МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ ДНР
ГОУ ВПО «ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Теоретическая механика им. Н.Г. Логвинова»

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ
ЧАСТЬ III. ДИНАМИКА

Донецк – 2019

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ ДНР
ГОУ ВПО «ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Теоретическая механика
им. Н.Г. Логвинова»

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ
ЧАСТЬ III. ДИНАМИКА

Рассмотрено
на заседании кафедры
"Теоретическая механика
им. Н.Г. Логвинова"
протокол № 8 от 24.12.2019 г.

Донецк – 2019

УДК:531

Лекции по теоретической механике (часть ИИИ. Динамика): учебное пособие для студентов всех специальностей и форм обучения технических вузов /Малеев В.Б., Скорынин Н.И., Петренко И.В., Кудрявцев А.А. - Донецк: ДонНТУ, 2019. - 46 с., ил.

Лекции содержат в доступной форме содержание третьей части курса теоретической механики (динамика).

Назначается как учебное пособие для студентов всех специальностей технических вузов дневной формы обучения, а также для организации самостоятельной работы.

Составители: проф. Малеев В.Б.
доц. Скорынин Н.И.
доц. Петренко И.В.
ст. преп. Кудрявцев А.А.

Рецензент: проф. Кононенко А.П.

Лекция 1.
Динамика точки

Динамика – это раздел теоретической механики, в котором рассматривается движение материальных точек или тел с учетом сил, вызывающих это движение.

Пространство, в котором происходит движение точки предполагается трехмерным и изотропным. Время считается положительной универсальной величиной, которая протекает одинаково во всех системах отсчета.

Сила – это мера механического взаимодействия тел. Она является векторной величиной и может быть как постоянной, так и переменной. В последнем случае она может зависеть от времени, скорости, положения точки в пространстве или комбинации этих параметров.

В основе динамики лежат аксиомы, соответствующие законам Ньютона.

Первая аксиома: изолированная материальная точка (тело) сохраняет неизменными величину и направление своей скорости.

Вторая аксиома: ускорение, которое получает материальная точка (тело) под действием данной силы, пропорционально этой силе и имеет с ней одинаковое направление.

$$m\bar{a} = \bar{F}, \tag{1.1}$$

где m - масса точки (масса - степень инертности точки (тела)).

Третья аксиома: силы взаимодействия двух материальных точек (тел) равны по величине, противоположны по направлению, лежат на одной линии действия и приложены к разным точкам (телам).

Четвертая аксиома: при одновременном действии нескольких сил на материальную точку (тело) она получает такое же ускорение, какое бы получила под действии одной результирующей силы, равной векторной сумме слагаемых сил $\bar{F}_k$

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k . \tag{1.2}$$

Уравнение (1.2) является основным уравнением (законом) динамики точки и может быть выражено в векторной, координатной и натуральной формах.

Если в уравнении (1.2) учесть, что

$$\bar{a} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \ddot{\bar{r}},$$

где $\bar{r}$ - радиус-вектор точки, то мы получим векторный вид дифференциального уравнения движения материальной точки:

$$m\ddot{\bar{r}} = \sum \bar{F}_k . \tag{1.3}$$

Запишем основное уравнение динамики (1.2) в проекциях на декартовые ос координат:

$$ma_x = \sum F_{k_x} \ ,$$

$$ma_y = \sum F_{k_y} \ ,$$

$$ma_z = \sum F_{k_z} \ .$$

Из раздела кинематики известно, что $a_x = \ddot{x}$, $a_y = \ddot{y}$, $a_z = \ddot{z}$. Поэтому получим

$$m\ddot{x} = \sum F_{k_x} \ ,$$

$$m\ddot{y} = \sum F_{k_y} \ , \qquad (1.4)$$

$$m\ddot{z} = \sum F_{k_z} \ ,$$

что и является координатной формой дифференциальных уравнений движения точки.

Проецируя уравнение (1.2) на натуральные оси координат (касательную нормаль, главную нормаль и бинонормаль), получим:

$$ma_\tau = \sum F_{k_\tau} \ ,$$

$$ma_n = \sum F_{k_n} \ ,$$

$$0 = \sum F_{k_b} \ , \text{ где}$$

$a_\tau = \dfrac{dv}{dt}$ - касательное ускорение;

$a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$ - нормальное ускорение;

$\rho -$ радиус кривизны траектории в данной точке.

Таким образом, дифференциальные уравнения движения точки в форме Эйлера будут иметь следующий вид:

$$m\frac{dv}{dt} = \sum F_{k_\tau} \ ,$$

$$m\frac{v^2}{\rho} = \sum F_{k_n} \ , \qquad (1.5)$$

$$0 = \sum F_{k_b} \ .$$

Сформулируем две основные задачи динамики.

Первая задача динамики состоит в том, чтобы по заданному уравнению (закону) движения точки и ее массе найти силу, вызывающую это движение.

Как следует из уравнений (1.3) – (1.5) решение первой задачи динамики находится дифференцированием по времени t уравнений $\bar{r}(t)$, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ или $S(t)$.

Вторая задача динамики состоит в том, чтобы по заданным силам $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$, действующим на точку, найти уравнение (закон) движения данной точки. Такая задач решается составлением соответствующих дифференциальных уравнений, например в виде (1.4), и их последующего интегрирования с учетом начальных условий движения точки.

Вопросы для самоконтроля

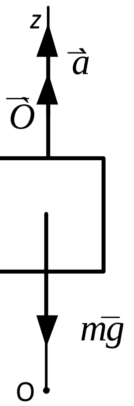
1. Какое уравнение является основным в динамике точки?

2. Какой вид имеют дифференциальные уравнения движения материальной точки в векторной, координатной и натуральной формах?

3. Сформулируйте две основные задачи динамики точки.

Задача 1.1 (первая задача динамики)

Тело массой $m = 50$ кг, подвешенное на тросе, поднимается вверх с ускорением $a = 8$ м/с^2. Определить силу натяжения троса.



Решение

Движение тела осуществляется под действием двух сил: силы тяжести $\bar{P} = m\bar{g}$ и силы натяжения $\bar{T}$ троса. Поэтому основное уравнение динамики в проекции на ось Oz будет иметь вид:

$$ma_z = T - mg\text{, где } a_z = a.$$

Отсюда

$$T = m(a + g) = 50 \cdot (8 + 9{,}8) = 890 \text{ (Н).}$$

Задача 1.2. Материальная точка массой $m = 4$ кг движется по окружности радиуса $R = 2$ м. Найти проекции на нормаль и касательную равнодействующей силы, приложенной к точке, если $S = 8t^2$ м.

Решение

Согласно (1.5) имеем:

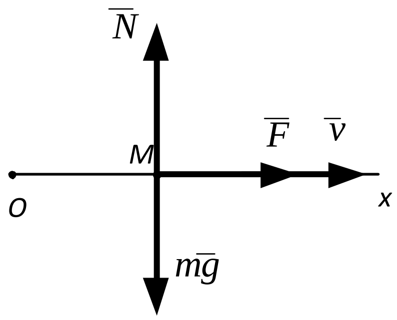
$$R_\tau = \sum F_{k_\tau} = m\frac{dv}{dt},$$

где $v = \dfrac{dS}{dt} = 16t$ и $\dfrac{dv}{dt} = 16$ (м/с^2).

Тогда $R_\tau = 4 \cdot 16 = 64$ (Н), $R_n = \sum F_{k_n} = m\dfrac{v^2}{R} = 4 \cdot \dfrac{(16t)^2}{2} = 512t^2$ (Н).

Задача 1.3 (вторая задача динамики)

Материальная точка массой $m = 10$ кг начала движение из состояния покоя вдоль горизонтальной прямой под действием силы $F = 20t$, направленной вдоль той же прямой. Определить путь, который пройдет точка за 3 с.



Решение

Проекция дифференциального уравнения на ось Ox имеет вид

$$m\ddot{x} = F \quad \text{или} \quad m\ddot{x} = 20t.$$

Учитывая, что $\ddot{x} = \dfrac{d\dot{x}}{dt}$, из последнего уравнения следует

$$md\dot{x} = 20tdt,$$

из которого после интегрирования получим

$$m\dot{x} = 10t^2 + c_1. \tag{1}$$

Аналогично, с учетом того, что $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$, уравнение (1) примет вид

$$mdx = 10t^2dt + c_1dt.$$

После интегрирования получим

$$mx = \frac{10}{3}t^3 + c_1t + c_2. \tag{2}$$

Для вычисления постоянных интегрирования c_1 и c_2 сформулируем начальные условия движения точки (начало отсчета оси Ox совместим с начальным положением точки):

$$t = 0;\ x = 0;\ \dot{x} = 0.$$

Таким образом, из уравнений (1) и (2) следует, что

$$c_1 = c_2 = 0.$$

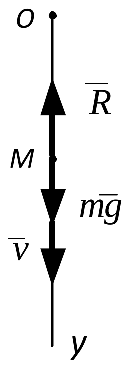
Тогда окончательный вид уравнения (2) будет таким

$$mx = \frac{10}{3}t^3,$$

из которого, при условии, что через $t = 3$ с точка пройдет путь $x = S$, получим

$$S = \frac{10}{3m}t^3 = \frac{10 \cdot 27}{3 \cdot 10} = 9\,(\text{м}).$$

Задача 1.4. Тело массой 1 кг падает под действием силы тяжести. Сила сопротивления воздуха $R = bv$, где $b = 0{,}04$, v - скорость тела. Определить максимальную скорость падения тела.



Решение

Проекция основного дифференциального уравнения на ось Oy имеет вид:

$$m\ddot{y} = mg - R_y \text{ или } m\ddot{y} = mg - b\dot{y}.$$

Поскольку при достижении максимальной скорости падения ускорение тела равно нулю, это значит, что при $\ddot{y} = 0$ получим $\dot{y} = \dot{y}_{\max}$, следовательно

$$mg - b\dot{y}_{\max} = 0,$$

откуда

$$\dot{y}_{\max} = v_{\max} = \frac{mg}{b} = \frac{1 \cdot 9{,}8}{0{,}04} = 245 \text{ (м/с)}.$$

Лекция 2.
Системы материальных точек

Под механической системой материальных точек понимается такое их множество, в котором движение и положение каждой точки системы зависит от движения и положения всех других ее точек.

Механическая система называется свободной, если движение ее точек ничем не ограничено. Механическая система называется несвободной, если имеются ограничения на движение ее точек.

Для исследования движения несвободных механических систем, которых большинство в инженерных задачах, будет использован принцип освобождаемости от связей.

Если механическая система состоит из n материальных точек, массы которых соответственно равны m_1, m_2, … , m_n, то масса M всей системы будет равна арифметической сумме масс всех ее точек:

$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k. \tag{2.1}$$

Геометрическая точка С, положение которой находится по формуле

$$\bar{r}_c = \frac{\sum m_k \bar{r}_k}{M}, \tag{2.2}$$

где $\bar{r}_k$ есть радиус-вектор k-й точки, называется центром масс системы. Декартовы координаты центра масс равны

$$x_c = \frac{\sum m_k x_k}{M},$$

$$y_c = \frac{\sum m_k y_k}{M}, \tag{2.3}$$

$$z_c = \frac{\sum m_k z_k}{M}.$$

Силы, взаимодействия между точками данной системы, называются внутренними силами системы. Главный вектор всех внутренних сил, который действует на k-ю точку системы, обозначается символом $\bar{F}_k^i$.

<u>Свойства внутренних сил системы.</u>

Геометрическая сумма:

а) всех внутренних сил системы равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^i = 0. \tag{2.4}$$

б) всех векторных моментов внутренних сил системы (относительно любого центра) равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} \bar{M}_0\left(\bar{F}_k^i\right) = 0. \tag{2.5}$$

Если на точки системы оказывается внешнее механическое воздействие со стороны точек или тел, не принадлежащих данной системе, то такие силы называются внешними. Главный вектор всех внешних сил, который действует на k-ю точку системы, обозначается символом $\bar{F}_k^e$.

