучению выработки (рис.7.1, а).

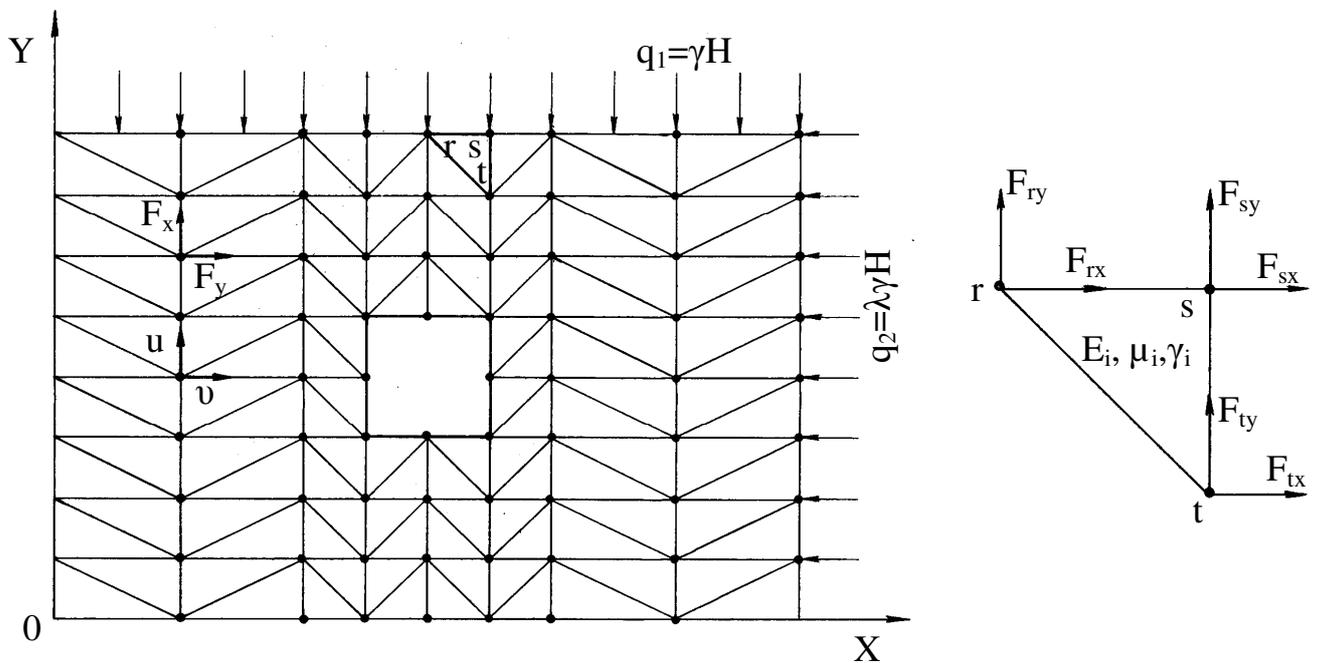


Рис.7.1. Конечноэлементная аппроксимация исследуемой области (а)
и ее произвольный i -ый элемент (б)

Действие отброшенной части массива заменяем усилиями, приложенными на границе области:

$$\sigma_y = -\gamma H ; \quad \sigma_x = -\lambda \gamma H .$$

Вся исследуемая область делится на подобласти, достаточно малые, чтобы считать внутри их среду однородной и изотропной (рис. 7.1, б). Поэтому свойства среды в каждой из подобластей описываются постоянными (для данной подобласти) характеристиками: E , μ , γ . Эти подобласти называются **конечными элементами**. Они взаимодействуют друг с другом в **узлах** через **узловые силы** $-\bar{F}$ и **узловые перемещения** δ . В таком виде исследуемая область подобна некоторой стержневой системе. Сообщая одному узлу усилие или перемещение, получим отклик во всей системе, в каждом из ее узлов.

Однако, основная идея метода заключается в том, что перемещения внутренних точек каждого элемента (вектор $\bar{\delta}$ с компонентами (проекциями) $\{\delta\} = \{U, V\}$) связываются с перемещениями узлов (вектором $\bar{\delta}_e$ с компонентами $\{\delta\}_e = \{\delta_r, \delta_s, \delta_t\} = \{U_r, V_r, U_s, V_s, U_t, V_t\}$). Эта связь выражается некоторой функцией, которая называется **функцией формы**.

$$\{\delta\}_e = \Phi\{\delta\}_e. \quad (7.1)$$

Ее надо подобрать так, чтобы удовлетворить граничным условиям на контуре элемента и соблюсти условие неразрывности деформаций. Наиболее просто получить эту функцию для конечного элемента треугольной формы. Именно поэтому чаще всего исследуемую область разбивают на конечные элементы треугольной формы.

Компоненты вектора перемещений произвольной внутренней точки связывают с компонентами вектора перемещений узлов (подробный вывод опускаем):

$$\begin{aligned} u_e &= \frac{1}{2S} \left[(a_r + b_r x + c_r y) u_r + (a_s + b_s x + c_s y) u_s + (a_t + b_t x + c_t y) u_t \right], \\ v_e &= \frac{1}{2S} \left[(a_r + b_r x + c_r y) v_r + (a_s + b_s x + c_s y) v_s + (a_t + b_t x + c_t y) v_t \right], \end{aligned} \quad (7.2)$$

где

$$\begin{aligned}
 a_r &= X_s Y_t - X_t Y_s, & b_r &= Y_s - Y_t, & c_r &= X_t - X_s, \\
 a_s &= X_t Y_r - X_r Y_t, & b_s &= Y_t - Y_r, & c_s &= X_r - X_t, \\
 a_t &= X_r Y_s - X_s Y_r, & b_t &= Y_r - Y_s, & c_t &= X_s - X_r.
 \end{aligned}$$

Здесь – $X_s, Y_s, X_t, Y_t, X_r, Y_r$ координаты узлов элементов, S – площадь треугольного элемента, определяемая следующей матрицей:

$$S = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & X_r & Y_r \\ 1 & X_s & Y_s \\ 1 & X_t & Y_t \end{bmatrix}.$$

Поскольку мы имеем дело с векторными величинами, все соотношения и далее удобно записать в матричной форме. С вектором перемещений связывают вектор деформаций:

$$\{\varepsilon\} = B\{\delta\}_e, \quad (7.3)$$

где B – координатная матрица. Она определяется следующим образом:

$$B = \frac{2}{2S} \begin{bmatrix} b_r & 0 & b_s & 0 & b_t & 0 \\ 0 & c_r & 0 & c_s & 0 & c_t \\ c_r & b_r & c_s & b_s & c_t & b_t \end{bmatrix}. \quad (7.4)$$

Далее, используя матрицу упругости

$$D = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & 0 \\ \mu & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\mu)/2 \end{bmatrix}, \quad (7.5)$$

переходят к напряжениям:

$$\{\sigma\} = D\{\varepsilon\} = DB^T\{\delta\}_e. \quad (7.6)$$

где B^T – транспонированная матрица B . Последнее равенство – не что иное, как закон Гука в матричном виде.

Поставленная задача будет решена, если будут известны перемещения узлов под действием приложенной нагрузки. А они, конечно, связаны с усилиями в узлах, т.е. с вектором $\{F\}_e$. Эта связь вытекает из условия: работа узловых сил по перемещению узлов должна быть равна работе внутренних сил, т.е. напряжений. Для треугольного элемента это условие дает уравнение:

$$\{F\}_e = [k]_e\{\delta\}_e. \quad (7.7)$$

Здесь $[k]_e$ – так называемая матрица жесткости элемента, образованная следующим образом:

$$[k]_e = \frac{h}{2S} B^T D B, \quad (7.8)$$

На этом подготовительная работа заканчивается.

Самым главным этапом создания конечно-элементной модели является построение для всей системы **обобщенной матрицы жесткости**, в которую входят жесткости каждого элемента. При этом все внешние нагрузки приведены к узловым силам. Например, на рис. 7.2 показано, как массовая сила P , дей-

ствующая в центре тяжести элемента, а также распределенная нагрузка q приводятся к системе узловых сил.

Для линейных задач справедлив принцип суперпозиции. Из множества векторов $\{F\}_e$ и $\{\delta\}_e$ формируется обобщенный вектор сил $\{F\}$ и вектор перемещений узлов $\{U\}$, которые связаны между собой равенством:

$$\{F\} = K \{U\}. \quad (7.9)$$

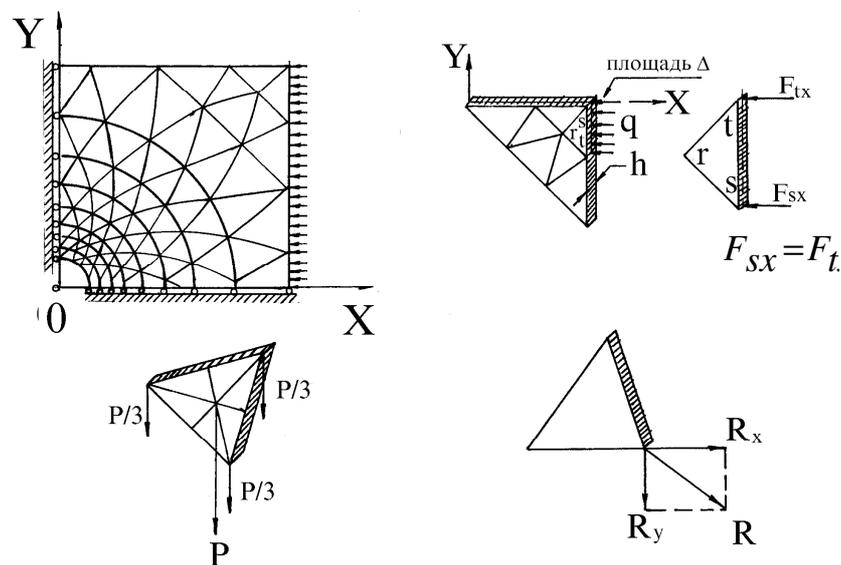


Рис.7.2. Примеры приведения нагрузок к статистически эквивалентной системе узловых сил: а) – распределенная нагрузка, действующая на исследуемую область; б) – замена распределенной нагрузки q узловыми силами F_{tx} и F_{sx} ; в) – разложение силы тяжести P на систему узловых сил; г) – разложение узловой силы R на составляющие R_x и R_y .

Здесь K – обобщенная матрица жесткости системы, элементами которой являются матрицы жесткости каждого конечного элемента:

$$K = \begin{bmatrix} \sum_{e=1}^m k_{1,1}^{(e)} & \sum_{e=1}^m k_{1,2}^{(e)} & \dots & \sum_{e=1}^m k_{1,j}^{(e)} & \dots & \sum_{e=1}^m k_{1,2n}^{(e)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{e=1}^m k_{i,1}^{(e)} & \sum_{e=1}^m k_{i,2}^{(e)} & \dots & \sum_{e=1}^m k_{i,j}^{(e)} & \dots & \sum_{e=1}^m k_{i,2n}^{(e)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{e=1}^m k_{2n,1}^{(e)} & \sum_{e=1}^m k_{2n,2}^{(e)} & \dots & \sum_{e=1}^m k_{2n,j}^{(e)} & \dots & \sum_{e=1}^m k_{2n,2n}^{(e)} \end{bmatrix}.$$

Это равенство, записанное в матричной форме, представляет собой систему линейных уравнений.

$$U_1 K_{11} + V_1 K_{12} + U_2 K_{13} + V_2 K_{14} + \dots + U_{2n} K_{1,2n-1} + V_{2n} K_{1,2n} = F_{x1}$$

$$U_1 K_{21} + V_1 K_{22} + U_2 K_{23} + V_2 K_{24} + \dots + U_{2n} K_{2,2n-1} + V_{2n} K_{2,2n} = F_{y1}$$

.....

$$U_1 K_{2n-1,1} + V_1 K_{2n-1,2} + U_2 K_{2n-1,3} + V_2 K_{2n-1,4} + \dots + U_{2n} K_{2n-1,2n-1} + V_{2n} K_{2n-1,2n} = F_{xn}$$

$$U_1 K_{2n,1} + V_1 K_{2n,2} + U_2 K_{2n,3} + V_2 K_{2n,4} + \dots + U_{2n} K_{2n,2n-1} + V_{2n} K_{2n,2n} = F_{yn}.$$

(7.9)

Неизвестными здесь являются перемещения узлов конечноэлементной сетки $\{U\}$. Обобщенный вектор сил $\{F\}$ – это столбец свободных членов в системе уравнений. Коэффициенты при неизвестных – элементы матрицы жесткости, которые включают в себя координаты узлов и упругие константы. Если область разбита на m элементов, которые соединяются между собой в n узлах, то мы получим систему $2n$ уравнений относительно $2n$ неизвестных перемещений.

Полученную систему можно решить одним из известных методов (Гаусса, Зейделя и др.).

Определив в результате решения для каждого узла компоненты вектора перемещений, через координатную матрицу B переходим к деформациям в центре тяжести конечного элемента $\{\epsilon\}$ (7.3), а от деформаций через матрицу упругости D к напряжениям $\{\delta\}$ (7.6). Таким образом, поставленная задача решена. В центре каждого элемента получены значения полного тензора напряжений, деформаций, перемещений.

Для того, чтобы получить достаточно точное распределение напряжений вблизи выработки, конечные элементы нужно делать мелкими, следовательно, их будет много. Для каждого элемента нужно сформировать несколько матриц, которые потом сливаются в общую матрицу жесткости, т.е. нужно формировать большие массивы чисел. Для этого необходим большой объем оперативной памяти ПЭВМ. Для такой симметричной задачи достаточно рассмотреть четверть области, закрепив жестко линии симметрии. Из существа метода вытекают его огромные возможности для математического моделирования различных неоднородностей. По сути, для каждого элемента можно задать свои свойства, правда только упругие. В частности, легко моделируется слоистость. Можно имитировать зону разрушенных пород, задав соответствующие (меньшие) значения модуля упругости, или наоборот, учесть наличие некоторых более жестких элементов. Например, на рис. 7.3 показано распределение напряжений вокруг выработки с анкерным креплением. Металлические анкеры моделировались путем введения элементов с модулем упругости и коэффициентом Пуассона, равными соответствующим характеристикам стали, и задания особых граничных условий.

Имеются лицензированные программные продукты, реализующие МКЭ для различных задач механики. Они обладают широкими возможностями и мощным интерфейсом. В Национальном горном университете разработаны собственные версии вычислительных программ учебного и исследовательского плана. К настоящему моменту на их основе получено много решений различ-

ных геомеханических задач. Причем, не только в упругой постановке и не только для двумерной (плоской) области.

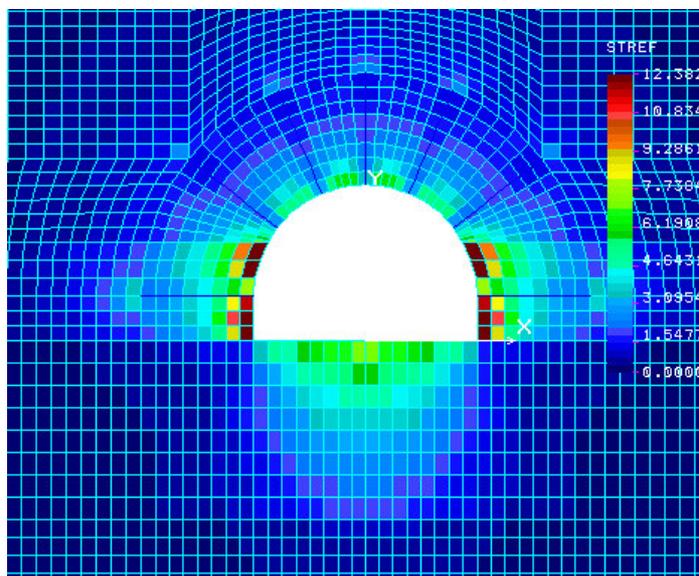


Рис. 7.3. Картина распределения величины σ_e/R_c в окрестности выработки при установке 7 анкеров

Точно также можно разбить на подобласти и некоторую трехмерную область. Только конечными элементами будут уже не треугольники, а, например, тетраэдры (рис. 7.4). Конечно, в этом случае связь между перемещениями внутренней точки элемента и перемещениями узлов будет иметь более сложную форму. Гораздо большую размерность будет иметь матрица жесткости системы. Потребуется большая оперативная память машины.

Разработаны алгоритмы и для решения задач, в которых связь между напряжениями и деформациями отличается от закона Гука, является нелинейной. В этом случае решение строится как последовательность упругих решений. Для этого необходимо иметь две экспериментальные кривые деформирования материала « $\sigma - \varepsilon$ » и « $\sigma_i - \varepsilon_i$ », где σ_i , ε_i – соответственно интенсивность напряжений и деформаций (рис.7.5).

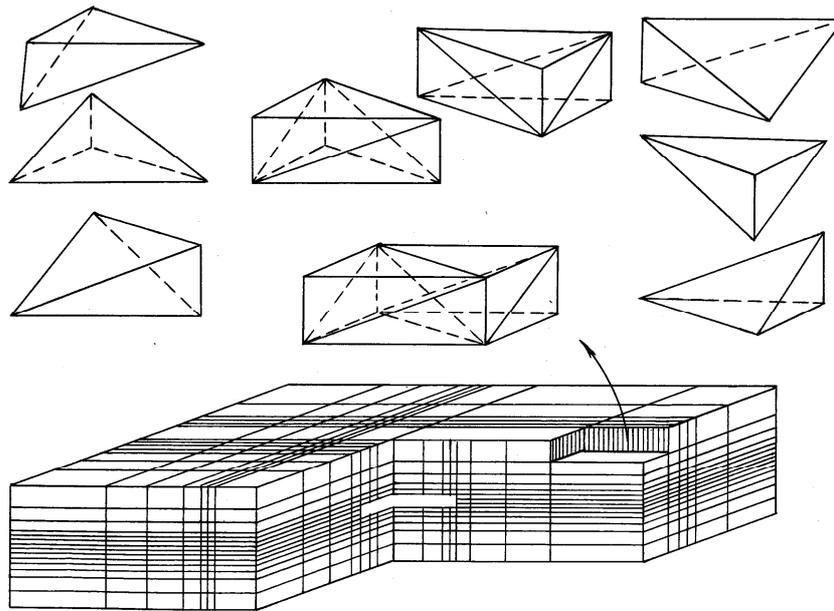


Рис. 7.4. Аппроксимация исследуемой области конечными элементами-тетраэдрами

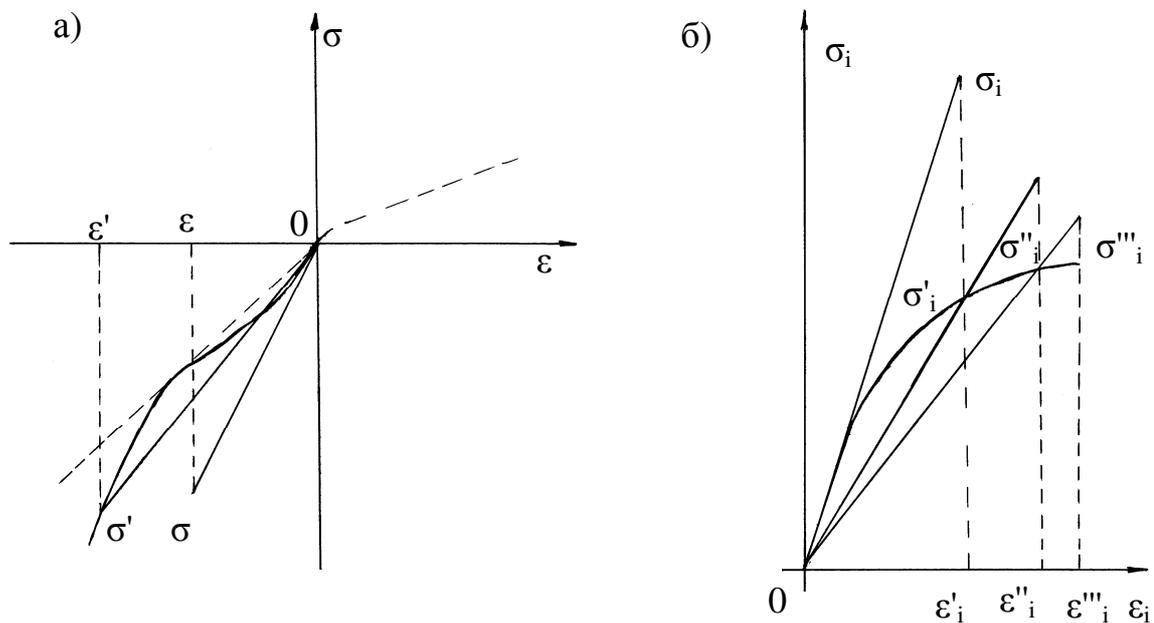


Рис. 7.5. Схематическая зависимость между напряжениями и деформациями (а) и интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций (б)

Последовательность решения такова. На «нулевом» шаге осуществляется упругое решение. Если хотя бы в одном элементе интенсивность напряжений

превосходит предел текучести или расчетная точка (σ, ε) не лежит на экспериментальной кривой, то расчет повторяется при новых, уточненных, значениях приведенных модулей E' , μ' , G' для этого элемента.

Эти модули определяются по кривым деформирования по формулам:

$$E' = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \cdot \frac{3\frac{\sigma}{\varepsilon}}{\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} + 2\frac{\sigma}{\varepsilon}}; \quad \mu' = \frac{\frac{\sigma}{\varepsilon} \cdot \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}}{\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} + 2\frac{\sigma}{\varepsilon}}; \quad G' = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} = \frac{E'}{2(1 + \mu')}. \quad (7.10)$$

Для вычисленных значений σ , σ_i находятся соответствующие значения σ' , σ'_i , лежащие на кривых деформирования. Последние используются для вычисления новых значений E' , μ' , G' . Весь расчет повторяется так до тех пор, пока точки (σ, ε) не «лягут» на кривые деформирования с заданной точностью.

На рис. 7.6 показано распределение напряжений вокруг выработки в случае «пучения» пород почвы. Задача решена методом итераций для случая потери упругопластической устойчивости приконтурного породного массива.

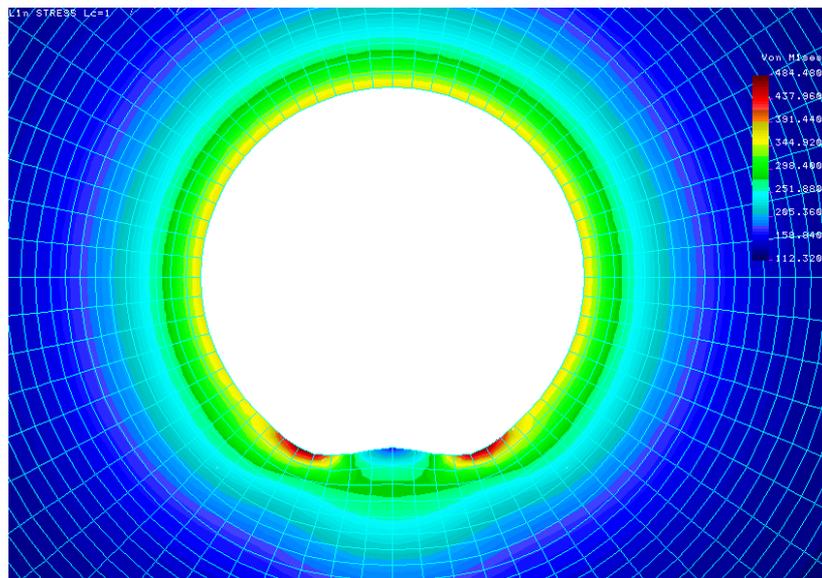


Рис. 7.6. Картина распределения напряжений на контуре круглого сечения одиночной выработки при вспучивании пород почвы

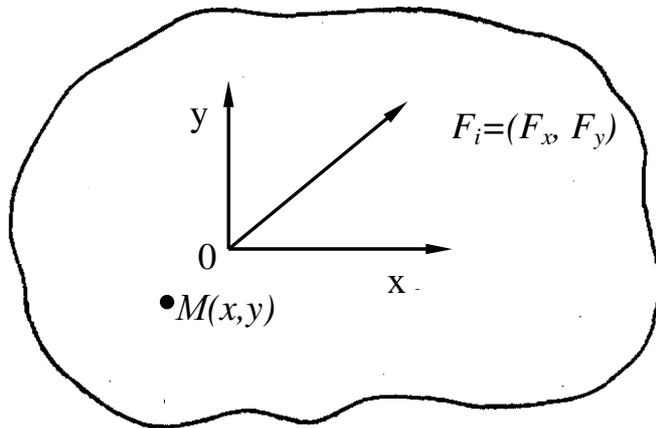
Следует отметить, что описанная выше процедура решения нелинейных задач также требуют большого объема оперативной памяти.

Кстати, именно нехватка памяти являлась одно время сдерживающим фактором для использования МКЭ при переходе на персональные ЭВМ.

Возможно, поэтому в геомеханике интенсивно стал использоваться другой, также очень эффективный, численный метод решения задач механики деформируемого тела – метод граничных элементов.

7.3. Метод граничных элементов

Идея метода граничных элементов заключается в следующем. В теории



упругости решены некоторые простые задачи, например, известная задача Кельвина о действии сосредоточенной силы F в бесконечной упругой среде (рис. 7.7).

В произвольной точке области $M(x, y)$ определены напряжения σ и перемещения U от действия этой силы. В прямоугольной системе координат они определяются че-

Рис. 7.7. Действие сосредоточенной силы F в бесконечной упругой среде (задача Кельвина)

рез некоторую функцию координат точки и ее производные.

$$g(x, y) = -\frac{1}{4\pi(1-\mu)} \ln(x^2 + y^2)^{1/2}. \quad (7.11)$$

Здесь μ – коэффициент Пуассона. Выражения для напряжений и перемещений имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= F_x [2(1-\mu)g_{,x} - xg_{,xx}] + F_y (2\mu g_{,y} - yg_{,xx}), \\ \sigma_{yy} &= F (2\mu g_{,x} - xg_{,yy}) + F_y [2(1-\mu)g_{,y} - yg_{,yy}] \\ \sigma_{xy} &= F_x [(1-2\mu)g_{,y} - xg_{,xy}] + F_y [(1-2\mu)g_{,x} - yg_{,xy}] \end{aligned} \quad (7.12)$$

$$u_x = \frac{F_x}{2G} [(3 - 4\mu)g - xg_{,x}] + \frac{F_y}{2G} (-yg_{,x}),$$

$$u_y = \frac{F_x}{2G} (-xg_{,y}) + \frac{F_y}{2G} [(3 - 4\mu)g - yg_{,y}]$$

Можно убедиться, что полученные в таком виде напряжения удовлетворяют уравнениям равновесия, а перемещения – условию совместности деформаций.

Приведенное решение представляет собой пример так называемого сингулярного решения: напряжения и перемещения как функции координат точки непрерывны всюду за исключением начала координат (точки приложения силы F), где они не определены, т.е. сингулярны.

Если в бесконечной среде будут действовать несколько сосредоточенных сил, то решение задачи о $\bar{F}_1 = \{F_x, F_y\}$ напряжениях и перемещениях в произвольной точке среды можно получить методом суперпозиции (рис. 7.8). Выражения для напряжений и перемещений примут более сложный вид, поскольку в них внесет свой «вклад» каждая из действующих сил.

Можно пойти дальше и, используя тот же принцип, получить решения для случая, когда усилия приложены не к точкам, а равномерно распределены вдоль некоторого отрезка конечной длины ($2a$) в бесконечно упругом теле (рис. 7.9).

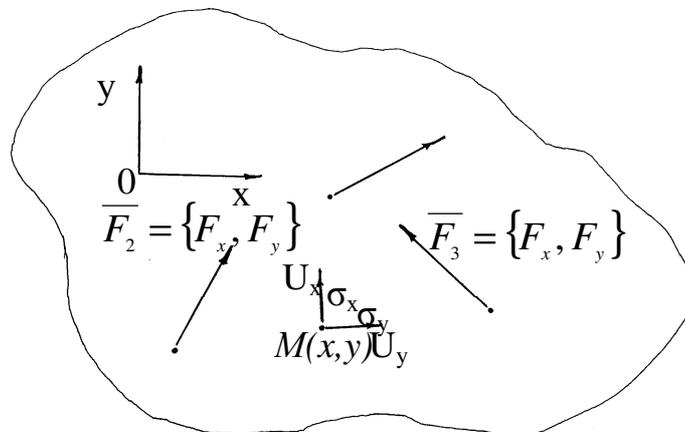


Рис. 7.8. Действие нескольких сосредоточенных сил в бесконечной упругой среде

Решение при этом существенно усложняется. Напряжения и перемещения произвольной точки среды выражаются через функцию:

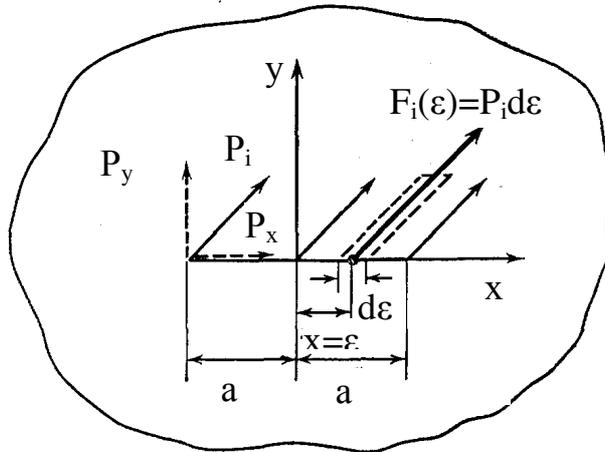


Рис. 7.9. Интегрирование решения Кельвина

$$f(x, y) = \int_{-a}^a g(x - \xi, y) d\xi$$

или

$$f(x, y) = -\frac{1}{4\pi(1-\mu)} \left[y \left(\arctg \frac{y}{x-a} - \arctg \frac{y}{x+a} \right) - (x-a) \times \right. \\ \left. \times \ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + (x+a) \ln \sqrt{(x+a)^2 - y^2} \right], \quad (7.12)$$

и ее частные производные:

$$f'_x = +\frac{1}{4\pi(1-\mu)} \left[\ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} - \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \right], \\ f'_y = -\frac{1}{4\pi(1-\mu)} \left[\arctg \frac{y}{x-a} - \arctg \frac{y}{x+a} \right], \quad (7.13) \\ f''_{xy} = +\frac{1}{4\pi(1-\mu)} \left[\frac{y}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{y}{(x+a)^2 + y^2} \right],$$

$$f''_{xx} = -f''_{yy} = + \frac{1}{4\pi(1-\mu)} \left[\frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} \right].$$

Напряжения и перемещения в произвольной точке среды от действия постоянного усилия P имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= P_x [(3-2\nu)f'_x + yf''_{xy}] + P_y (2\nu f'_y + yf''_{yy}); \\ \sigma_y &= P_x [-(1-2\nu)f'_x - yf''_{xy}] + P_y [2(1-\nu)f'_y - yf''_{yy}]; \\ \tau_{xy} &= P_x [2(1-\nu)f'_y + yf''_{yy}] + P_y [(1-2\nu)f'_x - yf''_{xy}] \end{aligned} \quad (7.14)$$

перемещения

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{P_x}{2G} [(3-4\nu)f + yf'_y] + \frac{P_y}{2G} (-yf'_x); \\ u_y &= \frac{P}{2G} (-yf'_x) + \frac{P_y}{2G} [(3-4\nu)f - yf'_y] \end{aligned} \quad (7.15)$$

В точках $x=\pm a$ функция $f(x, y)$, а, следовательно, и напряжения, а также связанные с ними перемещения, имеют особенность (сингулярность).

Представим теперь, что таких отрезков в бесконечном теле много, они примыкают друг к другу, образуя некоторую замкнутую ломаную линию. Напряжения в произвольной точке среды получим, суммируя вклады от действия усилий на каждом из этих отрезков. Этот принцип использован для решения уже известной нам задачи об одиночной выработке в массиве, которую можно представить как полость в бесконечном упругом теле. Контур этой полости заменяется описанной выше ломаной и представляет собой некоторую границу в упругом теле. Поэтому отрезки ломаной, на которых приложены усилия P_j , $j=1, N$ (N – число отрезков), называются **граничными элементами**

ми. Численная процедура заключается в суммировании вкладов от усилий на каждом j -м отрезке – граничном элементе. Влияние каждого усилия на соответствующем отрезке дает сингулярное решение, которое удовлетворяет уравнению равновесия. Поэтому нет необходимости разбивать область на подобласти как в МКЭ. Делится на элементы только граница области (рис. 7.10).

