

**ГВУЗ «Донецкий национальный технический университет»**

**Кафедра «Обогащение полезных ископаемых»**



**Конспект лекций**

**по дисциплине**

**«Техника физического эксперимента»**

**(для студентов специальности «Обогащение полезных ископаемых»)**

Одобрено на заседании  
методической комиссии по специальности  
"Обогащение полезных ископаемых"  
Протокол № 2 от 08 февраля 2016 г.

Донецк

2016

УДК 622.7

Техника физического эксперимента: конспект лекций/сост. В.Г. Самойлик. –  
Донецк: ДонНТУ, 2016. - 154 с.

Конспект лекций предназначен для студентов специальности "Горное дело" специализации "Обогащение полезных ископаемых" стационарной и заочной формы обучения. В кратком виде представлен учебный материал, предусмотренный программой дисциплины "Техника физического эксперимента".

Изложены основные понятия об измерениях физических величин. Приведены теоретические основы физического моделирования технологических процессов, результаты исследований, связанных с моделированием и расчётом схем обогащения. Изложены статистические методы планирования, проведения эксперимента и обработки результатов исследований.

Составитель: доц. Самойлик В. Г.

Рецензенты: доц., к.т.н. Корчевский А. Н.

проф., к.т.н. Бредихин В. Н.

## СОДЕРЖАНИЕ

№ лекции	Тема лекции	С.
1	Физические величины	5
2	Измерение физических величин	12
3	Меры и измерительные приборы	20
4	Методы исследования мер и измерительных приборов	24
5	Предварительные исследования полезных ископаемых	29
6	Исследование физических свойств и вещественного состава полезных ископаемых	35
7	Исследование полезных ископаемых на обогатимость	45
8	Процесс обогащения как объект исследования	52
9	Математическое моделирование технологических процессов	59
10	Статистическая оценка вероятности исследований	74
11	Критерии оценки полученных результатов исследований	81
12	Дисперсионный анализ	90
13	Корреляционный и регрессионный анализы	99
14	Техника постановки активного эксперимента	111
15	Выбор критерия эффективности процесса, структуры модели и плана эксперимента	118
16	Факторное планирование экспериментов	125
17	Симплексный метод и ротатабельное центрально-композиционное планирование экспериментов	137

	Список рекомендуемой литературы	149
	Приложение № 1	150
	Приложение № 2	151
	Приложение № 3	152
	Приложение № 4	154

## Лекция № 1

### Физические величины

#### Вопросы, выносимые на лекцию:

*Физическая величина. Числовое значение. Единица измерения: независимые, производные, кратные и дольные. Уравнение связи между физическими величинами. Уравнения между численными значениями. Метрическая система мер. Международная система единиц.*

#### 1.1. Единицы измерений

Изучение физических явлений и закономерностей, а также использование этих закономерностей в практике связано с измерением физических величин.

*Физическая величина* - это количественная характеристика свойств физического тела или системы тел, процессов и явлений. Длина, масса, время, скорость, сила, температура, напряжённость электрического поля, период колебаний - все это физические величины, которые проявляются в виде их конкретных реализаций.

Отдельные реализации одной и той же величины называются *однородными величинами*. Однородные величины отличаются друг от друга размером, то есть количественно. Сравнение размеров двух однородных величин осуществляется в процессе измерения.

*Измерением физической величины* называется экспериментальное (с помощью меры) сравнение данной величины с другой, принятой за единицу измерения. *Единица измерения* - это конкретное значение физической величины, принятое за основу сравнения для количественной оценки величины того же рода.

Результат измерений некоторой отдельной реализации физической величины  $X$  может быть представлен в виде произведения двух множителей:

$$X = \{X\}[X], \quad (1.1)$$

где  $[X]$  - единица измерений величины  $X$ ;  $\{X\}$  - числовое значение измеряемой величины, если она измеряется в единицах  $[X]$ .

*Числовое значение* является абстрактным числом, равным отношению измеряемой величины к единице её измерения.

Единица измерения  $[X]$ , как отдельная реализация величины  $X$ , также может быть выражена в виде множителей  $\{X\}$  и  $[X]$ . При этом числовое значение единицы измерений равно единице.

Единицы измерений  $[X_1], [X_2], \dots, [X_n]$  одной и той же величины  $X$ , то есть однородные единицы, отличаются друг от друга размером (например, размер килограмма в тысячу раз больше грамма, а размер секунды в шестьдесят раз меньше минуты).