Скорости и ускорения точек системы зависят внешних и внутренних сил.

Для определения движения системы материальных точек нужно знать движение каждой точки системы, а для этого надо составить дифференциальное уравнение движения каждой из них:

$$m_1 \ddot{\bar{r}}_1 = \bar{F}_1^e + \bar{F}_1^i$$

$$m_2 \ddot{\bar{r}}_2 = \bar{F}_2^e + \bar{F}_2^i \tag{2.6}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$m_n \ddot{\bar{r}}_n = \bar{F}_n^e + \bar{F}_n^i.$$

Проецируя эти уравнения на оси координат получим $3n$ уравнений с $6n$ постоянными интегрирования.

Сложив уравнения системы (2.6), получим

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{\bar{r}}_k = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^e + \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^i . \tag{2.7}$$

Из уравнения (2.2) следует, что

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \ddot{\bar{r}}_k = M\ddot{\bar{r}}_c .$$

С учетом уравнения (2.4) уравнение (2.7) можно записать в виде:

$$M\ddot{\bar{r}}_c = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k^e . \tag{2.8}$$

Уравнение (2.8) выражает теорему о движении центра масс системы: центр масс системы ведет себя как отдельная материальная точка, в которой сосредоточена вся масса системы и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.

Проекцируя уравнение (2.8) на декартовы оси координат, получим:

$$M\ddot{x}_c = \sum_{k=1}^{n} F_{k_x}^e ,$$

$$M\ddot{y}_c = \sum_{k=1}^{n} F_{k_y}^e , \tag{2.9}$$

$$M\ddot{z}_c = \sum_{k=1}^{n} F_{k_z}^e .$$

Закон сохранения движения центра масс системы.

Из уравнения (2.8) следует, что если $\sum \bar{F}_k^e = 0$, то $\ddot{\bar{r}}_c = 0$. Следовательно,

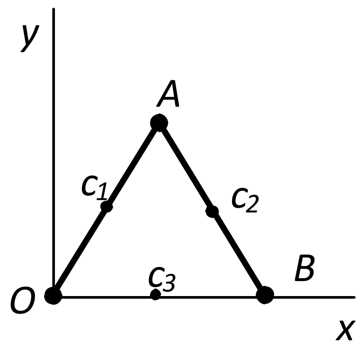
$$\dot{\bar{r}} = \bar{v}_c = const .$$

Теорема о движении центра масс системы гласит: центр масс системы находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, если сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю ($\sum \bar{F}_k^e = 0$).

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое механическая система материальных точек?
2. Как определяется масса системы точек?
3. Что такое центр масс системы и как вычисляются его координаты?
4. Каковы свойства внутренних сил системы.
5. В чем суть теоремы о движении центра масс системы?

Задача 2.1. Найти координаты y_c центра масс системы, состоящей из трех однородных стержней массой m и длиной l каждый, которые образуют равносторонний треугольник OAB, и трех одинаковых точечных масс m, расположенных в вершинах данного треугольника.



Решение

Из системы уравнений (2.3) следует, что

$$y_c = \frac{\sum m_k y_k}{M}.$$

В нашем случае

$$y_c = \frac{m_{OA} y_{c_1} + m_{OB} y_{c_3} + m_{AB} y_{c_2} + m_O y_O + m_A y_A + m_B y_B}{m_{OA} + m_{OB} + m_{AB} + m_O + m_A + m_B} =$$

$$= \frac{y_{c_1} + y_{c_2} + y_{c_3} + y_O + y_A + y_B}{6}.$$

Согласно рисунку

$$y_{c_1} = y_{c_2} = \frac{l}{2}\sin 60^\circ = l\frac{\sqrt{3}}{4};\; y_{c_3} = 0;\; y_O = y_B = 0;$$

$$y_A = l\sin 60^\circ = l\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Поэтому

$$y_c = \frac{l\frac{\sqrt{3}}{4} + l\frac{\sqrt{3}}{4} + l\frac{\sqrt{3}}{2}}{6} = l\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Задача 2.2. Для некоторой механической системы массой $M = 2$ кг центр масс движется по закону:

$$x_c = 10t\text{, м}$$

$$y_c = 5t^2\text{, м.}$$

Определить величину главного вектора внешних сил, действующих на данную систему.

Решение

Проекции ускорения центра масс соответственно равны:

$$\ddot{x}_c = 0;\; \ddot{y}_c = 10 \text{ м/с}^{2.}$$

С учетом (2.9) получим

$$\sum F_{k_x}^e = M\ddot{x}_c = 0,$$

$$\sum F_{k_y}^e = M\ddot{y}_c = 20 \text{ (Н)}.$$

Следовательно, главный вектор внешних сил направлен перпендикулярно оси Ox и имеет модуль равный 20 Н.

Лекция 3.
Теоремы об изменении количества движения материальной точки и механической системы

Пусть материальная точка массой m движется под действием силы $\overline{F}$ (см. рис. 3.1). Точка имеет скорость $\overline{v}$. Рассмотрим вектор $\overline{q} = m\overline{v}$, который назовается вектором количества движения материальной точки.

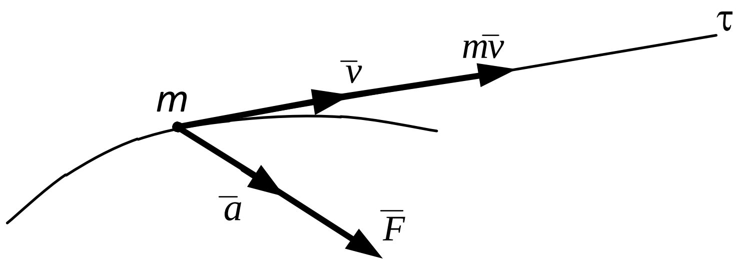


Рисунок 3.1

Производная вектора $\overline{q} = m\overline{v}$ равна

$$\frac{d\overline{q}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\overline{v}\right) = m\frac{d\overline{v}}{dt} = m\overline{a} = \overline{F}.$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}\left(m\overline{v}\right) = \overline{F}. \tag{3.1}$$

Это равенство выражает теорему об изменении количества движения материальной точки: производная по времени от вектора количества движения материальной точки равна силе, действующей на эту точку. Разделим переменные в уравнении (3.1):

$$d\left(m\overline{v}\right) = \overline{F}dt.$$

Интегрируя обе части последнего уравнения, получим

$$\int_{\overline{v}_0}^{\overline{v}} d\left(m\overline{v}\right) = \int_0^t \overline{F}dt$$

или

$$m\overline{v} - m\overline{v}_0 = \int_0^t \overline{F}dt,$$

откуда
$$\overline{v} = \overline{v}_0 + \frac{1}{m}\int_0^t \overline{F}dt,$$

где $\overline{F}dt = d\overline{S}$ - элементарный импульс силы;

$\int\limits_0^t \overline{F}dt = \overline{S}$ - импульс силы за промежуток времени t.

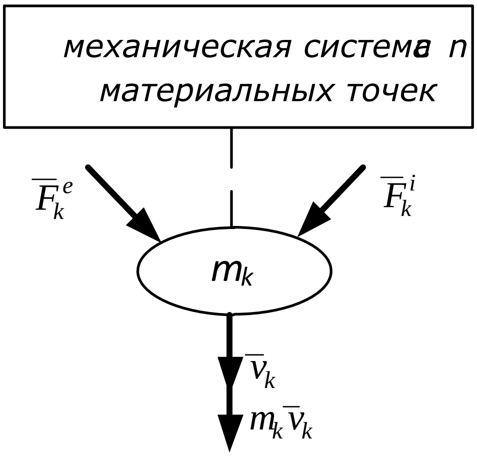


Рисунок 3.2

Возьмем первую производную по времени от обеих частей уравнения (2.2) и получим

$$\sum m_k \overline{v}_k = M\overline{v}_c$$

или

$$\overline{Q} = M\overline{v}_c,$$

где $\overline{Q} = \sum m_k \overline{v}_k$ - главный вектор количества движения механической системы.

Пусть механическая система состоит из n материальных точек.

Выделим для себя в этой системе произвольную материальную точку массой m_k, на которую действуют внешние и внутренние силы. Равнодействующие этих сил равны действию главных векторов внешних $\overline{F}_k^e$ и внутренних $\overline{F}_k^i$ сил системы, под действием которых у материальной точки m_k будет скорость $\overline{v}_k$ и соответственно количество движения $m_k\overline{v}_k$. Аналогично, для любой точки m_k системы уравнение (3.1) будет выглядеть так:

$$\frac{d}{dt}\left(m_k \overline{v}_k\right) = \overline{F}_k^e + \overline{F}_k^i,\ k = 1,2,...,n.$$

Тогда для системы в целом будем иметь

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(m_k \overline{v}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^e + \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^i.$$

Учитывая, что сумма производных равна производной от суммы и поскольку для внутренних сил $\sum\limits_{k=1}^{n} \overline{F}_k^i = 0$, то получим

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dt}(m_k \overline{v}_k) = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^e. \qquad (3.2)$$

или

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^e. \qquad (3.2а)$$

Уравнение (3.2а) выражает теорему об изменении количества движения механической системы в дифференциальной форме: производная по времени от главного вектора количества движения механической системы материальных точек равна векторной сумме всех внешних сил, действующих на систему.

Разделив переменные в уравнении (3.2а) и проинтегрировав обе его части, получим

$$\int_{\overline{Q}_0}^{\overline{Q}} d\overline{Q} = \sum \int_0^t \overline{F}_k^e dt \qquad (3.3)$$

или

$$\vec{Q} - \overline{Q}_0 = \sum \overline{S}_k^e , \qquad (3.3а)$$

где $\overline{S}_k^e$ есть импульс внешней силы, действующий на k-ю точку системы.

Уравнения (3.3), (3.3а) выражают теорему об изменении количества движения механической системы в интегральной форме: изменение количества движения механической системы материальных точек за определенное время равно векторной сумме импульсов всех внешних сил, действующих на систему за это же время.

Из уравнения (3.2а) следует, что

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{k_x}^e ,$$

$$\frac{dQ_y}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{k_y}^e , \qquad (3.4)$$

$$\frac{dQ_z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} F_{k_z}^e ,$$

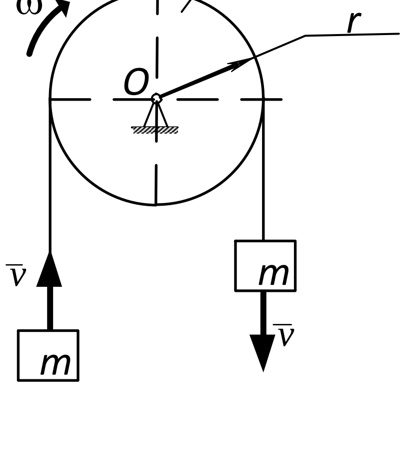
а из уравнения (3.3а) следует, что

$$Q_x - Q_{0_x} = \sum S_{k_x}^e ,$$

$$Q_y - Q_{0_y} = \sum S_{k_y}^e , \qquad (3.5)$$

$$Q_z - Q_{0_z} = \sum S_{k_z}^e .$$

<u>Закон сохранения количества движения системы.</u>



Если $\sum \overline{F}_k^e = 0$, то из (3.2а) следует, что $\dfrac{d\overline{Q}}{dt} = 0$, следовательно $\overline{Q} = const$.

Закон сохранения количества движения механической системы материальных точек: если сумма внешних сил, действующих на механическую систему материальных точек, равна нулю ($\sum \overline{F}_k^e = 0$), то количество движения системы сохраняется.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое количество движения материальной точки и количество движения механической системы материальных точек?

2. Чем определяется изменение количества движения материальной точки и механической системы материальных точек?