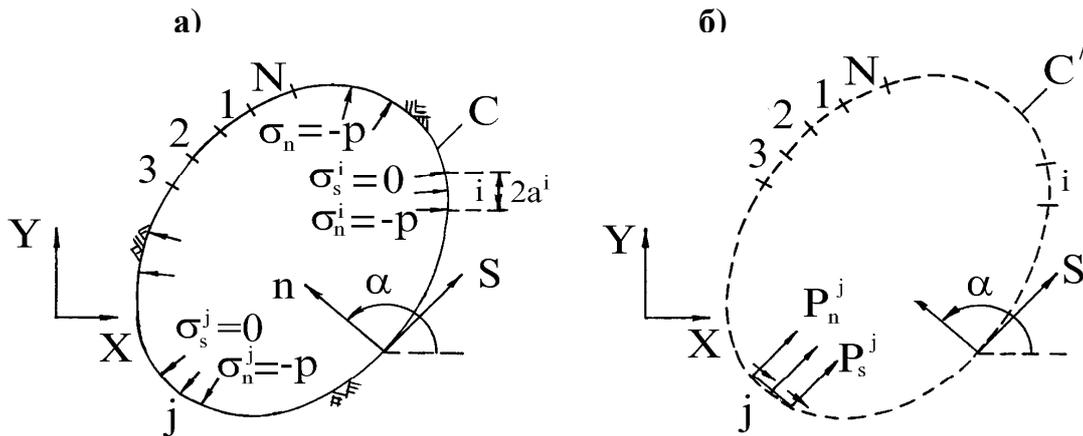


Рис. 7.10. Иллюстрация метода граничных элементов для задачи о полости: а) физическая задача; б) численная модель.

Длина каждого элемента – $2a^i$. Вместе с глобальной системой координат XOY рассматривают для каждого элемента локальные координаты n, s , изменяющиеся от точки к точке. На каждом из N отрезков действуют постоянные нормальное P_s^j и касательное P_n^j напряжения. Для простоты показаны только напряжения, приложенные к j -му отрезку и обозначенные P_s^j и P_n^j . В конечном итоге, как и в МКЭ, задача сводится к решению системы линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_S^i &= \sum_{j=1}^N A_{SS}^{ij} P_S^i + \sum_{j=1}^N A_{Sn}^{ij} P_n^j \\ \sigma_n^i &= \sum_{j=1}^N A_{nS}^{ij} P_S^j + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} P_n^j \end{aligned} \right\} i=1, \dots, N. \quad (7.16)$$

Здесь A_{SS}^{ij} , – так называемы коэффициенты влияния, суммирующие вклады каждого i -го усилия, заданного на j -м элементе границы. Левая часть уравнений содержит напряжения (касательные и нормальные), которые возникают в точке среды под действием суммарного влияния усилий P_S^j и P_n^j приложенных на каждом из N отрезков. Принципиальным моментом, однако, является то, что действительные нормальное и касательное напряжения на j -м отрезке не равны P_S^j и P_n^j . Для каждого граничного элемента необходимо различать две разные группы напряжений: приложенные P_S^j и P_n^j и действительные σ_S^j , σ_n^j , которые вызваны действием приложенных напряжений на всех N элементах кривой. Величины P_S^j и P_n^j в правых частях уравнений (7.16) являются «фиктивными». Их нужно определить так, чтобы удовлетворить граничным условиям. Рассмотрим эти условия.

В задачах геомеханики используется понятие начальных напряжений, имеющих место в массиве до начала производства горных работ. Изначально в каждой точке породного массива действуют напряжения:

$$(\sigma_y)_0 = \gamma H,$$

$$(\sigma_x)_0 = \lambda \gamma H.$$

От влияния выработки возникают дополнительные напряжения: σ_y, σ_x .

Полные напряжения в точке равны:

$$\begin{aligned} \sigma'_y &= (\sigma_y)_0 + \sigma_y, \\ \sigma'_x &= (\sigma_x)_0 + \sigma_x. \end{aligned} \quad (7.17)$$

На контуре выработки полные напряжения равны нулю. Тогда дополнительные напряжения на контуре (границе области) выражаются через начальные условия:

$$\begin{aligned}\sigma_y &= -(\sigma_y)_0 = -\gamma H, \\ \sigma_x &= -(\sigma_x)_0 = -\lambda\gamma H.\end{aligned}\tag{7.18}$$

Это и есть граничные условия. Таким образом, перейдя к локальной системе координат n, s сформируем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} -(\sigma_s)_0 &= \sum_{j=1}^N A_{SS}^{ij} P_S^j + \sum_{j=1}^N A_{Sn}^{ij} P_n^j \\ -(\sigma_n)_0 &= \sum_{j=1}^N A_{nS}^{ij} P_S^j + \sum_{j=1}^N A_{nn}^{ij} P_n^j \end{aligned} \right\}, i = 1, \dots, N.$$

Решив ее, определим значения «фиктивных» напряжений P_s^j и P_n^j и через них определим напряжения и перемещения в любой точке области.

Теперь более ясен смысл коэффициентов влияния. Так, коэффициент A_{Sn}^{ij} , например, дает действительное касательное напряжение в центре i -го отрезка (σ_s^i), вызванное постоянной единичной нагрузкой, приложенной на j -м отрезке ($P_n^j = 1$).

По сравнению с МКЭ метод граничных элементов более экономичен. Система уравнений имеет порядок намного меньший, поскольку она сформирована только для N элементов, заданных на контуре выработки. Однако метод граничных элементов имеет несколько меньше возможностей для моделирования различных неоднородностей среды и нелинейности физических соотношений. Хотя и здесь существуют различные подходы. Все зависит от базового решения.

В рассмотренном выше подходе (он называется метод «фиктивных нагрузок») в качестве базового было принято решение задачи Кельвина.

Разработан и другой подход, использующий в качестве базового решение известной в теории упругости задачи о разрыве смещений вдоль некоторого отрезка конечной длины внутри бесконечного упругого тела. В форме «разрывных смещений» МГЭ очень эффективен для решения задач, связанных с трещиноватостью горных пород. Есть возможность моделировать и «зияющие» трещины, и заполненные материалом-заполнителем. В последнем случае граничные элементы, которые моделируют трещину, представлены как упругий контакт соответствующей жесткости. Например, приведено решение для двух сближенных выработок, одна из которых пересечена трещиной рис. 7.11.

С помощью таких упругих контактов (пластовых элементов) легко моделируется угольный пласт, который отличается по жесткости от вмещающих пород. Например, приводится решение задачи о влиянии геологического нарушения на напряженное состояние пород впереди забоя выработки. В настоящее время в Национальном горном университете (НГУ) под руководством Л.В.Новиковой активно развивается научная школа, направлением которой является приложение численных методов (МКЭ, МГЭ) к различным задачам механики горных пород, в том числе и для трехмерных областей массива рис. 7.12.

Современные стандартные программные средства позволяют существенно расширить возможности МГЭ. Так, например, на кафедре строительных геотехнологий и конструкций НГУ разработан программный продукт (ПП) **Underground**, который предназначен для решения различных, как внешних, так и внутренних задач механики твердого тела. Однако, основной упор при разработке программного продукта делался на определение напряженно-деформированного состояния горного массива в окрестности как одиночной, так и системы горных выработок, проведенных в устойчивых породных массивах. В зависимости от особенностей конкретной задачи ПП **Underground** реали-

зуют метод граничных элементов или в форме разрывных смещений, или форме фиктивных нагрузок, а также прямой метод граничных интегралов.

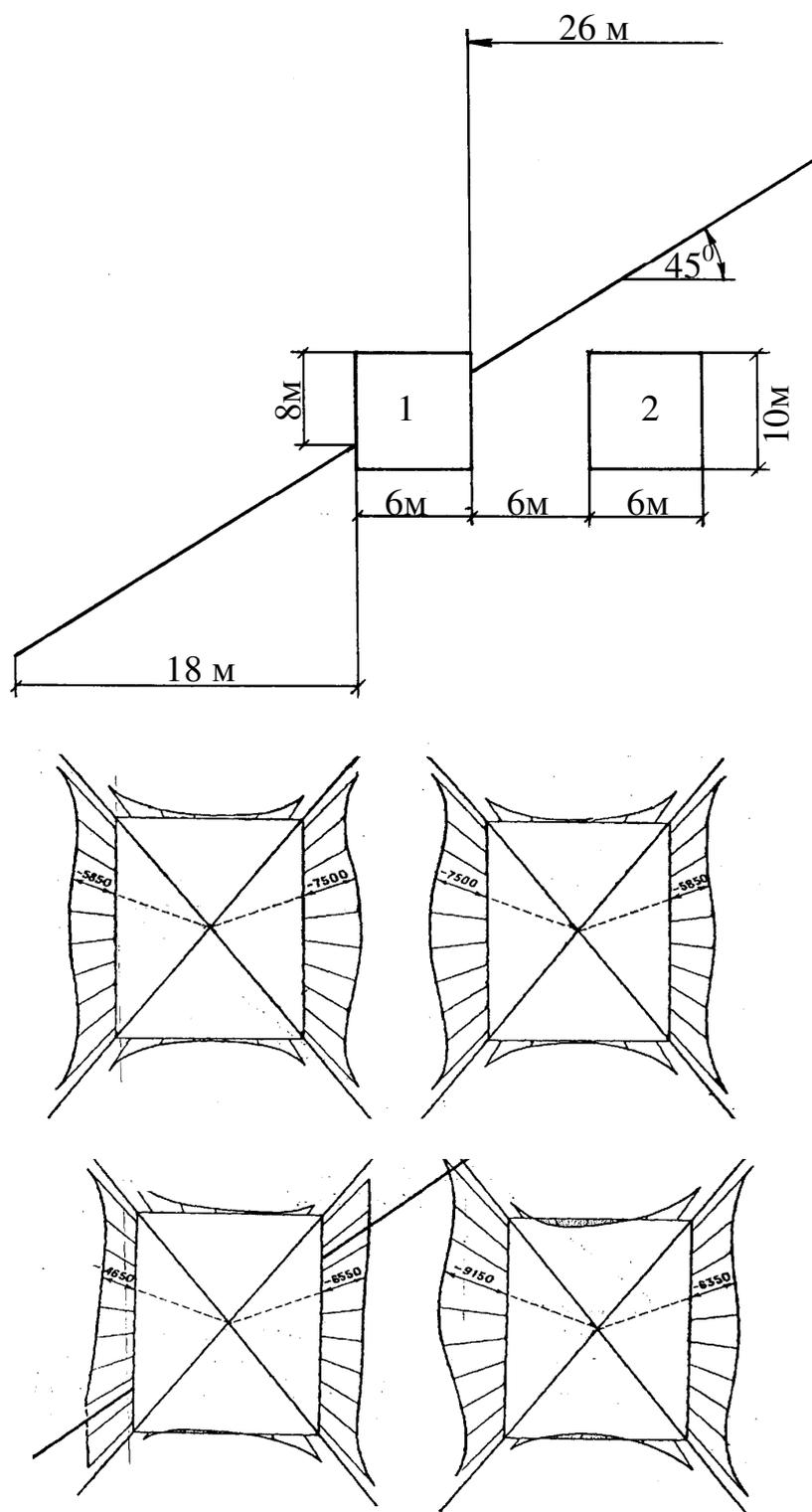


Рис. 7.11. Расчетная схема (а) и тангенциальные напряжения на контуре выработки в случае отсутствия нарушения (б) и наличие нарушения (в)

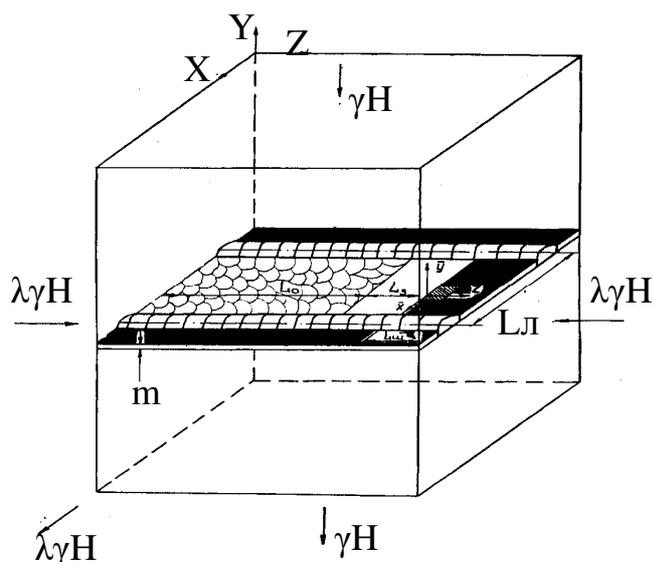


Рис. 7.12. Расчетная схема решения сложной трехмерной задачи

ПП Underground написан на объектно-ориентированном языке программирования Object-Pascal в вычислительной среде Delphi 5 с использованием приложений AutoCAD и Microsoft Excel. В связи с этим он имеет ряд преимуществ в сравнении с программами, написанными на менее современных языках программирования.

Во-первых, существенно повышена точность расчета за счет

возможности аппроксимации контура горной выработки значительно большим количеством граничных элементов. Это количество ограничивается лишь возможностями ЭВМ. Так, например, задача с 500-ми граничными элементами (ГЭ) на ЭВМ с оперативной памятью 128 МВ решается менее минуты, задача с 2000-ми ГЭ решается приблизительно 20 мин, и это далеко не предел. Можно и дальше увеличивать количество ГЭ, но при этом резко увеличивается продолжительность расчета, так как начинает работать виртуальная память, скорость работы которой на несколько порядков ниже оперативной. При увеличении оперативной памяти ЭВМ увеличивается число аппроксимирующих ГЭ в задаче, решаемой за один и тот же промежуток времени. С увеличением количества ГЭ соответственно уменьшается их длина, поэтому повышается точность оконтурирования выработок криволинейного очертания, повышается точность расчетов напряженно-деформированного состояния породного массива вблизи границы за счет того, что можно максимально приблизить к контуру выработки точки, в которых определяются напряжения и смещения.

Во-вторых, несколько усовершенствован по сравнению с базовой программой TWODD алгоритм расчета. Появилась возможность быстро переходить от одного варианта метода граничных элементов к другому, не выходя из

программы. Взамен статических массивов введены динамические, которые создаются и обнуляются по мере необходимости. За счет этого более рационально используется оперативная память ЭВМ. В метод разрывных смещений введен расчет тангенциальных напряжений на контуре выработки, чего не было в базовой программе. В исследуемых точках породного массива определяется эквивалентное напряжение σ_y и коэффициент запаса прочности k . По полученным данным строятся диаграммы, что позволяет сразу же, без дополнительных расчетов, судить о состоянии приконтурного массива.

В-третьих, существенно повысилось удобство пользования. Возможности вычислительной среды Delphi 5 позволили насытить программу всевозможными визуальными компонентами, которые позволяют удобно и быстро вводить исходные данные, следить за ходом решения, а также получать результат в виде наглядных диаграмм, которые тут же можно сохранять как рисунки, отправлять на печать и копировать в буфер обмена для последующей вставки в другие приложения. На рис. 7.13 приведен пример расчета, характеризующий состояние приконтурного массива в окрестности выработки круглого поперечного сечения, проведенной в устойчивых горных породах с пределом прочности на одноосное сжатие 5МПа, на одноосное растяжение – 1,7 МПа на глубине 200 м.

Здесь расчетная схема представлена четвертью сечения выработки, симметричной относительно линий параллельных осям OX и OY , которые пересекаются в точке $(0,0)$. Контур выработки показан жирной линией. Изолинии соединяют точки массива с одинаковым значением коэффициента устойчивости.

Связь с AutoCAD позволяет наглядно аппроксимировать контур горной выработки (выработок) и тут же задавать граничные условия. Достаточно нарисовать в AutoCAD расчетную схему и координаты ГЭ считываются с графического изображения и передаются в программу. Это открывает большие возможности для моделирования сложных расчетных схем.

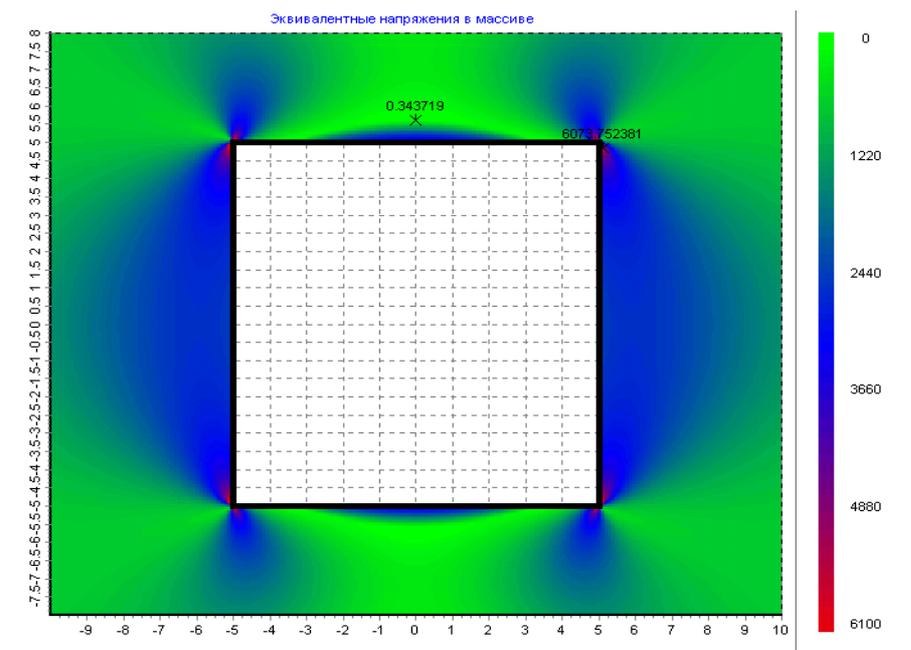


Рис. 7.13. Распределение коэффициента устойчивости массива горных пород в окрестности протяженной горной выработки кругового сечения

И, наконец, связь с Microsoft Excel позволяет выводить результаты в виде числового материала в книгу Microsoft Excel, если пользователь желает их более детально обработать.

7.4. Метод дискретных элементов

Метод дискретных элементов (МДЭ) (в английском варианте: «The distinct element method» – метод видимых (отличимых) элементов), разработан доктором Г. Кундаллом в 1978 году. Он базируется на двух фундаментальных законах физики – втором законе Ньютона и законе упругих деформаций Гука.

Областью применения МДЭ являются грунты, основания и фундаменты; породные массивы, имеющие сложную структуру; механические системы с освобождающимися связями; нелинейные динамические процессы, для которых он наиболее эффективен; химико-физические процессы (например, движение коллоидной жидкости); процессы обогащения полезных ископаемых методом флотации в тяжелых средах и многое другое.

Суть МДЭ применительно к моделированию сложноструктурных породных массивов, содержащих искусственные полости (выработки), состоит в следующем. Реальный породный массив в модели заменяется дискретными элементами, которые, в принципе, могут иметь любую форму, и лучше, если она будет близка к очертаниям элементов структуры массива.

Однако, по ряду причин, важнейшей из которых является простота создания математической модели дискретной среды, элементы ее проще всего представить в виде шаров, которые в общем случае имеют разный диаметр. Геометрическая модель такой среды приведена на рис. 7.14.

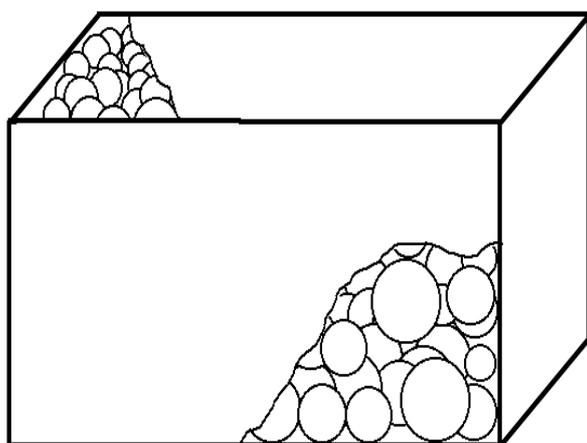


Рис. 7.14. Геометрическая модель метода дискретных элементов

отсутствует и внешняя нагрузка прикладывается непосредственно к шарам. Шары взаимодействуют между собой и с ограничивающими плоскостями посредством сил трения и диссипативных сил, а также, и это главное, посредством неидеальных высвобождающихся связей, которые противодействуют их взаимопроникновению. Если иных связей нет, то шары имитируют сыпучую среду. Шары могут быть также «склеены» между собой и стенами посредством таких неидеальных невысвобождающихся связей, которые не только препятствуют их взаимопроникновению, но также разбеганию и вращению. В этом случае рассматриваемая механическая система имитирует сплошной массив.

Как только реакции в невысвобождающихся связях превышают некоторый предел, они ликвидируются как разрушенные и тогда уже система шаров и плоскостей имитирует разрушенный массив, который состоит из несвязанных

Как видно из рисунка, модель сплошной или сыпучей (дискретной) среды, как правило, представляет собой шесть попарно параллельных плоскостей, которые, пересекаясь, отделяют некоторое замкнутое пространство, в котором размещены шары – элементы неподвижных плоскостей. Верхняя плоскость чаще всего

между собой частиц и, возможно, сыпучего материала между ними. В самом же общем случае модель, состоящая из шаров и ограничивающих плоскостей, может имитировать сплошной породный массив, содержащий разрушенные участки.

Для того, чтобы среда состоящая из упругих шаров разного диаметра соответствовала реальному породному массиву, вводятся следующие допущения:

1. Форма и размер дискретных элементов (шаров) не изменяются под действием приложенных нагрузок.
2. Реальные деформации дискретных элементов заменяются кажущимся взаимопроникновением шаров.
3. Временной шаг должен быть настолько малым, чтобы за то время, пока он продолжается, нарушения (дислокации) не могли распространяться на какие либо другие шары, кроме тех, которые находятся в непосредственном контакте с рассматриваемым шаром.

Последнее допущение является особенно важным, поскольку обуславливает очень удобное взаимодействие элементов – шаров: на каждом временном шаге равнодействующая сил, приложенная к каждому отдельному шару определяется исключительно координатами центров рассматриваемого шара и тех шаров, которые в данный момент с ним соприкасаются.

Расчетная схема метода дискретных элементов приведена на рис. 7.15.

Элементы-шары нагружены гравитационными силами и проявляют при взаимодействии друг с другом упругие и вязкие свойства.

Физико-механические свойства дискретных элементов задаются таким образом, чтобы их поведение в общей массе было адекватно поведению исходной среды. Для каждого элемента известны масса, скорость, ускорение и координаты центра тяжести. Кроме того, к каждому элементу в отдельности прикладывается сила F_i , как равнодействующая сил тяжести, упругой реакции, вязкого и кулонова трения, отражающих текущее механическое состояние массива в рассматриваемый момент времени.

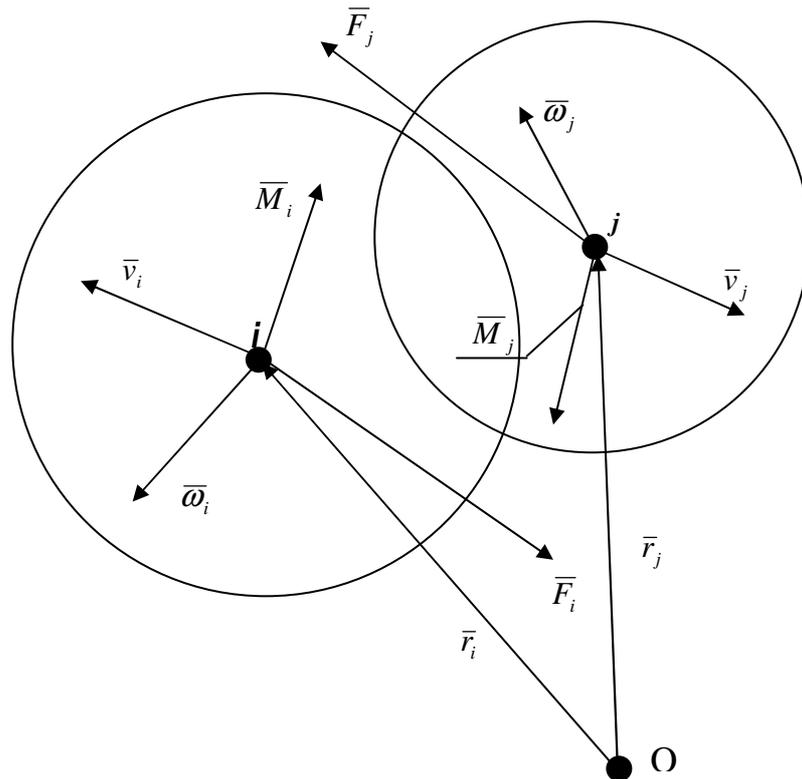


Рис. 7.15. Расчетная схема взаимодействия двух шаров

Движение каждого элемента описывается уравнением Лагранжа 2-го рода. Из всех численных методов, применяемых для решения поставленной задачи, наиболее эффективен модифицированный метод Эйлера.

Известны два способа использования метода Эйлера. Первый заключается в том, что вначале, исходя из физических соображений, составляют систему дифференциальных уравнений и уравнений начальных условий, а потом решают их, используя формализованный метод Эйлера.

В соответствии со вторым способом метод Эйлера используют не только для решения поставленной задачи, но и для описания собственно физического процесса, т.е. для постановки самой задачи.

Второй способ и был использован для разработки математической модели метода дискретных элементов в векторном изложении. Способ ориентирован на использование возможностей современных вычислительных машин, в частности матричной математической системы Matlab.

Описание физического процесса и вычисление его параметров в соответствии с формализованным методом Эйлера приведены в табл. 7.1.

В табл. 7.1 на рис. 7.15 приняты следующие обозначения:

n – номер полушага и шага по модельному времени ($n = -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, \dots$);

t – модельный отсчет времени (знак «+» следует формально понимать, как временные шаги в будущее, а знак «-», как временные шаги в прошлое относительно момента времени $t = 0$);

Таблица 7.1

Схема вычисления движения системы дискретных элементов

Этап	n	t	\bar{r}	\bar{v}	$\bar{\omega}$	\bar{F}	\bar{M}	\bar{a}	$\bar{\varepsilon}$	
Начальные условия	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\Delta t}{2}$	–	0	0	–	–	–	–	
	0	0	\bar{r}^0	–	–	\bar{F}^0	\bar{M}^0	\bar{a}^0	$\bar{\varepsilon}^0$	
Основной расчет	$\frac{1}{2}$	$\frac{\Delta t}{2}$	–	$\frac{1}{\bar{v}^2}$	$\frac{1}{\bar{\omega}^2}$	–	–	–	–	
	1	Δt	\bar{r}^1	–	–	\bar{F}^1	\bar{M}^1	\bar{a}^1	$\bar{\varepsilon}^1$	
	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3\Delta t}{2}$	–	$\frac{1}{\bar{v}^{1\frac{1}{2}}}$	$\frac{1}{\bar{\omega}^{1\frac{1}{2}}}$	–	–	–	–	
	- - - - -									
	$\frac{2i-1}{2}$	$\frac{2i-1}{2}\Delta t$	–	$\frac{1}{\bar{v}^{\frac{2i-1}{2}}}$	$\frac{1}{\bar{\omega}^{\frac{2i-1}{2}}}$	–	–	–	–	
	i	$i\Delta t$	\bar{r}^i	–	–	\bar{F}^i	\bar{M}^i	\bar{a}^i	$\bar{\varepsilon}^i$	
	- - - - -									

\bar{r} (или \bar{r}^n) – матрица-строка, компонентами которой являются радиусы-векторы центров шаров: $\bar{r} = (\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_3, \dots, \bar{r}_N)$ или $\bar{r}^n = (\bar{r}_1^n, \bar{r}_2^n, \bar{r}_3^n, \dots, \bar{r}_N^n)$, где N – общее число шаров;

$\overline{\mathbf{v}}$ (или $\overline{\mathbf{v}}^n$) – матрица-строка, компонентами которой являются векторы скоростей центров шаров: $\overline{\mathbf{v}} = (\overline{v}_1, \overline{v}_2, \dots, \overline{v}_N)$ или $\overline{\mathbf{v}}^n = (\overline{v}_1^n, \overline{v}_2^n, \dots, \overline{v}_N^n)$;

$\overline{\boldsymbol{\omega}}$ (или $\overline{\boldsymbol{\omega}}^n$) – матрица-строка, компонентами которой являются векторы угловых скоростей шаров: $\overline{\boldsymbol{\omega}} = (\overline{\omega}_1, \overline{\omega}_2, \dots, \overline{\omega}_N)$ или $\overline{\boldsymbol{\omega}}^n = (\overline{\omega}_1^n, \overline{\omega}_2^n, \dots, \overline{\omega}_N^n)$;

$\overline{\mathbf{F}}$ (или $\overline{\mathbf{F}}^n$) – матрица-строка, компонентами которой являются векторы равнодействующих всех активных и пассивных сил (кроме сил инерции) для каждого отдельного шара: $\overline{\mathbf{F}} = (\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots, \overline{F}_N)$ или $\overline{\mathbf{F}}^n = (\overline{F}_1^n, \overline{F}_2^n, \dots, \overline{F}_N^n)$;

$\overline{\mathbf{M}}$ (или $\overline{\mathbf{M}}^n$) – матрица-строка, компонентами которой являются векторы моментов сил, которые входят в матрицу-строку $\overline{\mathbf{F}}$: $\overline{\mathbf{M}} = (\overline{M}_1, \overline{M}_2, \dots, \overline{M}_N)$ или $\overline{\mathbf{M}}^n = (\overline{M}_1^n, \overline{M}_2^n, \dots, \overline{M}_N^n)$;

$\overline{\mathbf{a}}$ (или $\overline{\mathbf{a}}^n$) – матрица-строка, компонентами которой являются векторы ускорений центров шаров: $\overline{\mathbf{a}} = (\overline{a}_1, \overline{a}_2, \dots, \overline{a}_N)$ или $\overline{\mathbf{a}}^n = (\overline{a}_1^n, \overline{a}_2^n, \dots, \overline{a}_N^n)$;

$\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ (или $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^n$) – матрица-строка, компонентами которой являются векторы угловых ускорений центров шаров: $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\overline{\varepsilon}_1, \overline{\varepsilon}_2, \dots, \overline{\varepsilon}_N)$ или $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^n = (\overline{\varepsilon}_1^n, \overline{\varepsilon}_2^n, \dots, \overline{\varepsilon}_N^n)$.

Наиболее сложным в такой вычислительной модели является определение равнодействующих сил, которые действуют в данный момент модельного времени на каждый шар. Для i -го шара равнодействующая сила F_i складывается из нормальных и тангенциальных сил упругопластического взаимодействия с соседними шарами и ограничивающими плоскостями и сил трения в точках контакта с ними. Условия контакта между дискретными элементами можно описать рядом формальных параметров, значения которых определяются на основе сравнительного анализа численных и физических экспериментов.

Переменные, вычисляемые в табл. 7.1 считаются постоянными величинами во времени на протяжении каждого модельного шага и скачкообразно изменяются в его конце. Дробные значения временных шагов позволяют на по-

рядок повысить точность вычислений без увеличения количества шагов. Вычисления производятся в следующем порядке:

- учитывая ускорения и скорости, которые заданы в начальных условиях (минус полшага и нулевой шаг), находят значения скоростей на первом полушаге;
- исходя из полученных значений скоростей и начальных условий, находят координаты центров шаров, равнодействующие сил и моментов, а затем и соответствующие значения ускорений на первом модельном шаге;
- исходя из значений скоростей, которые получены на первом полушаге, и ускорений – на первом шаге, находят значения скоростей на полуторном шаге и т.д.

Обращает внимание на себя отсутствие в табл. 7.1 значений угловых координат центров шаров (есть только их радиусы – векторы). Это следствие допущения о неизменности формы шаров, которое компенсируется допущением об их взаимодействии путем взаимопроникновения. В результате существенно упрощается алгоритм вычислений.

Результатом расчетов на основе метода дискретных элементов является получение общей картины напряженно-деформированного состояния рассматриваемого породного массива с определением величин главных напряжений, оседаний (перемещений) и деформаций, вызванных образованием в сплошной среде полости заданных размеров.