*Размером единицы измерений* называется количество физической величины, содержащейся в единице измерений.

При измерении одной и той же величины единицами разных размеров получают различные числовые значения величины. Например, если длина тела при измерении его в метрах выражается числом 3 м, то при измерении в сантиметрах она выразится числом 300 см. Размер метра в 100 раз больше размера сантиметра, а численное значение результата измерений в метрах будет в 100 раз меньше, чем при измерении в сантиметрах.

Вообще, если при измерении величины  $X$  единицей  $[X_1]$  получено численное значение  $\{X_1\}$ , а при измерении единицей  $[X_2]$  получено численное значение  $\{X_2\}$ , всегда будет:

$$\frac{\{X_1\}}{\{X_2\}} = \frac{[X_2]}{[X_1]}, \quad (1.2)$$

то есть численные значения величины обратно пропорциональны размерам единиц измерений.

Откуда следует, что:

$$\{X_1\}[X_1] = \{X_2\}[X_2] = X, \quad (1.3)$$

то есть при измерении конкретной реализации величины произведение  $\{X\}[X]$  постоянно и не зависит от выбора единицы измерений.

Единицу измерений физической величины можно получить тремя различными способами.

Во-первых, единицу можно выбрать произвольно, независимо как от других единиц, однородных с ней, так и от единиц измерений других физических величин. Избранные таким образом единицы называются независимыми. Независимыми единицами являются, например, единица длины - метр, единица температуры - градус Кельвина и др.

Во-вторых, единицу измерений можно получить с помощью формул, отражающих количественную зависимость между физическими величинами. В этом случае единица измерений будет выражаться через другие единицы измерений. Такие единицы называются производными. К ним относятся единица скорости - метр в секунду, единица давления - Ньютон на квадратный метр и др.

В-третьих, единицу измерения можно получить делением и умножением независимой или производной единицы на целое число, обычно на 10, или на число, которое является степенью при основании 10, например, 1 километр =  $10^3$  метра; 1 мегом =  $10^6$  ома; 1 миллиметр =  $10^{-3}$  метра; 1 микрофарад =  $10^{-6}$  фарады и др.

Единицы, полученные при умножении независимой или производной единицы на абстрактное целое число, называются кратными, например, единица частоты  $1 \text{ МГц} = 1\,000\,000 \text{ Гц}$ . Единицы, полученные при делении независимой или производной единицы на абстрактное целое число, называются дольными, например,  $1 \text{ мкс} = 0,000\,001 \text{ с}$ .

Таким образом, все единицы измерений по способу их выбора подразделяются на четыре группы: независимые, производные, кратные и дольные.

Единицы измерений по определённому принципу объединяются в системы единиц. Единицы, которые образуют какую-либо систему, называются системными, а единицы, которые не входят ни в одну из систем, называются внесистемными. Внесистемными единицами являются, например, единицы длины - километр и ангстрем, единицы давления - техническая атмосфера и миллиметр ртутного столба и др.

## 1.2 Уравнение связи между физическими величинами

Между физическими величинами существуют качественные и количественные зависимости, закономерная связь, которые могут быть выражены в виде математических формул. Создание формул связано с математическими действиями над физическими величинами.

Однородные величины допускают над собой все виды алгебраических действий. Например, можно складывать длины двух тел; отнимать длину одного тела от длины второго; делить длину одного тела на длину второго; возводить длину в степень. Результат каждого из этих действий имеет определённый физический смысл. Например, разность длин двух тел показывает на сколько длина одного тела больше другой; произведение основания прямоугольника на высоту определяет площадь прямоугольника; третья степень длины ребра куба является его объёмом и т.д.

Но не всегда можно складывать две одноименные величины, например, сумма плотностей двух тел или сумма температур двух тел лишены физического смысла.

Разнородные величины можно умножать и делить друг на друга. Результаты этих действий над разнородными величинами также имеют физический смысл. Например, произведение массы  $m$  тела на его ускорение  $a$  выражает силу  $F$ , под действием которой получено это ускорение, то есть:

$$F = ma; \quad (1.4)$$

частное от деления силы  $F$  на площадь  $S$ , на которую равномерно действует сила, выражает давление  $p$ , то есть:

$$p = F/S. \quad (1.5)$$

Вообще физическая величина  $X$  с помощью математических действий может быть выражена через другие физические величины  $A, B, C, \dots$  уравнением вида:

$$X = kA^\alpha B^\beta C^\gamma \dots, \quad (1.6)$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности.