3. Сформулируйте теорему об *изменении количества движения механической системы в дифференциальной и интегральной формах?*

4. Сформулируйте закон сохранения количества движения механической системы.

Задача 3.1. Два груза одинаковой массы m прикреплены к концам невесомой нерастяжимой нити, перекинутой через однородный шкив массой m_0 и радиуса r. Найти количество движения Q данной механической системы, если угловая скорость шкива равна ω. Проскальзыванием нити относительно шкива пренебречь.

Решение

Количество движения механической системы, состоящей из нескольких тел, равно векторной сумме количеств движения всех тел системы. Поскольку центр масс шкива принадлежит неподвижной оси шарнира O, то количество движения шкива равно $Q_{øê} = m_0 v_0 = 0$.

Оба груза движутся с одинаковой скоростью $v = \omega r$, но это движение происходит в противоположных направлениях. Поэтому количество движения данной системы будет равно нулю:

$$Q = m\omega r - m\omega r = 0.$$

Задача 3.2. Мужчина массой M_1 запрыгивает на движущуюся железнодорожную платформу перпендикулярно направлению ее движения. Масса платформы M_2, а скорость u. Определить скорость платформы вместе с мужчиной.

Решение

На систему, состоящую из двух частей (платформа, человек), действуют сила тяжести и сила реакции рельсов. Пренебрегая сопротивлением, замечаем, что на ось, направленную вдоль траектории движения платформы, сумма проекций всех внешних сил равна нулю. Тогда относительно этой оси имеет место закон сохранения количества движения

$$Q_x = M_1 v_{1_x} + M_2 v_{2_x} = const.$$

Обозначим количество движения системы до прыжка $Q_x^{(0)}$, после прыжка $Q_x^{(1)}$. Тогда получим

$$Q_x^{(0)} = Q_x^{(1)}.$$

К тому моменту, когда человек окажется на платформе имеем: $v_{1_x} = 0$ $(\bar{v}_1 \perp x)$, а $v_{2_x} = u$. Поэтому

$$Q_x^{(0)} = M_2 u.$$

После совершения прыжка скорости человека и платформы будут одинаковы и равны v, поэтому

$$Q_x^{(1)} = (M_1 + M_2)v.$$

Решая уравнение

$$M_1 u = (M_1 + M_2)v,$$

находим

$$v = \frac{M_2}{M_1 + M_2} u.$$

Лекция 4.
Теоремы об изменении момента количества движения материальной точки и системы точек относительно центра и оси

Пусть материальная точка массой m движется под действием силы $\bar{F}$ и имеет количество движения равное $m\bar{v}$ (рис. 4.1).

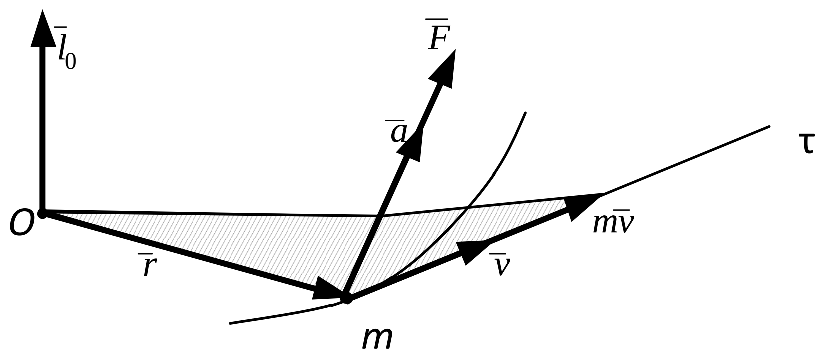


Рисунок 4.1

Положение данной материальной точки определяется ее радиус-вектором $\bar{r}$. Тогда вектор $\bar{l}_0$, равный векторному произведению радиус-вектора точки m

на вектор количества движения точки m называется векторным моментом количества движения этой точки относительно центра O:

$$\bar{l}_0 = \bar{r} \times m\bar{v}. \tag{4.1}$$

Возьмем от него производную по времени и получим:

$$\frac{d\bar{l}_0}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\bar{r} \times m\bar{v}\right) = \frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v} + \bar{r} \times \frac{d}{dt}\left(m\bar{v}\right) =$$
$$= \bar{v} \times m\bar{v} + \bar{r} \times m\bar{a} = \bar{r} \times \bar{F} = \bar{M}_0\left(\bar{F}\right),$$

где $\bar{v} \times m\bar{v} = 0$, потому что $\bar{v} \parallel m\bar{v}$,

$\bar{M}_0\left(\bar{F}\right)$ - момент силы $\bar{F}$, действующей на материальную точку относительно центра O.

Таким образом,

$$\frac{d\bar{l}_0}{dt} = \bar{M}_0\left(\bar{F}\right). \tag{4.2}$$

Равенство (4.2) выражает теорему об изменении момента количества движения материальной точки: производная по времени от векторного момента количества движения точки относительно центра O равна моменту силы, действующей на данную точку относительно центра O.

Пусть векторный момент количества движения $\bar{L}_0$ (кинетический момент) системы материальных точек относительно центра O есть вектор, равный геометрической сумме векторных моментов количества движения всех точек данной системы относительно данного центра, т.е.

$$\bar{L}_0 = \sum_{k=1}^{n} \bar{l}_{0_k} = \sum_{k=1}^{n} \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k. \tag{4.3}$$

Аналогичные определения векторного момента количества движения системы материальных точек относительно декартовых осей координат можно получить после проектирования уравнения (4.3) на соответствующие оси:

$$L_x = \sum_{k=1}^{n} M_x\left(m_k \bar{v}_k\right),$$

$$L_y = \sum_{k=1}^{n} M_y\left(m_k \bar{v}_k\right), \tag{4.4}$$

$$L_z = \sum_{k=1}^{n} M_z\left(m_k \bar{v}_k\right).$$

Если рассмотреть механическую систему (рис. 3.2), то для каждой материальной точки уравнение (4.2) можно записать в виде:

$$\frac{d\bar{l}_{0_k}}{dt} = \overline{M}_0\left(\overline{F}_k^e\right) + \overline{M}_0\left(\overline{F}_k^i\right), \; k = 1, 2, \ldots, n .$$

Тогда для всей системы будем иметь

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{d\bar{l}_{0_k}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_0\left(\overline{F}_k^e\right) + \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_0\left(\overline{F}_k^i\right)$$

или

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n} \bar{l}_{0_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_0\left(\overline{F}_k^e\right), \text{ так как } \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_0\left(\overline{F}_k^i\right) = 0 .$$

С учетом уравнения (4.3) получим

$$\frac{d\overline{L}_0}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \overline{M}_0\left(\overline{F}_k^e\right). \tag{4.5}$$

Следовательно, производная по времени от векторного момента количества механической системы относительно любого центра равна сумме векторных моментов всех внешних сил относительно данного центра, действующих на систему.

Проекции уравнения (4.5) на оси координат дадут:

$$\begin{aligned} \frac{dL_x}{dt} &= \sum_{k=1}^{n} M_x\left(\overline{F}_k^e\right), \\ \frac{dL_y}{dt} &= \sum_{k=1}^{n} M_y\left(\overline{F}_k^e\right), \\ \frac{dL_z}{dt} &= \sum_{k=1}^{n} M_z\left(\overline{F}_k^e\right). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Определим векторный момент количества движения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z с угловой скоростью ω.

Из уравнения (4.4) следует

$$L_z = \sum_{k=1}^{n} M_z\left(m_k \bar{v}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} m_k v_k h_k ,$$

где h_k есть кратчайшее расстояние от k-й точки до оси z (т.е. плечо вектора $m_k \bar{v}_k$). Тогда, принимая во внимание, что $v_k = \omega h_k$, получим:

$$L_z = \sum_{k=1}^{n} m_k \omega h_k^2 = \omega \sum_{k=1}^{n} m_k h_k^2 = \omega J_z,$$

где $J_z = \sum_{k=1}^{n} m_k h_k^2$ есть момент инерции тела относительно оси z (см. лекцию 5).

Таким образом,

$$L_z = J_z \omega. \tag{4.7}$$

Подставляя (4.7) в (4.6), получим дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси z:

$$\frac{d}{dt}(J_z \omega) = \sum_{k=1}^{n} M_z\left(\overline{F}_k^e\right)$$

и, учитывая, что $J_z = const$, получим

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = \sum_{k=1}^{n} M_z\left(\overline{F}_k^e\right)$$

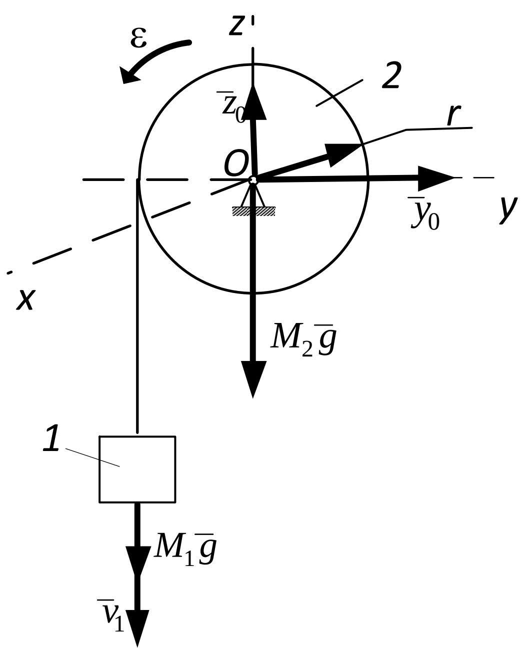
или

$$J_z \varepsilon = \sum_{k=1}^{n} M_z\left(\overline{F}_k^e\right) \tag{4.8}$$

или

$$J_z \ddot{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} M_z\left(\overline{F}_k^e\right).$$

<u>Закон о сохранении момента количества движения механической системы</u>



Если $\sum_{k=1}^{n}\overline{M}_0\left(\overline{F}_k^e\right)=0$, то из (4.5) следует, что $\frac{d\overline{L}_0}{dt}=0$, следовательно $\overline{L}_0=const$.

Закон сохранения векторного момента количества движения механической системы материальных точек: если сумма векторних моментов внешних сил, действующих на механическую систему материальных точек, равна нулю ($\sum_{k=1}^{n}\overline{M}_0\left(\overline{F}_k^e\right)=0$), то векторный момент количества движения системы сохраняется.

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое векторный момент количества движения материальной точки относительно центра и векторный момент количества движения системы материальных точек относительно центра ?

2. Дайте определение векторного момента количества движения механической системы материальных точек относительно неподвижной оси.

3. Сформулируйте теорему об изменении момента количества движения материальной точки и теорему об изменении момента количества движения механической системы.

4. Как определяется векторный момент количества движения тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?

5. В чем суть закона сохранения момента количества движения механической системы?

Задача 4.1. Груз массой M_1 подвешен на нерастяжимой нити. которая обмотана вокруг цилиндрического барабана массой M_2 и радиуса r. Пренебрегая силой трения и массой нити, определить угловое ускорение ε барабана и натяжение S нити.