Отличительной особенностью данного метода, по отношению к изложенным выше методам конечных и граничных элементов, применимых только в случае моделирования сплошных сред, является возможность описания нелинейных динамических процессов, возникающих в деформирующемся породном массиве, содержащем полости и участки разрушенных горных пород.

К недостаткам метода можно отнести достаточно высокие требования к технической базе для его реализации. Для обработки больших массивов данных и решения реальных задач необходимы достаточно высокое быстродействие компьютера и большой объем оперативной памяти.

Для расчета пластин и оболочек широко применяют вариационные методы теории упругости.

7. 5. Вариационные методы решения краевых задач в геомеханике

Известно, что основные проблемы механики наряду с дифференциальными уравнениями управляются так называемыми минимальными принципами. Так, например, положение равновесия механической системы есть положение, отвечающее минимуму ее потенциальной энергии. Ввиду этого проблема решения граничной задачи для дифференциального уравнения данной механической системы оказывается, в общем, эквивалентной проблеме нахождения функции, дающей минимум интеграла, которым выражается потенциальная энергия системы.

Для решения задач об изгибе пластин (оболочек) можно использовать вариационный принцип Рейсснера, при котором одновременно отыскивается прогиб и все моменты, представляющие также как и прогиб, в виде конечных сумм произведений неопределенных параметров на заданные координатные функции, которые выбирают так, чтобы они были равны нулю на свободных краях пластины (оболочки). Расчетные формулы и машинный алгоритм принципа Рейсснера очень сложный.

Расчет пластин (оболочек) по методу Бубнова-Галеркина значительно усложняется, так как необходимо удовлетворять координатными функциями все граничные условия, в том числе и условия на свободных краях. Последнее обстоятельство препятствует использованию на практике метода Треффца и метода наименьших квадратов. Однако если эти условия выполняются, то эти методы весьма эффективны в применении. Можно утверждать, что ввиду сложности задачи о напряженно-деформируемом состоянии массивов горных пород, любой метод исследования, обеспечивающий необходимую точность, потребует весьма громоздких вычислений. Поэтому, естественно, следует применять такой метод, который просто реализуется на ПЭВМ и позволяет получить реше-

ние, не прибегая к дополнительным (по сравнению с обычной теорией пластин и оболочек) приближенным допущениям.

Для решения краевых задач горной геомеханики является эффективным применение метода Ритца – одного из основных прямых методов вариационного исчисления.

Метод (процесс) Ритца является одним из методов построения минимизирующей последовательности. Для упрощения выкладок ограничимся случаем вещественного гильбертова пространства H ; результаты переносятся на комплексное пространство без изменений.

Пусть A – положительно определенный оператор в пространстве H . Задача о построении обобщенного решения уравнения

$$Au = f \quad (7.19)$$

равносильна задаче о построении элемента энергетического пространства, который реализует минимум функционала

$$F(u) = [u, u]_A - 2(u, f) \quad (7.20)$$

в энергетическом пространстве. Эту последнюю задачу будем приближенно решать следующим образом.

Выберем последовательность элементов

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots \quad (7.21)$$

удовлетворяющих следующим трем условиям:

- 1) все элементы $\varphi_n \in H_A$;
- 2) при любом n элементы $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ линейно независимы;
- 3) последовательность (7.21) полна в H_A .

Элементы (7.21), следуя Ритцу будем называть координатными. Совокупность координатных элементов назовем координатной системой.

Построим линейную комбинацию первых n координатных элементов

$$U_n = \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j \quad (7.22)$$

с произвольными численными коэффициентами a_j . Подставим U_n вместо u в функционал (7.20); это превратит $F(u)$ в функцию n независимых переменных a_1, a_2, \dots, a_n :

$$\begin{aligned} F(u_n) &= \left[\sum_{j=1}^n a_j A\varphi_j, \sum_{k=1}^n a_k A\varphi_k \right] - 2 \left(\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k \right) = \\ &= \sum_{j,k=1}^n [\varphi_j, \varphi_k] a_j a_k - 2 \sum_{k=1}^n (\varphi_k, f) a_k \end{aligned} \quad (7.23)$$

Выберем коэффициенты a_j так, чтобы функция (7.23) приняла минимальное значение. Как увидим, это приводит к системе линейных алгебраических уравнений с неизвестными a_1, a_2, \dots, a_n . Функция (7.23) достигает минимума при тех значениях независимых переменных, которые обращают в нуль ее первые производные:

$$\frac{\partial F(u_n)}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (7.24)$$

Производные (7.24) легко вычисляются:

$$\frac{\partial F(u_n)}{\partial a_i} = 2 \sum_{k=1}^n [\varphi_k, \varphi_j] a_k - 2(f, \varphi_j) \quad (7.25)$$

Приравняв эти производные нулю, получим систему Ритца

$$\sum_{k=1}^n [\varphi_k, \varphi_j] a_k = (f, \varphi_j), \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (7.26)$$

или в более подробной записи,

8. ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МАССИВОВ ПОДЗЕМНЫХ ОБЪЕКТОВ

8.1. Непосредственная кровля

8.1.1. Выбор расчетной схемы и этапы решения задачи

Из-за резкого сокращения объемов строительства новых горизонтов, панелей и блоков на шахтах дорабатывают выемочные поля со сложными и неоднородными геологическими условиями. В пределах одного поля наблюдается изменение мощности пласта или вмещающих его пород, их физико-механических свойств, исчезновение отдельных слоев и тому подобное.

До недавнего времени отсутствовали способы учета влияния изменений геологических условий при прогнозировании эндогенной пожароопасности горных выработок. Раскрытие этих проблемных вопросов представляется возможным при условии определения параметров напряжений и деформаций в угленосном массиве, вмещающем горную выработку. Существенной значимостью является оценка влияния геологических (мощность слагающих кровлю пласта слоев, порядок их чередования, анизотропия механических свойств) и технологических (способ управления кровлей) условий разработки пласта на формирование самонагревающейся пожароопасной среды, а также учет этих факторов при разработке технологии профилактики эндогенных пожаров.

Для решения задачи о НДС массива горных пород, как и при решении задач по сопротивлению материалов, необходимо принять его расчетную схему, то есть определить, что собой представляет объект исследований с геометрической точки зрения: балка, пластина (плита), оболочка, его параметры в плане и по нормали, а, следовательно, определить тонкие они или толстые и с механической – однозначность или многозначность упругих параметров слоев, внешнюю нагрузку и граничные условия.

Как показывает опыт ликвидации, в частности, эндогенных очагов нагревания и возгорания в выработанных пространствах, большинство из них находилось вблизи границы угля с выработанным пространством. Это обусловлено условиями зависания кровли, опирающейся двумя смежными сторонами на угольный массив – забой лавы и границу выемочного поля. В Донбассе максимальная длина зависания основной кровли в выемочных полях достигает 50...70 м. Для выбора расчетной схемы проведен анализ основных параметров и механических характеристик, составляющих массив кровли слоев пород, данные которых приведены в таблицах 8.1 и 8.2.

Таблица 8.1

Принятые в расчетах параметры пород кровли очистной выработки

Типы пород	Плотность, кг/м ³	Толщина, м
Уголь	1400	0,5...2,5
Алевролит	2500	0,5...20
Аргиллит	2500	0,5...20
Песчаник	2600...2700	0,5...50
Известняк	2700...2800	0,5...15

Как следует из табл. 8.1 средняя толщина слоя пород кровли больше 1/10 ее минимального размера в плане, поэтому следует рассматривать кровлю в виде многослойной толстой пластины (плиты) с обязательным учетом поперечных деформаций сдвига по всей толщине. В качестве внешней нагрузки принят собственный вес кровли, равномерно распределенный в плоскости слоев.

Широкий диапазон изменения механических характеристик: модулей упругости (E) и коэффициентов Пуассона (ν) для различных слоев (несмотря на то, что в отдельности каждый слой можно считать трансверсально изотропным, особенно при наличии в них трещин) определяет необходимость считать кровлю анизотропной.

Толщина слоев пород, а также кровли в целом может быть переменной и меняться по любому закону, причем два смежных ее края (защемленных) испытывают максимальные напряжения от изгиба и сдвига, а два других – максимальные перемещения (свободный край) и максимальные напряжения сдвига

(свободная опора). Таким образом, в качестве обобщенной расчетной схемы рассмотрена многослойная анизотропная плита постоянной толщины (рис. 8.1, а), прямоугольная в плане, под действием равномерно распределенной нагрузки от собственной массы q_z , при следующих граничных условиях: два смежных края, опирающиеся на угольный массив, жестко закреплены, два других свободны – полное обрушение (рис. 8.1, б) или свободно-опертые – полная или частичная закладка выработанного пространства (рис. 8.1, в) с координатными осями: x и y , расположенными в срединной ее поверхности, а z – нормальной к ней.

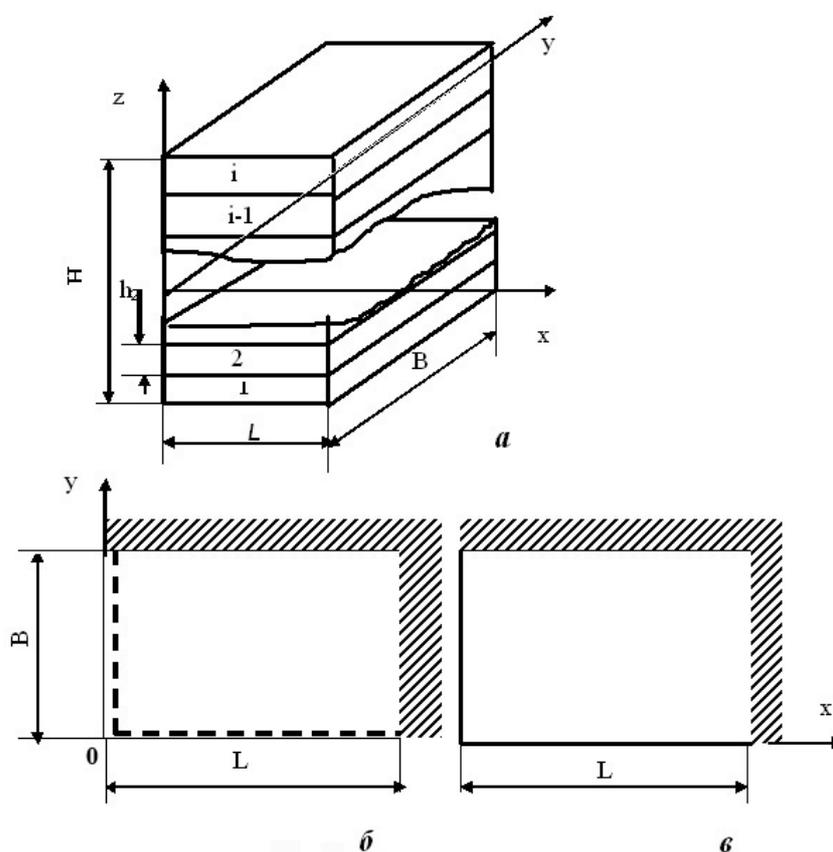


Рис.8.1. Схема для расчета напряженного состояния пород кровли очистной выработки: (а) – многослойная плита; (б) – граничные условия по контуру плиты типа «два края свободно-оперты, два – жестко защемлены»; (в) – «два смежных края свободны, два остальных – жестко закреплены»

Расчет напряженного состояния выполняли в два этапа. На первом этапе рассматривали сплошной массив горных пород, состоящий из разного сочетания количества и типов слоев с заданными для них механическими характеристиками.

При этом слои являются трансверсально изотропными, т.к. для осадочных горных пород, имеющих четко выраженную слоистость, плоскость напластования является плоскостью изотропии. Число упругих постоянных для каждого слоя равно пяти, а сами слои жестко связаны между собой так, что скольжение по контактными поверхностям невозможно.

Сравнением полученных значений напряжений для каждого слоя горных пород в различных направлениях с известными значениями предельных напряжений (табл. 8.2) и при выполнении условия, что максимальные напряжения равны или превышают предельные, определяли места (зоны) образования трещин и направления их распространения.

На втором этапе, используя известные зависимости для определения механических характеристик трещиноватого слоя горных пород с учетом их количественных и качественных параметров, таких как частота и протяженность, ширина и конфигурация, характер поверхности трещин, число скальных контактов и т.п., определяли напряжения и расширенную область (места) образования трещин в горных породах. Этот процесс можно циклично продолжать дальше, но вышеуказанного вполне достаточно, чтобы провести качественную и количественную оценку образования и распространения трещин в кровле.

Таблица 8.2

Механические свойства пород кровли очистной выработки

Типы пород	Модули упругости, $E \cdot 10^{-10}$, Па		Коэффициенты Пуассона		Пределы прочности на сжатие, $\sigma_{сж} \cdot 10^{-5}$, Па		Пределы прочности на растяжение, $\sigma_p \cdot 10^{-5}$, Па		Пределы прочности при сдвиге $\tau_{сдв.} \cdot 10^{-5}$, Па
	$E_x(E_y)$	E_z	$\nu_x(\nu_y)$	ν_z	$\sigma_x(\sigma_y)$	σ_z	$\sigma_x(\sigma_y)$	σ_z	
Уголь	0,04÷ 0,60	0,06÷ 0,54	0,17÷ 0,19	0,13÷ 0,16	53÷ 200	53÷ 200	2,5÷22,5	2,5÷22,5	24÷100
Алевролит	2,67	1,72	0,25	0,29	506	675	30	15	230÷260
Аргиллит	4,50÷ 5,00	4,50÷ 5,00	0,20	0,22	140÷ 570	215÷ 770	-	-	170÷230
Песчаник (крупнозерн.)	1,93	1,73	0,45	0,36	1185	1423	44,3	52,5	180÷310
Песчаник (мелкозерн.)	3,83	2,64	0,20	0,19	1380÷ 2400	1330÷ 2260	83,0	72,5	280÷480
Известняк	6,36	7,25	0,28	0,30	1140÷ 1700	104÷ 2020	102÷230	102÷230	210÷270

8.1.2. Основные соотношения упругости

Перемещения точек срединной поверхности в направлениях x , y , z обозначим соответственно через u , v , w . Для решения задачи используем прием, который предложил Тимошенко С.П., состоящий в представлении полного прогиба в виде суммы двух составляющих - за счет изгиба w_0 и сдвига w_1 :

$$w = w_0 + w_1. \quad (8.1)$$

Физически такое представление w соответствует деформированию плиты в два этапа. В первом – деформации происходят, как и для обычной плиты без учета влияния сдвига на напряжения изгиба. Второй этап состоит в учете дополнительной деформации за счет сдвига.

Таким образом, специфической особенностью расчета слоистой плиты является учет влияния сдвига на величину изгибающих моментов, энергии сдвига от поперечных сил и определение ее механических характеристик при учете трещиноватости.

Деформации в любой точке i -го слоя ($i=1, 2\dots$) плиты в предположении гипотезы прямых нормалей имеют вид

$$\varepsilon^i_x = \varepsilon_1 + z\chi_1; \quad \varepsilon^i_y = \varepsilon_2 + z\chi_2; \quad \varepsilon^i_{xy} = \varepsilon_{12} + 2z\tau. \quad (8.2)$$

Деформации срединной поверхности

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (8.3)$$

Параметры изменения кривизны в пределах точности технической теории

$$\chi_1 = -\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right); \quad \tau = -\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y}\right); \quad (8.4)$$

$$\chi_2 = -\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}\right),$$

где $\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y}$ – дополнительные слагаемые, учитывающие влияние перерезывающих сил.

Закон Гука для i -го слоя плиты записывается следующим образом

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^i &= \frac{1}{E_x^i} \sigma_x^i - \frac{\nu_y^i}{E_y^i} \sigma_y^i; & \varepsilon_y^i &= \frac{1}{E_y^i} \sigma_y^i - \frac{\nu_x^i}{E_x^i} \sigma_x^i; \\ \varepsilon_{xy}^i &= \frac{1}{G_{xy}^i} \sigma_{xy}^i.\end{aligned}\quad (8.5)$$

Решая систему уравнений (8.5) относительно компонент тензора напряжений и учитывая соотношения (8.2), получим

$$\begin{aligned}\sigma_x^i &= B_{11}^i \varepsilon_1 + B_{12}^i \varepsilon_2 + z(B_{11}^i \chi_1 + B_{12}^i \chi_2), \\ \sigma_y^i &= B_{12}^i \varepsilon_1 + B_{22}^i \varepsilon_2 + z(B_{12}^i \chi_1 + B_{22}^i \chi_2), \\ \sigma_{xy}^i &= B_{12}^i \varepsilon_{12} + 2zB^{*i}_{12} \tau,\end{aligned}\quad (8.6)$$

где

$$\begin{aligned}B_{11}^i &= \frac{E_x^i}{1 - \nu_x^i \nu_y^i}, & B_{12}^i &= \frac{\nu_y^i E_x^i}{1 - \nu_x^i \nu_y^i}, \\ B_{22}^i &= \frac{E_y^i}{1 - \nu_x^i \nu_y^i}, & B^{*i}_{12} &= G_{12}^i.\end{aligned}\quad (8.7)$$

Интегрируя (8.6) по толщине каждого слоя и суммируя выражения по числу слоев, получим выражение для внутренних усилий в срединной поверхности

$$\begin{aligned}T_1 &= C_{11} \varepsilon_1 + C_{12} \varepsilon_2, & T_{12} &= C^{*}_{12} \varepsilon_{12}, \\ T_2 &= C_{12} \varepsilon_1 + C_{22} \varepsilon_2,\end{aligned}\quad (8.8)$$

Умножая (8.6) на z и интегрируя, получим изгибающие и крутящий моменты

$$\begin{aligned} M_1 &= D_{11}\chi_1 + D_{12}\chi_2, & M_{12} &= 2D_{12}^* \tau. \\ M_2 &= D_{12}\chi_1 + D_{22}\chi_2, \end{aligned} \quad (8.9)$$

Решая соотношения (451) относительно компонент деформаций, имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= A_{11}T_1 + A_{12}T_2, & \varepsilon_{12} &= A_{12}^* T_{12}. \\ \varepsilon_2 &= A_{12}T_1 + A_{22}T_2, \end{aligned} \quad (8.10)$$

В соотношениях (8.8)-(8.10) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} C_{jk} &= \sum_{i=1}^t B^i_{jk} (\delta_i - \delta_{i-1}), \\ D_{jk} &= \sum_{i=1}^t B^i_{jk} (\delta^3_i - \delta^3_{i-1}), \end{aligned} \quad (8.11)$$

где δ_{i-1} – расстояние по нормали от внутренней поверхности до наружной поверхности i -го слоя;

C_{12}^* , D_{12}^* – получены из (8.11) заменой B^i_{jk} на B^i_{12} ;

t – количество слоев.

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{C_{22}}{\Delta_1}, & A_{12} &= -\frac{C_{12}}{\Delta_1}, & A_{22} &= \frac{C_{11}}{\Delta_1}, \\ A_{12}^* &= \frac{1}{C_{12}^*}, & \Delta_1 &= C_{11}C_{22} - C_{12}^2. \end{aligned} \quad (8.12)$$

Работа поперечных сил для элемента плиты

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} Q_{xz} \frac{\partial w_1}{\partial x} dx dy, \\
 & -\frac{1}{2} Q_{yz} \frac{\partial w_1}{\partial y} dx dy
 \end{aligned}
 \tag{8.13}$$

Для определения угла наклона касательной $\frac{\partial w_1}{\partial x} \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)$ использовано допущение, что высота плиты после деформации не изменится и равна ее высоте до деформации. Из этого следует, что угол наклона касательной численно равен углу сдвига плиты и постоянен по ее высоте. В силу постоянства угла сдвига будет постоянным и напряжение сдвига по высоте плиты. Поэтому согласно закону Гука

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{Q_{xz}}{G_{xz} H}, \quad \frac{\partial w_1}{\partial y} = \frac{Q_{yz}}{G_{yz} H},
 \tag{8.14}$$

где Q_{xz}, Q_{yz} – полные перерезывающие силы для плиты в целом;
 G_{xz}, G_{yz}, H – модули сдвига по нормали и толщина плиты.

Потенциальная энергия элементарной площадки плиты от поперечных сил равна

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} Q_{xz} \frac{\partial w_1}{\partial x} dx dy &= \frac{1}{2} \frac{Q_{xz}^2}{G_{xz} H} dx dy, \\
 \frac{1}{2} Q_{yz} \frac{\partial w_1}{\partial y} dx dy &= \frac{1}{2} \frac{Q_{yz}^2}{G_{yz} H} dx dy.
 \end{aligned}
 \tag{8.15}$$

В соответствии с принципом возможных перемещений вариация полной энергии деформированной плиты равна нулю в состоянии равновесия

$$\delta \mathcal{E} = \delta U + \delta V = 0,
 \tag{8.16}$$

где δU – вариация потенциальной энергии плиты; δV – вариация потенциала внешних сил.

Вариация потенциальной энергии внешних сил

$$\delta V = -\delta \int \int q_z w_o dS. \quad (8.17)$$

Интегралы в выражении (460) и ниже вычисляются в пределах $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq B$.

8.1.3. Вариационное уравнение

Вариация потенциальной энергии плиты может быть представлена как сумма вариаций энергий деформаций растяжения (сжатия) δU_p , деформации изгиба δU_u и деформации сдвига δU_c

$$\delta U = \delta U_p + \delta U_u + \delta U_c, \quad (8.18)$$

где

$$\delta U_p = \iint (T_1 \delta \epsilon_1 + T_2 \delta \epsilon_2 + T_{12} \delta \epsilon_{12}) dS, \quad (8.19)$$

$$\delta U_u = \iint (M_1 \delta \chi_1 + M_2 \delta \chi_2 + 2M_{12} \delta \tau) dS, \quad (8.20)$$

$$\delta U_c = \iint (Q_{xz} \delta \epsilon_{xz} + Q_{yz} \delta \epsilon_{yz}) dS. \quad (8.21)$$

Здесь ϵ_{xz} , ϵ_{yz} – деформации сдвига в плоскости xoz и uoz соответственно.

Интеграл (8.19) представим в виде

$$\delta U_c = \delta \iint (T_1 \epsilon_1 + T_2 \epsilon_2 + T_{12} \epsilon_{12}) dS - \iint (\epsilon_1 \delta T_1 + \epsilon_2 \delta T_2 + \epsilon_{12} \delta T_{12}) dS. \quad (8.22)$$

Такая запись δU_c ведет к вариационному уравнению смешанного типа, в котором варьируются не только деформации, как в выражении (8.19), но и усилия в срединной поверхности.

Подставляя деформации в срединной поверхности по формулам (8.3) и интегрируя по частям, преобразуем выражение

$$\begin{aligned} \delta I_1 = \delta \iint (T_1 \epsilon_1 + T_2 \epsilon_2 + T_{12} \epsilon_{12}) dS = & -\delta \iint \left(\frac{\partial}{\partial x} T_1 + \frac{\partial}{\partial y} T_{12} \right) u dS - \\ & - \delta \iint \left(\frac{\partial}{\partial y} T_2 + \frac{\partial}{\partial x} T_{12} \right) v dS. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Контурные интегралы в данном случае равны нулю, т.к. на закрепленном крае плиты перемещения равны нулю, а на свободно-опертом или свободном краях равны нулю усилия в срединной поверхности.

Введем функцию усилий φ в срединной поверхности с помощью соотношений

$$T_1 = \varphi_{yy}, \quad T_2 = \varphi_{xx}, \quad T_{12} = -\varphi_{xy}. \quad (8.24)$$

Здесь использованы краткие обозначения вторых производных в прямоугольных координатах.

Подставим выражение (467) в (466). Тогда первый и второй интегралы равны нулю, а следовательно $\delta I_1 = 0$.

Второй интеграл (8.22) с учетом зависимостей (8.10) имеет вид

$$\begin{aligned} \delta I_2 &= \iint (\varepsilon_1 \delta T_1 + \varepsilon_2 \delta T_2 + \varepsilon_{12} \delta T_{12}) dS = \\ &= \frac{1}{2} \delta (A_{11} T^2_1 + 2A_{12} T_1 T_2 + A_{22} T^2_2 + A^*_{12} T^2_{12}) dS. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Преобразуем интеграл (8.20), используя соотношения (8.9)

$$\delta I_3 = \delta U_u = \frac{1}{2} \delta \iint (D_{11} \chi^2_1 + 2D_{12} \chi_1 \chi_2 + D_{22} \chi^2_2 + 4D^*_{12} \tau^2) dS. \quad (8.26)$$

Учитывая соотношения (8.25), (8.26), (8.21), (8.14), (8.17) и заменяя усилия в срединной поверхности их выражениями через функцию усилий по формулам (8.24), а параметры изменения кривизны - функциями прогибов w_0, w_1 из выражения (8.4), для вариации полной энергии слоистой плиты получим

$$\delta Y = \delta \iint \left[\frac{1}{2} L_a(w_1, w) - \frac{1}{2} L_c(w_1, w) + \frac{1}{2} L(w_1) - q_z w_0 \right] dS = 0. \quad (8.27)$$

Здесь введены следующие обозначения

$$D_{jk} = a_{jk}, \quad 2D^*_{12} = a^*_{12}, \quad A_{11} = C_{22}, \quad A_{22} = C_{11}, \quad \frac{1}{2}A^*_{12} = C^*_{12},$$

$$L_p(\psi, \eta) = p_{11}\psi_{xx}\eta''_{xx} + 2p_{12}\psi''_{xx}\eta''_{yy} + p_{22}\psi_{yy}\eta''_{yy} + 2p^*_{12}\psi''_{xy}\eta''_{xy}, \quad (8.28)$$

$$L(w_1) = C_{13}(w'_1)_x^2 + C_{23}(w'_1)_y^2.$$

В выражении $L_p(\psi, \eta)$ p_{jk} принимает значения a_{jk}, c_{jk} , а функции ψ и η соответствуют функциям w и φ .

Полученное вариационное уравнение (8.27) смешанного типа относительно прогибов и функции усилий для слоистой плиты имеет ряд преимуществ по сравнению с вариационным уравнением относительно перемещений, а именно:

- функция усилий (следует отметить, что ее удастся ввести только в технической теории пластин) является независимо варьируемой, поэтому отпадает необходимость решать предварительно сложную задачу интегрирования уравнения совместности для того, чтобы выразить φ через w_0 ;

- при наличии усилий в срединной поверхности разыскиваются три функции (w_0, w_1, φ) вместо пяти ($u_\alpha, v_\alpha, u_\beta, v_\beta, w$);

- при любом выборе координатных функций для функции усилий уравнения равновесия в срединной поверхности удовлетворяются автоматически, что увеличивает точность решения;

- методы решения вариационных уравнений смешанного типа удобны для алгоритмизации, программирования и точной автоматизации счета на ЭВМ.

Из вариации уравнения (8.27) следует, что главными краевыми условиями для функций w_0, w_1 является

$$\begin{aligned} w_0|_\Gamma &= w_0^0, & w'_0|_\Gamma &= (w_0^0)', \\ w_1|_\Gamma &= w_1^0. \end{aligned} \quad (8.29)$$

где $w_0^0, (w_0^0)', w_1^0$ – заданные функции;

Γ – контур срединной поверхности.

Главными краевыми условиями для функции усилий φ , если край пластины свободен или свободно-опертый, является

$$\varphi|_{\Gamma} = \varphi'|_{\Gamma} = 0 \quad (8.30)$$

Естественные краевые условия имеют сравнительно сложный характер, однако использование вариационного метода решения Ритца позволяет заранее не подчинять этим условиям координатные функции. Разумеется, если появляется возможность подчинить координатную систему всем краевым условиям, то это будет способствовать ускорению сходимости решения.

8.1.4. Система разрешающих уравнений и напряжения

Искомые функции представим в виде

$$\begin{aligned} w_0(x, y) &= \sum_{j=1}^n a_j f_j(x) g_j(y), \\ w_1(x, y) &= \sum_{j=1}^n c_j l_j(x) u_j(y), \\ \phi(x, y) &= \sum_{j=1}^n b_j p_j(x) q_j(y), \end{aligned} \quad (8.31)$$

где a_j, b_j, c_j — неопределенные параметры; f_j, g_j, \dots, q_j — заданные координатные функции.

Подставив выражения (8.31) в (8.27) и приравняв к нулю производные по параметрам от интеграла по срединной поверхности, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно a_j, b_j, c_j .

Вводя безразмерные величины и константы по формулам

$$w_0 = L_0 w_0, \quad w_1 = L_0 w_1, \quad \varphi = 2EH_0L_0^2 \varphi, \quad x = L_0 x, \quad y = B_0 y, \quad (8.32)$$

$$D_{jk} = 2D_0 h_{jk}, \quad D^*_{12} = 2D_0 h^*_{12}, \quad C_{jk} = 2C_0 \alpha_{jk}, \quad C^*_{12} = 2C_0 \alpha^*_{12},$$

$$q_z = q_0 \bar{q}_z, \quad q_0 = \sum \rho_i h_i, \quad H = H_0 \bar{H};$$

$$\beta_{jj} = \frac{\alpha_{jj}}{\Delta_2}, \quad \beta_{12} = -\frac{\alpha_{12}}{\Delta_2}, \quad \beta^*_{12} = \frac{1}{\alpha^*_{12}}, \quad \Delta_2 = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2;$$

$$C_0 = -\frac{12(1-\nu^2)L_0^2}{H_0^2}, \quad k_0 = \frac{L_0}{B_0}, \quad \tau_0 = \frac{G_0 H_0 L_0^2}{D_0}, \quad \rho_0 = \frac{q_0 L_0^3}{D_0},$$

и опуская в дальнейшем черту в обозначениях безразмерных величин, получим систему уравнений следующего вида

$$\sum_{j=1}^n a_j \iint \sum_{r=1}^5 F_r G_r dS + \sum_{j=1}^n c_j \iint \sum_{r=1}^5 R_r S_r dS = \rho_0 \iint q_z f_i g_i dS, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\sum_{j=1}^n a_j \iint \sum_{r=1}^5 K_r N_r dS + \sum_{j=1}^n c_j \iint \sum_{r=1}^7 L_r U_r dS = 0, \quad i = n+1, n+2, \dots, n+m \quad (8.33)$$

$$c_0 \sum_{j=1}^m b_j \iint \sum_{r=1}^5 P_r Q_r dS = 0, \quad i = n+m+1, n+m+2, \dots, 2n+m$$

Как следует из третьего уравнения системы (8.33) $b_j=0$, т.е. $\varphi(x,y)=0$, т.к. в данном случае отсутствует внешняя нагрузка, действующая в плоскости плиты.

Здесь введены следующие обозначения

$$\begin{aligned} F_1 &= f_i'' f_j'', \quad F_2 = f_i'' f_j, \quad F_3 = f_i f_j'', \quad F_4 = f_i f_j, \quad F_5 = f_i' f_j', \\ G_1 &= h_{11} g_i g_j, \quad G_2 = k^2_0 h_{12} g_i g_j'', \quad G_3 = k^2_0 h_{12} g_i'' g_j, \quad G_4 = k^4_0 h_{12} g_i'' g_j'', \\ G_5 &= 4k^2_0 h^*_{12} g_i' g_j', \quad L_6 = l'_i l'_j, \quad L_7 = l_i l_j, \quad u_6 = \tau_0 \alpha_{13} u_i u_j, \\ u_7 &= k^2_0 \tau_0 \alpha_{23} u_i' u_j'. \end{aligned} \quad (8.34)$$

Выражения для функций R_r и S_r , L_r и U_r получены из выражений для F_r и G_r заменой в них f_j на l_j и g_j на u_j , f на l и g на u соответственно.

Функции K_r , N_r получаются заменой в выражениях R_r , S_r i на j и, наоборот.