Показатели степени  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  могут быть как целым, так и дробными, а также могут принимать значение, равное нулю.

Формулы вида (1.6), которые выражают одни физические величины через другие, называются *уравнениями между физическими величинами*.

Коэффициент пропорциональности в уравнениях между физическими величинами за редким исключением равен единице. Например, уравнением, в котором коэффициент  $k$  отличается от единицы, является уравнение кинетической энергии тела при поступательном движении:

$$E = \frac{1}{2}mv^2. \quad (1.7)$$

Значение коэффициента пропорциональности как в данной формуле  $\left(k = \frac{1}{2}\right)$  так и вообще в уравнениях между физическими величинами не зависит от выбора единиц измерения, а определяется исключительно характером связи величин, входящих в данное уравнение.

Независимость коэффициента пропорциональности от выбора единиц измерения является характерной особенностью уравнений между величинами. То есть каждый из символов  $A, B, C, \dots$  в этом уравнении представляет собой одну из конкретных реализаций соответствующей величины, которая не зависит от выбора единицы измерений.

Но если все величины, входящие в уравнение (1.6) разделить на соответствующие единицы измерений, получаем уравнение нового типа. Для простоты рассмотрения напишем следующее уравнение:

$$X = AB. \quad (1.8)$$

После деления величин  $X, A$  и  $B$  на единицы их измерений получаем:

$$\frac{X}{[X]} = k \frac{A}{[A]} \cdot \frac{B}{[B]}, \quad (1.9)$$

или

$$\{X\} = k\{A\} \cdot \{B\}. \quad (1.10)$$

Уравнения вида (1.9) или (1.10) связывает между собой уже не величины как собирательные понятия, а их численные значения, полученные в результате выражение величин в определённых единицах измерения.

Уравнение, связывающее численные значения величин, называется *уравнением между численными значениями*.

Например, численное значение теплоты  $Q$ , которая выделяется в проводнике при прохождении тока:

$$Q = 0,24I^2Rt, \quad (1.11)$$

где  $Q$  – численное значение теплоты, которая выделяется на проводнике, ккал; численное значение силы тока, А;  $R$  – численное значение сопротивления, Ом;  $t$  – численное значение времени, с.

Только при этих условиях численный коэффициент  $k$  принимает значение 0,24.

Но при расчётах в технике такими уравнениями пользуются очень широко. Величины выражают в разных системах и внесистемных единицах с получением при этом уравнений со сложными коэффициентами  $k$ .

Вообще коэффициент пропорциональности в уравнениях между численными значениями зависит только от единиц измерений. Замена единицы измерений одной или нескольких величин, входящих в уравнение (1.9), влечёт за собой изменение численного значения коэффициента.

Зависимость коэффициента пропорциональности от выбора единиц измерения является отличительной особенностью уравнений между численными значениями. Эта характерная особенность между численными значениями используется для определения производных единиц измерений и для построения систем единиц.

### 1.3 Системы единиц

Необходимость измерять была характерна для человеческого общества на всех стадиях его развития. Эта необходимость росла с развитием и усложнением производственной деятельности человека. Каждое государство имело собственные меры и единицы измерений. На определённой стадии развития общества многообразие единиц измерения становится тормозом при установлении и расширении экономических, торговых и научных связей. Поэтому наряду с тенденцией роста числа единиц возникает тенденция их унификации. Необходимость унификации мер и единиц измерений привела в конце XVIII в. к установлению Метрической системы мер. Метрическая система мер, разработанная французскими учёными (Лагранж, Лаплас, Монж и др.) и введённая изначально во Франции, во второй половине XIX в. получила международное признание.

В метрическую систему мер входили единицы измерений ограниченного числа величин - длины, площади, объёма, ёмкости, массы. Поэтому с расширением круга величин, подпадающих под измерения, возникла необходимость в системах единиц, которые охватывали бы целые разделы физики. Идея создания таких систем принадлежит немецкому математику Гауссу, который показал, что если выбрать независимо друг от друга единицы измерений нескольких величин, то на основе этих единиц с

помощью физических законов можно установить единицы измерений всех величин, входящих в определённый раздел физики.

Совокупность единиц, созданная по принципу, предложенному Гауссом, получила название «системы единиц».

Единицы, которые выбраны произвольно и служат для выражения других единиц, называются *основными единицами* системы. Единицы, полученные на основе основных с помощью физических формул, называются *производными единицами* системы.