Решение

Рассмотрим движение данной механической системы, состоящей из двух частей: груза 1 (поступательное движение) и барабана 2 (вращательное движение) вокруг неподвижной оси шарнира Ox. На основании теоремы об изменении векторного момента количества движения системы имеем

$$\frac{dL_x}{dt}=\sum M_x\left(\overline{F}_k^e\right). \tag{1}$$

Внешние силы, действующие на систему - это силы тяжести $M_1\overline{g}$, $M_2\overline{g}$ и силы реакции внешних связей (шарнирно-неподвижной опоры O) $\overline{y}_0$, $\overline{z}_0$. Поэтому $\sum M_x\left(\overline{F}_k^e\right)=M_x\left(M_1\overline{g}\right)+M_x\left(M_2\overline{g}\right)+M_x\left(\overline{y}_0\right)+M_x\left(\overline{z}_0\right)=M_1gr$, так как $M_x(M_2\bar{g}) = M_x(\bar{y}_0) = M_x(\bar{z}_0) = 0.$

Векторный момент количества движения системы относительно оси Ox состоит из векторных моментов количеств движений составных частей системы относительно данной оси:

$$L_x = L_{1_x} + L_{2_x} = M_x(M_1\bar{v}_1) + J_{2_x}\omega = M_1 v_1 r + \frac{M_2 r^2}{2}\omega =$$

$$= M_1\omega r^2 + \frac{M_2 r^2}{2}\omega = \frac{\omega r^2}{2}(2M_1 + M_2).$$

Тогда согласно уравнению (1) получим

$$\frac{r^2}{2}(2M_1 + M_2)\frac{d\omega}{dt} = M_1 g r,$$

откуда

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{2M_1 g}{r(2M_1 + M_2)}.$$

Для определения натяжения S нити спроецируем на ось z уравнение динамики поступательного движения груза:

$$M_1 a_{1_z} = \sum F_{k_z},$$

откуда

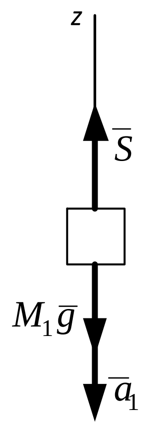
$$-M_1 a_1 = S - M_1 g.$$

Тогда с учетом $a_1 = \varepsilon r$ получим

$$-M_1 \varepsilon r = S - M_1 g,$$

откуда после подстановки выражения для ε следует, что

$$S = \frac{M_1 M_2 g}{2M_1 + M_2}.$$



Лекция 5.
Момент инерции тела относительно неподвижной оси (осевой момент инерции). Работа силы и мощность.

Момент инерции системы материальных точек относительно оси (см. (4.7)) есть арифметическая сумма произведений масс данных точек на квадраты кратчайших расстояний до оси.

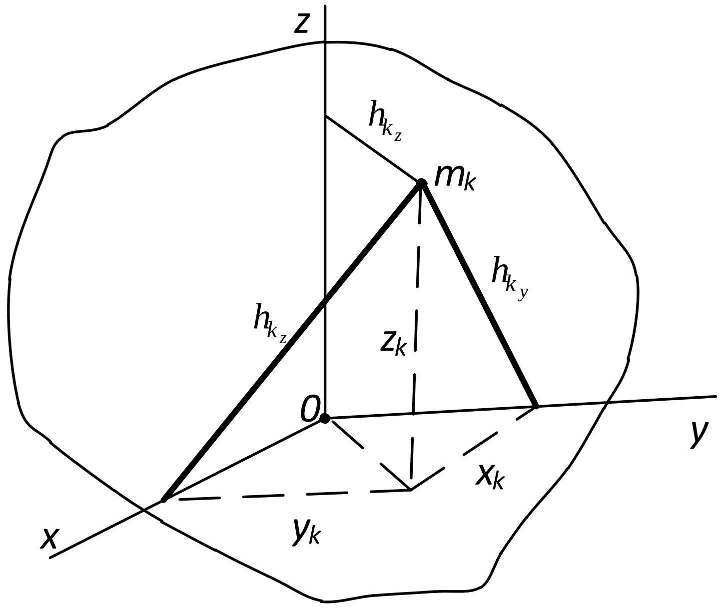


Рисунок 5.1

Пусть тело зафиксировано в системе координат $Oxyz$ (рис. 5.1). Тогда k-я точка массой m_k данного тела будет иметь координаты x_k, y_k, z_k, а квадраты расстояний от данной точки до координатных осей будут соответственно равны:

$$h_{k_x}^2 = y_k^2 + z_k^2,$$

$$h_{k_y}^2 = z_k^2 + x_k^2,$$

$$h_{k_z}^2 = x_k^2 + y_k^2.$$

Согласно определению осевого момента инерции имеем:

$$\begin{aligned} J_x &= \sum m_k h_{k_x}^2 = \sum m_k \left(y_k^2 + z_k^2\right), \\ J_y &= \sum m_k h_{k_y}^2 = \sum m_k \left(z_k^2 + x_k^2\right), \\ J_z &= \sum m_k h_{k_z}^2 = \sum m_k \left(x_k^2 + y_k^2\right). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Таким образом, момент инерции тела относительно координатной оси равен сумме произведений масс точек тела на сумму квадратов «недостающих» координат этих точек.

Если сложить вместе равенства (5.1), то получим:

$$J_x + J_y + J_z = 2\sum m_k\left(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2\right) = 2\sum m_k d_k^2 = 2J_0,$$ где

$d_k^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2$ – квадрат расстояния от точки m_k до начала координат O;

J_0 – момент инерции тела относительно начала координат O.

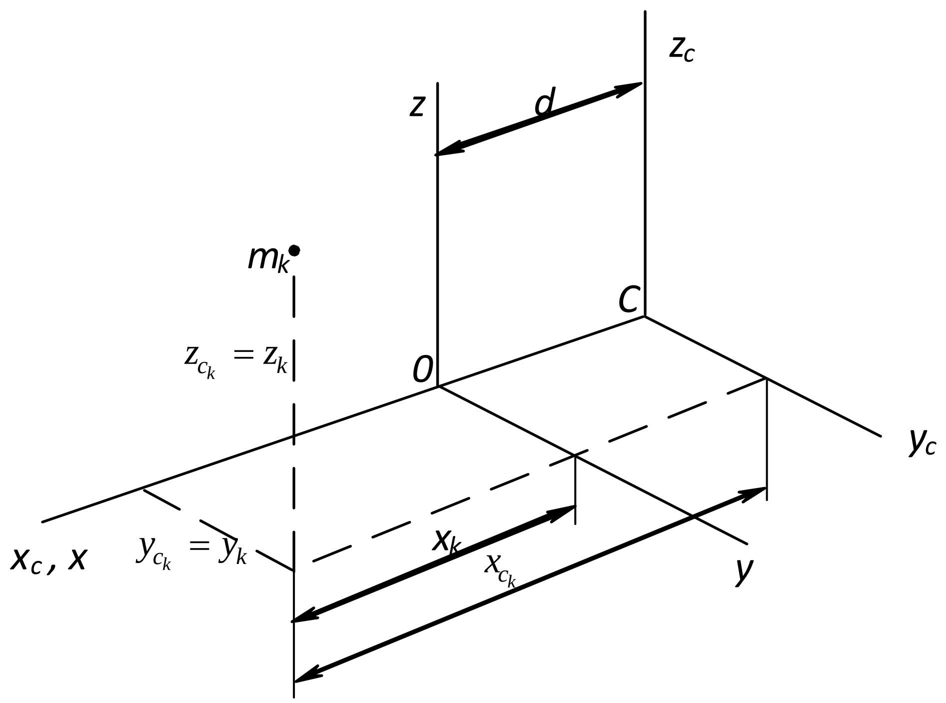
Отсюда

$$J_0 = \frac{1}{2}\left(J_x + J_y + J_z\right). \tag{5.2}$$

Таким образом, момент инерции тела относительно начала координат O равен полусумме осевых моментов инерции тела.

Тело массой M с центром масс в точке C свяжем с новой системой координат с началом в точке C (рис. 5.2).

Для этого начало O системы координат $Oxyz$ сместим вдоль оси Ox на величину d, сохранив все оси параллельными. Координаты точки m_k соответственно будут иметь значения: в системе $Oxyz$ - x_k, y_k, z_k; в системе $Cx_cy_cz_c$ - x_{c_k}, y_{c_k}, z_{c_k}. Между этими координатами есть очевидная зависимость: $z_{c_k} = z_k$; $y_{c_k} = y_k$; $x_{c_k} = x_k + d$.



–

Рисунок 5.2

Согласно уравнению (5.1) имеем:

$$J_k = \sum m_k\left(x_k^2 + y_k^2\right) = \sum m_k\left(\left(x_{c_k} - d\right)^2 + y_{c_k}^2\right) =$$
$$= \sum m_k\left(x_{c_k}^2 - 2x_{c_k}d + d^2 + y_{c_k}^2\right) =$$
$$= \sum m_k\left(x_{c_k}^2 + y_{c_k}^2\right) - 2d\sum m_k x_{c_k} + d^2\sum m_k .$$

Учитывая, что

$\sum m_k\left(x_k^2 + y_k^2\right) = J_{z_c}$,

$\sum m_k x_{c_k} = 0$ - это абсцисса точки С в системе координат $Cx_c y_c z_c$,

$\sum m_k = M$,

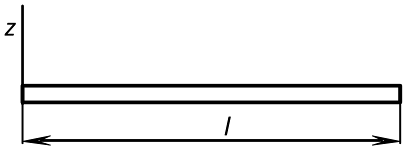
в конечном счете получим:

$$J_z = J_{z_c} + Md^2 . \tag{5.3}$$

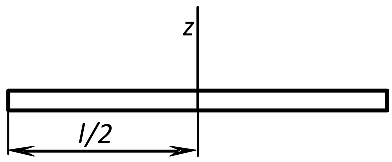
Равенство (5.3) выражает теорему Гюйгенса-Штейнера: момент инерции тела относительно любой оси равен моменту инерции тела относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между осями.

<u>Примеры моментов инерции некоторых тел:</u>

1) однородный тонкий стержень длины l и массы m

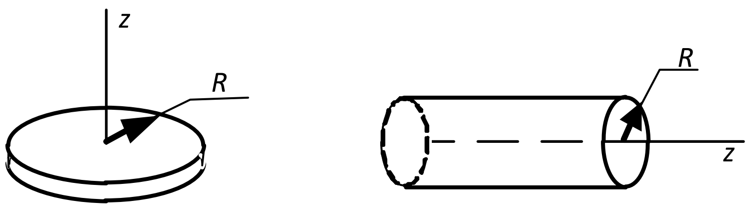


$$J_z = \frac{1}{3}ml^2$$



$$J_z = \frac{1}{12}ml^2$$

2) однородный диск или сплошной цилиндр радиуса R и массы M

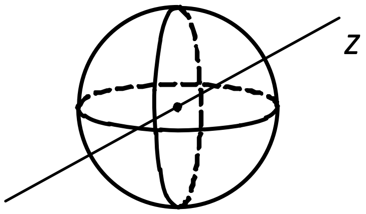


$$J_z = \frac{1}{2}MR^2$$

3) кольцо или труба радиуса R и массы M

$$J_z = MR^2$$

4) шар массой M и радиуса R



$$J_z = \frac{2}{5} MR^2$$

Момент инерции неоднородного тела неправильной формы массой M относительно оси z, проходящей через центр масс тела определяется по формуле:

$$J_z = M\rho_u^2,$$

где ρ_u есть радиус инерции данного тела (величина, которую надо искать в справочниках по моментам инерции тел).

Работа силы и мощность.

Пусть точка $\grave{I}$ массой m движется под действием силы $\overline{F}$ и имеет в данный момент скорость $\overline{v}$ (рис. 5.3)

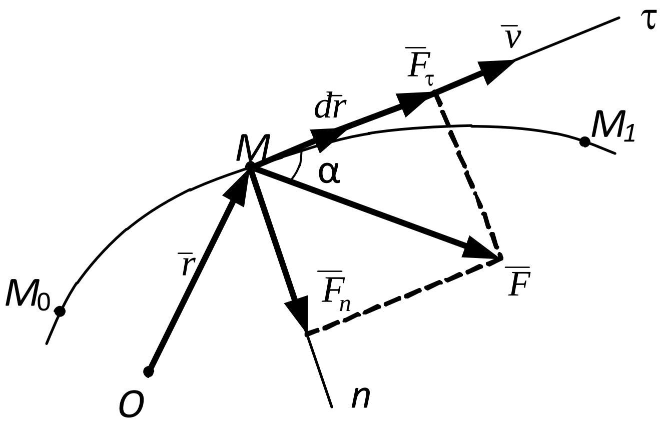


Рисунок 5.3

Известно, что тангенциальная составляющая силы $F_\tau = m\dfrac{dv}{dt}$ изменяет величину скорости, а нормальная составляющая силы $F_n = m\dfrac{v^2}{\rho}$ изменяет направление скорости.