Подставляя выражения (8.4), (8.10), (8.12), (8.31) в (8.6) и учитывая (8.32), для i -го слоя пластины получим

$$\begin{aligned}\sigma_x^i &= -\frac{z}{L_0} \left[\sum_{j=1}^n a_j (B_{11}^i f_j'' g_j + k_0^2 B_{12}^i f_j g_j'') + \sum_{j=1}^n c_j (B_{11}^i l_j'' u_j + k_0^2 B_{12}^i l_j u_j'') \right], \\ \sigma_y^i &= -\frac{z}{L_0} \left[\sum_{j=1}^n a_j (B_{11}^i f_j'' g_j + k_0^2 B_{22}^i f_j g_j'') + \sum_{j=1}^n c_j (B_{12}^i l_j'' u_j + k_0^2 B_{22}^i l_j u_j'') \right], \\ \sigma_{xy}^i &= -\frac{2k_0}{L_0} z B_{12}^{*i} \left(\sum_{j=1}^n a_j f_j' g_j' + \sum_{j=1}^n c_j l_j' u_j' \right), \\ \sigma_{xz}^i &= G_{xz}^i \sum_{j=1}^n c_j l_j' u_j, \quad \sigma_{yz}^i = k_0 G_{yz}^i \sum_{j=1}^n c_j l_j u_j'.\end{aligned}\tag{8.35}$$

Координата z меняется в пределах от нейтральной оси до нижней и верхней поверхностей пластины, причем положение нейтральной оси зависит в каждом конкретном случае от количества слоев и их жесткостей на изгиб и кручения.

8.1.5. Выбор координатных функций

Чтобы приближенные решения, отыскиваемые по методу Ритца, при увеличении числа параметров сходились с точными, необходимо задать систему координатных функций, обладающих следующими свойствами:

координатные функции удовлетворяют кинематическим, существенным условиям закрепления пластины;

взятые в любом конечном числе координатные функции линейно независимы;

координатные функции должны быть непрерывны вместе с первыми производными и иметь интегрируемые квадраты вторых производных. Все эти требования выполнить нетрудно, т.к. краевые условия для функций w_0, w_1 просты, а класс функций, обеспечивающий существование интегралов по области в уравнениях (476), весьма широк. Так, в нашем случае, координатные функции должны быть подчинены следующим краевым условиям:

на защемленном крае

$$w_0 = w_1 = 0, \quad (w_0)' = 0 \quad (8.36)$$

на свободно-опертом крае

$$w_0 = w_1 = 0. \quad (8.37)$$

Проверить линейную независимость координатных элементов (если она неочевидна) можно, составив определитель Грамма. Если он не равен нулю, то это требование выполнено. Линейную независимость координатных функций можно считать обеспеченной, если они выбраны в виде степенных и тем более ортогональных полиномов.

Третье условие – полноту координатных систем считаем при решении конкретной задачи выполненным.

Обычно при использовании вариационных методов в теории пластин в качестве координатных функций принимают тригонометрические, гиперболо-тригонометрические и степенные полиномы.

При выполнении расчетов на ЭВМ предпочтение следует отдать степенным полиномам. Это объясняется простотой программирования, малым временем на вычисление значений этих функций и их производных в узлах. Гиперболо-тригонометрические функции, комбинации бесселевых и других специальных функций менее удобное для расчета, чем полиномы, т.к. значения последних легко вычисляются, в то время, как для вышеуказанных балочных функций необходимо использовать таблицы или медленно сходящиеся ряды. В литературе не приведено убедительных доказательств того, что для расчета балочные

функции удобнее полиномов. Как правило, результаты расчетов и с теми, и с другими функциями при одинаковом количестве параметров отличаются незначительно, хотя в некоторых работах показано, что лучшие результаты получаются с полиномами. Следовательно, скорость сходимости процесса Ритца по числу параметров при использовании степенных полиномов не меньше, а в некоторых случаях больше, чем при других типах координатных функций.

При использовании большого количества параметров важное значение приобретают условия, которым следует подчинить координатные системы для того, чтобы решение алгебраической системы Ритца было устойчивым. Рост погрешности решения по сравнению с погрешностью коэффициентов уравнений является следствием малости определителя системы, которая в свою очередь есть следствие “почти” линейной зависимости координатных функций.

Во избежание неустойчивости решения системы линейных алгебраических уравнений относительно параметров по отношению к малым изменениям элементов матрицы и правой части системы (8.31), координатные функции желательно подчинить еще одному условию:

$$\iint Z_i Z_j dS = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} . \quad (8.38)$$

Под Z подразумеваются системы координатных функций.

Если координатные функции принадлежат к классу функций к конечной нормой по энергии, решение будет приближаться к точному, хотя эти функции могут и не удовлетворять статическим (естественным) условиям. Это является важным преимуществом метода Ритца по сравнению с другими методами.

При ортонормированных функциях получаемое решение значительно устойчивое к изменениям элементов матрицы, чем при степенных. Однако, если точность вычисления элементов матрицы и правой части настолько высока, что напряжения, рассчитываемые со всей возможной точностью в системе степенных функций (несмотря на плохие свойства порождаемой ею матрицы) несуще-

ственно отличаются от напряжений, вычисляемых при искажении матрицы и правой части, то пластины рассматриваемого типа можно рассчитывать с общими системами координатных функций.

При использовании ЭВМ основным требованием к системе координатных функций (кроме приведенных выше условий, вытекающих из теории энергетического метода) является минимальный расход машинного времени на вычисления значений этих функций и их производных, а также простота программирования.

Исходя из принятых граничных условий (8.36) и (8.37) в качестве координатных функций приняты степенные полиномы, коэффициенты которых приведены в таблицах 8.3-8.6.

Таблица 8.3

Коэффициенты полиномов $f_j(x)$, $g_j(y)$ для условий защемленный-свободный край

	x^2, y^2	x^3, y^3	x^4, y^4	x^5, y^5	x^6, y^6	x^7, y^7	x^8, y^8	x^9, y^9
f_1, g_1	-3	1						
f_2, g_2	-6	0	1					
f_3, g_3	-10	0	0	1				
f_4, g_4	-15	0	0	0	1			
f_5, g_5	-21	0	0	0	0	1		
f_6, g_6	-28	0	0	0	0	0	1	

С другой стороны, если в нашем случае окажется, что сдвиг от поперечных сил в плоскостях xoz и $yoз$ незначительно повлияет на напряжения изгиба σ_x^i , σ_y^i , то в дальнейшем для упрощения решения задачи в качестве координатных функций будут использованы степенные балочные функции, точно удовлетворяющие всем граничным условиям и получены, используя методы сопротивления материалов с началом расположения координатных осей в правом нижнем углу, т.е. для условий защемление-свободный край

$$f(k), g(k) = 1/24 (4k - k^4 - 3), \quad (8.39)$$

Таблица 8.4

Коэффициенты полиномов $l_j(x)$, $u_j(y)$ для условий защемление-свободный край

	x^1, y^1	x^2, y^2	x^3, y^3	x^4, y^4	x^5, y^5	x^6, y^6
l_1, u_1	1					
l_2, u_2	-1	2				
l_3, u_3	1	-6	6			
l_4, u_4	-1	12	-30	20		
l_5, u_5	1	-20	90	-140	70	
l_6, u_6	-1	30	-210	560	-630	252

Таблица 8.5

Коэффициенты полиномов $f_j(x)$, $g_j(y)$ для условий
защемление-свободная опора

	x^2, y^2	x^3, y^3	x^4, y^4	x^5, y^5	x^6, y^6	x^7, y^7	x^8, y^8	x^9, y^9
f_1, g_1	3	-5	2					
f_2, g_2	-12	40	-43	15				
f_3, g_3	92	-540	1113	-965	300			
f_4, g_4	-9	15	-6	3	-5	2		
f_5, g_5	12	-40	43	-27	40	-43	15	
f_6, g_6	-276	1620	-3339	2987	-1400	1113	-965	300

Таблица 8.6

Коэффициенты полиномов $l_j(x)$, $u_j(y)$ для условий защемление-свободная опора

	x^1, y^1	x^2, y^2	x^3, y^3	x^4, y^4	x^5, y^5	x^6, y^6	x^7, y^7
l_1, u_1	-1	1					
l_2, u_2	1	-3	2				
l_3, u_3	-1	7	-12	6			
l_4, u_4	1	-13	42	-50	20		
l_5, u_5	-1	21	-110	230	-210	70	
l_6, u_6	1	-31	240	-770	1190	-882	252

для условий защемление-свободная опора

$$f(k), g(k) = 1/48 (3k^3 - 2k^4 - k), \quad (8.40)$$

где в $f(k)$ k принимает значение x , а в $g(k)$ – y .

При этом в выражении (8.33) $c_j=0$, а в (8.34) - для определения перерезывающих напряжений σ_{xz}^i , σ_{yz}^i c_j заменяются на a_1 ; l_j и u_j – соответственно на f_1 и g_1 , т.е. выражение для w_0 представляются в виде

$$w_0(x, y) = a_1 f_1(x) g_1(y). \quad (8.41)$$

8.1.6. Упругие параметры слоев непосредственной кровли

Для определения жесткостных параметров слоев горных пород кровли, являющейся трансверсально изотропной средой, необходимо знать пять упругих параметров ее слоев: E_x^i , ν_x^i , E_{xz}^i , ν_{xz}^i , G_{xz}^i .

Остальные параметры определяются из общеизвестных соотношений

$$\begin{aligned} E_x^i \nu_y^i &= E_y^i \nu_x^i; & E_{xz}^i \nu_{yz}^i &= E_{yz}^i \nu_{xz}^i; \\ G_{xy}^i &= \frac{E_x^i}{2(1 + \nu_x^i)}; & G_{yz}^i &= \frac{E_{yz}^i}{2(1 + \nu_{yz}^i)}. \end{aligned} \quad (8.42)$$

Для трещиноватых массивов горных пород в зависимости от вида наиболее распространенных в шахтах трещин, считая их изотропными, учитывая, что трещины ориентированы преимущественно под углом 0 и 90° к оси z , приведенные упругие параметры определяются следующим образом.

Система зияющих трещин:

$$\begin{aligned} E_{x\text{пр}}^i &= E_x^i; & E_{z\text{пр}}^i &= \frac{E_x^i}{1 + \eta^i}; & \nu_{x\text{пр}}^i &= \nu_x^i; \\ G_{xy\text{пр}}^i &= \frac{E_x^i}{2(1 + \nu_x^i)}; & G_{xz\text{пр}}^i &= \frac{E_x^i}{2(1 + \nu_x^i + \eta_i)}; & \eta_i &= \frac{\delta_i}{\xi_i \Delta^i}. \end{aligned} \quad (8.43)$$

где $E_{x\text{пр}}^i$ – модуль упругости эквивалентной сплошной среды по направлению, совпадающему с поверхностью трещин;

E_{xznp}^i – модуль упругости эквивалентной сплошной среды по нормали к плоскости трещин;

G_{xyp}^i – модуль сдвига в плоскости изотропии, т.е. в плоскости xoy ; G_{xzp}^i – модуль сдвига в плоскости xoz ;

ν_{xznp}^i – коэффициент Пуассона, определяемый как отношение поперечной деформации в плоскости xoz к продольной деформации в плоскости трещин; E_x^i ;

ν_x – модуль упругости и коэффициент Пуассона ненарушенного материала массива;

Δ^i – расстояние между трещинами;

δ^i – ширина раскрытия трещины; ξ^i – относительная площадь скальных контактов в данной трещине ($\xi^i = 3 \cdot 10^{-4}$).

Система с хаотической трещиноватостью: для систем трещин примерно равной мощности и $\delta_i \ll h_i$ расчет вели по формуле

$$E_{0}^i = \frac{E_x^i}{1 + \frac{5}{8} n^i \eta^i}; \quad \eta_i = \frac{\bar{\delta}^i}{\xi \bar{\Delta}^i}, \quad (8.44)$$

где E_0^i – приведенный модуль упругости; n^i – число систем трещин; $\bar{\delta}^i$ – средняя ширина раскрытия трещин; $\bar{\Delta}^i$ – средняя протяженность ненарушенного материала, приходящегося на одну трещину.

8.1.7. Алгоритм решения задачи и результаты исследований

Алгоритм решения задачи реализован как структурированный программный модуль, состоящий из нескольких блоков: присваивания начальных значений; определения расчетных величин; решения системы линейных алгебраических уравнений; определения напряжений; печати результатов в виде трехмерных и двумерных графиков.

Процедуры решения систем линейных алгебраических уравнений, дифференцирования и интегрирования функций реализованы в виде отдельных подпрограмм. Для решения системы линейных алгебраических уравнений, являющихся описанием математической модели, применен метод Гаусса с выбором главного элемента.

Определение численных значений интегралов осуществлено путем интерполирования подинтегральной функции кубическими сплайнами и дальнейшего применения квадратных формул. Дифференцирование функций реализовано с помощью метода Рунге-Кутты четвертого порядка. Алгоритм реализован с помощью пакета инженерного проектирования Maple V for Windows'95.

Исследования проводили в следующей последовательности, причем определяли:

- сходимости и устойчивости метода;
- влияние деформаций сдвига на напряжение от изгиба;
- адекватности метода сравнением результатов расчета с данными, имеющимися в литературе по пластинам прямоугольной формы, находящимся под действием равномерно распределенной нагрузки с подобными граничными условиями, а также проводили анализ изменения максимальных напряжений в зависимости от параметров плиты в плане с минимальной толщиной (жесткостью);
- зависимость максимальных напряжений от механических характеристик, жесткостных параметров, толщины, последовательности расположения слоев горных пород в кровле;
- максимальные напряжения в сечениях кровли; проводили сравнение их с предельными напряжениями и определяли направления и зоны разрушения пород.

На втором этапе была дана оценка напряженного состояния кровли горных пород с двумя наиболее характерными в практике системами трещин: зияющими и хаотическими с использованием механических характеристик по зависимостям (8.43) и (8.44).

Известно, что при увеличении количества параметров точность решения по методу Ритца должна возрастать. Чтобы установить минимальное количество параметров, необходимых для получения практически приемлемой точности, с помощью разработанного алгоритма, составленной программы на ПЭВМ, были проведены расчеты для кровли с двумя вышеуказанными граничными условиями (см. рис. 8.1 в, г). В качестве координатных функций использованы системы степенных полиномов, коэффициенты которых приведены в вышеуказанных таблицах.

В связи с симметричностью граничных условий в направлениях x , y и одинаковыми размерами в плане, исследовали изменение максимальных нормальных σ_x , продольных σ_{xy} и поперечных σ_{xz} напряжений сдвига в нижней поверхности слоя угля с последовательностью расположения слоев горных пород и их механическими характеристиками согласно таблиц 8.1 и 8.2 при количестве параметров $n = 5, 7, 10, 14, 17$.

Как показали результаты исследований, при переходе от одного варианта к другому до $n=14$ происходит уточнение напряжений, поэтому в расчетах использовано именно такое, т.е. $n=14$, число параметров.

Проведена численная проверка степени устойчивости решения системы Ритца – определение параметров и напряжений при использовании степенных полиномов путем сравнения характерных результатов расчета, полученных со всей возможной точностью и после замены последнего десятичного разряда в коэффициентах уравнений нулем. Оказалось, что погрешность искомых величин (в данном случае – напряжений) существенно больше, чем погрешность, вносимая в параметры, а тем более в коэффициенты уравнений. Отсюда следует, что при использовании степенных полиномов, точность подсчета коэффициентов уравнений Ритца должна быть значительно выше точности искомых величин. Однако в данном расчете, учитывая высокую степень точности подсчета коэффициентов, указанная потеря точности мало повлияла на окончательные результаты.

Сравнение результатов расчета для максимальных напряжений от изгиба σ_x , при учете деформаций сдвига ($c_j \neq 0$) и без их учета, т.е. при $c_j = 0$, показали, что максимальная относительная погрешность составляет не более 7 %. Следовательно, для рассматриваемой расчетной схемы кровли, состоящей из слоев с указанными в таблице механическими характеристиками, можно пренебречь влиянием сдвига на напряжения от изгиба.

Адекватность любого метода расчета проверяется путем сравнения его результатов с данными экспериментальных исследований или сопоставлением с результатами, полученными другими расчетными способами.

Из обширной технической литературы по многослойным пластинам и оболочкам не известны конкретные результаты для моментов или напряжений с такими сложными граничными условиями, которые рассматриваются в принятой расчетной схеме для горных пород кровли. В литературе приведены табличные результаты расчета максимальных моментов (напряжений) как функций нагрузки q и f , параметр в плане B , для некоторых точек ($x = \frac{L}{2}, y = \frac{L}{2}$); ($x = L, y = \frac{B}{2}$); ($x = \frac{L}{2}, y = B$) при решении дифференциального уравнения равновесия однослойной изотропной прямоугольной в плане пластины, находящейся под равномерно распределенной нагрузкой, два смежных края которой жестко закреплены, два других – свободно-опертые, причем дана зависимость этих величин от параметров в плане $k_0^{-1} = \frac{B}{L}$.

Основным критерием для определения правильности использования балочных функций, а, следовательно, и метода решения, так как в данном случае применена известная и апробированная на практике техническая теория многослойных пластин с применением вариационного принципа, является сравнение качественной картины распределения максимальных напряжений, полученных по классическому и предложенному методам.

Анализ полученных результатов показал следующее. Максимальная относительная погрешность при расчете по разработанному методу в указанном интервале отношений сторон плиты составляет менее 10 %, причем в контрольных точках знаки совпадают, поэтому можно сделать вывод о правильности качественной картины распределения напряжений, а следовательно выборе балочных степенных функций в качестве координатных функций.

При равенстве сторон плиты, действию равномерно распределенной нагрузки и симметричных граничных условиях, напряжения в двух направлениях равны между собой, а с увеличением отношения сторон увеличиваются напряжения в направлении большей стороны и наоборот. Такая ситуация в реальных условиях наблюдается при отходе лавы от разрезной печи. При этом скорость изменения нормальных положительных (растягивающих) напряжений изгиба выше, чем поперечных сдвигающих отрицательных напряжений, возникающих в середине большей заземленной стороны, и значительно выше нормальных отрицательных (сжимающих) напряжений в этой же точке пластины (плиты).

Распределение максимальных нормальных изгибающих, продольных и поперечных напряжений сдвига для квадратной плиты в направлении оси x , полученные в результате расчета по данному методу с указанными начальными данными, приведены на рис. 8.2 на основании которых и не приведенных здесь других результатов исследований в силу их громоздкости, составлена табл. 8.7 и сделаны вышеизложенные выводы.

Данные по сравнению отношений поперечных сдвиговых напряжений в табл. 8.7 отсутствуют, поскольку для тонкой пластины по классической теории они не приведены из-за их малости. В нашем случае максимальные их значения в восемь раз превышают соответствующие нормальные напряжения в точке $(1, 1/2)$.

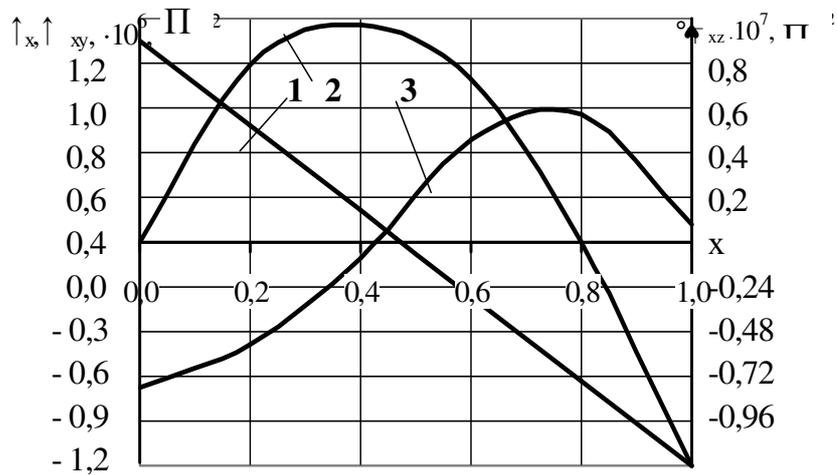


Рис.8.2. Распределение максимальных напряжений в нижней поверхности слоя угля, оставленного в кровле, при $t = 6$, $k_0^{-1} = 1$, для граничных условий типа «два смежных края защемлены, два других – свободно опертые»:
 1 – $\sigma_{xz}(x, 1/2)$; 2 – $\sigma_x(x, 1/2)$; 3 – $\sigma_{xy}(x, 0)$

Таблица 8.7

Зависимость отношений максимальных напряжений от параметров в плане для граничных условий защемление-свободная опора по классическому и разработанному методам

$k_0^{-1} = \frac{B}{L}$	$\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x = \frac{L}{2}, y = \frac{B}{2})$		$\frac{\sigma_y(x = \frac{L}{2}, y = B)}{\sigma_x(x = L, y = \frac{B}{2})}$		$\frac{\sigma_{yz}(x = \frac{L}{2}, y = B)}{\sigma_{xz}(x = L, y = \frac{B}{2})}$
	классический метод	разработанный метод	классический метод	разработанный метод	разработанный метод
0,5	3,01	3,28	1,50	1,46	2,15
0,6	2,29	2,50	1,40	1,37	1,80
0,7	1,79	1,67	1,29	1,27	1,50
0,8	1,44	1,57	1,18	1,15	1,30
0,9	1,19	1,30	1,08	1,06	1,10
1,0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
1,1	0,86	0,94	0,93	0,85	0,90
1,2	0,74	0,81	0,87	0,80	0,85
1,3	0,60	0,65	0,82	0,75	0,78
1,4	0,56	0,60	0,78	0,72	0,70
1,5	0,52	0,54	0,75	0,69	0,67
1,6	0,47	0,51	0,73	0,67	0,60
1,7	0,42	0,46	0,71	0,65	0,55
1,8	0,39	0,43	0,69	0,63	0,50
1,9	0,36	0,39	0,68	0,62	0,48
2,0	0,33	0,36	0,67	0,61	0,46

Аналогичные результаты для отношений максимальных напряжений плиты, возникающих в точках $(x = L, y = 0)$; $(x = L, y = B/2)$ с другими граничными условиями: два смежных края заземлены, два других – свободные, представлены в табл. 8.8, а распределение максимальных напряжений на рис.8.3. Отсюда следует, что в этом случае наибольшие нормальные и поперечные напряжения сдвига возникают в точках $x = 1, y = 0$ и $x = 1, y = 1/2$, а продольные напряжения сдвига – соответственно в точках $x = 0, y = 0$ и $x = 0, y = 1/2$ (см. рис 8.3).

Таблица 8.8

Зависимость отношений максимальных напряжений от параметров в плане для граничных условий заземленный-свободный края по разработанному методу

$k_0^{-1} = \frac{B}{L}$	$\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x = L, y = 0)$	$\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x = L, y = \frac{B}{2})$	$\frac{\sigma_{yz}}{\sigma_{xz}}(x = L, y = 0)$	$\frac{\sigma_{yz}}{\sigma_{xz}}(x = L, y = \frac{B}{2})$
0,5	3,93	3,75	2,00	2,93
0,6	3,20	2,93	1,71	2,20
0,7	2,40	2,00	1,42	1,80
0,8	1,85	1,43	1,23	1,42
0,9	1,32	1,12	1,11	1,21
1,0	1,00	1,00	1,00	1,00
1,1	0,82	0,90	0,92	0,91
1,2	0,70	0,80	0,85	0,82
1,3	0,60	0,71	0,79	0,75
1,4	0,53	0,62	0,75	0,65
1,5	0,44	0,50	0,70	0,58
1,6	0,37	0,45	0,65	0,51
1,7	0,32	0,37	0,60	0,46
1,8	0,29	0,34	0,56	0,41
1,9	0,27	0,30	0,53	0,37
2,0	0,25	0,27	0,50	0,34

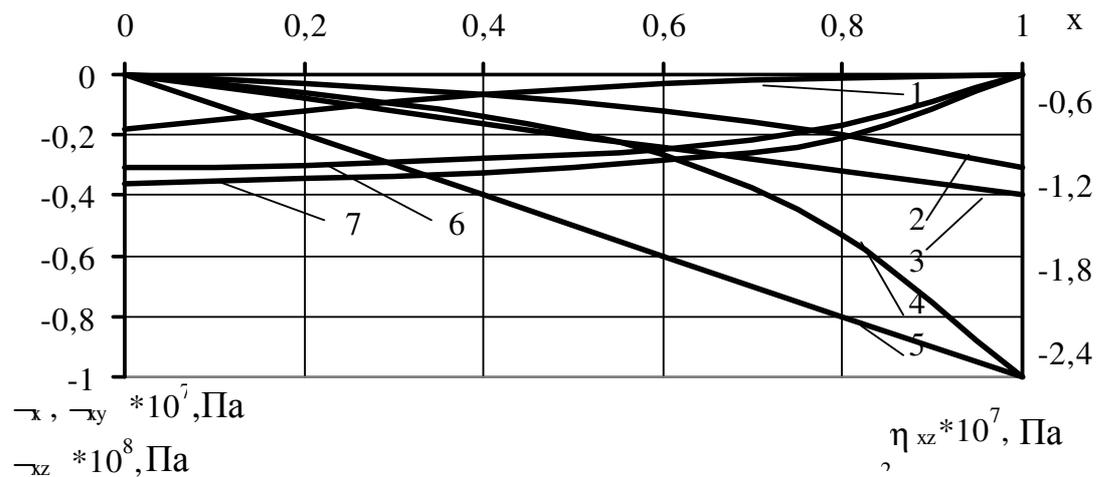


Рис.8.3. Распределение максимальных напряжений в нижней поверхности слоя угля, оставленного в кровле, при $t = 6$, $k_0^{-1} = 1$ для граничных условий: два смежных края защемлены, два других – свободные:
 1 – $\sigma_x(x, 0)$; 2 – $\sigma_x(x, 1/2)$; 3 – $\sigma_{xz}(x, 1/2)$; 4 – $\sigma_x(x, 0)$; 5 – $\sigma_{xz}(x, 0)$;
 6 – $\sigma_{xy}(x, 1/2)$; 7 – $\sigma_{xy}(x, 0)$

При этом наблюдается подобная тенденция, но с большей скоростью изменения напряжений по сравнению с предыдущими граничными условиями в зависимости от отношения сторон плиты (кровли), причем скорость изменения выше для нормальных напряжений изгиба в точке $x = L$, $y = 0$, чем для тех же напряжений в точке $x = L$, $y = B/2$ и тем более для поперечных напряжений сдвига соответственно в точках $x = L$, $y = B/2$ и $x = L$, $y = 0$.

Аналогичное распределение напряжений с практически равными значениями по величине, но с обратными знаками, наблюдается в верхней поверхности верхнего слоя плиты, т.е. при $z = \frac{H_0}{2}$, даже при значительной разнице модулей упругости этих слоев.

Последовательность расположения слоев горных пород кровли, их толщины и механические характеристики, как было отмечено выше, меняются в широких диапазонах, поэтому изучено влияние изменения этих параметров на ее напряженное состояние.

Рассмотрена одна из наиболее распространенных пожароопасных ситуаций, когда в кровле обрабатываемого пласта оставляют пачку угля. Получены распределения максимальных напряжений в нижнем слое толщи пород кровли пласта в зависимости от общей мощности (толщины) H_0 кровли и отношения модулей упругости в плоскости напластования горных пород к поперечному их направлению при количестве слоев $t = 6$ и отношении параметров в плане $k_0^{-1} = 1$, результаты которых для двух видов граничных условий приведены на рис. 8.4-8.6.

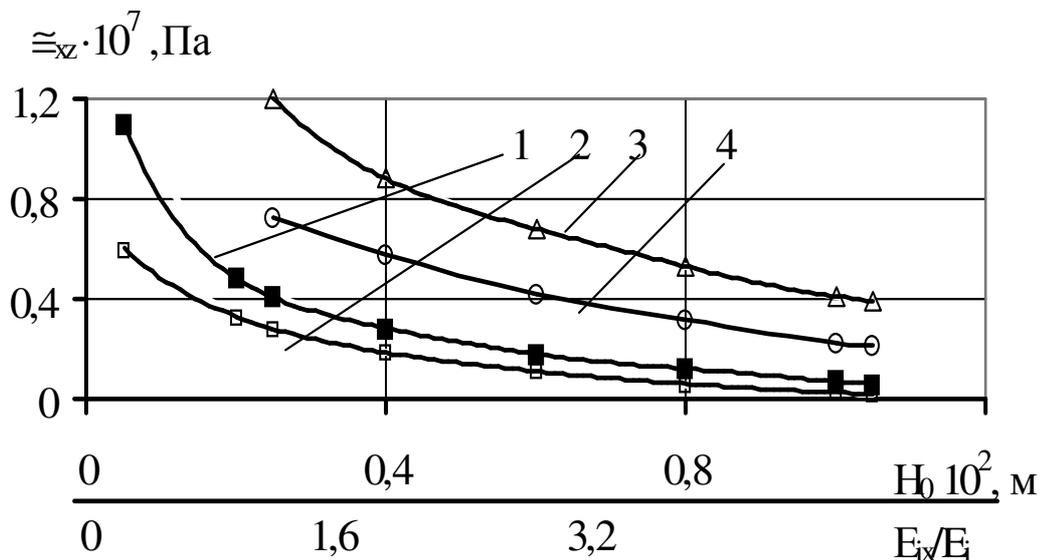


Рис.8.4. Зависимость максимальных поперечных напряжений сдвига в слое угля от мощности кровли (1,2) и коэффициента анизотропии пород (3,4) при $t = 6$, $k_0^{-1} = 1$ для граничных условий:
два смежных края защемлены, два других – свободно опертые:
1,3 – $\sigma_{xz}(1,1/2)$; 2,4 – $\sigma_{xz}(0,1/2)$

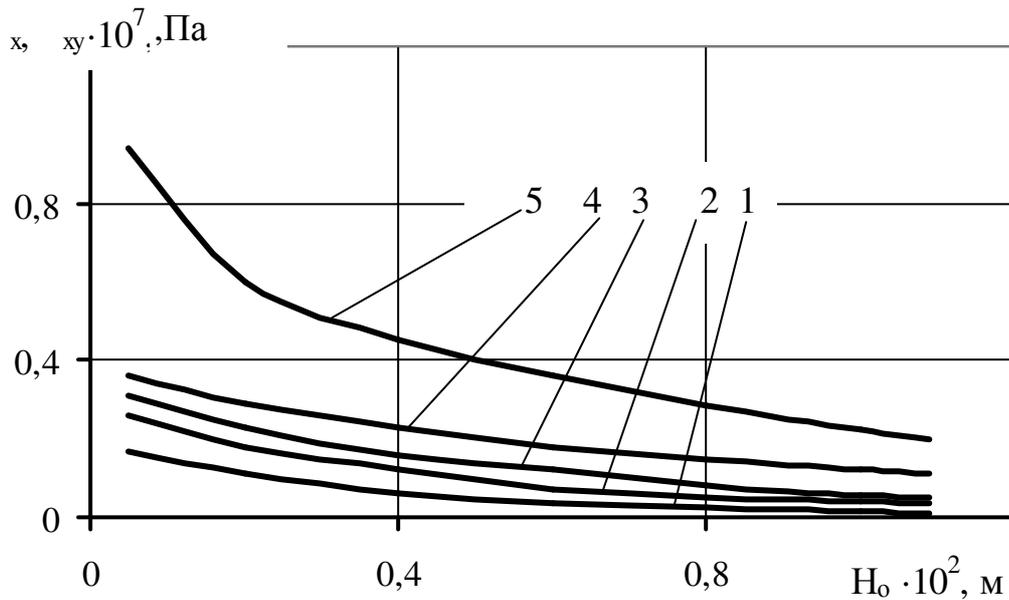


Рис.8.5. Зависимость максимальных напряжений σ_x , σ_{xy} в слое угля от его толщины при $t = 6$, $k_0^{-1} = 1$ для граничных условий:

два смежных края защемлены, два других – свободные:

1 – $\sigma_x(0,1)$; 2 – $\sigma_{xy}(0,1/2)$; 3 – $\sigma_{xy}(0,0)$; 4 – $\sigma_x(1,1/2)$; 5 – $\sigma_x(1,0)$

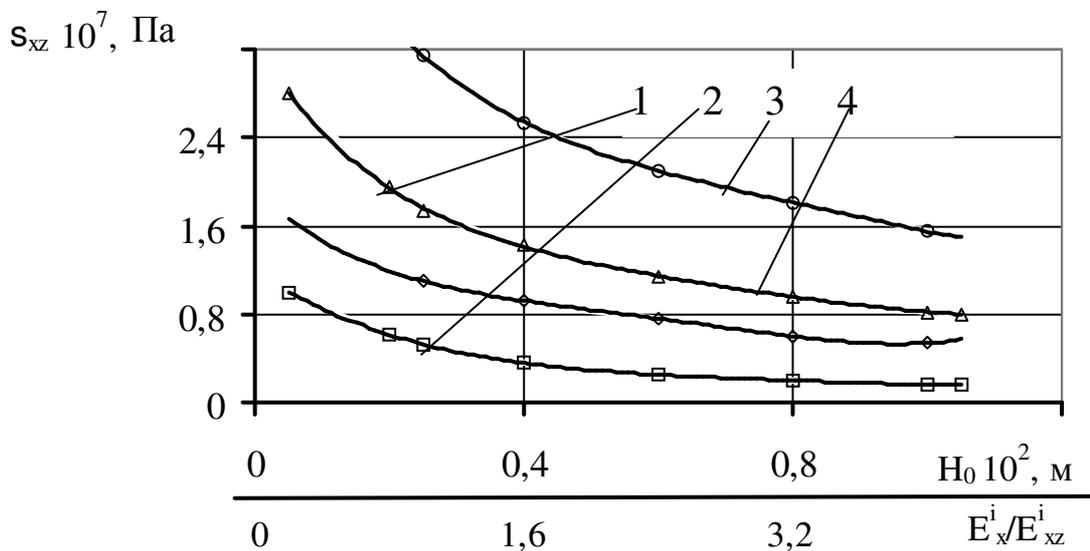


Рис.8.6. Зависимость максимальных поперечных напряжений сдвига в слое угля

от толщины (1,2) и коэффициента анизотропии (3,4) при $t = 6$, $k_0^{-1} = 1$

для граничных условий: два смежных края защемлены, два других

свободные: 1,3 – $\sigma_{xz}(1,0)$; 2,4 – $\sigma_{xz}(1,1/2)$

Как показывают результаты исследований, в обоих случаях при увеличении толщины и отношения модулей упругости, напряжения уменьшаются, при этом, как и следовало ожидать, их величины значительно выше у плиты с граничными условиями защемление – свободный край.