Зависимость между единицами измерений, на которую указал Гаусс, вытекает из того, что сами физические величины не являются независимыми друг от друга. Они связаны между собой, и эта связь проявляется в физических законах. Характер этой связи позволяет выразить через несколько произвольно выбранных величин, которые являются основными, остальные производные величины. При построении системы единиц произвольно выбирают единицы основных величин и с помощью физических формул или по размерностям величин определяют единицы производных величин. Размерность производной величины есть произведение размерностей основных величин, возведённая в соответствующую степень.

Многообразие систем единиц (МКГСС, МТС, МКС, СГС), а также многообразие отдельных единиц измерения образует, как указывалось ранее, определённые трудности в различных сферах деятельности. Поэтому ещё в XIX в. возникла необходимость создания единой международной системы, которая включала бы в себя единицы измерений всех разделов физики. Однако соглашение о введении такой системы было принято только в 1961 г.

Международная система единиц (СИ) основана на семи основных единицах:

- метр (м) - единица длины;
- килограмм (кг) - единица массы;
- секунда (с) - единица времени;
- градус Кельвина ( $^{\circ}\text{K}$ ) - единица термодинамической температуры;
- моль (моль) - количество вещества;
- ампер (А) - единица силы тока;
- кандела (кд) - единица силы света.

Кроме того, в систему СИ включены две дополнительных единицы:

- радиан (рад) - единица плоского угла;
- стерадиан (ср) - единица телесного угла.

Система СИ имеет ряд преимуществ перед другими системами. Она является универсальной, то есть охватывает все области измерений. С переходом на систему СИ можно отказаться от использования всех систем единиц, а также от внесистемных единиц. Ни одна из других систем таким достоинством не обладает. Например, система МКГСС охватывает только отрасль механики, система СГСЭ - только раздел электростатики и т.п.

### ***Контрольные вопросы***

1. Что обозначает термин «физическая величина»?
2. Какими способами можно получить единицу измерений физической величины?
3. В чем заключается отличие уравнений между физическими величинами и численными значениями?
4. Охарактеризуйте метрическую систему мер. Для каких целей она была создана?
5. Перечислите основные единицы Международной системы единиц (СИ).

*Литература к теме:* [1], [2].

## Измерение физических величин

### Вопросы, выносимые на лекцию:

*Прямые, косвенные, совокупные и совместные измерения. Погрешности измерений: методические, инструментальные и субъективные. Классификация погрешностей измерения. Способы исключения систематических ошибок из результатов измерений.*

### 2.1 Понятие об измерении

Вопросами установки и воспроизведения единиц измерения, передачи размера единицы измерения от эталона к измеряемому объекту, а также разработкой методов и средств измерения занимается метрология.

Метрология определяет измерения как познавательный процесс, который заключается в сравнении измеряемой величины с другой, условно принятой за единицу измерения.

По методу проведения измерений их разделяют на прямые, косвенные, совокупные и совместные измерения.

*Прямое измерение* – измерение, проводимое прямым методом, при котором искомое значение физической величины получают непосредственно из опытных данных.

Значение величины  $Q$  равно значению  $X$ , полученному из опытных данных:

$$Q = qU = X. \quad (2.1)$$

В качестве примера прямых измерений можно назвать измерения уровня с помощью мерной линейки, измерение массы на весах, измерение длины детали штангенциркулем, измерение силы тока амперметром.

*Косвенным* называется измерение, при котором искомое значение физической величины определяют на основании результатов прямых измерений других физических величин (аргументы), функционально связанных с искомой величиной (известная функциональная зависимость).

Искомое значение измеряемой величины определяется по формуле:

$$Q = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n), \quad (2.2)$$

где  $Q$  – значение измеряемой величины;  $f$  – символ определённой функциональной зависимости.

Косвенные измерения используются в том случае, когда прямые измерения затруднены или невозможны. Например, для определения плотности вещества осуществляют прямые измерения массы и объёма тела, а результаты этих измерений используют для вычисления плотности с



$$\Delta x = 81,5 - 81 = 0,5^{\circ}\text{C}.$$

Для определения действительного значения измеряемой величины в результат измерения вводится поправка, равная погрешности измерения с обратным знаком. В приведённом примере  $\Delta x = - 0,5$ , поэтому истинное значение определяется как:

$$Q = 81,5 - 0,5 = 81^{\circ}\text{C}.$$

Причины возникновения погрешностей бывают методические, инструментальные и субъективные.