Чтобы охарактеризовать действие силы, которая изменяет величину скорости точки, вводится понятие элементарной работы dA силы

$$dA = F_\tau dr = (F\cos\alpha)dr = \overline{F} \cdot d\overline{r}\,. \tag{5.4}$$

Так как элементарный прирост $d\overline{r}$ радиус-вектора $\overline{r}$ точки равен по величине элементарному перемещению dS точки вдоль траектории (см. рис.5.3), то

$$dA = F_\tau dS = FdS\cos\alpha \text{ [Дж].} \tag{5.5}$$

Отсюда при $0 \le \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ имеем $dA > 0$;

при $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ имеем $dA = 0$;

при $\dfrac{\pi}{2} < \alpha \le \pi$ имеем $dA < 0$.

Работу силы при перемещении точки $\grave{I}$ из положения M_0 в положение M_1 находят через интеграл:

$$A = \int\limits_{M_0}^{M_1} F dS \cos\alpha . \tag{5.6}$$

Если в равенстве (5.4) учесть, что

$$\overline{F} = F_x \overline{i} + F_y \overline{j} + F_z \overline{k}$$

$$\text{и} \quad d\overline{r} = dx\overline{i} + dy\overline{j} + dz\overline{k} ,$$

то получим

$$dA = \overline{F} \cdot d\overline{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz , \tag{5.7}$$

откуда

$$A = \int\limits_{M_0}^{M_1} \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz \right). \tag{5.8}$$

С помощью уравнений (5.5) - (5.8) определим работу сил, наиболее часто встречающихся в практических задачах.

1.Работа постоянной по величине и по направлению силы равна

$$A_{F=const} = FS \cos\alpha , \tag{5.9}$$

где S - прямолинейное перемещение точки под действием приложенной силы $\overline{F}$;

α - угол между направлениями действия силы $\overline{F}$ и перемещения S.

2.Работа силы тяжести равна

$$A_{Mg} = \pm Mgh_c , \tag{5.10}$$

где h_c - вертикальное перемещение центра масс тела («+» при падении тела под действием силы тяжести, соответственно «–» при подъеме тела).

3.Работа силы $\overline{F}_{тр}$ трения скольжения в общем случае равна

$$A_{F_{тр}} = -\int\limits_{(S)} F_{тр} dS = -\int\limits_{(S)} fNdS , \tag{5.11}$$

где f - коэффициент трения, N - нормальная реакция опоры; dS и S - соответственно элементарное и конечное перемещение точки приложения силы $\overline{F}_{тр}$. Если $F_{тр} = const$, то получим

$$A_{F_{тр}} = -F_{тр} S = -fNS . \tag{5.12}$$

4.Работа силы упругости равна

$$A_{F_{óïð}} = \frac{c}{2}\left(\lambda_0^2 - \lambda_1^2\right), \tag{5.13}$$

где c - коэффициент жесткости пружины, λ_0 и λ_1 - соответственно начальная и конечная деформации пружины.

При вращении тела вокруг неподвижной оси z под действием силы $\overline{F}$ или пары сил мерой действия этих сил будут соответственно момент силы $M_z\left(\overline{F}\right)$ или момент пары сил M. Тогда работа таких моментов будет соответственно равна

$$A_M = \pm\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M_z\left(\overline{F}\right)d\varphi = \pm\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} Md\varphi. \tag{5.14}$$

Знак «+» берется тогда, когда вращательный эффект момента силы или момента пары сил совпадает с направлением вращения тела, иначе ставится знак «–».

Если $M_z\left(\overline{F}\right) = \tilde{n}onst$ или $M = \tilde{n}onst$, то

$$A_M = \pm M\varphi, \tag{5.15}$$

где φ - угол поворота тела.

Сила тяжести и сила упругости являются потенциальными силами. Сила называется потенциальной (или консервативной), если работа действия этой силы не зависит от траектории движения тела, а определяется исключительно его начальным и конечным положениями.

Мощность N - это работа, выполненная за единицу времени

$$N = \frac{dA}{dt} \ \text{[Вт]}. \tag{5.16}$$

Если в (5.16) подставить уравнение (5.4), то получим

$$N = \frac{\overline{F}\cdot d\overline{r}}{dt} = \overline{F}\cdot\overline{v}, \tag{5.17}$$

следовательно мощность силы равна скалярному произведению силы $\overline{F}$ на скорость $\overline{v}$.

Аналогично, подставляя в (5.17) уравнение (5.5), получим

$$N = \frac{F_\tau dS}{dt} = F_\tau v, \tag{5.18}$$

а мощность момента силы будет равна

$$N_M = \pm\frac{Md\varphi}{dt} = \pm M\omega, \tag{5.19}$$

где ω - угловая скорость вращения тела вокруг неподвижной оси.

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется осевым моментом инерции системы материальных точек?

2. Как определяются моменты инерции системы относительно координатных осей?

3. В чем суть теоремы Гюйгенса-Штейнера?

4. Что такое работа силы на элементарном и конечном перемещениях?

5. Какими формулами определяется работа постоянной силы, а также сил тяжести, трения скольжения, упругости и момента силы относительно неподвижной оси?

6. Что такое мощность и по каким формулам она определяется?

Задача 5.1. Определить радиус инерции тела массой $M = 400$ кг относительно оси Oz, если момент инерции тела относительно данной оси равен $J_z = 4$ кг·м^2.

Решение

Имеем $J_z = M\rho_u^2$. Следовательно, $\rho_u = \sqrt{\dfrac{J_z}{M}} = \sqrt{\dfrac{4}{400}} = 0{,}1$ (м).

Задача 5.2. Нерастянутую пружину, коэффициент жесткости которой равен $c = 500$ Н/м, растянули на 0,04 м. Определить работу силы упругости пружины.

Решение

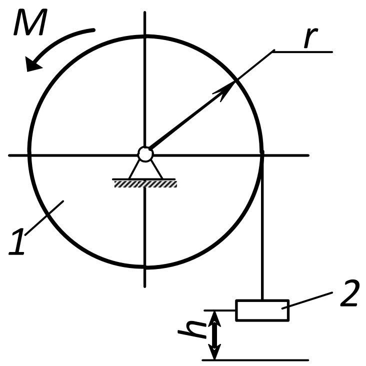
Работа силы упругости равна

$$A_{F_{упр}} = \frac{c}{2}\left(\lambda_0^2 - \lambda_1^2\right).$$

По условию задачи $\lambda_0 = 0$; $\lambda_1 = 0{,}04$ м. Тогда

$$A_{F_{упр}} = \frac{500}{2}\left(0^2 - 0{,}04^2\right) = -0{,}4 \text{ (Дж).}$$

Задача 5.3. На барабан 1, радиус которого равен $r = 0{,}1$ м, действует пара сил с постоянным моментом $M = 40$ Н·м. Определить работу, выполненную парой сил и силой тяжести груза 2 массой $m_2 = 40$ кг при подъеме его на высоту $h = 0{,}3$ м.



Решение

Работа момента пары сил равна

$$A_M = M\varphi = M\frac{h}{r} = 40 \cdot \frac{0{,}3}{0.1} = 120 \text{ (Дж).}$$

Работа силы тяжести равна

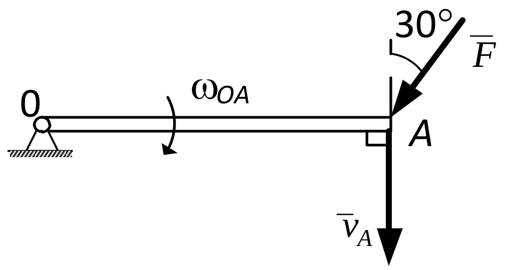
$$A_{mg} = -mgh = -40 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}3 = -117{,}6 \text{ (Дж)}.$$

Таким образом

$$\sum A = A_M + A_{mg} = 120 - 117{,}6 = 2{,}4 \text{(Дж)}.$$

Задача 5.4. На точку A кривошипа, который вращается вокруг горизонтальной оси O, действует в вертикальной плоскости сила $F = 100$ Н. Определить мощность силы $\overline{F}$, если скорость $\overline{v}_A$ точки A равна 2 м/с.

Решение



Эту задачу можно решить двумя способами.
1) На основе уравнения (5.17) имеем

$$N = \overline{F} \cdot \overline{v}_A = F v_A \cos 30^\circ = 100 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 173 \text{ (Вт)}.$$

2) Из уравнения (5.19) получим

$$N = M_0(\overline{F})\omega_{OA},$$

где $\left|M_0(\overline{F})\right| = F|OA|\cos 30^\circ$, а $\omega_{OA} = \dfrac{v_A}{OA}$.

Тогда $$N = F|OA|\cos 30^\circ \frac{v_A}{OA} = 173 \text{ (Вт)}.$$

Лекция 6.

Теоремы об изменении кинетической энергии материальной точки и механической системы материальных точек

Как известно, основное уравнение динамики материальной точки (1.2) имеет вид:

$$m\overline{a} = \sum \overline{F}_k .$$

Спроецировав это уравнение на касательную ось, получим

$$ma_\tau = \sum F_{k_\tau}$$

или

$$m\frac{dv}{dt} = \sum F_{k_\tau} .$$

Умножив обе части последнего уравнения на элементарное перемещение точки dS, с учетом того, что $\frac{dS}{dt} = v$, получим

$$mvdv = \sum F_{k_\tau} dS$$

или

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \sum F_{k_\tau} dS = \sum dA_k . \tag{6.1}$$

Величина $\frac{mv^2}{2}$ называется кинетической энергией материальной точки. Интегрируя обе части уравнения (6.1), получим:

$$\int_{v_0}^{v_1} d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \sum \int_0^S F_{k_\tau} dS$$

или

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_k . \tag{6.2}$$

Равенство (6.2) выражает собой теорему об изменении кинетической энергии точки в интегральной форме: прирост кинетической энергии точки на некотором участе ее перемещеия равен суммарной работе действующих на точку сил на данном перемещении.

Результаты, полученные для материальной точки, можно обобщить на систему материальных точек. Из рис. 3.2 следует, что для любой k-й точки выражение (6.1) можно записать так:

$$d\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = dA_k^e + dA_k^i ,\ k = 1,2,\ldots,n,$$

где dA_k^e и dA_k^i есть соответственно элементарная работа главных векторов внешних и внутренних сил, действующих на точку.

Тогда для системы точек можно записать:

$$\sum d\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i$$

или

$$d\sum\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i .$$

Сумма, стоящая под знаком дифференциала в левой части равенства, есть кинетическая энергия T механической системы, то есть

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2}. \qquad (6.3)$$

Следовательно,

$$dT = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i , \qquad (6.4)$$

откуда

$$\int_{T_0}^{T} dT = \sum \int_{(S)} dA_k^e + \sum \int_{(s)} dA_k^i$$

или

$$T - T_0 = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i . \qquad (6.5)$$

Уравнение (6.5) выражает суть теоремы об изменении кинетической энергии механической системы: прирост кинетической энергии системы равен сумме работ всех сил внешних и внутренних, действующих на систему.

Примечание. Если механическая система состоит из абсолютно твердых тел, то $\sum A_k^i = 0$.

Кинетическая энергия T механических систем, состоящих из нескольких тел, равна

$$T = \sum T_k , \qquad (6.6)$$

где T_k - кинетическая энергия k-го тела системы.

Рассмотрим следующие возможные случаи.