Максимальные напряжения σ_x и σ_{xy} для плиты с граничными условиями защемление – свободная опора не приведены, так как они ниже, чем предел прочности угля, а, следовательно, анализу в дальнейшем не подлежат.

В случае с граничными условиями защемление – свободный край, при изменении отношения модулей упругости слоев в указанном интервале, плоское напряженное состояние плиты меняется незначительно, поэтому эти результаты также не приведены.

Исследования влияния на напряженное состояние кровли в зависимости от расположения слоев (без слоя угля), их толщины, жесткости с различной комбинацией, общей жесткости проведено с использованием данных табл. 8.9, результаты которых для двух случаев граничных условий приведены на рис.8.7 и 8.8.

Отсюда следует, что независимо от указанных варьируемых параметров слоев, напряженное состояние кровли зависит от общей жесткости, причем, как и в предыдущих случаях, с увеличением жесткости (толщины) напряжения уменьшаются и наоборот, а скорость изменения напряжений значительно выше в точке $(x = 1, y = 0)$ – в начале защемленного края при граничных условиях защемление-свободный край и в точке $(x = 1, y = 1/2)$ для граничных условий защемление-свободная опора.

В результате тектонических процессов и воздействия очистных работ в горных породах образуются трещины, которые влияют на механические характеристики кровли, а, следовательно, на ее напряженное состояние. Используя данные табл.8.9 зависимости, в том числе усредненные значения для ширины трещины и расстояния между трещинами, исследовано напряженное состояние плиты с наиболее распространенными их системами: зияющими и с хаотиче-

Таблица 8.9

Данные для расчета напряжений в плите

№ пп	Последовательность расположения слоев кровли с параметрами в плане $k_o^{-1}=1$	Толщина слоев, h^i , м	Общая толщина плиты H_o , м	Жесткость (Па·м ³ ,) на			Ширина трещины, δ^i , м	Расстояние между трещинами, Δ^i , м
				изгиб слоев, D^i ,	изгиб плиты, D_o ,	сдвиг в поперечном направл D^*_o ,		
1	Песчаник	20	42	$1,6 \cdot 10^{13}$	4,0 $\cdot 10^{14}$	7,7 $\cdot 10^{11}$	10^{-4}	$5 \cdot 10^{-2}$
2	Известняк	10		$3,0 \cdot 10^{12}$				
3	Алевралит	6		$1,9 \cdot 10^{12}$				
4	Аргиллит	2		$2,9 \cdot 10^{11}$				
1	Аргиллит	10	38	$2,4 \cdot 10^{13}$	1,9 $\cdot 10^{14}$	6,1 $\cdot 10^{11}$	10^{-4}	$5 \cdot 10^{-2}$
2	Известняк	8		$5,0 \cdot 10^{12}$				
3	Алевралит	6		$5,0 \cdot 10^{11}$				
4	Песчаник	8		$2,9 \cdot 10^{10}$				
1	Аргиллит	2	32	$3,6 \cdot 10^{12}$	1,1 $\cdot 10^{14}$	5,1 $\cdot 10^{11}$	10^{-4}	$5 \cdot 10^{-2}$
2	Алевралит	3		$2,5 \cdot 10^{12}$				
3	Песчаник	5		$5,0 \cdot 10^{11}$				
4	Известняк	7		$1,6 \cdot 10^{12}$				
1	Аргиллит	2	17	$2,9 \cdot 10^{10}$	0,17 $\cdot 10^{14}$	2,7 $\cdot 10^{11}$	10^{-4}	$5 \cdot 10^{-2}$
2	Алевралит	3		$5,8 \cdot 10^{10}$				
3	Песчаник	5		$4,0 \cdot 10^{11}$				
4	Известняк	7		$1,9 \cdot 10^{12}$				

ской трещиноватостью, основные результаты которых для двух видов граничных условий приведены на рис.8.7 и 8.8.

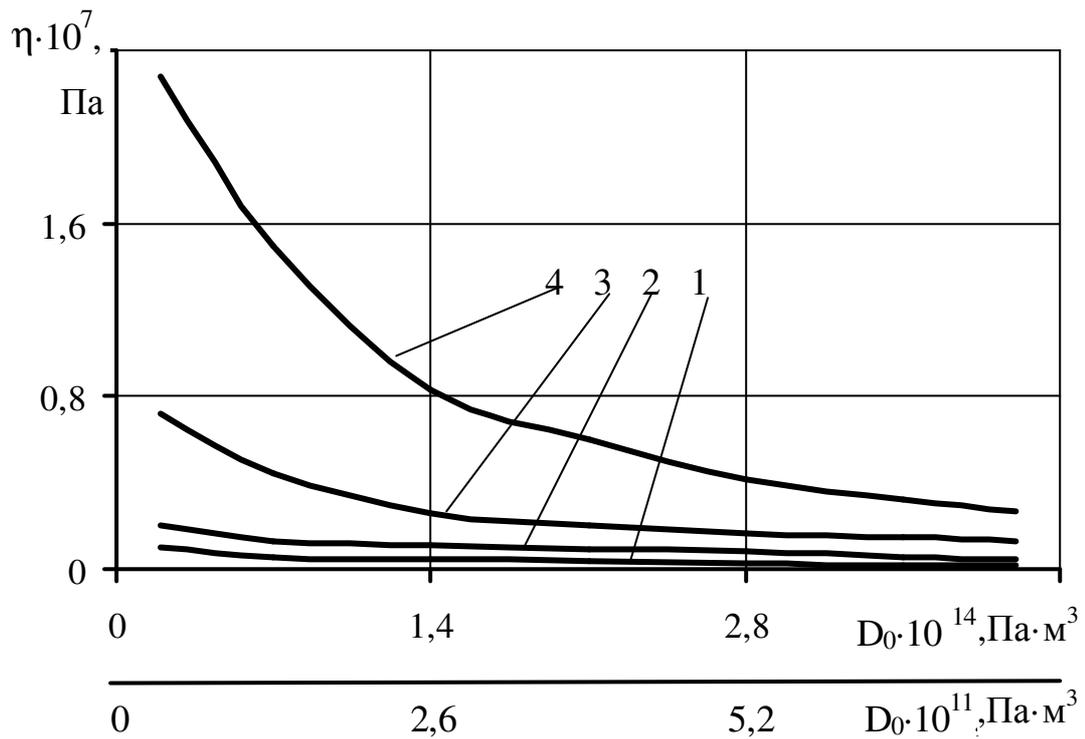


Рис.8.7. Зависимость максимальных напряжений σ_x , σ_{xz} от общей жесткости на изгиб D_0 и σ_{xz} от жесткости на сдвиг D_0^* в слоях кровли при $t = 6$, $k_0^{-1} = 1$ для граничных условий: два смежных края защемлены, два других – свободно оперты: 1 – $\sigma_x(1/2, 1/2)$; 2 – $\sigma_x(1, 1/2)$; 3 – $\sigma_{xz}(0, 1/2)$; 4 – $\sigma_{xz}(1, 1/2)$

В связи с тем, что значения модулей деформаций меньше значений модулей упругости для сплошной среды, а, следовательно, снизится общая жесткость, то с увеличением толщины уменьшается напряженное состояние плиты, что подтверждают приведенные результаты. При этом уровень напряжений ниже у пород с хаотической трещиноватостью. Следует отметить, что напряжения в кровле с зияющими трещинами в направлении оси y значительно ниже (примерно на три порядка), чем в направлении оси x .

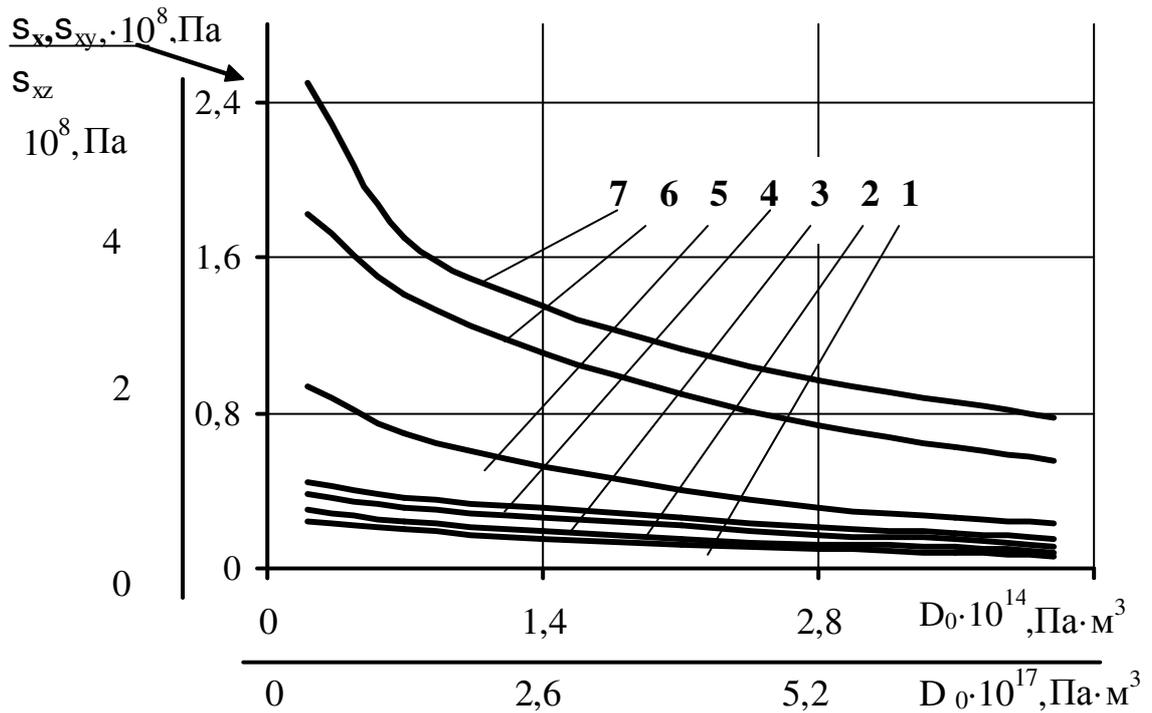


Рис.8.8. Зависимость максимальных напряжений σ_x , σ_{xy} от общей жесткости на изгиб D_0 и σ_{xz} от жесткости на сдвиг D_0^* в слоях кровли при $t = 4$, $k_0^{-1} = 1$ для граничных условий два смежных края защемлены, два других – свободны: 1 – $\sigma_x(0,1)$; 2 – $\sigma_{xy}(0,1/2)$; 3 – $\sigma_x(1,1/2)$; 4 – $\sigma_{xy}(1,1/2)$; 5 – $\sigma_{xz}(1,1/2)$; 6 – $\sigma_x(1,0)$; 7 – $\sigma_{xz}(1,0)$

На основании приведенных выше результатов исследована прочность горных пород кровли, для чего проведено сравнение максимальных напряжений, возникающих в кровле с предельными их значениями для каждого слоя согласно табл. 8.2. и, если они равны или их превышают, определены направления и зоны образования трещин.

Отправной точкой для этих исследований являются распределения напряжений в кровле с минимальной толщиной шести слоев, разными параметрами в плане и двумя случаями граничных условий, которые приведены на рис. 8.7 и 8.8.

Для кровли с граничными условиями защемление – свободная опора, распределение напряжений получено для слоя угля (см. рис.8.1), а предельные

их значения приведены в табл. 8.2. Из рис. 8.7 видно, что максимальные значения нормальных напряжений σ_x (1; 1/2) равные $1,5 \cdot 10^5$ Па, и продольные (касательные) напряжения сдвига σ_{xy} (0;0) – $0,97 \cdot 10^5$ Па ниже минимальных предельных их значений на растяжении и сдвиг для угля, меняющихся соответственно в пределах $(2,5 \dots 22,5) \cdot 10^5$ и $(24 \dots 100) \cdot 10^5$ Па (см. табл. 8.2).

В тоже время поперечные (касательные) напряжения сдвига σ_{xz} (1;1/2)= $1,2 \cdot 10^5$ Па, то есть посередине защемленного края, превышают предельные их значения на всем интервале, а σ_{xz} (0;1/2) = $0,72 \cdot 10^5$ Па, посередине опертого края, равно или превышает эти значения на интервале $(24 \dots 72) \cdot 10^5$ Па. При этом разрушающие напряжения могут возникнуть на расстоянии $(1 \dots 0,5)$, 30 м от защемленного края и соответственно $(0 \dots 0,25)$, т.е. 15 м от опертого края.

Таким образом, на участке кровли, с одинаковыми параметрами в плане ($k_0^{-1} = 1$), состоящей из шести слоев одинаковой минимальной толщины с параметрами согласно табл.8.1 при условиях защемление-свободная опора могут возникнуть в направлениях xoz и $yo z$ трещины посередине защемленных и опертых краев, причем в первом случае на расстоянии примерно в два раза больше, чем во втором.

С увеличением толщины кровли и отношения модулей упругости ее напряженное состояние снижается (рис.8.9) и при $H_0 > 30$ м, $\frac{E_x}{E_{xz}} > 4,0$ в середине опертого края, если σ_{xz} предельное равно $24 \cdot 10^5$ Па, а $H_0 > 8$ м, $\frac{E_x}{E_{xz}} > 1,4$ в середине защемленного края, если σ_{xz} предельное равно $10 \cdot 10^5$ Па, или $H_0 > 50$ м, если σ_{xz} предельное равно $24 \cdot 10^5$ Па, трещины образовываться не будут.

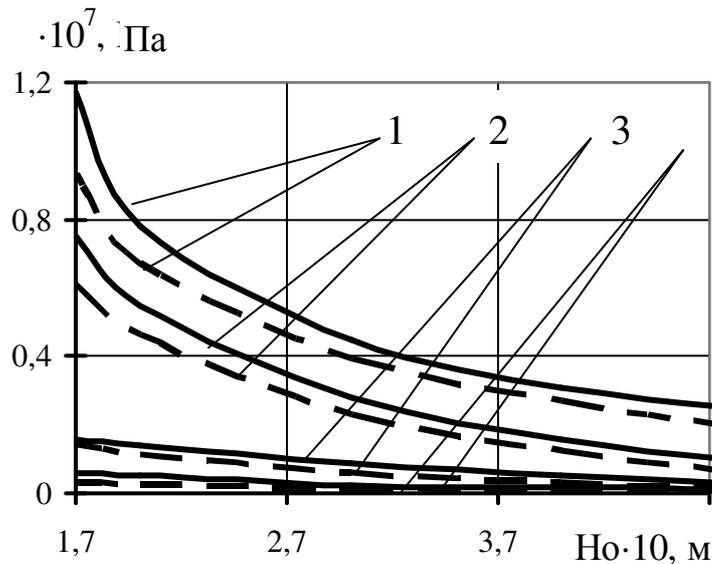


Рис.8.9. Зависимость максимальных напряжений в слоях кровли с системами трещин ($\delta^i=10^{-4}$ м, $\Delta^i=5 \cdot 10^{-2}$ м) при $t=4$, $k_0^{-1}=1$ для граничных условий два смежных края защемлены, два других – свободно опертые:
 1 – $\sigma_x(1/2,1/2)$; 2 – $\sigma_x(1,1/2)$; 3 – $\sigma_{xz}(0,1/2)$; 4 – $\sigma_{xz}(0,1/2)$; 5 – $\sigma_x(1,1/2)$; 6 – $\sigma_x(1,0)$; трещины: зияющие – **————** хаотические – **- - - -**

Если плита состоит из четырех слоев различной жесткости, то, как следует из рис.8.9, ее напряженное состояние снижается с увеличением жесткостей на изгиб и поперечный сдвиг. В этом случае нормальные $\sigma_x(1;1/2)$, $\sigma_x(1/2;1/2)$ и поперечные напряжения сдвига $\sigma_{xz}(0;1/2)$ значительно ниже их предельных значений для указанных пород и только напряжения поперечного сдвига $\sigma_{xz}(1;1/2)$, т.е. в середине защемленного края, близки к минимальному предельному значению напряжения для алевролита и превышают соответствующие их значения для аргиллита, песчаника (крупнозернистого) и известняка при $D_0=0,17 \cdot 10^{14}$ Па и $D_0^*=0,3 \cdot 10^{11}$ Па, что говорит о возможности появления аналогичных трещин в середине защемленных краев от поперечных сил.

Выше рассматривалось напряженное состояние кровли с одинаковыми параметрами в плане, т.е. при $k_0^{-1}=1$. Однако распределение напряжений меняется в зависимости от их отношения, причем напряжения увеличиваются в на-

правлении большей стороны и при $k_0^{-1} = 0,5$ или $k_0^{-1} = 2,01$ нормальные напряжения в одном из направлений больше примерно в 1,5 и 3,0 раза, а поперечные напряжения сдвига примерно в 2,0 раза. Поэтому в данном случае максимальные нормальные напряжения в точке $(1/2; 1/2)$, т.е. вблизи середины плиты достигнут предельного их значения для угля и могут появиться трещины в направлении большей стороны, соответствующие напряжения в середине защемленного края $(1; 1/2)$ приблизятся к предельному значению, а увеличение поперечных напряжений сдвига повлечет за собой увеличение зоны появления трещин.

В кровле с четырьмя слоями нормальные напряжения в этих двух точках достигнут предельных значений на растяжение только для алевролита, что явится причиной появления здесь трещин, а поперечные напряжения сдвига, увеличенные в 2,15 раза в середине защемленного края, вызовут появление трещин также у алевролита и песчаника (мелкозернистого). При этом расширится область появления трещин с увеличением значений жесткостей (толщины) и отношения модулей упругости слоев кровли.

Перейдем к исследованию прочности кровли с граничными условиями защемление - свободный край, для чего, как и в предыдущем случае, рассмотрим распределение напряжений, приведенное на рис.8.10.

В данном случае напряженное состояние плиты естественно значительно выше, а опасными точками, подлежащими анализу для определения ее прочности, являются: для нормальных напряжений $\sigma_x (1, 0)$, $\sigma_x (1, 1/2)$, $\sigma_x (0, 1)$, для продольных напряжений $\sigma_{xy} (0, 0)$, $\sigma_{xy} (0, 1/2)$ и поперечных напряжений $\sigma_{xz} (1, 0)$ и $\sigma_{xz} (1, 1/2)$. Аналогичная картина распределения напряжений наблюдается в направлении оси u с координатами при замене x на u , и наоборот.

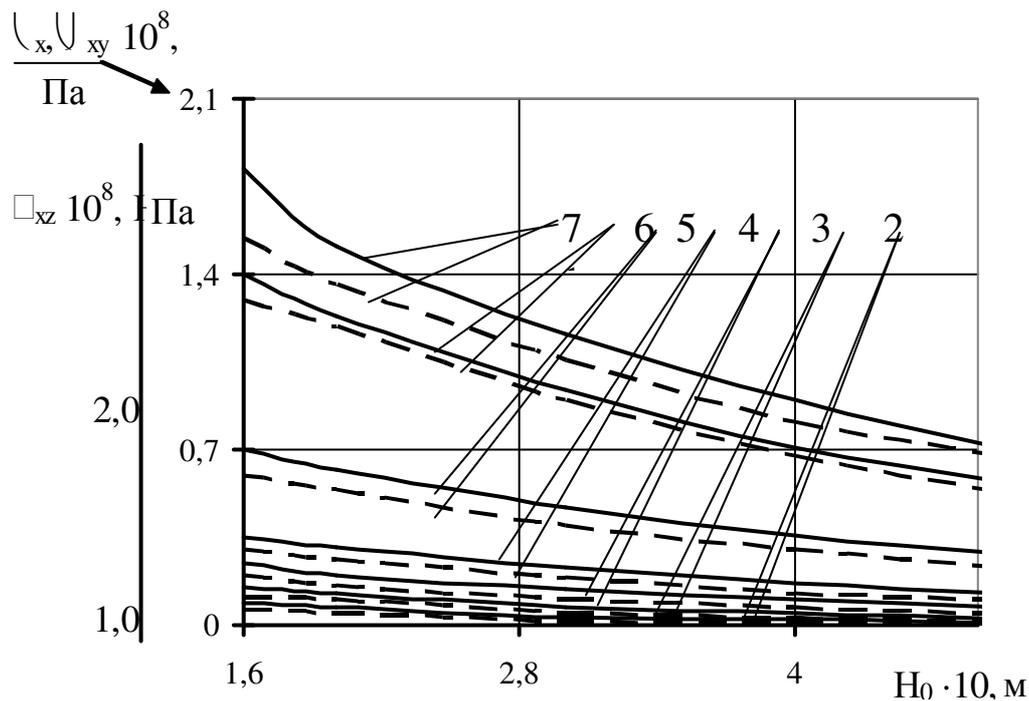


Рис.8.10. Зависимость максимальных напряжений в слоях кровли с системами трещин ($\delta^i = 10^{-4}$ м, $\Delta^i = 5 \cdot 10^{-2}$ м) при $t = 4$, $k_0^{-1} = 1$ от толщины плиты для граничных условий два смежных края защемлены, два других – свободные: 1 – $\sigma_x(0, 1)$; 2 – $\sigma_{xy}(0, 1/2)$; 3 – $\sigma_x(1, 1/2)$; 4 – $\sigma_{xy}(0, 0)$; 5 – $\sigma_{xz}(1, 1/2)$; 6 – $\sigma_x(1, 0)$; 7 – $\sigma_{xz}(1, 0)$; трещины: зияющие - — ; хаотические - - - -

Как следует из рис. 8.10 наиболее нагруженными точками, откуда начнут появляться во всех направлениях трещины являются места начального защемления краев кровли, где возникают нормальные σ_x , σ_y и поперечные σ_{xz} , σ_{yz} напряжения сдвига, которые, несмотря на снижение их к свободным краям, на большей части интервала длины превышают соответствующие предельные значения для угля на растяжение, сжатие и сдвиг. Разрушающими являются эти напряжения в средней части защемленных краев, которые, будучи меньше примерно в три раза с аналогичным законом изменения к свободным краям, также на большом своем интервале превышают продольные значения. Разрушающими для слоя угля являются и продольные напряжения сдвига, которые, незначительно отличаясь по величине в уступе в средней части свободных краев плиты и уменьшаясь к защемленным ее краям, могут явиться причиной по-

явления зияющих трещин. Несмотря на то, что с увеличением отношения модулей упругости слоев пород и их толщин напряженное состояние кровли снижается (см. рис. 8.3, 8.4), в указанных точках во всех направлениях трещины сохраняются.

В четырехслойной кровле с различным расположением слоев при увеличении их жесткостей (толщин) в пределах, указанных в табл.8.1 и рис.8.9, несмотря на снижение напряженного состояния, во всех этих точках действуют те или иные разрушающие напряжения или их сочетания, которые обуславливают появление систем с хаотической трещиноватостью.

С изменением параметров в плане напряжения в плите значительно возрастут (см. табл. 8.8) в направлении большей заземленной стороны.

Более подробно исследовать зоны появления трещин нет необходимости, т.к. при рассматриваемых граничных условиях во всех приведенных выше случаях произойдет обрушение кровли.

Таким образом, разработанный метод позволяет исследовать напряженное состояние кровли горных пород, состоящей из различного сочетания слоев переменной жесткости под действием распределенной нагрузки от собственной массы при различных граничных условиях, а, следовательно, определять напряжения, зоны образования, вид трещин и влияние изменения горно-геологических условий на изменение газодинамического режима проветривания горных выработок.

8.2. Напряженно-деформированное состояние армированного анкерами монтажного ходка

8.2.1. Выбор расчетных схем закрепленных анкерами кровли и угольного пласта монтажного ходка

Изменение характера и интенсивности деформационных процессов в окружающих выработки породах на больших глубинах стало причиной, что мно-

гие способы поддержания, технические и технологические решения исчерпали свои возможности по обеспечению их устойчивости.

В настоящее время одним из перспективных направлений обеспечения устойчивости выработок на больших глубинах является применение анкерных породоармирующих систем, что позволяет снизить затраты на их поддержание за счет повышения несущей способности породного массива.

Рассмотрим продольный разрез расположенной под углом лавы, непосредственная кровля которой закреплена анкерами (рис. 8.11), а поперечный разрез приведен на рис. 8.12.

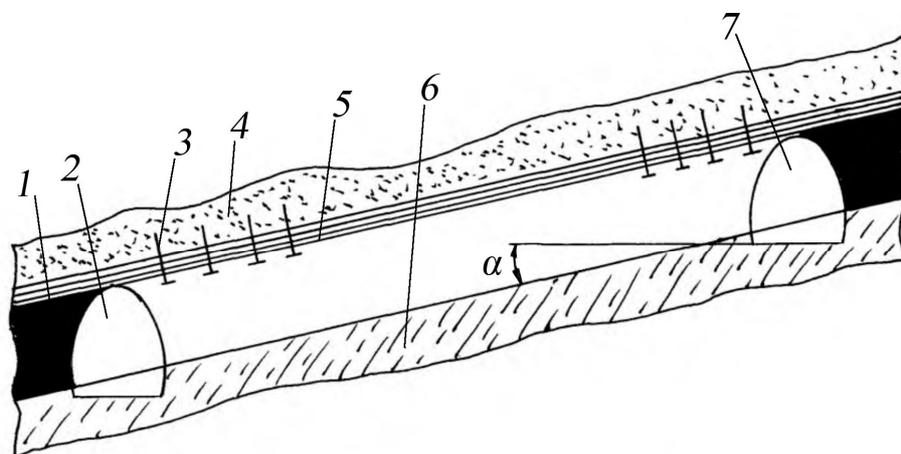


Рис. 8.11. Продольный разрез лавы: 1 – угольный пласт; 2, 7 – откаточный и вентиляционный штреки; 3 – анкерное крепление; 4 – основная кровля; 5 – непосредственная (неустойчивая) кровля; 6 – почва; α – угол залегания пласта.

Примем расчетную схему кровли монтажного ходка в виде многослойной ортотропной пластины (плиты) с защемленными краями, механические характеристики слоев которой одинаковые в направлении координатной плоскости и отличны по нормали к ней, что характерно для горных пород, под действием равномерно распределенной нагрузки q (рис. 4.3).

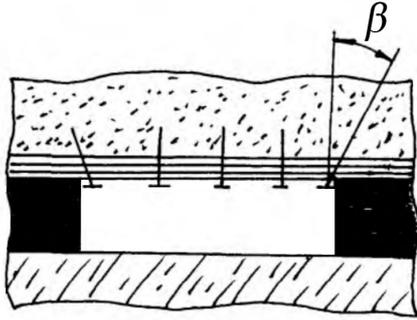


Рис.8.12. Поперечный разрез-лавы: β – угол наклона анкера

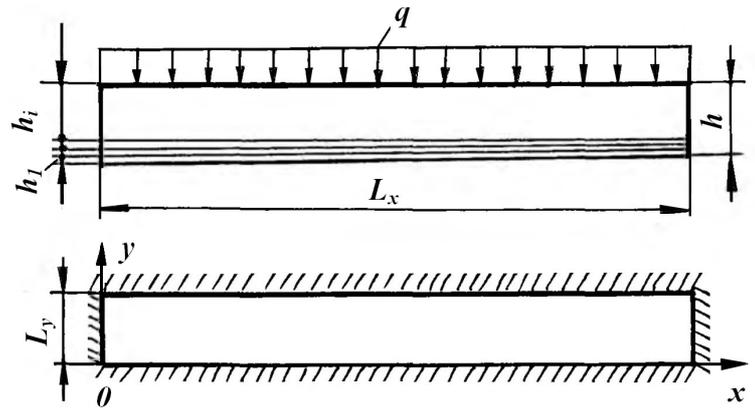


Рис.8.13. Расчетная схема монтажно-го ходка:

L_x, L_y – длина и ширина кровли;

h_1, \dots, h_i и h – толщины слоев непосредственной, основной кровли и общая толщина;

q – распределенная нагрузка закрепленной

Расчетная схема закрепленной анкерами угольного пласта монтажного ходка представляет собой анизотропную пластину, расположенную на жестком основании, под действием нормальной распределенной нагрузки от массы кровли q_z , и собственной массы q_z^* , один край которой защемлен, второй – свободный (без анкеров) или шарнирно опертый (анкерное крепление), остальные два – свободные (рис. 8.14).

В данном случае угольный пласт находится на жестком основании и испытывает нагрузки на сжатие от кровли и неравномерной собственной массы, что может привести к потере устойчивости.

В теориях упругости, пластин и оболочек решения задач на прочность или устойчивость любого тела приведены, как правило, при исследовании его напряженно-деформированного состояния с определением максимальных напряжений или критических сил.

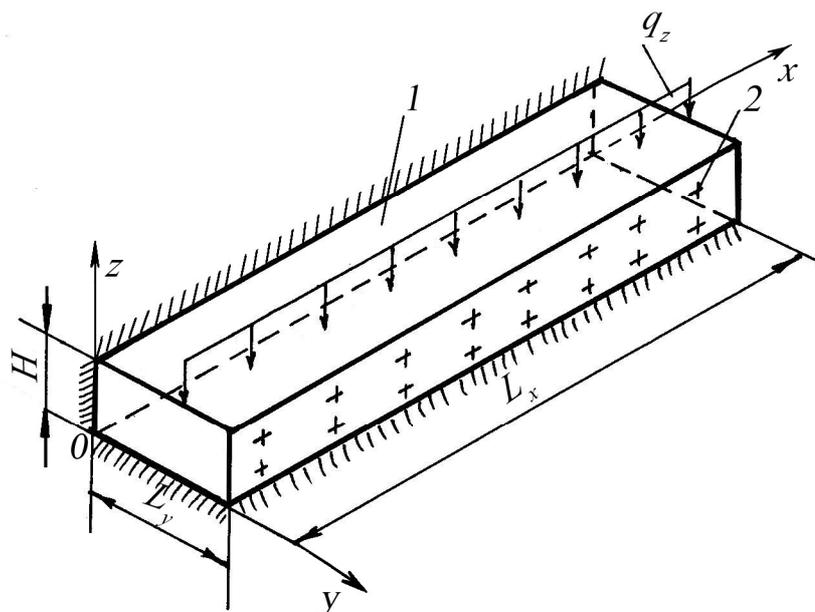


Рис.8.14. Расчетная схема угольного пласта монтажного ходка:
1 – угольный пласт; 2 – анкеры

В данном случае задача состоит в том, чтобы определить максимальный прогиб закрепленной анкерами массива горных пород кровли монтажного ходка, не превышающий нормативное значение, т.е. решить обратную задачу – в перемещениях.

В связи с тем, что на защемлённых краях пластины возникают внутренние моменты и поперечные силы, на свободных краях – перемещения и углы поворота, а на свободно-опёртых краях – углы поворота и поперечные силы, задача о напряженно-деформируемом состоянии пластины является смешанной

8.2.2. Напряженно-деформированное состояние кровли монтажного ходка

Пусть пластина отнесена к триортогональной системе прямолинейных координат так, что координатная плоскость xu совпадает со срединной ее плоскостью, а главные направления упругости материала пластины совпадают с координатными линиями.