*Методические погрешности* являются следствием неточности метода измерения или расчётной формулы, положенной в основу создания прибора. Методические погрешности могут быть также обусловлены тем, что принципиальная схема прибора не обеспечивает точного воспроизведения функциональной зависимости, связывающей измеряемую величину с той, на которую действительно реагирует чувствительный элемент прибора.

В качестве примера методических погрешностей можно привести ошибки, возникающие при определении гидравлического сопротивления трубопровода с помощью расчётных формул при подстановке в них измеренных значений расходов и давлений по длине трубопровода. В зависимости от выбора той или иной расчётной формулы будут получены различные методические погрешности.

*Инструментальные погрешности* является следствием недостатков конструкции прибора, несоблюдением технологии его изготовления и неточности изготовления деталей прибора, неточности сборки и регулирования прибора, а также вследствие его износа и старения.

Инструментальные погрешности подразделяются на такие основные группы: погрешности шкалы, погрешности трения, погрешности из-за наличия зазоров, погрешности остаточной деформации (гистерезиса).

*Погрешности шкалы* возникают вследствие неточного регулирования механизма, из-за неточной градуировки шкалы или из-за неточной установки шкалы и стрелки при сборке прибора.

*Погрешности трения* обусловлены силами трения, возникающими в опорах и подвижных соединениях.

*Погрешности из-за наличия зазоров* возникают в тех случаях, когда зазоры в опорах и подвижных соединениях не выбираются пружинами. Эти погрешности при статических измерениях могут проявляться в виде изменчивости показаний прибора. Для устранения этих погрешностей зазоры по возможности уменьшают и применяют пружины, которые выбирают зазоры.

*Погрешности остаточной деформации (гистерезиса)* проявляются в том, что подвижная система не возвращается в исходное положение после прекращения действия измеряемой величины, или значение измеряемой величины не совпадают при отсчётах на одних и тех же отметках шкалы при росте и убывании показаний прибора. Полностью устранить погрешности

гистерезиса невозможно, поэтому их относят к допустимым погрешностям, величина которых устанавливается нормами. Устанавливают нормы на допустимое расхождение показаний прибора, а также на невозврат стрелки к нулю после снятия нагрузки.

Инструментальные погрешности определяются экспериментально и заносятся в паспорт прибора. Определённые однажды они остаются неизменными в течение всего срока эксплуатации прибора. Поэтому, чтобы быть уверенным, что инструментальные погрешности находятся в допустимых пределах, необходимо осуществлять периодическую проверку приборов, то есть сравнивать показания рабочих приборов с образцовыми. Такую проверку следует выполнять даже в тех случаях, если прибор долгое время не эксплуатировался.

*Субъективные погрешности* - это те погрешности, которые зависят от индивидуальных особенностей исследователя. Эти погрешности зависят от индивидуальной оценки показаний прибора тем или иным наблюдателем, от его опытности, от положения наблюдателя относительно прибора.

### 2.3 Классификация погрешностей измерения

Согласно формуле (2.4) погрешность измерения определяется как:

$$\Delta x = Q - X, \quad (2.5)$$

где  $Q$  – истинное значение величины;  $X$  – измеренное значение величины.

Эта погрешность называется *абсолютной*. Однако абсолютная погрешность является недостаточной характеристикой измерения. Для характеристики качества измерения вводится относительная погрешность.

*Относительная погрешность* выражается отношением абсолютной погрешности к действительному значению измеряемой величины:

$$\delta x = \Delta x / Q. \quad (2.6)$$

Абсолютная погрешность очень мала по сравнению с действительным значением  $Q$  и измеренным значениям  $X$  величины, поэтому приблизительно относительную погрешность можно определять как:

$$\delta x = \Delta x / X. \quad (2.7)$$

По своей природе погрешности делятся на случайные, динамические, систематические и промахи.

*Случайными погрешностями* называются погрешности, переменные по величине и знаку. Источниками их является влияние различных неконтролируемых внешних условий, при которых происходит каждое измерение, несовершенство органов чувств исследователя. Случайные погрешности подчиняются законам теории вероятности и математической статистики. Они определяются анализом и сравнением равноточных измерений.

*Динамическими погрешностями* называются погрешности, которые проявляются при измерениях переменных значений величины и обусловлены инерционностью измерительных приборов. Инерционность проявляется в запаздывании показаний приборов (изменение показаний приборов отстаёт от изменения измеряемой величины).