1. Тело движется поступательно. При этом векторы всех точек тела равны друг другу, то есть $\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = ...\bar{v}_n = \bar{v}_c$. Тогда кинетическая энергия тела равна

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum \frac{m_k v_c^2}{2} = \frac{v_c^2}{2} \sum m_k = \frac{M v_c^2}{2}.$$

Следовательно, при поступательном движении тела его кинетическая энергия равна половине произведения массы тела на квадрат скорости центра масс тела:

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 . \qquad (6.7)$$

2. Тело вращается вокруг неподвижной оси z с угловой скоростью ω. Кинетическая энергия тела будет равна

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum \frac{m_k (\omega h_k)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_k h_k^2 = \frac{\omega^2 J_z}{2} ,$$

где h_k - радиус вращения для k-й точки.

Следовательно, если тело вращается вокруг неподвижной оси, его кинетическая энергия равна половине произведения осевого момента инерции J_z тела на квадрат угловой скорости ω:

$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2 . \qquad (6.8)$$

3. Тело движется плоскопараллельно. Это значит, что всегда найдется мгновенный центр скоростей (точка P), вокруг которого тело будет вращатьтя с угловой скоростью ω.

Тогда, согласно уравнению (6.8), кинетическая энергия тела будет равна

$$T = \frac{1}{2} J_p \omega^2.$$

Однако, учитывая теорему Гюйгенса-Штейнера

$$J_p = J_c + M(CP)^2,$$

получим

$$T = \frac{1}{2} J_c \omega^2 + \frac{1}{2} M(\omega \cdot CP)^2 = \frac{1}{2} J_c \omega^2 + \frac{1}{2} M v_c^2.$$

Следовательно, при плоскопараллельном движении тела его кинетическая энергия состоит из двух частей: 1)кинетической энергии поступательного движения центра масс тела и 2)кинетической энергии вращательного движения тела вокруг оси, проходящей через данный центр масс.

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2. \qquad (6.9)$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется кинетической энергией материальной точки?

2. Чему равно изменение кинетической энергии материальной точки?

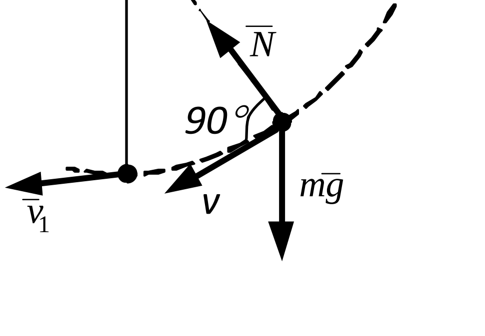
3. Сформулируйте понятие кинетической энергии механической системы.

4. Объясните суть теоремы об изменении кинетической энергии системы материальных точек?

5. Как определяется кинетическая энергия тела, участвующем: а) в поступательном движении; б) во вращательном движении; в) в плоскопараллельном движении?

Задача 6.1. Материальная точка M массой m подвешена на нерастяжимой нити длиной $OM = 0{,}5$ м к неподвижной точке O, отведена на угол $\alpha = 90^\circ$ от положения равновесия, и отпущена без начальной скорости. Определить скорость точки M в момент прохождения ее через положение равновесия.

Решение



Согласно уравнению (6.2) имеем

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_k \text{ ,}$$

где $v_0 = 0$, а $\sum A_k = A_{mg} + A_N$.

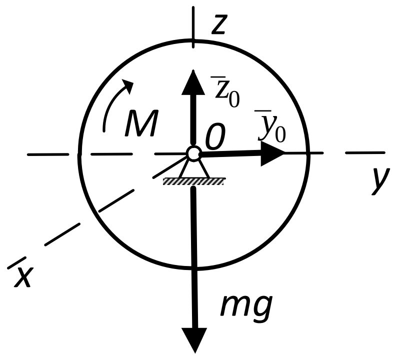
Работа силы тяжести равна $A_{mg} = mg|OM| = 0{,}5mg$.

Элементарная работа реакции N нити в любом положении точки M равна $dA_N = NdS\cos 90^\circ = 0$, следовательно и на любом конечном перемещении точки работа реакции N нити равна $A_N = 0$.

Таким образом, $\dfrac{mv_1^2}{2} = 0{,}5mg$, откуда $v_1 = \sqrt{2 \cdot 0{,}5 \cdot 9{,}8} = 3{,}1$ (м/с).

Задача 6.2. К ротору, момент инерции которого относительно оси вращения Ox равен 5 кг·м^2, приложен постоянный момент пары сил $M = 10$ Н·м. Определить угловое ускорение ротора.

Решение.



Считая ротор абсолютно твердым телом, который начинает двигаться из состояния покоя, получим

$$T - T_0 = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i \text{ ,}$$

где $T_0 = 0$ и $\sum dA_k^i = 0$,
тогда

$$T = \sum dA_k^e \text{ .} \tag{1}$$

Кинетическая энергия ротора равна $T = \dfrac{1}{2} J_x \omega^2$, сумма внешних сил равна $\sum A_k^e = A_M + A_{mg} + A_{y_0} + A_{z_0}$, где $A_{mg} = A_{y_0} = A_{z_0} = 0$ (для силы тяжести $m\bar{g}$ точка ее приложения ($\bar{y}_0$, $\bar{z}_0$) - неподвижная), следовательно, $\sum A_k^e = A_M = M\varphi$. Тогда, согласно равенству (1), будем иметь

$$\frac{1}{2} J_x \omega^2 = M\varphi.$$

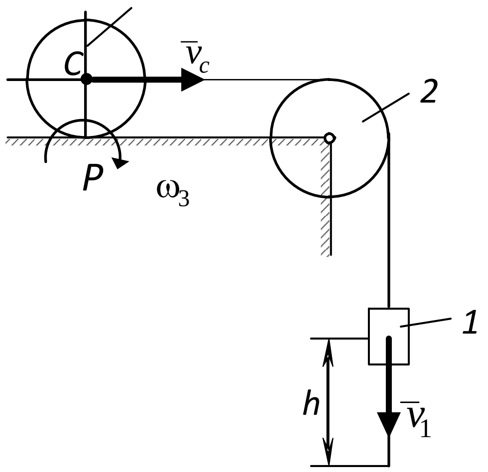
Дифференцируя по времени обе части последнего уравнения, получим

$$J_x\omega\frac{d\omega}{dt}=M\,\frac{d\varphi}{dt},\text{ откуда } J_x\omega\varepsilon=M\omega.$$

Следовательно,

$$\varepsilon=\frac{M}{J_x}=\frac{10}{5}=2\ (\text{c}^{-2}).$$

Задача 6.3.



Груз 1 привязан к свободному концу нерастяжимой нити, перекинутой через невесомый блок 2, второй конец нити прикреплен к оси C катка 3. Груз 1 начинает движение под действием силы тяжести. Масса груза 1 равна m_1, масса катка m_3, радиус катка $R_3=R$. Определить угловую скорость катка ω_3 в тот момент, когда груз опустится на величину h. Сопротивление качения не учитывать, каток – однородный цилиндр.

Решение

Кинетическая энергия системы в начальном состоянии равна $T_0=0$, а в конечном положении будет равна

$$T=T_1+T_3=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_3v_c^2+\frac{1}{2}J_{3_c}\omega_3^2,$$

где $v_1=v_c=\omega_3|CP|=\omega_3R;\quad J_{3_c}=\dfrac{m_3R^2}{2}.$

Тогда

$$T=\frac{1}{2}m_1\omega_3^2R^2+\frac{1}{2}m_3\omega_3^2R^2+\frac{1}{4}m_3\omega_3^2R^2$$

или

$$T=\frac{\omega_3R^2}{4}\left(2m_1+3m_3\right).$$

Сумма работ внешних сил равна работе силы тяжести груза 1, поскольку работы силы тяжести катка и нормальной реакции катка $A_{m_3g}=A_{N_3}=0$, то есть

$$\sum A_k^e=A_{m_1g}=m_1gh.$$

Тогда по теореме об изменении кинетической энергии системы получим

$$\frac{\omega_3^2 R^2}{4}\left(2m_1 + 3m_3\right) = m_1 g h,$$

откуда

$$\omega_3 = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{m_1 g h}{2m_1 + 3m_3}}.$$

Лекция 7.
Принцип Даламбера для материальной точки и механической системы

Основное уравнение динамики (1.2) материальной точки, движущейся под действием активных сил (главный вектор которых равен $\overline{F}^{a}$) и сил реакций связей $\overline{N}$, имеет вид:

$$m\overline{a} = \overline{F}^{a} + \overline{N}$$

или

$$\overline{F}^{a} + \overline{N} - m\overline{a} = 0.$$

Обозначим $\overline{F}^{u} = -m\overline{a}$, где $\overline{F}^{u}$ называется силой инерции Даламбера (знак «–» указывает на то, что вектор $\overline{F}^{u}$ направлен в сторону, противоположную вектору ускорения $\overline{a}$ данной точки). Тогда

$$\overline{F}^{a} + \overline{N} + \overline{F}^{u} = 0, \qquad (7.1)$$

при этом движение материальной точки будет обладать следующим свойством: если в данный момент времени к движущейся точке кроме активных сил и сил реакций связей добавить силу инерции, то полученая система сил будет эквивалентна нулю и к ней можно применять все законы статики. В этом суть принципа Даламберна для материальной точки.

Название сил инерции происходит от названий компонентов ускорения, например:

$\overline{F}_{\tau}^{u} = -m\overline{a}_{\tau}$ касательная сила инерции;

$\overline{F}_{n}^{u} = -m\overline{a}_{n}$ нормальная сила инерции,

$\overline{F}_{c}^{u} = -m\overline{a}_{c}$ кориолисова сила инерции.

Таким образом, что при применении принципа Даламбера для всех точек механической системы мы получили взаимно уравновешенную систему, состоящую из внешних сил, внутренних сил, и даламберовых сил инерции. Тогда по основной теореме статики получим:

$$\sum\left(\overline{F}_k^{e} + \overline{F}_k^{i} + \overline{F}_k^{u}\right) = 0,$$

$$\sum\left(\overline{M}_0\left(\overline{F}_k^{e}\right) + \overline{M}_0\left(\overline{F}_k^{i}\right) + \overline{M}_0\left(\overline{F}_k^{u}\right)\right) = 0$$

или

$$\sum \overline{F}_k^{e} + \sum \overline{F}_k^{i} + \sum \overline{F}_k^{u} = 0,$$

$$\sum \overline{M}_0\left(\overline{F}_k^e\right) + \sum \overline{M}_0\left(\overline{F}_k^i\right) + \sum \overline{M}_0\left(\overline{F}_k^u\right) = 0 .$$

Но так как $\sum \overline{F}_k^i = 0$ и $\sum \overline{M}_0\left(\overline{F}_k^i\right) = 0$, то

$$\sum \overline{F}_k^e + \sum \overline{F}_k^u = 0 ,$$

$$\sum \overline{M}_0\left(\overline{F}_k^e\right) + \sum \overline{M}_0\left(\overline{F}_k^u\right) = 0 . \qquad (7.2)$$

Равенства (7.2) выражают суть принципа Даламбера для механической системы: если в каждый момент времени для движущейся механической системы ко всем ее точкам помимо фактически действующих на них внешних сил, приложить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет эквивалентна нулю и к ней можно применять условия равновесия статики.

Следовательно, применение принципа Даламбера позволяет решать задачи динамики методами статики.

Введем следующие обозначения: пусть $\overline{R}^u = \sum \overline{F}_k^u$ есть главный вектор сил инерции, а $\overline{M}_0^u = \sum \overline{M}_0\left(\overline{F}_k^u\right)$ есть главный момент сил инерции. Определим эти величины для различных движений твердого тела.

1. При поступательном движении твердого тела, которое описывается теоремой о движении центра масс, главный вектор сил инерции с учетом равенства (7.2) будет равен

$$\overline{R}^u = -\sum \overline{F}_k^e = -M\overline{a}_c ,$$

откуда

$$\overline{R}^u = -M\overline{a}_c , \qquad (7.3)$$

а главный момент сил инерции будет равен

$$\overline{M}_0^u = 0 , \qquad (7.4)$$

поскольку при поступательном движении вращение отсутствует.