При выводе основных уравнений примем следующие предположения:

а) деформации по нормали к срединной плоскости равны нулю, т.е.

$$e_z = 0; \quad (8.45)$$

б) слои пластины починаются закону Кирхгофа-Лява (гипотеза прямых нормалей);

в) поперечные касательные напряжения меняются по квадратичной зависимости, которые представим в виде

$$\tau_{xz} = f_1(z)\varphi(x, y), \quad \tau_{yz} = f_2(z)\psi(x, y), \quad (8.46)$$

где $\varphi(x, y), \psi(x, y)$ - произвольные искомые функции координат x, y ; $f_i(z)$ – функции, характеризующие законы изменения касательных напряжений τ_{xz}, τ_{yz} по толщине пластины.

Решая уравнения обобщенного закона Гука относительно напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$,

$$\begin{cases} e_x = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z; \\ e_y = a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z; \\ e_z = a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{33}\sigma_z; \\ e_{yz} = a_{44}\tau_{yz}; \\ e_{zx} = a_{55}\tau_{zx}; \\ e_{xy} = a_{66}\tau_{xy}. \end{cases}$$

получим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= B_{11}e_x + B_{12}e_y - A_1\sigma_z; \\ \sigma_y &= B_{12}e_x + B_{22}e_y - A_2\sigma_z; \\ \tau_{xz} &= B_{55}e_{xz}; \tau_{yz} = B_{44}e_{yz}; \tau_{xy} = B_{66}e_{xy}, \end{aligned} \quad (8.47)$$

где

$$\begin{aligned}
B_{11} &= \frac{a_{22}}{\Omega} = \frac{E_1}{\Delta}; B_{22} = \frac{a_{11}}{\Omega} = \frac{E_2}{\Delta}; \\
B_{12} &= -\frac{a_{12}}{\Omega} = \frac{\nu_2 E_1}{\Delta} - \frac{\nu_1 E_2}{\Delta}; B_{66} = \frac{1}{a_{66}} = G_{12}; \\
B_{55} &= \frac{1}{a_{55}} = G_{13}; B_{44} = \frac{1}{a_{44}} = G_{23}; \Omega = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \frac{\Delta}{E_1 E_2}; \\
\Delta &= 1 - \nu_1 \nu_2; A_1 = a_{13}B_{11} + a_{23}B_{12}; A_2 = a_{13}B_{12} + a_{23}B_{22},
\end{aligned} \tag{8.48}$$

E_1, E_2 и G_{12}, G_{13}, G_{23} – модули упругости и сдвига в плоскости xu и по нормали к ней соответственно;

ν_1, ν_2 – коэффициенты Пуассона соответственно в этих направлениях.

Компоненты деформаций и перемещений при $e_z = 0$ имеют вид

$$e_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}; e_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}; e_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}; \tag{8.49}$$

$$e_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}; e_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}; \tag{8.50}$$

$$e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0; u_z = u_z(x; y) = w(x; y), \tag{8.51}$$

Из уравнений (8.47) с учетом (8.46) и (8.48) для деформаций сдвига получим

$$e_{xz} = f_1(z)\Phi_1(x, y), \tag{8.52}$$

$$e_{yz} = f_2(z)\Phi_2(x, y), \tag{8.53}$$

где введены следующие обозначения

$$\Phi_1(x, y) = a_{55}\varphi, \Phi_2(x, y) = a_{44}\psi. \tag{8.54}$$

Подставляя значения e_{xz} , e_{yz} из (8.52) и (8.53) во второе и третье соотношения (8.49), при этом учитывая (8.51), получим

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial x} + f_1(z)\Phi_1, \quad (8.55)$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{\partial w}{\partial y} + f_2(z)\Phi_2. \quad (8.56)$$

Интегрируя выражения (8.55), (8.56) в пределах от нуля до z , при этом учитывая, что при $z = 0$, $u_x = u = 0$, $u_y = v = 0$, получим следующие значения тангенциальных перемещений какой-либо точки пластины:

$$u_x = -z \frac{\partial w}{\partial x} + I_{01}(z)\Phi_1 \quad (8.57)$$

$$u_y = -z \frac{\partial w}{\partial y} + I_{02}(z)\Phi_2 \quad (8.58)$$

где

$$I_{01} = \int_0^z f_1(z)dz; \quad I_{02} = \int_0^z f_2(z)dz. \quad (8.59)$$

В связи с тем, что при изгибе касательные напряжения τ_{xz} , τ_{yz} по толщине пластины изменяются почти по закону квадратичной параболы, полагаем, что

$$f_1(z) = f_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right). \quad (8.60)$$

Тогда, подставляя (8.60) в (8.59), получим

$$I_{01}(z) = I_{02}(z) = I_0(z) = \frac{z}{2} \left(\frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right). \quad (8.61)$$

Из (8.57), (8.58) с учетом (8.60), (8.61) и (8.54) для перемещений получим

$$\begin{cases} u_x = -z \frac{\partial w}{\partial x} + I_0(z) a_{55} \varphi \\ u_y = -z \frac{\partial w}{\partial y} + I_0(z) a_{44} \psi \end{cases}. \quad (8.62)$$

Подставляя значения u_x , u_y из (8.62) в соотношения (8.49), для соответствующих составляющих деформаций имеем

$$e_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + I_0 a_{55} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (8.63)$$

$$e_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + I_0 a_{44} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (8.64)$$

$$e_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + I_0 \left(a_{55} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + a_{44} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right). \quad (8.65)$$

Уравнения равновесия без учета объемных сил имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (8.66)$$

С учетом (8.48), (8.54), подставляя значения τ_{xz} , τ_{yz} из (8.46) в (8.66) и произведя интегрирование по z , для нормального напряжения σ_z найдем

$$\sigma_z = \chi(x, y) - I(z) \left[B_{55} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + B_{44} \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right], \quad (8.67)$$

где $\chi(x, y)$ является функцией интегрирования и может быть определена из условий на поверхностях пластинки, которые имеют следующий вид:

$$\sigma_z \left(\frac{h}{2} \right) = q; \quad \sigma_z \left(-\frac{h}{2} \right) = 0.$$

Удовлетворяя этим условиям, получим следующее выражение для $\chi(x, y)$:

$$\chi(x, y) = \frac{B_{55}}{2} \left[I_{01} \left(\frac{h}{2} \right) + I_{01} \left(-\frac{h}{2} \right) \right] \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \frac{B_{44}}{2} \left[I_{02} \left(\frac{h}{2} \right) + I_{02} \left(-\frac{h}{2} \right) \right] \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} + \frac{q}{2}, \quad (8.68)$$

а также уравнение:

$$B_{55} \left[I_{01} \left(\frac{h}{2} \right) - I_{01} \left(-\frac{h}{2} \right) \right] \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + B_{44} \left[I_{02} \left(\frac{h}{2} \right) - I_{02} \left(-\frac{h}{2} \right) \right] \frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = q. \quad (8.69)$$

При определении деформаций e_{xz} , e_{yz} считаем, что касательные напряжения τ_{xz} , τ_{yz} не отличаются от соответствующих напряжений (τ_{xz}^0 и τ_{yz}^0), найденных при наличии гипотезы недеформируемых нормалей, т.е. от соответствующих напряжений классической теории изгиба анизотропных пластин.

В силу предположения для касательных напряжений имеем

$$\tau_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \Phi_0; \quad (8.70)$$

$$\tau_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) \Psi_0; \quad (8.71)$$

где

$$\Phi_0 = - \left[B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} \right]; \quad (8.72)$$

$$\Psi_0 = - \left[B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial y \partial x^2} \right]; \quad (8.73)$$

а w_0 – решение уравнения для анизотропной пластины, полученное без учета третьего предположения

$$D_1 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} = q, \quad (8.74)$$

где D_1, D_2, D_3 – жесткости на изгиб в направлениях x, y и на сдвиг в плоскости пластины, соответственно.

Подставляя в выражения (8.47) значения e_x, e_y и e_{xy} из (8.63)-(8.65), а также значения σ_z из (8.67) с учетом (8.61), (8.68) и (8.70) – (8.73), для основных напряжений σ_x, σ_y и τ_{xy} получим

$$\sigma_x = -z \left(B_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + I_0 \left(B_{11} a_{55} \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} + B_{12} a_{44} \frac{\partial \Psi_0}{\partial y} \right) - A_1 q \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{3z}{2h} - 2 \frac{z^3}{h^3} \right) \right]; \quad (8.75)$$

$$\sigma_y = -z \left(B_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + I_0 \left(B_{22} a_{44} \frac{\partial \Psi_0}{\partial y} + B_{12} a_{55} \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right) - A_2 q \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{3z}{2h} - 2 \frac{z^3}{h^3} \right) \right]; \quad (8.76)$$

$$\tau_{xy} = -B_{66} \left[2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + I_0 \left(a_{55} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + a_{44} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \right) \right]. \quad (8.77)$$

Учитывая (8.70), (8.71), (8.75)-(8.77), а также (8.61), для внутренних сил и моментов получим

$$M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = - \left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \frac{h^2}{10} \left(D_{11} a_{55} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + D_{12} a_{44} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right) - \frac{h^2}{10} A_1 q; \quad (8.78)$$

$$M_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz = - \left(D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{h^2}{10} \left(D_{22} a_{44} \frac{\partial \psi_0}{\partial y} + D_{12} a_{55} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) - \frac{h^2}{10} A_2 q; \quad (8.79)$$

$$H = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = -2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{h^2}{10} D_{66} \left(a_{55} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + a_{44} \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \right); \quad (8.80)$$

$$N_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz = \frac{h^3}{12} \varphi_0; \quad (8.81)$$

$$N_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz = \frac{h^3}{12} \psi_0. \quad (8.82)$$

где $D_{ik} = \frac{h^3}{12} B_{ik}$ – жесткости на изгиб, сдвиг и кручение.

При этом имеем следующие уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} = -q \quad (8.83)$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial M_1}{\partial x} = N_1 \quad (8.84)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y} = N_2 \quad (8.85)$$

Исключая из уравнений равновесия (8.83)-(8.85) поперечные силы N_1 и N_2 , получим

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} = -q \quad (8.86)$$

Подставляя значения моментов из (8.78) – (8.80) в (8.86), получим одно разрешающее дифференциальное уравнение относительно искомой функции w

$$\begin{aligned} & D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \\ & = q + \frac{h^2}{10} \left\{ a_{55} \left[D_{11} \frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial x^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial x \partial y^2} \right] + a_{44} \left[D_{22} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial y^3} + (D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial x^2 \partial y} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (8.87)$$

Переходя к безразмерным величинам, получим уравнение (4.43) в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^4} + 2b_1 l^2 \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} + b_2 l^4 \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \bar{y}^4} = \\ & = \bar{q} + \frac{a_{55} B_{11}}{10} \bar{h}^2 \left\{ \frac{\partial^3 \bar{\varphi}_0}{\partial \bar{x}^3} + b_1 l^2 \frac{\partial^3 \bar{\varphi}_0}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} + \bar{a} \left[b_2 l^3 \frac{\partial^3 \bar{\psi}_0}{\partial \bar{y}^3} + b_1 l \frac{\partial^3 \bar{\psi}_0}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (8.88)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \frac{w}{h}; \bar{x} = \frac{x}{L_x}; \bar{y} = \frac{y}{L_y}; b_1 = \frac{D_{12} + 2D_{66}}{D_{11}}; b_2 = \frac{D_{22}}{D_{11}}; l = \frac{L_x}{L_y}; \\ \bar{q} &= \frac{q L_x^4}{D_{11} h}; \bar{h} = \frac{h}{L_x}; \bar{\varphi}_0 = \varphi_0 \frac{L_x^3}{h B_{11}}; \bar{\psi}_0 = \psi_0 \frac{L_x^3}{h B_{11}}; \bar{a} = \frac{a_{44}}{a_{55}}. \end{aligned} \quad (8.89)$$

Аналогично перейдем к безразмерным величинам в выражениях (8.72)-(8.74), (8.75) – (8.82), в результате чего получим

$$\bar{\varphi}_0 = - \left[\frac{\partial^3 \bar{w}_0}{\partial \bar{x}^3} + b_1 l^2 \frac{\partial^3 \bar{w}_0}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} \right]; \quad (8.90)$$

$$\bar{\psi}_0 = - \left[b_2 l^3 \frac{\partial^3 \bar{w}_0}{\partial \bar{y}^3} + b_1 l \frac{\partial^3 \bar{w}_0}{\partial \bar{y} \partial \bar{x}^2} \right]; \quad (8.91)$$

$$\frac{\partial^4 \bar{w}_0}{\partial \bar{x}^4} + 2d_3 l^2 \frac{\partial^4 \bar{w}_0}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} + d_2 l^4 \frac{\partial^4 \bar{w}_0}{\partial \bar{y}^4} = \frac{q L_x^4}{D_1 h}; \quad (8.92)$$

$$\sigma_x = B_{11} \left\{ -\bar{z} \bar{h}^2 \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + b_{12} l^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \bar{I}_0 \bar{h} B_{11} a_{55} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}_0}{\partial \bar{x}} + \bar{a} b_{12} l \frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial \bar{y}} \right) - \bar{A}_1 q \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \bar{z} - 2\bar{z}^3 \right) \right\} \quad (8.93)$$

$$\sigma_y = B_{11} \left[-\bar{z} \bar{h}^2 \left(b_2 l^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} + b_{12} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} \right) + \bar{I}_0 \bar{h} B_{11} a_{55} \left(\bar{a} b_2 l \frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial \bar{y}} + b_{12} \frac{\partial \bar{\varphi}_0}{\partial \bar{x}} \right) - \bar{A}_2 q \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \bar{z} - 2\bar{z}^3 \right) \right] \quad (8.94)$$

$$\tau_{xy} = -B_{66} \left[2\bar{z} \bar{h}^2 l \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \bar{I}_0 \bar{h} a_{55} B_{11} \left(l \frac{\partial \bar{\varphi}_0}{\partial \bar{y}} + \bar{a} \frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial \bar{x}} \right) \right]. \quad (8.95)$$

$$M_1 = h^2 B_{11} \left[-\frac{\bar{h}}{12} \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + b_{12} l^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} \right) + \frac{\bar{h}^4}{120} B_{11} a_{55} \left(\frac{\partial \bar{\varphi}_0}{\partial \bar{x}} + \bar{a} b_{12} l \frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial \bar{y}} \right) - \frac{1}{10} \bar{A}_1 q \right]; \quad (8.96)$$

$$M_2 = h^2 B_{11} \left[-\frac{\bar{h}^2}{12} \left(b_2 l^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} + b_{12} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} \right) + \frac{\bar{h}^4}{120} B_{11} a_{55} \left(b_2 \bar{a} l \frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial \bar{y}} + b_{12} \frac{\partial \bar{\varphi}_0}{\partial \bar{x}} \right) - \frac{1}{10} \bar{A}_2 q \right]; \quad (8.97)$$

$$H = \frac{D_{66}}{L_x} \left[-2\bar{h} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \frac{\bar{h}^3}{10} a_{55} B_{11} \left(l \frac{\partial \bar{\varphi}_0}{\partial \bar{y}} + \bar{a} \frac{\partial \bar{\psi}_0}{\partial \bar{x}} \right) \right]; \quad (8.98)$$

$$N_1 = \frac{h B_{11}}{12} \bar{h}^3 \bar{\varphi}_0; \quad (8.99)$$

$$N_2 = \frac{h B_{11}}{12} \bar{h}^3 \bar{\psi}_0. \quad (8.100)$$

где

$$\bar{w}_0 = \frac{w_0}{h}; \quad \bar{z} = \frac{z}{h}; \quad b_{12} = \frac{B_{12}}{B_{11}}; \quad \bar{I}_0 = \frac{I_0}{L_x^3} = \frac{\bar{z} \bar{h}}{2} \left(\frac{\bar{h}^2}{4} - \frac{\bar{z}^2 \bar{h}^2}{3} \right); \quad d_2 = \frac{D_2}{D_1}; \quad (8.101)$$

$$d_3 = \frac{D_3}{D_1}; \quad \bar{A}_1 = \frac{A_1}{B_{11}} = a_{13} + a_{23} b_{12}; \quad \bar{A}_2 = \frac{A_2}{B_{11}} = a_{13} b_{12} + a_{23} b_2$$

Для решения уравнения (8.88) необходимо определить функцию $\bar{w}_0(x, y)$ из уравнения (8.92). Это дифференциальные уравнения четвертого порядка в частных производных с переменными коэффициентами, точные решения кото-

рых отсутствуют. В связи с этим, используем один из основных методов решения краевых задач – конечно-разностный метод.

Будем решать оба уравнения численно в области $D = \{(x; y): 0 \leq x \leq L_x, 0 \leq y \leq L_y\}$. Введем в данной области разностную сетку размером $m \times n$, где m – количество точек разбиения вдоль оси x , где n – вдоль оси y . Таким образом, будем искать множество значений функции $\bar{w}_0(x, y)$ в точках x_i, y_j ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$). Обозначим $\bar{w}_{0,i,j} = \bar{w}_0(x_i, y_j)$, $x_{i+1} - x_i = y_{j+1} - y_j = \Delta x$.

Представим уравнение (4.48) в конечных разностях

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{w}_{0,i+2,j} - 4\bar{w}_{0,i+1,j} + 6\bar{w}_{0,i,j} - 4\bar{w}_{0,i-1,j} + \bar{w}_{0,i,j-2}}{\Delta \bar{x}^4} + \\ & + 2d_3 l^2 \frac{\bar{w}_{0,i+1,j+1} + \bar{w}_{0,i-1,j+1} + \bar{w}_{0,i+1,j-1} + \bar{w}_{0,i-1,j-1} - 2(\bar{w}_{0,i+1,j} + \bar{w}_{0,i-1,j} + \bar{w}_{0,i,j+1} + \bar{w}_{0,i,j-1}) + 4\bar{w}_{0,i,j}}{\Delta \bar{x}^4} + \\ & + d_2 l^4 \frac{\bar{w}_{0,i,j+2} - 4\bar{w}_{0,i,j+1} + 6\bar{w}_{0,i,j} - 4\bar{w}_{0,i,j-1} + \bar{w}_{0,i,j-2}}{\Delta \bar{x}^4} = \frac{qL_x^4}{D_1 h} \end{aligned} \quad (8.102)$$

Уравнение (8.88) в конечных разностях имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{w}_{0,i+2,j} - 4\bar{w}_{0,i+1,j} + 6\bar{w}_{0,i,j} - 4\bar{w}_{0,i-1,j} + \bar{w}_{0,i,j-2}}{\Delta \bar{x}^4} + \\ & + 2b_1 l^2 \frac{\bar{w}_{0,i+1,j+1} + \bar{w}_{0,i-1,j+1} + \bar{w}_{0,i+1,j-1} + \bar{w}_{0,i-1,j-1} - 2(\bar{w}_{0,i+1,j} + \bar{w}_{0,i-1,j} + \bar{w}_{0,i,j+1} + \bar{w}_{0,i,j-1}) + 4\bar{w}_{0,i,j}}{\Delta \bar{x}^4} + \\ & + b_2 l^4 \frac{\bar{w}_{0,i,j+2} - 4\bar{w}_{0,i,j+1} + 6\bar{w}_{0,i,j} - 4\bar{w}_{0,i,j-1} + \bar{w}_{0,i,j-2}}{\Delta \bar{x}^4} = \bar{q} + \\ & + \frac{a_{55} B_{11}}{10} \bar{h}^2 \{ \bar{\varphi}_{0,i+2,j} - 2\bar{\varphi}_{0,i+1,j} + 2\bar{\varphi}_{0,i-1,j} - \bar{\varphi}_{0,i-2,j} + \\ & + b_1 l^2 (\bar{\varphi}_{0,i+1,j+1} - 2\bar{\varphi}_{0,i+1,j} + \bar{\varphi}_{0,i+1,j-1} - \bar{\varphi}_{0,i-1,j+1} + 2\bar{\varphi}_{0,i-1,j} - \bar{\varphi}_{0,i-1,j-1}) + \\ & + \bar{a} [b_2 l^3 (\bar{\psi}_{0,i,j+2} - 2\bar{\psi}_{0,i,j+1} + 2\bar{\psi}_{0,i,j-1} - \bar{\psi}_{0,i,j-2}) + \\ & + b_1 l (\bar{\psi}_{0,i+1,j+1} - 2\bar{\psi}_{0,i,j+1} + \bar{\psi}_{0,i-1,j+1} - \bar{\psi}_{0,i+1,j-1} + 2\bar{\psi}_{0,i,j-1} - \bar{\psi}_{0,i-1,j-1}) \} \end{aligned} \quad (8.103)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_{0,i,j} = & -[\bar{w}_{0,i+2,j} - 2\bar{w}_{0,i+1,j} + 2\bar{w}_{0,i-1,j} - \bar{w}_{0,i-2,j} + \\ & + b_1 l^2 (\bar{w}_{0,i+1,j+1} - 2\bar{w}_{0,i+1,j} + \bar{w}_{0,i+1,j-1} - \bar{w}_{0,i-1,j+1} + 2\bar{w}_{0,i-1,j} - \bar{w}_{0,i-1,j-1})]; \end{aligned} \quad (8.104)$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{0,i,j} = & -[b_2 l^3 (\bar{w}_{0,i,j+2} - 2\bar{w}_{0,i,j+1} + 2\bar{w}_{0,i,j-1} - \bar{w}_{0,i,j-2}) + \\ & + b_1 l (\bar{w}_{0,i+1,j+1} - 2\bar{w}_{0,i,j+1} + \bar{w}_{0,i-1,j+1} - \bar{w}_{0,i+1,j-1} + 2\bar{w}_{0,i,j-1} - \bar{w}_{0,i-1,j-1})]; \end{aligned} \quad (8.105)$$

Граничные условия для защемленной по контуру пластины имеют вид

$$\begin{cases} \bar{w}(\Gamma\Gamma=0) \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial n}(\Gamma\Gamma=0) \end{cases} \quad (8.106)$$

где Γ – граница области D ; n – нормаль к Γ .

Запишем конечно-разностный аналог условий (4.62):

$$\begin{cases} \bar{w}_{0,j} = 0; \bar{w}_{m+1,j} = 0; \bar{w}_{i,0} = 0; \bar{w}_{i,n+1} = 0; \\ \bar{w}_{-1,j} = \bar{w}_{1,j}; \bar{w}_{m+2,j} = \bar{w}_{m,j}; \bar{w}_{i,-1} = \bar{w}_{i,1}; \bar{w}_{i,n+2} = \bar{w}_{i,n}. \end{cases} \quad (8.107)$$

В выражениях (8.107) индексы «0», «-1», « $m+1$ », « $m+2$ », « $n+1$ », « $n+2$ » соответствуют дополнительным законтурным точкам, введенным для корректной аппроксимации граничных условий.

Для функции \bar{w}_0 принимаются такие же граничные условия, как и для функции \bar{w} .

Жесткости изгиба и кручения для главных направлений упругости или главные жесткости в уравнениях (8.101), если координатную поверхность кровли расположим в нижней ее поверхности, имеют вид

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12\Delta}; \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12\Delta}; \quad D_k = \frac{Gh^3}{12}; \quad D_3 = D_1 \nu_2 + 2D_k; \quad \Delta = 1 - \nu_1 \nu_2. \quad (8.108)$$

$$D_{jk} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^s B_{jk} (h_i^3 - h_{i-1}^3), \quad (8.109)$$

где s – количество слоев горных пород кровли.

Считаем, что кровля представляет собой параллелепипед с ребрами h , L_x и L_y , а анкера расположены равномерно по длине и ширине кровли, как показано на рис.8.15, 8.16.

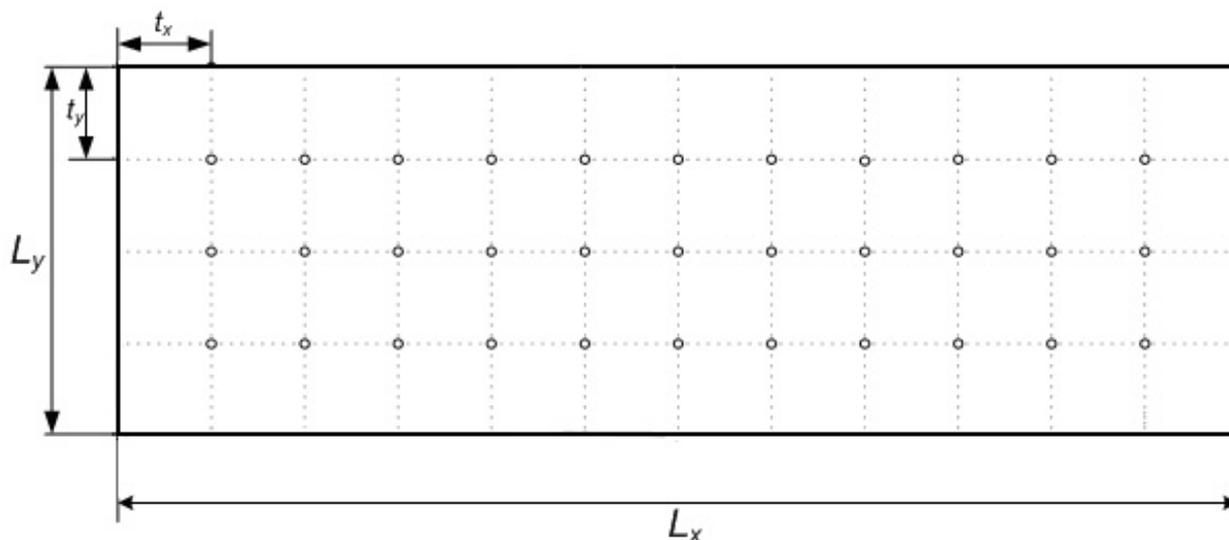


Рис. 8.15. Схема расположения анкеров в кровле

Обозначим расстояние между соседними анкерами вдоль оси x – t_x , вдоль оси y – t_y . Тогда количество анкеров в одном ряду вдоль осей x и y будем определять по формулам

$$K_x = \frac{L_x}{t_x} - 1; K_y = \frac{L_y}{t_y} - 1. \quad (8.110)$$

Анкер будем считать цилиндром с диаметром основания d_a и длиной l_a . Для упрощения расчетов примем следующее допущение. Кровля расположена под углом 20° к горизонту, а поэтому значения нагрузки q должны быть уменьшены на треть с учетом влияния этой ее части, действующей в плоскости кровли. Учитывая незначительное влияние этой нагрузки на напряженно-деформированное состояние кровли, примем действующую на нее полную нагрузку q , что приведет к увеличению перемещений кровли.

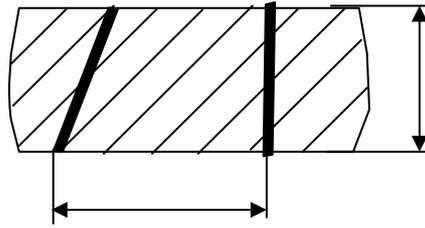


Рис. 8.16. Схема расположения анкеров

Коэффициенты E , v_i на двух участках, где анкеры расположены согласно рис 8.16 находим с помощью зависимостей

$$E_1^i = \frac{E_a d_a \sin \alpha + 2(t_x - d_a)E_n^i}{2t_x}; \quad E_2^i = \frac{E_a d_a \sin \alpha + 2(t_y - d_a)E_n^i}{2t_y};$$

$$G_{13}^i = \frac{G_a d_a \sin \alpha + 2(t_x - d_a)G_n^i}{2t_x}; \quad G_{23}^i = \frac{2t_y}{\frac{d_a \sin \alpha}{G_a} + \frac{2(t_y - d_a)}{G_n^i}}; \quad G_{12}^i = G_i^i; \quad (8.111)$$

$$v_x^i = \frac{v_a d_a \sin \alpha + 2(t_x - d_a)v_n^i}{2t_x}; \quad v_y^i = \frac{v_a d_a \sin \alpha + 2(t_y - d_a)v_n^i}{2t_y}.$$

Для остального (вертикального) расположения анкеров в уравнениях (8.111) необходимо приравнять $\sin \alpha = 0$ и не учитывать коэффициент 2.

Для упрощения расчетов примем следующее допущение. Кровля расположена под углом 20° к горизонту, а поэтому значения нагрузки q должны быть уменьшены на треть с учетом влияния этой ее части, действующей в плоскости кровли. Учитывая незначительное влияние этой нагрузки на напряженно-деформированное состояние кровли, примем действующую на нее полную нагрузку q , что приведет к увеличению перемещений кровли.

Тогда нормально распределенная нагрузка имеет вид

$$q = \sum_{i=1}^s \gamma_i h_i + n_1 \gamma_a l_a, \quad (8.112)$$

где γ_i, h_i – удельный вес слоев пород кровли, кН/м³ и их толщины, м;

n_1, γ_a – количество и удельный вес анкера, кН/м³.

При расчете приняты следующие исходные данные: $L_x = (150...300)$ м; $L_y = (5...7)$ м; $h = (2,0...3,0)$ м; количество слоев пород кровли $n = (4...7)$; толщины слоев $h_i = (0,5...0,7)$ м; модули упругости слоев $E_i = (2,7...4,5) 10^4$ МПа; коэффициенты Пуассона $\nu_i = (0,2... 0,25)$; длины анкеров $l_a = (1,8... 2,9)$ м; диаметры анкеров $d_a = (19...30)$ мм; удельный вес пород $\gamma_i = (24...29)$ кН/м³, $\gamma_a = 78$ кН/м³.

8.2.3. Устойчивость угольного пласта монтажного ходка

В механике твердого деформированного тела решения задач на прочность или устойчивость пластин в упругой области приведены, как правило, при исследовании интенсивности напряжений σ_i , МПа, в любой точке как для плоского напряженного состояния, которая не должна превышать предел пропорциональности $\sigma_{\text{пц}}$ (считается, что предел пропорциональности равен пределу упругости), т.е. в данном случае

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_y^2 - \sigma_y \sigma_z + \sigma_z^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_{\text{пц}}, \quad (8.113)$$

где σ_y, σ_z и τ – нормальные и касательные напряжения, действующие в плоскости пластины.

Анкеры расположены в угольном пласте в направлении y , образуя, таким образом, его слоистость, причем количество слоев угольного пласта на $i+1$ больше, чем с анкерами.

Пусть пластина отнесена к триортогональной системе прямолинейных координат так, что координатная плоскость xu совпадает со срединной ее плоскостью, а главные направления упругости материала пластины совпадают с координатными линиями.

Рассмотрим угольный массив как многослойную армированную пластину под действием внешней нагрузки от массы пород, закрепленных анкерами кровли q_z , и собственной массы q_z^* .

Зависимости между деформациями и напряжениями для i -слоя пластины согласно обобщенному закону Гука имеют вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^i &= \frac{1}{E_x^i}(\sigma_x^i - \nu_x^i \sigma_y^i) - \frac{\nu_z^i}{E_z^i} \sigma_z^i; \\ \varepsilon_y^i &= \frac{1}{E_y^i}(\sigma_y^i - \nu_x^i \sigma_x^i) - \frac{\nu_z^i}{E_z^i} \sigma_z^i; \\ \varepsilon_z^i &= -\frac{\nu_z^i}{E_z^i}(\sigma_x^i + \sigma_y^i) + \frac{1}{E_z^i} \sigma_z^i; \\ \varepsilon_{xy}^i &= \frac{1}{G_{xy}^i} \tau_{xy}^i; \quad \varepsilon_{xz}^i = \frac{1}{G_{xz}^i} \tau_{xz}^i; \quad \varepsilon_{yz}^i = \frac{1}{G_{yz}^i} \tau_{yz}^i,\end{aligned}\tag{8.114}$$

где E, G с индексами – модули упругости и сдвига слоев пластины, МПа;
 ν – коэффициенты Пуассона.

При решении задачи о плоском напряженно-деформированном состоянии принимаем, что напряжения в направлении свободных краев деформации в направлении защемленных краев, а также деформации сдвига равны нулю, т.е.

$$\sigma_x = 0, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{xy} = 0.\tag{8.115}$$

Пусть слои, начиная с верхнего слоя, имеют плотность $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ и толщину h_1, h_2, \dots, h_n .