*Систематические погрешности* - это погрешности, которые при повторных измерениях величины не изменяются или изменяются по определённому закону. К систематическим погрешностям относятся инструментальные, погрешности установки приборов, методические погрешности.

По характеру появления систематические ошибки разделяются на постоянные, прогрессивные, периодические и изменяющиеся по сложным законам.

*Постоянными* называют ошибки, величина и знак которых не зависят от измеряемой величины. Такие ошибки можно найти при изменении условий измерения.

*Прогрессивными* называют ошибки, величина которых возрастает пропорционально значению измеряемой величины. При измерении эти ошибки становятся тем больше, чем больше отклоняется измеряемый объект от установленной меры.

*Периодическими* называют ошибки, которые при изменении измеряемой величины периодически меняют свою величину и знак.

*Ошибки, изменяющиеся по сложному закону* - это такие ошибки, закон изменения которых выражается более или менее сложной формулой или кривой.

Систематические погрешности могут быть учтены, их влияние на результат измерений устраняется введением соответствующих поправок. Существуют следующие способы исключения систематических ошибок из результатов измерений:

~ способ введения поправок - к результату измерения алгебраически добавляют поправку, величина которой определяется при проверке прибора и вносится в его паспорт;

~ способ сравнения с образцом, который обладает теми же геометрическими и физическими качествами, что и объект измерения, но проверенный с помощью точных измерений и в одинаковых условиях;

~ метод замещения, при котором измеряемая величина заменяется в измерительном устройстве равновеликой ей известной величиной;

~ компенсации погрешности по знаку; в этом случае измерения проводят таким образом, что один раз погрешность входит в результат измерения со знаком плюс, в другом со знаком минус;

~ дифференциальный метод заключается в том, что измерения проводятся дважды при разных значениях параметров аппаратуры. Результат рассчитывается по значению разницы параметров, при этом равные по

величине и знаку погрешности, которые искажают смысл параметров, исключают.

Систематические погрешности могут быть учтены, их влияние на результат измерений устраняется введением соответствующих поправок.

*Промахом* называется погрешность, которая явно искажает результат измерения. Причиной промаха может быть неправильный отсчёт по шкале, неправильная запись и др. Наблюдения, содержащие промахи, должны быть исключены из дальнейшего анализа.

Для определения промаха и исключения его из совокупности результатов измерения существуют способы: способ  $3\sigma$ , способ Шовина, способ Романовского.

*Критерий  $3\sigma$*  позволяет исключать все результаты, отклонения которых превышает  $3\sigma$ , причём о дисперсии генеральной совокупности судят по результатам измерений, которые остались.

Пусть  $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$  - ряд результатов измерений, в которых  $x_{n+1}$  - является значением, которое выпадает из этого ряда. Дисперсия генеральной совокупности будет:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2. \quad (2.8)$$

В этом случае  $x_{n+1}$  должно быть исключено, если его отклонение от  $\bar{X}$  превышает  $3\sigma$ , то есть:

$$|x_{n+1} - \bar{X}| > 3\sigma. \quad (2.9)$$

Вероятность появления значения, которое отклоняется от среднего арифметического  $\bar{X}$  более чем на  $3\sigma$ , равна 0,003. По принципу практической невозможности маловероятных событий отклонение от среднего арифметического на  $3\sigma$  и больше будет промахом и должно быть исключено.

Критерий Шовина предусматривает критерием оценки  $Z\sigma$ . Измерение  $X_{n+1}$  будет промахом и должно быть исключено, если:

$$|X_{n+1} - \bar{X}| > Z\sigma. \quad (2.10)$$

Функция  $\Phi(Z)$  определяется равенством:

$$\Phi(Z) = (2n - 1) / 4n, \quad (2.11)$$

где  $n$  - число измерений.

В обоих рассмотренных критериях требуется знание дисперсии генеральной совокупности, поэтому они применяются при  $n > 20$ , то есть когда эмпирическая дисперсия близка к действительной.

Для малого числа измерений пользуются критерием Романовского.