Таким образом, при поступательном движении тела действие сил инерции будет определяться главным вектором сил инерции, согласно уравнению (7.3).

2. При вращении тела вокруг неподвижной оси z, проходящей через центр масс тела, главный вектор сил инерции будет равен нулю:

$$\overline{R}^u = -M\overline{a}_c = 0 ,$$

а главный момент сил инерции с учетом равенства (4.8) будет равен:

$$M_z^u = -\sum M_z\left(\overline{F}_k^e\right) = -J_z \varepsilon .$$

Таким образом, главный момент сил инерции равен

$$M_z^u = -J_z \varepsilon . \qquad (7.5)$$

Поэтому при вращении тела вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс тела, действие сил инерции будет равно главному моменту сил инерции относительно оси вращения (знак «–» в формуле (7.5) означает, что направление главного момента сил инерции противоположно угловому ускорению).

3. При плоскопараллельном движении тела, состоящем из поступательного движения центра масс тела и вращательного движения вокруг оси, проходящей через данный центр масс, действие сил инерции будет реализовываться через главный вектор сил инерции

$$\overline{R}^{u} = -M\overline{a}_c \tag{7.6}$$

и главный момент сил инерции

$$M^{u}_{z_c} = -J_{z_c}\varepsilon. \tag{7.7}$$

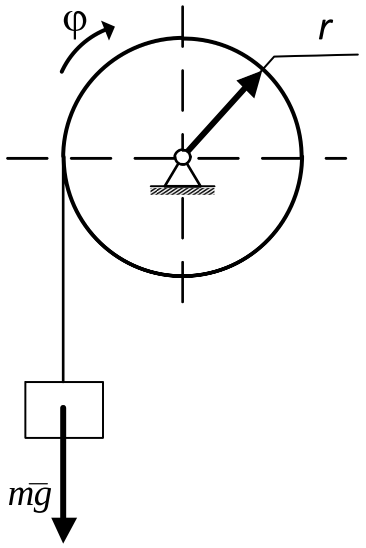
Вопросы для самоконтроля

1. Как определяется даламберова сила инерции по величине и по направлению?

2. В чем суть принципа Даламбера для материальной точки и для механической системы?

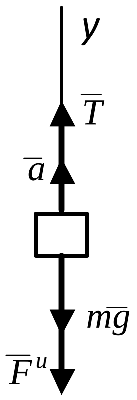
3. Как расчитывается действие сил инерции для твердого тела при поступательном, при вращательном и при плоскопараллельном движениях?

Задача 7.1. Груз массой $m = 100$ кг прикреплен к нерастяжимому тросу, который наматывается на барабан, вращающемуся по закону $\varphi = 2{,}5t^2$. Определить силу натяжения каната, если радиус барабана $r = 1$ м.



Решение

Рассмотрим действующие на груз силы. Это сила тяжести $m\overline{g}$ и сила натяжения $\overline{T}$ троса. Добавим к ним еще силу инерции $\overline{F}^{u} = -m\overline{a}$.



Так как ускорение $\bar{a}$ груза будет равна касательному ускорению любой точки наматывающей поверхности барабана, то

$a = \varepsilon r = \ddot{\varphi} r = 5 \cdot 1 = 5$ (м/с^2).

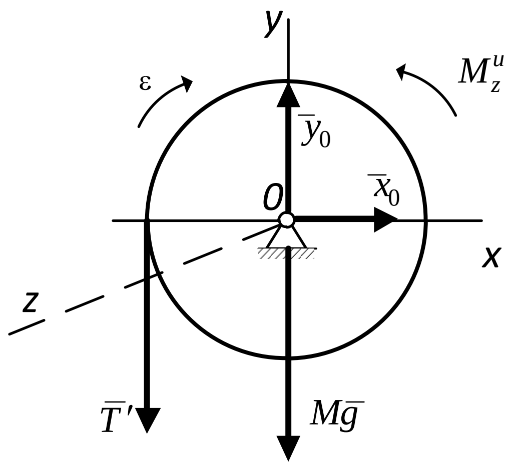
Тогда $F^u = 100 \cdot 5 = 500$ Н. Поскольку система приложенных сил $\left(\bar{T},\ m\bar{g},\ \bar{F}^u\right) \sim 0$, то применив условие равновесия системы в виде равенства нулю суммы проекций всех сил на ось y, получим

$$\sum F_{k_y} = 0;\ T - mg - F^u = 0,$$

откуда

$$T = mg + F^u = 100 \cdot 9{,}8 + 500 = 1480 \ \text{(Н)}.$$

Задача 7.2. В условиях предыдущей задачи с учетом массы барабана $M = 200$ кг определить силу давления барабана на его ось, пренебрегая массой троса и силой трения.



Решение

Давление на ось Oz будем определять по величине реакций $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0$ шарнира O. Для получения уравновешенной системы сил добавим к ней главный момент сил инерции $M_z^u = -J_z\varepsilon$, чтобы

$$\left(\bar{T}',\ M\bar{g},\ \bar{x}_0,\ \bar{y}_0,\ M_z^u\right) \sim 0.$$

Тогда будем иметь

$$\sum F_{k_x} = 0; \quad x_0 = 0,$$

$$\sum F_{k_y} = 0; \quad y_0 - T' - Mg = 0,$$

$$\sum M_0\left(\bar{F}_k\right) = 0; \qquad T'r + \frac{Mr^2}{2}\varepsilon = 0$$

или

$$\left|\bar{T}'\right| = \frac{Mr}{2}\varepsilon = \frac{200 \cdot 1}{2} \cdot 5 = 500 \ \text{Н};$$

$$y_0 = T' + Mg = 500 + 200 \cdot 9{,}8 = 2460 \ \text{Н}.$$

Сила давления N на ось Oz равна полной реакции шарнира:

$$N = R_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = 2460 \text{ (Н)}.$$

Лекция 8.
Принцип возможных перемещений.
Общее уравнение динамики.

Рассмотрим вопрос о классификации связей.

Двусторонняя связь ограничивает перемещение точки в двух взаимно противоположных направлениях и выражается уравнением

$$F(x, y, z) = 0. \tag{8.1}$$

Односторонняя связь позволяет точке перемещаться только в одном направлении и запрещает в обратном. Она выражается неравенством

$$F(x, y, z) \gtrless 0. \tag{8.2}$$

Связи, зависящие от времени, выражаются уравнением

$$F(x, y, z, t) = 0 \tag{8.3}$$

и называются нестационарными.

Независимые от времени связи называются стационарными.

Связи, которые накладывают ограничения только на координаты точки, называются геометрическими связями (например, (8.1) и (8.2)). А если ограничения накладываются не только на положение точки, но и на ее скорость и (или) ускорение, то такие связи называются кинематическими.

Например, связь

$$F(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \le 0$$

характеризуется как односторонняя, кинематическая и нестационарная.

Пусть точка может двигаться по некоторой поверхности, что выражается уравнением (8.1). В каждом своем положении на этой поверхности точка за бесконечно малый промежуток времени dt может сделать какое-то одно перемещение $d\bar{r}$ в касательной плоскости из множества возможных перемещений.

Пусть любое воображаемое, бесконечно малое перемещение $\delta\bar{r}$ точки, которое не противоречит наложенным на нее в данный момент связям называется возможным перемещением этой точки. Это возможное перемещение является чисто мысленным (надуманным) и этим отличается от действительного перемещения $d\bar{r}$ за промежуток времени dt.

Для стационарных связей действительное перемещение $d\bar{r}$ точки всегда совпадает с одним из возможных ее перемещений $\delta\bar{r}$.

Если на точку действует любая активная сила $\bar{F}^a$, то на данном перемещении $d\bar{r}$ она выполнит элементарную работу

$$dA = \bar{F}^a \cdot d\bar{r}.$$

Аналогично вводится понятие возможной работы активной силы

$$\delta A^a = \overline{F}^{\,a} \cdot \delta \overline{r}\,.$$

Тогда возможная работа реакции $\overline{F}^{\,r}$ связи будет равна

$$\delta A^r = \overline{F}^{\,r} \cdot \delta \overline{r}\,.$$

Идеальные связи характеризуются тем, что сумма элементарных работ сил реакций этих связей, выполненных на любом из возможных перемещений $\delta \overline{r}$, равна нулю. Например, реакция гладкой поверхности $\overline{N}$ всегда направлена по нормали к поверхности, то есть она перпендикулярна касательной плоскости, в которой расположены векторы возможных перемещений.

Следовательно,

$$\overline{N} \cdot \delta \overline{r} = N \delta r \cos 90^\circ = 0\,.$$

Сформулируем принцип Лагранжа (принцип возможных перемещений): для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на систему активных сил равнялась нулю на любом возможном перемещении $\delta \overline{r}$.

$$\sum \delta A_k^a = 0\,. \tag{8.4}$$

В развернутом виде это выглядит так:

$$\sum F_k^a \delta r_k \cos\left(\overline{F}_k \,\widehat{,}\, \delta \overline{r}_k \right) + \sum M_k \delta \varphi_k = 0\,, \tag{8.5}$$

где M_k - моменты пар сил, действующих на систему.

Докажем необходимость условия (8.4). Если механическая система находится в состоянии равновесия, то для равновесия любой ее точки не обходимо равенство нулю всех действующих на нее внешних и внутренних сил:

$$\overline{F}_k^a + \overline{F}_k^r + \overline{F}_k^i = 0,\ k = 1,2,\ldots,n\,,$$

где $\overline{F}_k^a$, $\overline{F}_k^r$, $\overline{F}_k^i$ есть главные векторы соответственно внешних активных сил, сил реакций связей и внутренних сил, действующих на точку.

Для равновесия всей механической системы необходимо, чтобы

$$\sum \overline{F}_k^a + \sum \overline{F}_k^r + \sum \overline{F}_k^i = 0\,,$$

причем $\sum \overline{F}_k^i = 0$, согласно свойствам внутренних сил. Тогда имеем

$$\sum \overline{F}_k^a + \sum \overline{F}_k^r = 0 \tag{8.5}$$

Умножим скалярно обе части равенства (8.5) справа на $\delta \overline{r}$.

Получим

$$\sum \overline{F}_k^a \cdot \delta \overline{r} + \sum \overline{F}_k^r \cdot \delta \overline{r} = 0$$

или

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^r = 0\,.$$

Но $\sum \delta A_k^r = 0$ по условию идеальных связей.

Таким образом, окончательно получим $\sum \delta A_k^a = 0$, что и требовалось доказати (ч.т.д.).

Достаточность условия (8.4) вытекает из соображений от противного. Полагая, что при выполнении условия (8.4) механическая система вышла из состояния равновесия, получим

$$\overline{F}_k^a + \overline{F}_k^r + \overline{F}_k^i \neq 0 \quad \text{и} \quad \sum \overline{F}_k^a + \sum \overline{F}_k^r + \sum \overline{F}_k^i \neq 0.$$

Но $\sum \overline{F}_k^i = 0$, тогда имеем

$$\sum \overline{F}_k^a + \sum \overline{F}_k^r \neq 0.$$

Как и в предыдущем случае, умножив скалярно обе части последнего равенства на $\delta\bar{r}$, получим

$$\sum \overline{F}_k^a \cdot \delta\bar{r} + \sum \overline{F}_k^r \cdot \delta\bar{r} \neq 0$$

или

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^r \neq 0,$$

где $\sum \delta A_k^r = 0$ по условию идеальных связей. Таким образом, приходим к выводу, что $\sum \delta A_k^a \neq 0$, что противоречит условию (8.4).