Тогда нормальные напряжения соответственно примут вид

$$\begin{aligned}\sigma_z^1 &= q_z + \rho_1 h_1; \quad \sigma_z^2 = q_z + \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2; \\ \sigma_z^3 &= q_z + \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3 \text{ и т. д.};\end{aligned}\tag{8.116}$$

$$\sigma_z^n = q_z + \sum_{i=1}^n \rho_i h_i.$$

Подставляя выражение (8.116) в зависимости (8.114), для i -го слоя массива, получим

$$\sigma_y^n = \frac{v_z E_z}{E_y} (q_z + \sum_{i=1}^n \rho_i h_i). \quad (8.117)$$

Используя зависимость в общем виде

$$\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{E_z} (\sigma_z - v_z \sigma_x), \quad (8.118)$$

после интегрирования получим

$$w = \frac{1}{E_z} (\sigma_z - v_z \sigma_x) z + c. \quad (8.119)$$

Для первого $(n+1)$ слоя эта зависимость примет вид

$$w^{n+1} \left(\frac{h_{n+1}}{2} \right) = \frac{1}{E_z^{n+1}} (\sigma_z^{n+1} - v_z^{n+1} \sigma_y^{n+1}) \frac{h_{n+1}}{2} + c_{n+1}. \quad (8.120)$$

При $H_{n+1} = 0$

$$w^{n+1}(0) = 0. \quad (8.121)$$

Из выражения (8.120) следует

$$w^{n+1}(0) = c_{n+1} \quad \text{или} \quad c_{n+1} = 0. \quad (8.122)$$

Выражение (8.120) для первого слоя примет вид

$$w^{n+1} \left(\frac{h_{n+1}}{2} \right) = \frac{1}{E_z^{n+1}} (\sigma_z^{n+1} - v_z^{n+1} \sigma_y^{n+1}) \frac{h_{n+1}}{2}. \quad (8.123)$$

Перемещение в любой точке по высоте первого слоя

$$w^{n+1}(z) = \frac{1}{E_z^{n+1}} (\sigma_z^{n+1} - v_z^{n+1} \sigma_y^{n+1}) z. \quad (8.124)$$

Для второго слоя (n)

$$w^n(z) = \frac{1}{E_z^n} (\sigma_z^n - \nu_z^n \sigma_y^n) z + c_n. \quad (8.125)$$

Используя условие, что перемещения между первым и вторым слоем равны

$$w^n(h_{n+1}) = w^{n+1}(h_{n+1}),$$

получим

$$\frac{1}{E_z^n} (\sigma_z^n - \nu_z^n \sigma_y^n) h_{n+1} + c_n = w^{n+1}(h_{n+1}),$$

отсюда

$$c_n = w^{n+1}(h_{n+1}) - \frac{1}{E_z^n} (\sigma_z^n - \nu_z^n \sigma_y^n) h_{n+1}. \quad (8.126)$$

Перемещения в срединной поверхности второго слоя

$$w^n\left(h_{n+1} + \frac{h_n}{2}\right) = \frac{1}{E_z^n} (\sigma_z^n - \nu_z^n \sigma_y^n) \left(h_{n+1} + \frac{h_n}{2}\right) + c_n,$$

где c_n имеет вид (8.126).

Поступая аналогично для последующих слоев, в результате для последнего слоя ($n-k$) получим

$$w^{n-k}(H_{n-k}) = \frac{1}{E_z^{n-k}} (\sigma_z^{n-k} - \nu_z^{n-k}) H_{n-k} + c_{n-k}, \quad (8.127)$$

где

$$c_{n-k} = \frac{1}{E_z^{n-k+1}} (\sigma_z^{n-k+1} - \nu_z^{n-k+1} \sigma_y^{n-k+1}) \left(H_{n-k} - \frac{h_{n-k}}{2}\right) + c_{n-k+1} - \frac{1}{E_z^{n-k}} (\sigma_z^{n-k} - \nu_z^{n-k} \sigma_y^{n-k}) \left(H_{n-k} - \frac{h_{n-k}}{2}\right), \quad (8.128)$$

$$H_{n-k} = h_{n-k} + h_n + h_{n-1} + \dots + h_{n-k+1} + \frac{h_{n-k}}{2}.$$

Выше нечетные номера индексов относятся к слоям угольного пласта, четные – к анкерам.

Для вертикального расположения анкеров по оси y (рис.8.17)

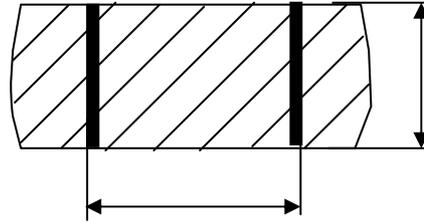


Рис. 8.17.Схема с вертикальным расположением анкеров

Обозначим расстояние между соседними анкерами вдоль оси x – t_x , вдоль оси z – t_z . Тогда количество анкеров в одном ряду вдоль осей x и z будем определять по формулам

$$K_x = \frac{L_x}{t_x} - 1; \quad K_z = \frac{H}{t_z} - 1. \quad (8.129)$$

Приведенные (осредненные) модули упругости и коэффициент Пуассона находим с помощью зависимостей

$$E'_z = \frac{E_a d_a + (t_z - d_a) E_z}{t_z}; \quad (8.130)$$

$$E'_y = \frac{t_z}{\frac{d_a}{E_a} + \frac{t_z - d_a}{E_y}}; \quad (8.131)$$

$$\nu'_z = \frac{\nu_a d_a + (t_z - d_a) \nu_z}{t_z}, \quad (8.132)$$

где E, ν – модули упругости и коэффициент Пуассона соответственно: величины с индексом «а» относятся к анкерам, а с индексом «п» – к уголю;

d_a – диаметр анкера, м.

В данном случае угольный пласт находится на жестком основании, защемленный в плоскости xOz и воспринимает сжимающие нагрузки, два края которого в направлении x – свободные, а поэтому поперечные касательные усилия при отсутствии изгибающих моментов $\tau_{yz} = \tau = 0$.

Подставляя значения нормальных и касательных напряжений σ_y, σ_z в уравнение (4.74) определяем выполнение условия устойчивости.

Следовательно, получены зависимости для напряжений армированного угольного пласта монтажного ходка, позволяющие определить необходимое количество анкеров и расстояние между ними, обеспечивающих его устойчивость.

8.2.4. Алгоритм решения задачи и результаты исследований напряженно-деформированного состояния кровли и угольного пласта монтажного ходка

Структурная блок-схема алгоритма решения задачи приведена на рис. 8.18.

Таким образом, будут рассмотрены наиболее адекватные к реальным расчетные схемы кровли и сопряженного с ней угольного пласта с учетом условий их применения при использовании критериев прочности: максимальные нормальные и касательные напряжения на растяжение, сжатие и соответственно на сдвиг не должны превышать своих предельных напряжений, то есть $\sigma_{\max(p, cж)} < \sigma_{п(p, cж)}$, $\tau_{\max} < \tau_i$ и критерия устойчивости: перемещения не должны превышать нормированных значений $w \leq 0,1 h$. В свою очередь максимальные напряжения и перемещения представим в виде функциональной зависимости величин без индексов

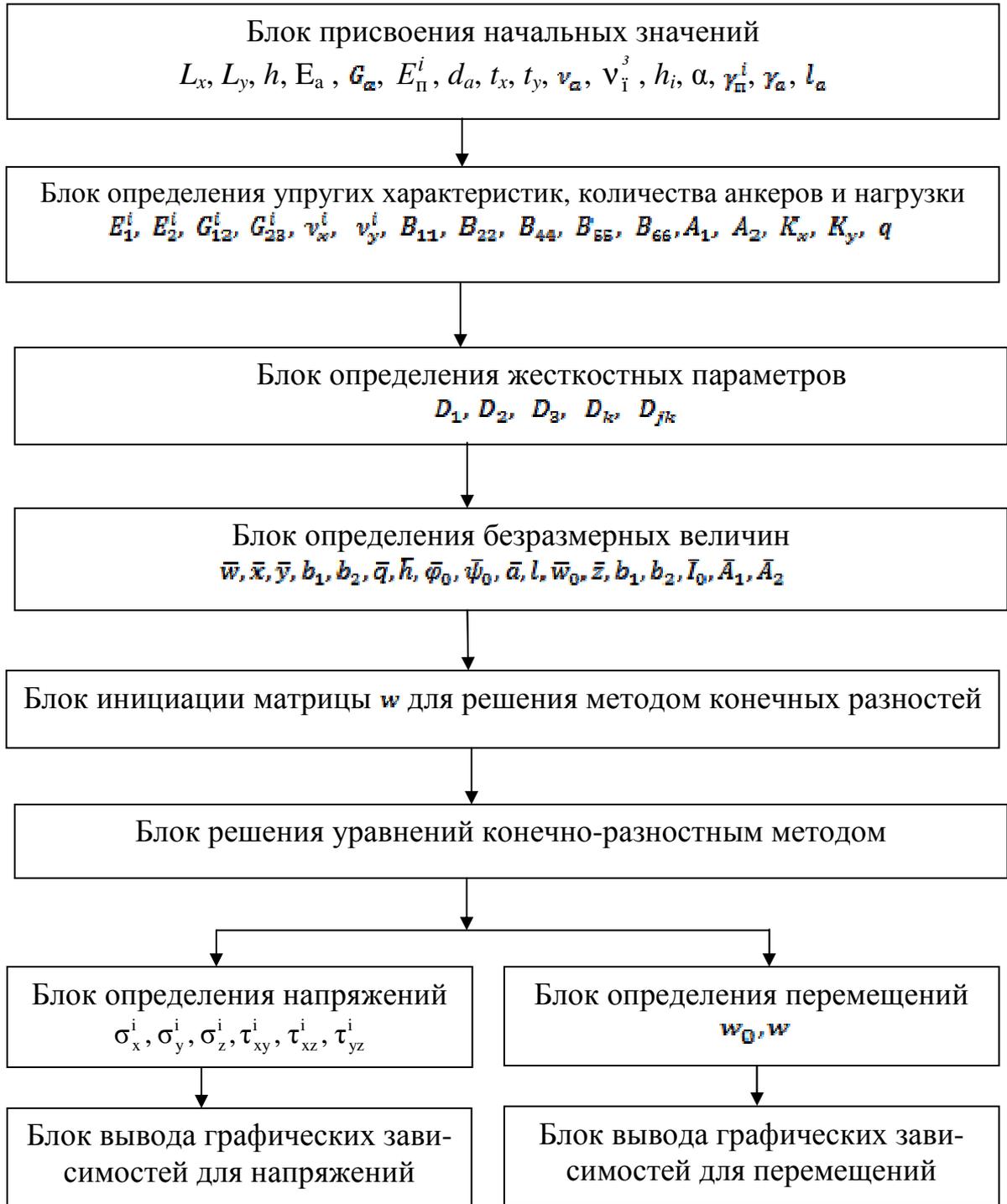


Рис. 8.18. Блок-схема алгоритма решения задачи о напряженно-деформированном состоянии кровли монтажного ходака конечно-разностным методом

$$\sigma_{\max(p, cж)}, \tau_{\max} = F_1(L, h, E, \nu, d, t, q, \Gamma Y); \quad (8.133)$$

$$w_{\max} = F_2(\sigma_{\max}, \tau_{\max}), \quad (8.134)$$

где ГУ – граничные условия.

Проверка адекватности результатов теоретических исследований с данными экспериментов, полученных для перемещений кровли монтажного ходка в условиях шахты «Добропольская», проведена при: $L_x = 90\text{ м}$, $L_y = 5\text{ м}$, $h = 2,0\text{ м}$, $n = 4$, $l_a = 2,4\text{ м}$, $d_a = 30\text{ мм}$, $E_i (i = 1, 2, 3) = 2,7 \cdot 10^4\text{ МПа}$, $E_4 = 4,5 \cdot 10^4\text{ МПа}$, $\nu_i = 0,2$, $\nu_a = 0,3$, $t_x = t_y = 0,8\text{ м}$, $\gamma_i (i = 1, 2, 3) = 24\text{ кН/м}^3$, $\gamma_4 = 29\text{ кН/м}^3$, $\gamma_a = 78\text{ кН/м}^3$.

Края кровли по длине лавы L_x находятся на рамах, а по ширине L_y защемлены, в связи с этим приняты граничные условия в направлении x , а в направлении y имеют вид

$$\begin{cases} \bar{w}(\Gamma\Gamma = 0); \\ \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial n^2}(\Gamma\Gamma = 0). \end{cases}$$

Количество точек разбиения вдоль оси x выбраны $m = 50$, вдоль оси y $n = 3$, с последующим их увеличением до тех пор, пока разница между предыдущими и последующими результатами по перемещениям и напряжениям не превысит 5%.

Учитывая тот факт, что данные экспериментов получены для большого количества (80-ти) точек, ниже приведены результаты максимальных перемещений (рис. 8.19), которые имеют место в средней части кровли. При этом учтено, что монтажный ходок находился в условиях повышенной влажности, поэтому модули упругости пород при расчете уменьшены в 1,5 раза.

Результаты исследований показывают, что максимальная погрешность результатов расчета и данных экспериментов не превышает 22%, а перемещения кровли w (кривая 2) по сравнению с w_0 (кривая 1) увеличиваются примерно на 30%.

Определим максимальные перемещения и напряжения в армированной анкерами кровле монтажного ходка с заземленными краями.

При расчете приняты следующие исходные данные: $L_x = 150 \dots 300$ м; $L_y = 5 \dots 7$ м, $h = 2,0 \dots 3,0$ м, $n = 4 \dots 7$, $h_i = 0,5 \dots 0,7$ м, $E_i = (2,7 \dots 4,5) \cdot 10^4$ МПа, $\nu_i = 0,2 \dots 0,25$, $E_a = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu_a = 0,3$, $l_a = 1,8 \dots 2,9$ м, $d_a = 19 \dots 30$ мм, $\gamma_i = 24 \dots 29$ кН/м³, $\gamma_a = 78$ кН/м³.

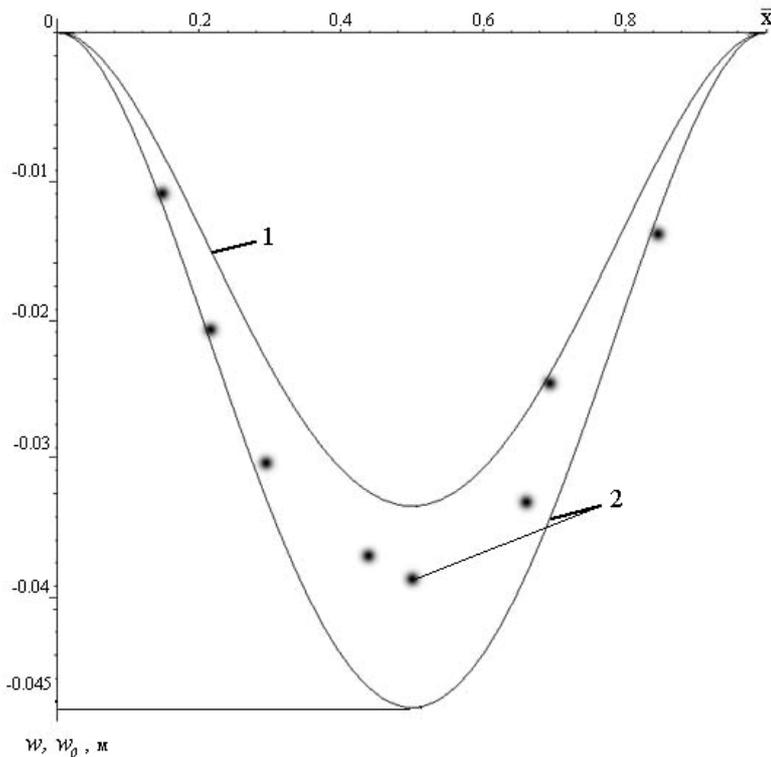


Рис. 8.19. Зависимости перемещений w_0 (1) и w (2) армированной анкерами кровли шахты «Добропольская» от безразмерной координаты \bar{x} :

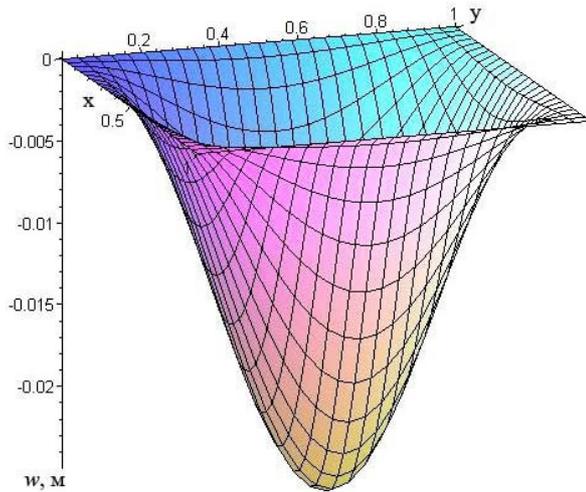
- – данные экспериментальных исследований

В частности, распределение максимальных перемещений и нормальных напряжений по безразмерным координатам для армированной анкерами кровли монтажного ходка приведены соответственно на рис. 8.20, а, б и в, г. Остальные значения нормальных σ_y и касательных напряжения τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz} являются значительно меньшими полученных, не достигая своих предельных значений, поэтому они не приведены.

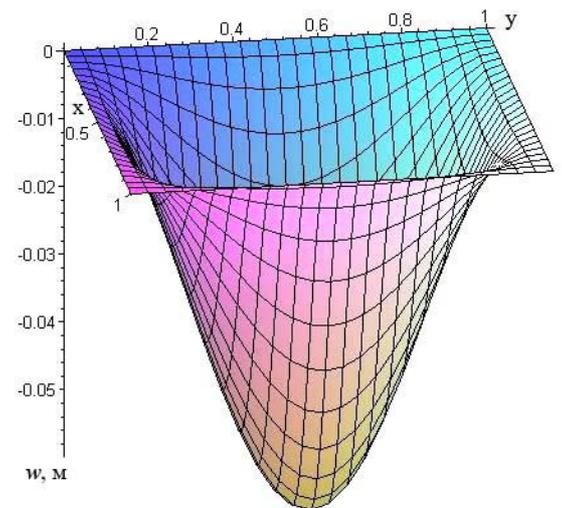
Результаты исследований показывают, что увеличение длины лавы ($L_x = 300$ м) в 2,0 раза ($L_x = 150$ м) при ее ширине $L_y = 5$ м, армированной анкерами на расстоянии между ними, в основном 0,8 м, как и кровля монтажного ходка шахты «Добропольская», приводит к увеличению максимальных перемещений и напряжений в 2,5 раза. Максимальными являются напряжения на сжатие (см. рис. 8.20, в, г), которые более, чем в два раза выше напряжений на растяжение. Эти напряжения, а также перемещения не достигают своих предельных и нормативных значений.

Необходимо отметить тот факт, что приведенные модули упругости, а, следовательно, жесткости армированной анкерами кровли в направлении расположения анкеров существенно увеличиваются, особенно при малых расстояниях между ними, а в нормальных направлениях - практически не изменяются. Поэтому можно принять их равными для горных пород. Это подтверждено результатами исследований напряженно-деформированного состояния угольного пласта, результаты которых приведены ниже при определении его прочности и устойчивости. С другой стороны, необходимо учитывать, что с увеличением модуля упругости в направлении расположения анкеров увеличиваются однозначно предельные значения напряжений на сжатия в этом направлении, которые в дальнейшем необходимо определить экспериментальным путем.

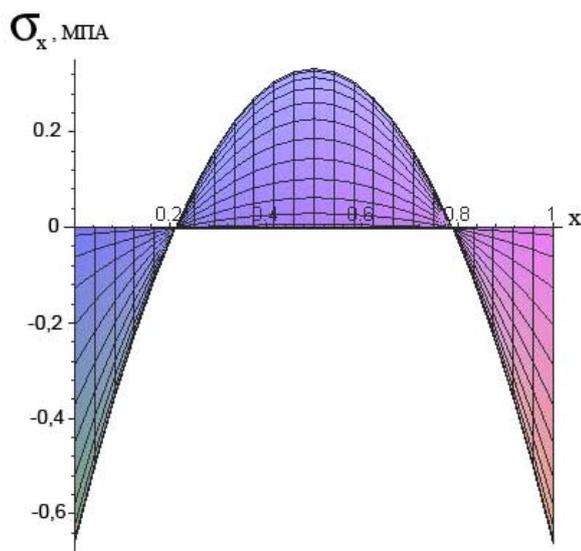
На основании систематизации различных сочетаний варьируемых параметров армированной анкерами кровли монтажного ходка получены результаты исследований ее перемещений от безразмерных величин, приведенные на рис. 8.21, 8.22.



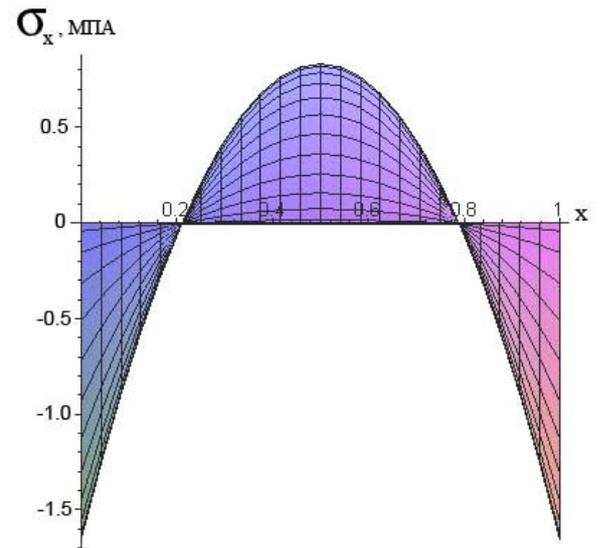
а



б

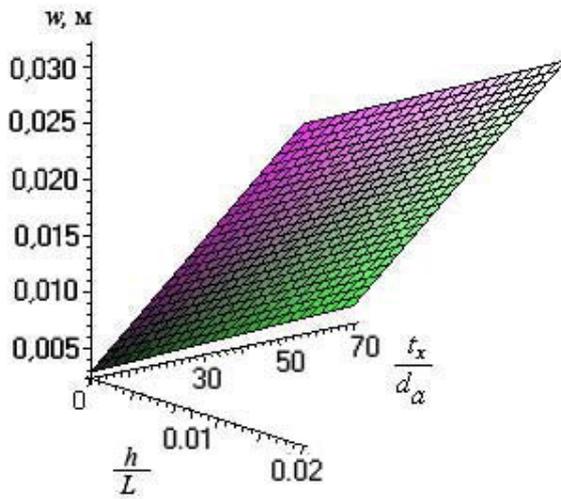


в

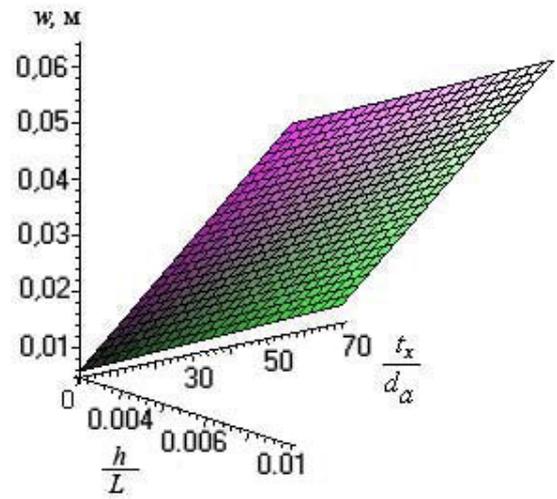


г

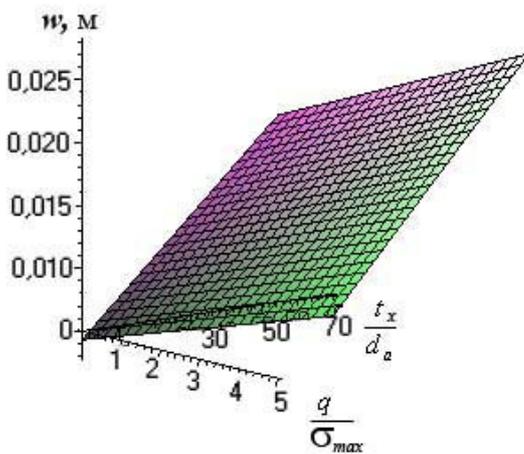
Рис.8.20. Распределение максимальных перемещений w (а, б) и напряжений σ_x (в, г) по безразмерным координатам: а, в – $L_x = 150$ м, $L_y = 5$ м; б, г – $L_x = 300$ м, $L_y = 5$ м; расстояние между анкерами 0,8 м



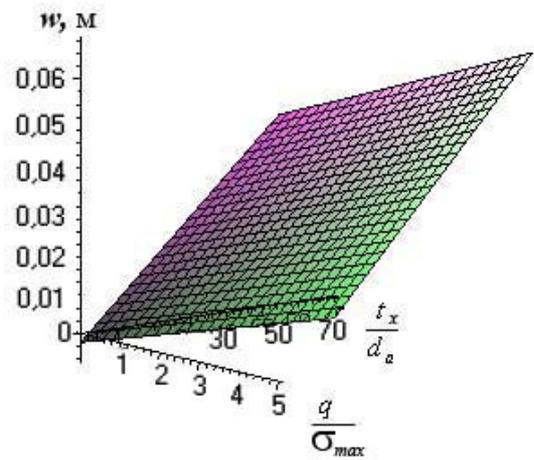
а



б



в



г

Рис. 8.21. Зависимость перемещений от безразмерных величин при длине кровли монтажного хода 150 (а, в) и 300 м (б, г)

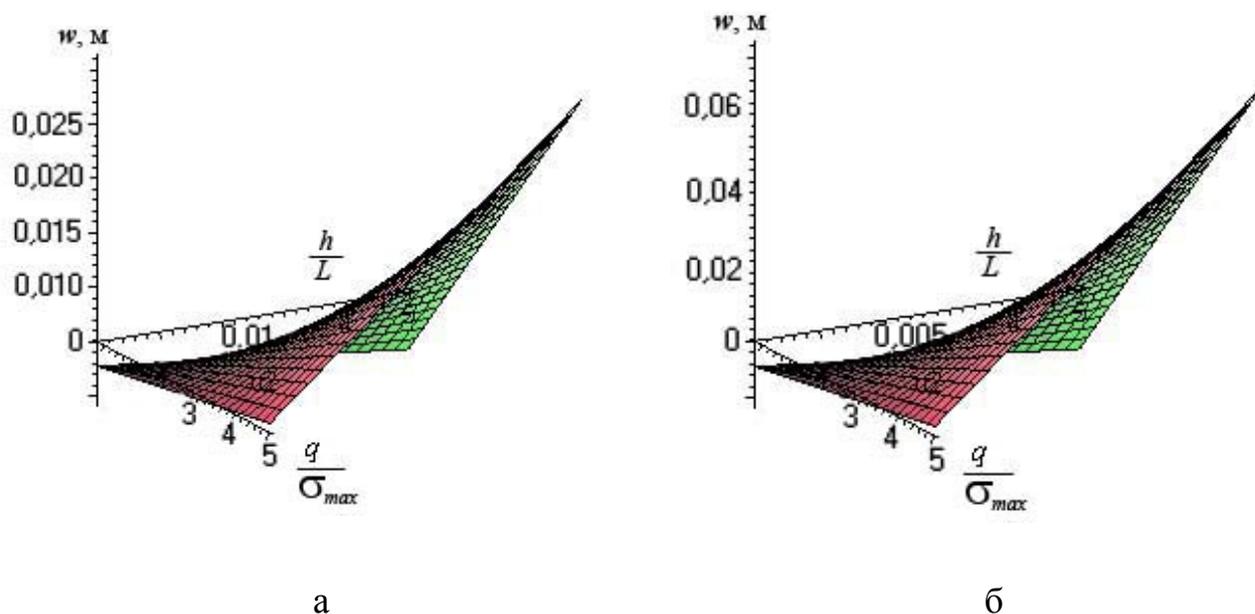


Рис. 8.22. Зависимость перемещений от безразмерных величин при длине кровли монтажного ходка 150 (а) и 300 м (б)

Отсюда следует, что при указанных варьируемых значениях безразмерных величин с увеличением длины L_x кровли в два раза (от 150 м до 300 м) перемещения увеличиваются от 2,0 м до 2,5 м, причем при втором случае они возрастают примерно в два раза быстрее, чем в первом, достигая максимальных значений 0,070 м.

С учетом приведенных и полученных в дальнейшем результатов исследований напряженно-деформированного состояния кровли монтажного ходка для оперативного определения ее максимальных перемещений разработана номограмма (рис. 8.23).

В частности, при отношении $L_y/L_x = 0,024$, $h/L_x = 0,015$, $t_y/t_x = 1,7$, $E_2/E_1 = 1,05$, $q/\sigma_{\max} = 3,2$, $w = 0,047$ м.

следующих исходных параметрах: $L_x = 90$ м, $L_y = 5$ м, $H = 3,0$ м, $q_z = 3,0$ МПа, $l_a = 2,4$ м, $d_a = 30$ мм, $E_z = 0,6 \cdot 10^4$ МПа, $E_y = 0,4 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_z = 0,17$, $E_a = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu_i = 0,2$, $t_x = t_y = 0,75$ м, $\gamma_{п} = 14$ кН/м³, $\gamma_a = 78$ кН/м³.

Отсюда следует, что перемещения угольного пласта на 5-е сутки увеличились до 22 мм, затем в течение 67-ми суток – до 60 мм.

В связи с этим, задача состоит в том, чтобы определить начальные значения перемещений, количество анкеров и расстояние между ними, обеспечивающие их минимальные значения.

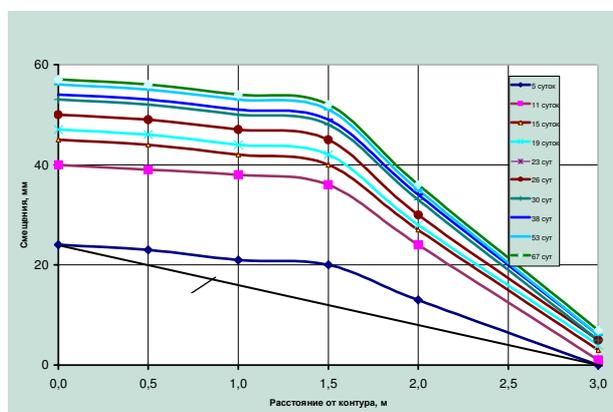


Рис. 8.24. Зависимость перемещений глубинных реперов в скважине, пробуренной в боку выработки, от высоты угольного пласта и времени (в сутках) измерений: 1 – результаты расчета

Результаты расчета при вышеуказанных данных показывают, что перемещения угольного пласта на сопряжении с кровлей по высоте меняется по линейному закону и принимает максимальное значение 1,5 мм, а при других максимальных значениях модулей упругости ($E_z = 3,0 \cdot 10^4$ МПа, $E_y = 1,5 \cdot 10^4$ МПа) максимальные перемещения равны 0,85 мм. В связи с относительно малыми значениями нагрузки q_z^* от собственной массы, ею можно пренебречь.

Учитывая тот факт, что монтажный ходок находился в условиях повышенной влажности, минимальные модули упругости угля приняли меньшими в

1,5 раза от их значений. В этом случае максимальные перемещения равны около 22 мм (кривая 1), что совпадает с результатом эксперимента. При этом максимальная погрешность составляет 25% в средней части угольного пласта.

Прочность угольного пласта обеспечивается, т.к.
 $\sigma_i = 2,94 \text{ МПа} < \sigma_{\text{пл}} (\sigma_{\text{сж}}) = 12 \text{ МПа}$.

Следовательно, при длительной эксплуатации монтажного ходка за счет снижения механических характеристик угольного пласта возникают пластические деформации, что подтверждают данные экспериментов, т.к. перемещения принимают нелинейный характер, которые в данном случае не учитываются.

Для устранения этого эффекта и обеспечения его устойчивости определим количество анкеров и расстояние между ними, используя зависимости (8.111), а также (8.130)-(8.132) для приведенных модулей упругости и коэффициента Пуассона.