Если в ряду  $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$  результат измерений  $x_{n+1}$  является промахом, следует найти среднее значение  $\bar{X}$  для группы  $n$  измерений:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

среднеквадратическое для той же группы:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2},$$

а затем рассмотреть величину:

$$t = \frac{x_{n+1} - \bar{X}}{\sigma_{\Delta x}}$$

где

$$\sigma_{\Delta x} = \sqrt{\sigma^2 + \frac{1}{n} \sigma^2} = \sigma \sqrt{\frac{n+1}{n}}, \quad (2.12)$$

которая будет подчинена распределению Стьюдента с числом степеней свободы  $f = n - 1$ , что позволяет определить является ли различие  $(X_{n+1} - \bar{X}) = \varepsilon$  случайным. С использованием таблиц, где даны значения величин:

$$t'_\beta = t_\beta \sqrt{\frac{n+1}{n}} \quad (2.13)$$

для вероятностей  $\beta = 0,05; 0,02; 0,01; 0,001$  и различных  $n$  можно найти такие значение  $\varepsilon = t_\beta \sigma_{\Delta x} = t'_\beta \sigma$ , для которых:

$$P(|X_{n+1} - \bar{X}|) > \varepsilon = \beta. \quad (2.14)$$

То есть, если задаться вероятностью  $\beta$ , которая обеспечивает практическую невозможность события, можно найти величину интервала  $\varepsilon$ , которая является критерием грубой ошибки.

### **Контрольные вопросы**

1. Чем отличаются прямые измерения от косвенных?
2. Что такое «совокупные измерения»?
3. Приведите классификацию погрешностей измерения.

4. Перечислите способы исключения систематических ошибок из результатов измерений.

5. Охарактеризуйте способы, применяемые для определения промаха и исключения его из совокупности результатов измерения.

*Литература к теме: [1-5].*

## Меры и измерительные приборы

### Вопросы, выносимые на лекцию:

*Меры с постоянным и переменным значением. Условные меры. Компарирующие приборы. Показывающие приборы. Интегрирующие приборы. Действительное и номинальное значение меры. Погрешность показаний прибора. Порог чувствительности измерительного прибора. Классы точности приборов.*

### 3.1 Классификация мер и измерительных приборов

Все измерения осуществляются с помощью мер и измерительных приборов. Их совокупность можно классифицировать по различным признакам: степени точности, назначению, принципу действия, способа применения, конструктивному оформлению и др.

*Мерами* называются тела, вещества и приборы, предназначенные для конкретного воспроизведения единиц измерения, а также величин кратных им.

Меры бывают с постоянным и переменным значением, а также условные.

*Меры с постоянным значением* воспроизводят единицу измерения и её кратное значение (например, гиря).

*Меры с переменным значением* воспроизводят любое кратное значение единицы в определённых пределах (например, миллиметровая линейка, микрометр).

*Условными мерами* называют такие, которые в применении с другими приборами, принимают другое значение. Например, груз, уложенный на тарелку поршневого (грузового) манометра, служит не мерой массы, а мерой давления.

Измерительными приборами называются устройства, предназначенные для сравнения измеряемой величины с мерами или для косвенного определения значения измеряемой величины. Измерительные приборы можно разделить на такие группы:

- *компарирующие приборы*, предназначенные для сравнения мер или измеряемых величин друг с другом и для сравнения измеряемой величины с мерами и образцами (например, рычажные весы, электрические мосты);

- *показывающие приборы*, которые значения измеряемой величины показывают на своих отсчитывающих приспособлениях (шкале, цифровом указателе, диаграмме пишущего прибора). Показывающие приборы в свою очередь подразделяются на приборы с визуальным отсчётом и самопишущие;

- *интегрирующие приборы* дают интегральное значение измеряемого параметра за некоторый промежуток времени (газовые, нефтяные и водяные счётчики, секундомеры);

- *регулирующие приборы*, предназначенные для автоматического измерения и поддержания измеряемого параметра на заданном уровне.

На практике встречаются ещё и измерительные устройства, включающие измерительные приборы и измерительные устройства, которые объединены общей схемой или методом и предназначены для измерения одной или нескольких величин (например, хроматограф, в комплект которого входят пробоотборные устройства, распределительная колонка, детектор, блок управления и регистрирующий прибор).

С точки зрения метрологии все измерительные приборы и меры делятся на образцовые и рабочие.

*Образцовые меры* и измерительные приборы предназначены для сохранения и воспроизведения единиц измерения и поверки и градуировки всякого рода мер и измерительных приборов.

Образцовые меры и измерительные приборы подразделяются на эталонные (первичные, вторичные и третичные) и ограниченной точности (первого, второго и третьего разрядов).

*Эталонами* являются образцовые меры и измерительные приборы, которые служат для сохранения и воспроизведения единиц с наивысшей при данном состоянии техники точностью.

*Образцовыми мерами и измерительными приборами* с ограниченной точностью являются меры и приборы с установленной меньшей, чем метрологическая точностью, которые служат для практических работ поверки и градуировки мер и измерительных приборов.