На основе принципа Даламбера и принципа возможных перемещений можно получить общее уравнение динамики, которое отражает объединенный принцип Даламбера-Лагранжа. Если к каждой точке движущейся механической системы добавить соответствующие силы инерции, то по принципу Даламбера для каждой такой точки мы получим уравновешенную систему сил

$$\overline{F}_k^a + \overline{F}_k^r + \overline{F}_k^i + \overline{F}_k^u = 0, \quad k = 1,2,\ldots,n.$$

Соответственно для механической системы в целом имеем

$$\sum \overline{F}_k^a + \sum \overline{F}_k^r + \sum \overline{F}_k^i + \sum \overline{F}_k^u = 0$$

или, учитывая, что $\sum \overline{F}_k^i = 0$, получим

$$\sum \overline{F}_k^a + \sum \overline{F}_k^r + \sum \overline{F}_k^u = 0.$$

Далее аналогично вышеприведенному получим

$$\sum \overline{F}_k^a \cdot \delta\bar{r}_k + \sum \overline{F}_k^r \cdot \delta\bar{r}_k + \sum \overline{F}_k^u \cdot \delta\bar{r}_k = 0$$

или

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^r + \sum \delta A_k^u = 0,$$

где $\sum \delta A_k^r = 0$. Тогда окончательно получим

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^u = 0 \ . \quad (8.6)$$

Это равенство и есть общее уравнение динамики, которое выражает суть принципа Даламбера-Лагранжа:

в каждый момент движения механической системы с идеальными связями сумма элементарных работ всех активных внешних сил и даламберовых сил инерции, выполненных на любом из возможных перемещений, равна нулю.

Вопросы для самоконтроля

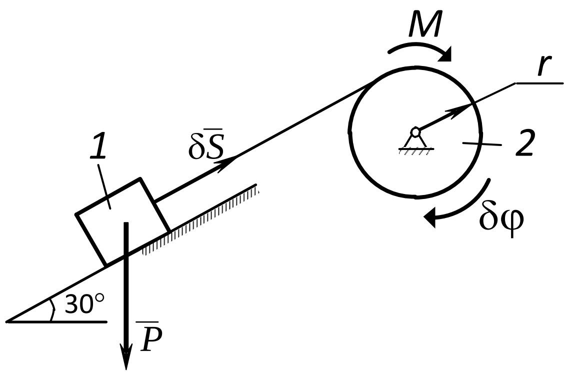
1. Что называется возможным перемещением материальной точки?

2. В чем заключается принцип возможных перемещений?

3. Сформулируйте принцип Даламбера-Лагранжа.

4. Какая связь называется идеальной?

Задача 8.1. Определить момент M пары сил, который нужно приложить к барабану 2 радиуса $r = 50$ см для равномерного подъема груза 1 весом $P = 100$ Н.



Решение

Выберем элементарный угол поворота $\delta\varphi$ за независимое возможное перемещение в системе барабан-груз, как показано на схеме. Тогда в соответствии с $\delta\varphi$ груз получит возможное перемещение $\delta\overline{S}$. Согласно принципу Лагранжа (когда равномерное движение эквивалентно равновесию) получим

$$\delta A_p + \delta A_M = 0$$

или

$$P\delta S\cos 120^\circ + M\delta\varphi = 0.$$

Связь между δS и $\delta\varphi$ такова:

$$\delta S = r\delta\varphi = 0{,}5\delta\varphi.$$

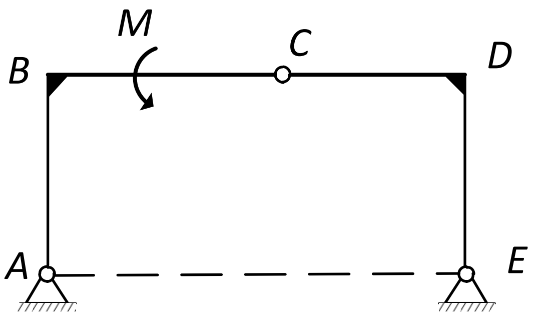
Поэтому имеем

$$-P \cdot 0{,}5\delta\varphi \sin 30^\circ + M\delta\varphi = 0.$$

Поделив обе части последнего равенства на $\delta\varphi$, получим

$$M = 100 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 25 \text{ (Н·м)}.$$

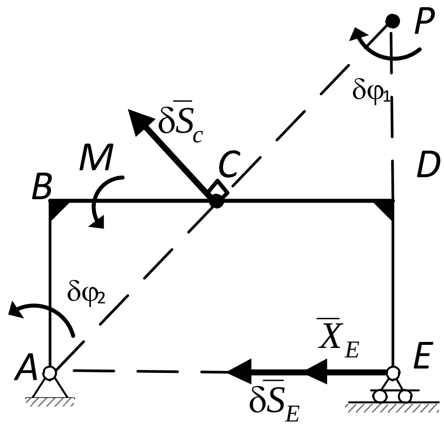
Задача 8.2. Прямоугольная трехшарнирная арка находится в равновесии под действием пара сил с моментом M. Пренебрегая весом арки, найти горизонтальную составляющую реакции опоры E, если $AB = BC = CD = DE = l$.



Решение

Приведем заданную схему к эквивалентному виду, заменив шарнирно неподвижную опору E на шарнирноподвижную, и компенсируя горизонтальную подвижность точки E реакцией $\overline{X}_E$.

Выбрав независимое возможное перемещение $\delta\overline{S}_E$ с учетом возможного направления $\delta\overline{S}_c$, находим мгновенный центр возможных скоростей части CDE (точка P).



Величина $\delta\overline{S}_c$ с точки зрения принадлежности точки C части ABC будет равна

$$\delta S_c = |AC|\delta\varphi_2 = l\sqrt{2}\delta\varphi_2,$$

а с точки зрения принадлежности части CDE равна

$$\delta S_c = |PC|\delta\varphi_1 = l\sqrt{2}\delta\varphi_1.$$

Отсюда $\delta\varphi_1 = \delta\varphi_2$. Тогда, согласно равенству (8.4), получим

$$\delta A_M + \delta A_{X_E} = 0$$

или

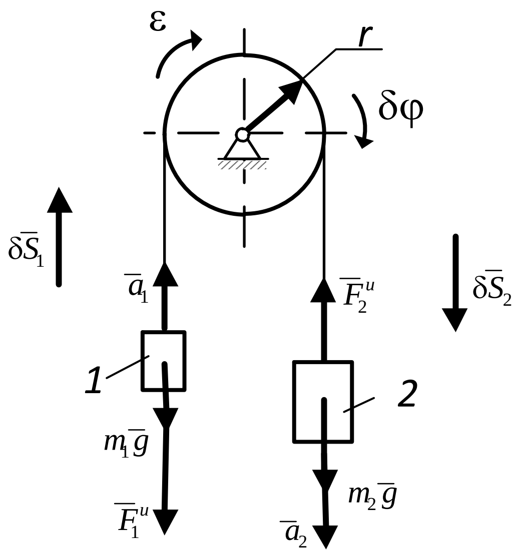
$$-M\delta\varphi_2 + X_E\delta S_E = 0,$$

где $\delta S_E = |PE|\delta\varphi_1 = 2l\delta\varphi_1$.

Таким образом

$$X_E = \frac{M\delta\varphi_2}{2l\delta\varphi_1} = \frac{M}{2l}.$$

Задача 8.3. Грузы 1 и 2, массы которых соотносятся как $m_2 = 2m_1$, прикреплены к нерастяжимому тросу, перекинутому через блок радиуса $r = 1$ м. Пренебрегая массой блока, определить его угловое ускорение.



Решение

Чтобы воспользоваться общим уравнением динамики, добавим к действующим на систему силы тяжести соответствующие силы инерции $\bar{F}_1^u$ и $\bar{F}_2^u$, которые соответственно направленны противоположно ускорениям $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$. Тогда согласно уравнению (8.6) получим

$$\delta A_{m_1 g} + \delta A_{m_2 g} + \delta A_{F_1^u} + \delta A_{F_2^u} = 0$$

или с учетом направлений возможных перемещений δS_1 и δS_2 будем иметь

$$-m_1 g\delta S_1 + m_2 g\delta S_2 - F_1^u\delta S_1 - F_2^u\delta S_2 = 0.$$

Исходя из того, что

$$F_1^u = m_1 a_1 = m_1\varepsilon r,$$

$$F_2^u = m_2 a_2 = m_2\varepsilon r,$$

$$\delta S_1 = \delta S_2 = \delta S,$$

$$m_2 = 2m_1,$$

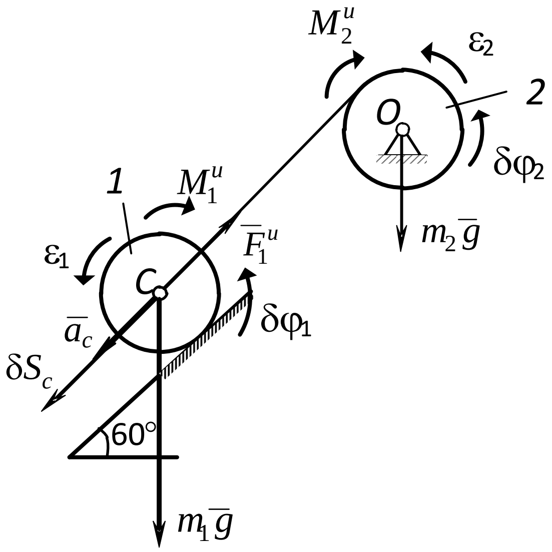
получим

$$-m_1 g\delta S + 2m_1 g\delta S - m_1\varepsilon r\delta S - 2m_1\varepsilon r\delta S = 0,$$

а после приведения подобных будем иметь

$$\varepsilon = \frac{g}{3r} = \frac{9{,}8}{3\cdot 1} = 3{,}27\ (\text{с}^{-2}).$$

Задача 8.4. Определить ускорение центра C катка 1, если тела 1 и 2 – это однородные сплошные цилиндры с одинаковыми массами и радиусами.



Решение

Силы инерции для тела 1, движущегося плоскопараллельно, сводятся к силе $F_1^u = m_1 a_c = m a_c$

и паре сил с моментом $M_1^u = J_{1_c}\varepsilon_1 = \dfrac{mr^2}{2}\cdot\dfrac{a_c}{r} = \dfrac{mr}{2}a_c$.

Для тела 2, которое вращается вокруг оси шарнира O, силы инерции сводятся к паре сил с моментом

$$M_2^u = J_{2_o}\varepsilon_2 = \frac{mr^2}{2}\cdot\frac{a_c}{r} = \frac{mr}{2}a_c.$$

Общее уравнение динамики будет иметь вид

$$\delta A_{m_1 g} + \delta A_{m_2 g} + \delta A_{F_1^u} + \delta A_{M_1^u} + \delta A_{M_2^u} = 0$$

или, с учетом $\delta A_{m_2 g} = 0$, получим

$$m_1 g\delta S_c \sin 60^\circ - F_1^u\delta S_c - M_1^u\delta\varphi_1 - M_2^u\delta\varphi_2 = 0$$

Подставляя сюда значения сил инерции и соотношение

$$\delta\varphi_1 = \delta\varphi_2 = \frac{\delta S_c}{r},$$

получим

$$mg\delta S_c \sin 60^\circ - m a_c\delta S_c - \frac{mr}{2}a_c\frac{\delta S_c}{r} - \frac{mr}{2}a_c\frac{\delta S_c}{r} = 0.$$

Следовательно, $g\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2a_c$, откуда $a_c = g\dfrac{\sqrt{3}}{4} = 4{,}24$ (м/с^2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. - М .: Высшая школа, 1990.
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. - М .: Высшая школа, 1986.
3. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики: том ИИ: Динамика. - М .: Наука, 1985.
4. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механике. - М .: Наука, 1986.
5. Будник Ф., Зингерман Ю.М., Селенский Е.И. Сборник задач по теоретической механике. - М .: Высшая школа, 1987.
6. Сборник коротких задач по теоретической механике / Под. ред. О.Э. Кепе. - М .: Высшая школа, 1989.