Результаты расчета представлены в таблице 8.10

Таблица 8.10

Результаты расчета для определения прочности и устойчивости
 угольного пласта монтажного ходка

Исходные модули упругости, МПа, и коэффициент Пуассона	Расстояние между анкерами, м	Кол-во анкеров	Приведенные модули упругости, МПа, и коэффициент Пуассона	Напряжения, МПа	Перемещения w , мм	Условия прочности, МПа
$E_z = 0,6 \cdot 10^4$ $E_y = 0,4 \cdot 10^4$ $\nu_z = 0,17$	$t_z = 0,75$ $t_x = 0,75$	$K_z = 3$ $K_x = 119$	$E'_z = 0,6 \cdot 10^4$ $E'_y = 0,6 \cdot 10^4$ $\nu_z = 0,18$	$\sigma_z = 3,02$ $\sigma_y = 0,54$	4,8	2,79 < 12

Отсюда следует, что модуль упругости угольного пласта в направлении расположения анкеров (по ширине) увеличился в 1,5 раза, а в другом (нормаль-

ном к нему) направлении он не изменился, напряжения по высоте примерно в 5,6 раза превышают их по ширине, перемещения являются минимальными, а условие прочности выполняется.

Таким образом, разработаны математические модели армированных анкерами кровли и сопряженного с ней угольного пласта монтажного ходка, представленных в виде анизотропных слоистых пластин с различными граничными условиями под действием равномерно распределенной нагрузки, на основании результатов которых определено необходимое количество анкеров и расстояние между ними, обеспечивающие устойчивость и прочность монтажного ходка.

8.3. Напряженно-деформированное состояние закрепленной анкерами горной выработки

8.3.1. Расчетная схема выработки и математическая модель ее НДС

Актуальной задачей является обеспечение эффективного поддержания горных выработок в случае создания в приконтурном массиве несущих породно-анкерных конструкций, которые совместно с закрепленными краями воспринимают горное давление.

Рассмотрим расчетную схему закрепленной части анкерами горной выработки в виде многослойной толстой оболочки с трансверсально изотропными слоями под действием нормальной нагрузки q от массы вышележащих слоев пород, два края которых защемлены, два других – свободные (рис. 8.25).

Отличительной особенностью выбора основных уравнений в данном случае является:

- изменение координаты z по параболической зависимости;
- зависимости поперечных сил и учет поперечного сдвига;
- учет нормального напряжения σ_z при допущении $\varepsilon_z = 0$, которое для рамной крепи является распределенной нагрузкой.

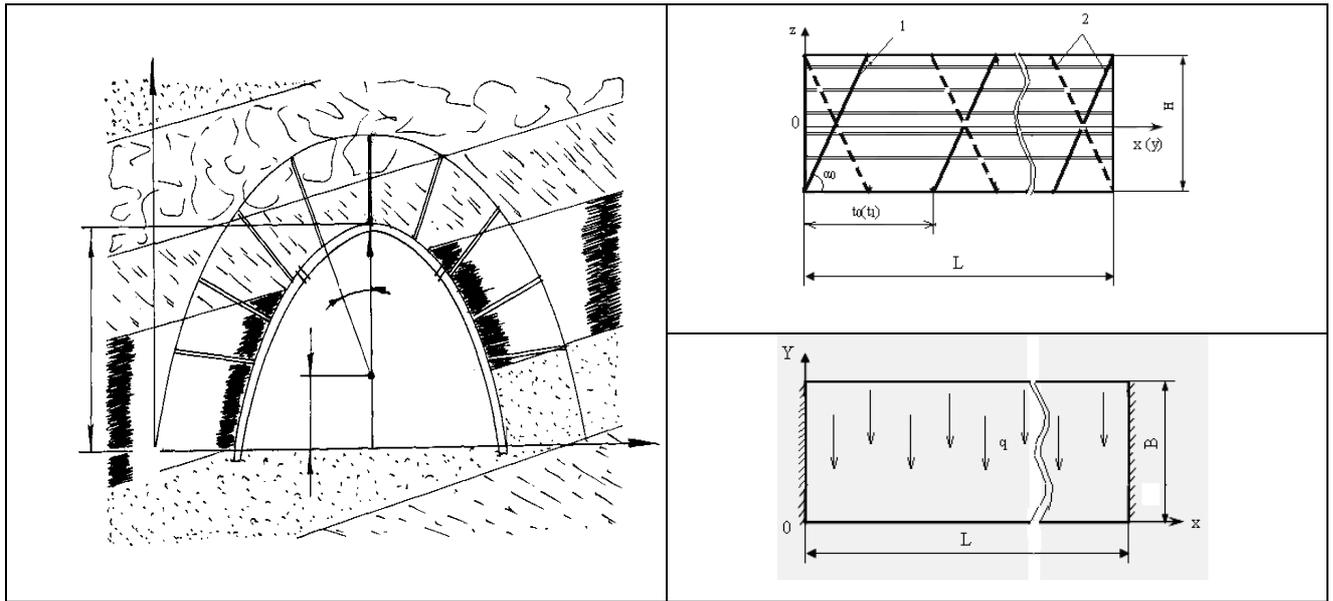


Рис.8.25. Расчетная схема закрепления анкерами горной выработки

Примем изменения координаты z и радиуса кривизны R_0 в виде

$$z = f \left(1 - 4 \frac{y^2}{b^2} \right); \quad R_0 = \frac{4fy}{b^2(b-y)}. \quad (8.134)$$

Поперечные силы, действующие в плоскостях xoy и yoz имеют вид

$$N_1 = \frac{h^2}{12} \varphi^i, \quad N_2 = \frac{h^2}{12} \psi^i;$$

$$\varphi^i = - \left[B_{11}^i \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (B_{12}^i + 2B_{66}^i) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y^2} \right]; \quad (8.135)$$

$$\psi^i = - \left[B_{22}^i \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + (B_{12}^i + 2B_{66}^i) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y} \right].$$

Тогда вариационное уравнение примет вид

$$\delta \mathcal{E} = \delta \iint \left[\frac{1}{2} L_1(w) + \frac{h^2}{48} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) L_2^i(w) - qw \right] ds = 0;$$

$$L_1(w) = D_{11}(w_{xx}''')^2 + 2D_{12}w_{xx}''w_{yy}'' + D_{22}(w_{yy}''')^2 + 4D_{66}(w_{xy}''')^2; \quad (8.136)$$

$$L_2^i(w) = a_{55}[B_{11}^i w_{xxx}''' + (B_{11}^i + 2B_{66}^i)w_{xyy}''']^2 + a_{44}[B_{22}^i w_{yyy}''' + (B_{12}^i + 2B_{66}^i)w_{xxy}''']^2$$

Входящие в жесткости производные модули упругости, сдвига находим, как и ранее, равномерно распределяя жесткости анкеров и пород на растяжение-сжатие по площади оболочки. В нашем случае они имеют вид

$$E_{x\Pi}^i = \frac{E_a d_a + (t_i - d_a) \sum_{i=1}^n E_{\Pi}^i / n}{t_i}, \quad E_{y\Pi}^i = \frac{E_a d_a + (t_0 - d_a) \sum_{i=1}^n E_{\Pi}^i / n}{t_0},$$

$$E_{xz\Pi}^i = \frac{E_a d_a + (t_i - d_a) \sum_{i=1}^n G_{\Pi}^i / n}{t_i}, \quad G_{yz\Pi}^i = \frac{t_0}{\frac{d_a}{G_a} + \frac{(t_0 - d_a)}{\sum_{i=1}^n G_{\Pi}^i / n}}, \quad (8.137)$$

$$G_a = \frac{E_a}{2(1-\nu_a)^2}, \quad G_{\Pi}^i = \frac{E_{\Pi}^i}{2(1-\nu_{\Pi}^i)^2}, \quad t_i = 2R_{i-1} + \frac{\sin\alpha}{2}, \quad (n=4).$$

Приведенные коэффициенты Пуассона имеют вид (8.137) при замене E на ν , причем введены следующие обозначения:

E_a, E_{Π}^i – модули нормальной упругости материала анкера и слоев породы, Па;

G_a, G_{Π}^i – соответственно модули сдвига, Па;

d_a – диаметр анкера, м;

t_0 – расстояние между анкерами в направлении x (по длине выработки), м;

t_i – расстояние между анкерами в направлении y , м;

α – центральный угол между анкерами, град.

Остальные параметры в уравнении (490) имеют вид

$$B_{66}^i = G^i; \quad a_{44} = G_{\Pi yz}^i; \quad a_{55} = G_{\Pi xz}^i. \quad (8.138)$$

Искомую функцию ищем в виде

$$w(x, y) = \sum_{j=1}^n a_j f_j(x) q_j(y), \quad (8.139)$$

где a_j – неопределенные параметры;

f_j, q_j – координатные функции, удовлетворяющие граничным условиям.

Вводя безразмерные параметры и константы

$$\begin{aligned} x &= L\bar{x}, \quad y = B\bar{y}, \quad z = f\bar{z}, \quad w = L\bar{w}, \quad m = \frac{f}{B}, \quad k = \frac{L}{B}, \\ d_{12} &= \frac{D_{12}}{D_{11}}, \quad d_{22} = \frac{D_{22}}{D_{11}}, \quad d_{66} = \frac{D_{66}}{D_{11}}, \quad r_0 = \frac{2qL^2}{D_{11}}, \\ h_1 &= \frac{h^2}{L^2} - \frac{4m\bar{z}^2}{k^2}, \quad h^* = \frac{h^3 h_1 a_{55} (B_{11}^i)^2}{96 D_{11}}, \quad b_1^i = \frac{B_{12}^i + 2B_{66}^i}{B_{11}^i}, \quad b_2^i = \frac{B_{22}^i}{B_{11}^i}, \quad a^* = \frac{a_{44}}{a_{55}}. \end{aligned} \quad (8.140)$$

получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^n a_j \iint \sum_{r=1}^{13} F_r G_r ds = r_0 \iint f_e g_e ds, \quad e = 1, \bar{n}. \quad (8.141)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} F_1 &= f_e'' f_j'', F_2 = f_e'' f_j', F_3 = f_e f_j'', F_4 = f_e f_j', F_5 = f_e' f_j', \\ F_6 &= f_e''' f_j''', F_7 = f_e''' f_j', F_8 = f_e' f_j''', F_9 = f_e' f_j'', F_{10} = f_e f_j', \\ F_{11} &= f_e'' f_j', F_{12} = f_e f_j'', F_{13} = f_e'' f_j'', \\ G_1 &= g_e g_j, G_2 = d_{12} k^2 g_e g_j'', G_3 = d_{12} k^2 g_e'' g_j, G_4 = d_{22} k^4 g_j'' g_e'', \\ G_5 &= 2d_{66} k^2 g_j' g_e', G_6 = h^* g_e g_j, G_7 = h^* b_1^i k^2 g_e g_j'', \\ G_8 &= h^* b_1^i k^2 g_e'' g_j, G_9 = h^* (b_1^i)^2 k^4 g_e'' g_j'', G_{10} = h^* (b_2^i)^2 k^6 g_e''' g_j''', \\ G_{11} &= h^* b_1^i k^4 a^* g_e' g_j''', G_{12} = h^* b_1^i k^4 a^* g_e''' g_j', G_{13} = h^* (b_1^i)^2 k^2 a^* g_e' g_j', \\ &(0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1), \end{aligned} \quad (8.142)$$

где штрихами обозначены производные.

Напряжения для i -го слоя оболочки примет вид

$$\begin{aligned} \sigma_x^i &= -\frac{m}{k} \bar{z} \left[B_{11}^i \sum_{j=1}^n a_j f_j'' g_j + k^2 (B_{12}^i + 2B_{66}^i) \sum_{j=1}^n a_j f_j g_j'' \right] + \\ &\quad + \frac{8mk}{[1 + m^2 (1 - 2\bar{y})^2]^{3/2}} B_{12}^i \sum_{j=1}^n a_j f_j g_j', \\ \sigma_y^i &= -\frac{m}{k} \bar{z} \left[B_{22}^i k^2 \sum_{j=1}^n a_j f_j g_j'' + (B_{12}^i + 2B_{66}^i) \sum_{j=1}^n a_j f_j'' g_j \right] + \\ &\quad + \frac{8mk}{[1 + m^2 (1 - 2\bar{y})^2]^{3/2}} B_{22}^i \sum_{j=1}^n a_j f_j g_j', \\ \sigma_z^i &= v_{x(y)}^i (\sigma_x^i + \sigma_y^i), \text{ (при } \varepsilon_z = 0), \quad \tau_{xy}^i = -2mB_{66}^i \bar{z} \sum_{j=1}^n a_j f_j' g_j', \\ \tau_{xz}^i &= -\frac{1}{8} h_1 \left[B_{11}^i \sum_{j=1}^n a_j f_j''' g_j + k^2 (B_{12}^i + 2B_{66}^i) \sum_{j=1}^n a_j f_j' g_j'' \right], \\ \tau_{yz}^i &= -\frac{1}{8} h_1 \left[B_{22}^i k^3 \sum_{j=1}^n a_j f_j g_j''' + k^2 (B_{12}^i + 2B_{66}^i) \sum_{j=1}^n a_j f_j'' g_j' \right]. \end{aligned} \tag{8.143}$$

В качестве координатных функций используем степенные полиномы, удовлетворяющие по методу Рица кинематическим граничным условиям относительно функции w и ее первой производной (табл.8 11, 8.12).

Таблица 8.11

Степенные полиномы $f(x)$, удовлетворяющие граничным условиям по методу Рунца

f_i	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
f_1	1	-2	1				
f_2	-1	4	-5	2			
f_3	1	-8	19	-18	6		
f_4	-1	14	-55	92	-70	20	
f_5	1	-22	131	-340	440	-280	70

Таблица 8.12

Степенные полиномы $g(y)$, удовлетворяющие граничным условиям по методу Рунца

g_i	y^0	y^1	y^2	y^3	y^4	y^5	g_i
g_1	-1	2					g_1
g_2	1	-6	6				g_2
g_3	-1	12	-30	20			g_3
g_4	1	-20	90	-140	70		g_4
g_5	-1	30	-210	560	-630	252	g_5

или по методу Бубнова-Галеркина – всем граничным условиям

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^4 - 2x^3 + x^2)/24, 1 = (6x^2 - 6x + 1)/12; \\ g(y) &= 20y^7 - 10y^6 + 84y^5 - 35y^4 + y + 1. \end{aligned} \quad (8.144)$$

8.3.2. Алгоритм решения задачи и результаты исследований

Для проверки адекватности приведенной математической модели по разработанному алгоритму решения задачи (рис. 8.26) определены перемещения по методам Рунца и Бубнова-Галеркина. При этом использованы следующие исходные данные: для первого и второго слоев средние значения

$E_{cp}=1,75 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_{cp}=0,33$, третьего – $E_{cp}=2,0 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_{cp}=0,32$, четвертого – $E_{cp}=3,0 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_{cp}=0,27$; $B=4,0$ м, $f=2,5$, $\alpha=20^0$, $R_0=2,5$ м, $t_0=t_1=1,0$ м, $q=3$ МПа.



Рис. 8.26. Блок-схема алгоритма решения задачи

Предварительные результаты расчеты перемещений показали, что лучшая их сходимость с данными эксперимента происходит при использовании координатных функций (8.144). Однако данные экспериментальных исследований по определению перемещений получены в реальных условиях конвейерного штрека 5-й южной лавы шахты «Добропольская», в выработке которой породы были увлажненными, поэтому погрешность результатов расчета составила око-

ло 50 %. В связи с этим, в дальнейших исследованиях значения модулей нормальной упругости уменьшены в 1,5 раза.

В этом случае при креплении выработки анкерами на расстояниях 1,0 м погрешность перемещений в верхней ее части по результатам теории составила 21 % (рис. 8.27, кривая 1), а при уменьшении расстояния между анкерами в 2 раза (0,5 м) перемещения снижаются в 1,75 раза (кривая 2). Затем выполнены расчеты по определению нормальных и касательных напряжений выработки, закрепленной анкерами, по зависимостям (8.143). Распределение напряжений σ_x , σ_y , σ_z для внутренней поверхности выработки в направлениях x и y представлены на рис. 8.28-8.31, откуда следует, что максимальные напряжения σ_x возникают в средней ее части, σ_y , σ_z – в защемленной части, причем максимальное значение σ_z равно 0,07 МПа, а в верхней части выработки – 0,06 МПа. Касательные напряжения значительно ниже нормальных напряжений, поэтому они не приведены.

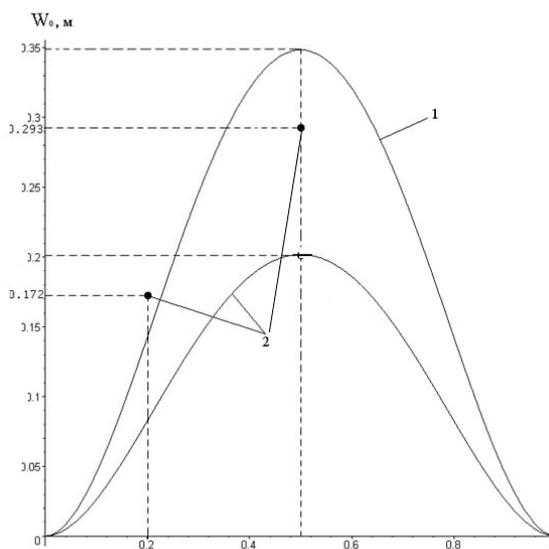


Рис.8.28. Изменение нормального перемещения, закрепленной анкерами горной выработки:

1, 2 – расстояния между анкерами соответственно 1,0 и 0,5 м; • – данные экспериментальных исследований

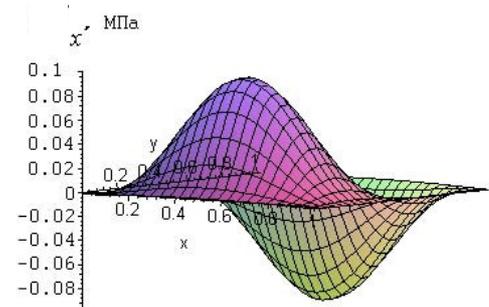


Рис.8.29. Распределение нормальных максимальных напряжений σ_x внутренней поверхности закрепленной анкерами выработки (расстояние между анкерами 1,0 м)

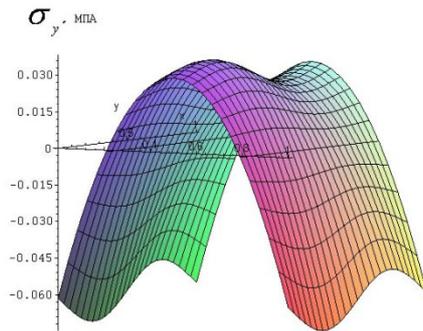


Рис.8.30. Распределение нормальных максимальных напряжений σ_y внутренней поверхности закрепленной анкерами выработки (расстояние между анкерами 1.0 м)

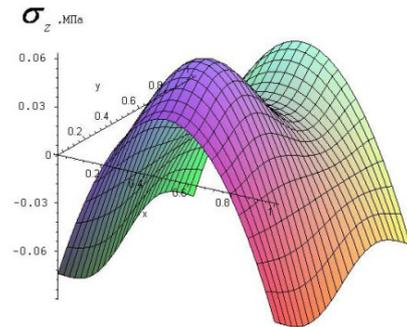


Рис.8.31. Распределение нормальных максимальных напряжений σ_z внутренней поверхности закрепленной анкерами выработки (расстояние между анкерами 1,0 м)

Таким образом, в данном случае при выборе типа рамной крепи необходимо учитывать, что действующая на нее максимальная внешняя нагрузка q_1 , должна быть равной в пределах (0,06-0,07) МПа.

В результате обработки полученных при решении задачи результатов методами математической статистики с использованием пакета прикладных программ Matcad (рис.8.32) была получена зависимость для расчета прогиба породно-анкерной оболочки со стороны кровли выработки:

$$w/L = f(u_1, u_2, u_3),$$

$$w/L = (5,7u_1 - 0,32u_2 + 1,82u_3 + 19,41u_1u_2 + 7,29u_1u_3 + 0,31u_2u_3 - 0,03u_1u_2u_3 - 0,64) \cdot 10^{-3}, \quad R^2 = 0,997 \quad (8.145)$$

где

$$u_1 = \frac{q}{E_{\text{i\ddot{o}}}}, u_2 = \frac{H}{R}, u_3 = \frac{t}{d_a} \quad (8.146)$$

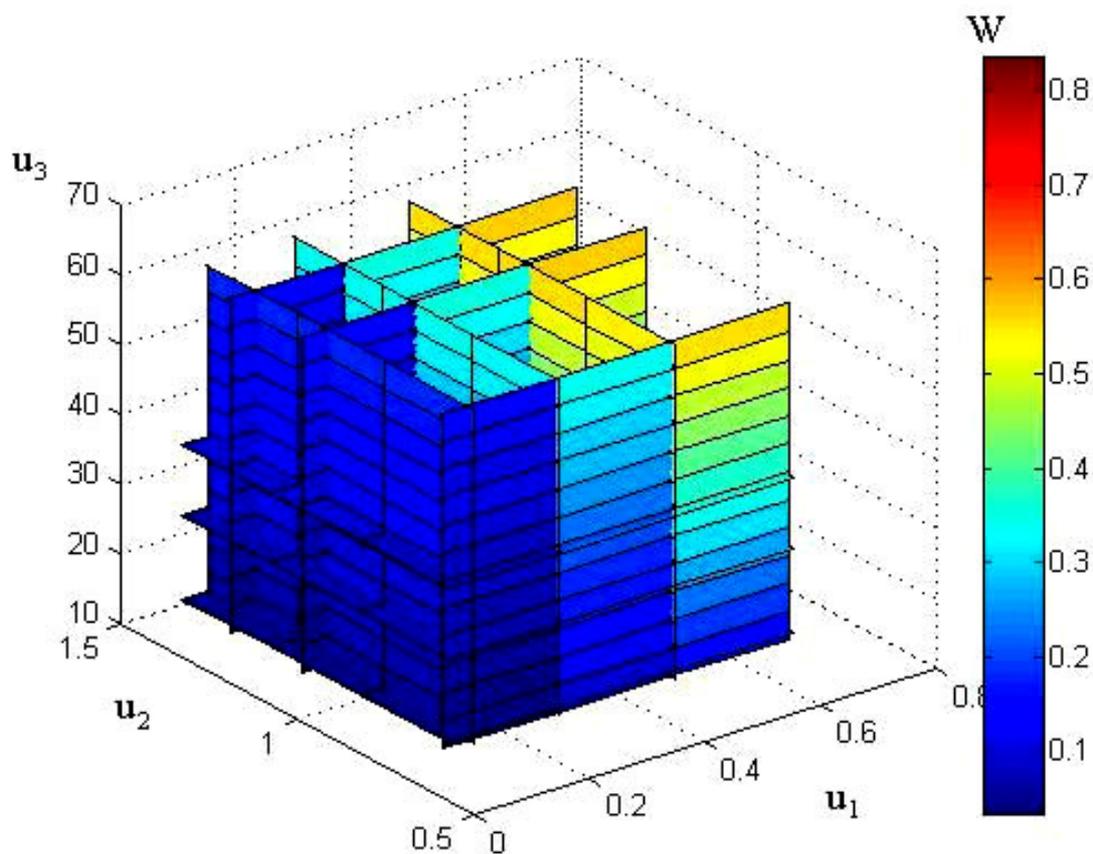


Рис. 8.32. Зависимость прогиба породной оболочки, армированной анкерами по различным схемам, от параметров $u_1 = \frac{q_0}{E_{\text{п}}}$; $u_2 = \frac{l_a}{H}$; $u_3 = \frac{t}{d_a}$

Область применения формулы (8.146) ограничена следующими значениями входящих в нее параметров: внешняя нагрузка q – от 2 до 5 МПа, приведенные модули слоев оболочки $E_{\text{пр}}$ – от $0,25 \cdot 10^5$ МПа до $0,65 \cdot 10^5$ МПа, глубина ведения работ H – от 600 м до 1400 м, приведенный радиус выработки R – от 1,9 м до 2,9 м, расстояние между анкерами t – от 0,5 м до 1,0 м, диаметр анкера d_a – от 22 мм до 36 мм.

При определении параметров рамно-анкерной крепи впервые предлагается дифференцированно рассчитывать ее элементы с учетом долей нагрузок, воспринимаемых ими по мере включения их в работу. Из общей нагрузки, дей-

ствующей на систему, выделяется часть, воспринимаемая оболочкой из укрепленных анкерами пород, и нагрузка – рамной крепью. При этом учитывается характер развития деформационных процессов в массиве и ожидаемая степень разрушения вмещающих пород, а также их остаточная несущая способность.

Контрольные вопросы

1. Этапы развития моделирования в горном деле, как метода исследований.
2. Что обозначают термины «моделирование», «модель», «материальная, идеальная модели», «математическая и физическая модели»?
3. Основные требования, предъявляемые к выбранной для исследований модели.
4. Что значит кибернетическая модель «черного ящика»?
5. Основные методы, применяемые при моделировании.
6. Для чего нужна теория подобия при моделировании?
7. Перечислите основные условия подобия.
8. Основные свойства геометрического подобия.
9. Основные свойства подобия физических полей.
10. Основные свойства подобия физических явлений.
11. Основные понятия теории размерностей.
12. Допущения, принимаемые в основу анализа размерностей.
13. Как определить вид критериев с помощью анализа размерностей?
14. Сущность ПИ-теоремы.
15. Основные положения теорем подобия.
16. Основные правила моделирования.
17. Сущность метода эквивалентных материалов.
18. Сущность метода центробежного моделирования.
19. Сущность метода фотомеханики.
20. Сущность метода моделирования тепловых процессов в горном деле.
21. Сущность метода моделирования гидродинамических процессов.

22. Методы и средства измерения параметров при моделировании.
23. Методы экспериментального определения коэффициента теплоотдачи.
24. Обобщение данных единичных опытов. Определение погрешностей результатов при моделировании.
25. Сущность метода электромеханических аналогий.
26. Основные критерии подобия и масштабы моделирования на основе электромеханических аналогий.
27. Сущность метода электрогидродинамических аналогий (метод ЭГДА).
28. Основные приближенные методы решения задач в геомеханике.
29. Сущность метода конечных разностей.
30. Сущность метода электрических сеток.
31. Сущность метода конечных элементов.
32. Сущность метода граничных элементов.
33. Сущность метода дискретных элементов.
34. Основные вариационные методы решения.
35. Сущность метода Ритца.
36. Сущность метода Бубнова-Галеркина.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Насонов И.Д. Моделирование горных процессов/ И.Д. Насонов. – М.: Недра, 1978. – 229 с.
2. Олексеенко С.Ф. Основы моделирования при решении задач горной геомеханики/ С.Ф. Олексеенко Ф., А.Г. Заболотный, Л.А. Штанько.– Киев: Техника, 1996. – 178 с.
3. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике / Л.И Седов.– М.: Наука, 1967. – 428 с.
4. Ямщиков В.С. Методы и способы испытаний и контроля горных пород и процессов/ В.С . Ямщиков В.С – М.: Недра, 1982. – 196 с.
5. Михлин. С.Г. Вариационные методы в математической физике/ С.Г. Михлин. – М.: Гостехиздат, 1957. – 512 с.
6. Алексеенко С.Ф. Исследование на реологических моделях деформационных свойств горных пород при динамических нагрузках. // Физико-технические проблемы разработки месторождений полезных ископаемых/ С.Ф. Алексеенко С.Ф., В.П. Мележик. – 1977. – №2. – С. 30-36.
7. Исследование массива горных пород методами фотомеханики. Под редакцией Н.Ф. Кусова. – М.: Наука, 1982. – С. 172-180.
8. Зборщик М.П., Соловьев В.Н. Исследование распределения напряжений в почве подготовительных выработок методом ЭГДА // Разработка месторождений полезных ископаемых. – Киев.: Техника, 1974. – №38. – С. 44-48.
9. Покровский Г.И., Федоров И.С. Центробежное моделирование в горном деле. – М.: Недра, 1969. – 263 с.
10. Докукин А.В., Трумбачев В.Ф., Славин С.Н. Моделирование задач механики горных пород методами фотомеханики с использованием голографии. // Горное давление. – Фрунзе: ИХИМ, 1978. – С. 5-15.
11. Основы моделирования геомеханических процессов/ С.В. Подкопаев, С.И. Александров, И.А. Ефремов, И.Ф. Марийчук и др.– Донецк.–НОУЛИДЖ, 2012.– 263 с.

12. Филатов Н.А., Белеков В.Д., Иевлев Г.А. Фотоупругость в горной геомеханике. – М.: Недра, 1975. – 180 с.

13. Костенко В.К. Геомеханические и аэрологические основы предупреждения эндогенных пожаров в труднодоступных местах угольных шахт: дис. докт. тех. наук: 21.06.02 / Костенко Виктор Климентьевич. – Макеевка, 2004. – 353 с.

14. Шестопапов И. Н. Обоснование параметров рамно-анкерной крепи для поддержания подготовительных выработок глубоких шахт; дис. ...канд. тех. наук: 05.15.02/ Шестопапов Иван Николаевич. – Донецк, 2014. – 198 с.

СОДЕРЖАНИЕ

	ВВЕДЕНИЕ	3
1.	ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ГЕОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ И МЕТОДАХ ИХ ИССЛЕДОВАНИЙ	5
2.	ОСНОВЫ ТЕОРИИ И УСЛОВИЯ ПОДОБИЯ	17
2.1.	Общие сведения	17
2.2.	Условия подобия	18
2.3.	Геометрическое подобие	18
2.4.	Подобие физических полей	28
2.5.	Подобие физических явлений	34
3.	ОСНОВЫ ТЕОРИИ РАЗМЕРНОСТЕЙ	44
3.1.	Основные понятия теории размерностей	44
3.2.	Определение вида критериев с помощью анализа размерностей	50
3.3.	ПИ-теорема	59
3.4.	Теоремы подобия	59
4.	ФИЗИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГЕОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ	63
4.1.	Общие сведения	63
4.2.	Правила моделирования	64
4.3.	Метод эквивалентных материалов	67
4.4.	Метод центробежного моделирования	80
4.5.	Методы фотомеханики	93
4.6.	Моделирование тепловых процессов в горном деле	112
4.7.	Моделирование гидродинамических процессов	119
4.8.	Моделирование конвективного теплообмена	131
4.9.	Моделирование конвективной теплопередачи	134
4.10.	Моделирование конвективного теплообмена при изменении агрегатного состояния	141
5.	ИЗМЕРЕНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ. ОБОБЩЕНИЕ ДАННЫХ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОШИБКИ	153
5.1.	Измерение параметров при моделировании	153
5.2.	Методы экспериментального определения коэффициента теплоотдачи	160

5.3.	Обобщение данных единичных опытов	164
5.4.	Оценка и определение ошибки при моделировании	167
6.	МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ МОДЕЛЕЙ-АНАЛОГОВ	173
6.1.	Метод электромеханических аналогий	173
6.2.	Критерии подобия и масштабы моделирования на основе электромеханических аналогий	188
6.3.	Метод электрогидродинамических аналогий (метод ЭГДА)	190
6.4.	Метод тепло-гидравлических аналогий	197
6.5.	Решение краевых задач методом конечных разностей	213
6.6.	Решение краевых задач методом электрических сеток	218
7.	ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ В ГЕОМЕХАНИКЕ	226
7.1.	Общие сведения	226
7.2.	Метод конечных элементов	228
7.3.	Метод граничных элементов	238
7.4.	Метод дискретных элементов	249
7.5.	Вариационные методы решения краевых задач в геомеханике	256
8.	ПРИМЕРЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ НЕКОТОРЫХ ПОДЗЕМНЫХ ОБЪЕКТОВ	260
8.1.	Непосредственная кровля	260
8.1.1.	Выбор расчетной схемы и этапы решения задачи	260
8.1.2.	Основные соотношения упругости	265
8.1.3.	Вариационное уравнение	269
8.1.4.	Система разрешающих уравнений и напряжения	272
8.1.5.	Выбор координатных функций	274
8.1.6.	Упругие параметры слоев непосредственной кровли	279
8.1.7.	Алгоритм решения задачи и результаты исследований	280
8.2.	Напряженно-деформированное состояние армированного анкерами монтажного ходка	298
8.2.1.	Выбор расчетных схем закрепленных анкерами кровли и угольного пласта монтажного ходка	298
8.2.2.	Напряженно-деформированное состояние	301

	347
8.2.3. Устойчивость угольного пласта монтажного ходка	315
8.2.4. Алгоритм решения задачи и результаты исследований	320
8.3. Напряженно-деформированное состояние закрепленной анкерами горной выработки	331
8.3.1. Расчетная схема выработки и математическая модель ее НДС	331
8.3.2. Алгоритм решения задачи и результаты исследований	336
Контрольные вопросы	341
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	343
СОДЕРЖАНИЕ	345