*К рабочим мерам и измерительным приборам* относятся все меры и приборы, кроме образцовых, предназначенные для измерения. Они разделяются на лабораторные и технические.

*Лабораторные меры и измерительные приборы* при применении требуют учёта влияния внешних факторов (температуры, внешнего давления и др.). Лабораторные меры и измерительные приборы всегда оборудованы соответствующими графиками и таблицами.

*Технические меры* и приборы имеют точность, установленную техническими условиями на изготовление. Полученный результат принимается как окончательный без внесения поправок.

Для получения отсчёта показателей в приборах применяют отсчётные приспособления, среди которых наибольшее распространение получили шкалы и указатели.

*Шкала* - это совокупность отметок, расположенных вдоль какой-либо линии, изображающие ряд последовательных чисел, соответствующих значениям измеряемой величины. Шкалы бывают равномерными и неравномерными. Равномерные шкалы имеют постоянные интервалы

разделения по длине. Линейный промежуток между осями или центрами двух смежных отметок называется делением шкалы.

Значение величины, соответствующей одной деления, называется ценой деления шкалы. Отметка, соответствует нулевому значению чисел, называется нулём шкалы.

### 3.2 Основные свойства мер и измерительных приборов. Классы точности

Погрешность значения меры  $\gamma_m$  представляет собой разницу между действительным значением меры  $Q_m$  и её номинальным значением  $Q_n$ :

$$\gamma_m = Q_m - Q_n, \quad (3.1)$$

*Действительное значение меры* - это значение данной меры, определённое образцовыми мерами или образцовыми измерительными приборами. Степень приближения действительного значения меры к номинальному называется точностью меры.

*Номинальное значение меры* - это число воспроизведённых единиц измерения, указанное на мере, или представленное на основании технических данных изготовления меры.

*Погрешность показаний прибора  $\gamma_n$*  называется разность между показанием прибора и действительным значением измеряемой величины:

$$\gamma_n = Q_n - Q. \quad (3.2)$$

Причиной погрешности прибора могут быть недостатки качества изготовления, сборки и градуировки приборов, а также влияние различных факторов (температуры, влажности, давления и др.).

Значительное влияние на точность показаний прибора оказывает его чувствительность. Под чувствительностью понимают отношение линейного или углового перемещения указателя к изменению значения измеряемой величины, которое повлекло это перемещение:

$$S = \Delta\alpha / \Delta Q, \quad (3.3)$$

где  $\Delta\alpha$  – линейное или угловое перемещение указателя;  $\Delta Q$  – изменение значения измеряемой величины.

Наименьшее значение измеряемой величины, которое ещё может привести к изменению показаний прибора, называется *порогом чувствительности* измерительного прибора.

Наибольшая (полученная экспериментально) разница между повторными показаниями измерительного прибора при одном и том же действительном значении измеряемой величины и неизменных внешних условиях называется *вариацией*.

В образцовых приборах соотношение между вариацией и ценой деления должно быть таким, чтобы вариация не превышала 0,2 деления шкалы, а в технических приборах - 0,5. Градуировки приборов осуществляется при нормальной температуре 20°C. Если погрешность результата измерений не превышает допустимой нормы, она называется допустимой погрешностью.

В зависимости от точности все приборы разделяются на классы. Класс точности прибора – это выраженное в процентах отношение максимальной абсолютной погрешности прибора к его лимиту измерения:

$$K = (\gamma_{n\max} / N) \cdot 100, \% , \quad (3.4)$$

где  $\gamma_{n\max}$  – максимальная абсолютная погрешность;  $N$  – лимит измерения прибора.

Классы точности приборов регламентированы. Так для приборов, измеряющих давление и разрежение, этот ряд будет 0,005; 0,02; 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0; 6,0. В промышленности для измерения в основном применяются приборы классов 1,5 и 2,5.

### ***Контрольные вопросы***

1. Что такое «мера»? Классификация мер.
2. Охарактеризуйте группы измерительных приборов.
3. Образцовые меры и измерительные приборы. Их характеристика.
4. Дайте характеристику рабочим мерам и измерительным приборам.
5. Чем отличается действительное значение меры от номинального?
6. Каким выражением определяется класс точности прибора?

*Литература к теме:* [1], [2].

## Методы исследования мер и измерительных приборов

### Вопросы, выносимые на лекцию:

*Динамическая характеристика измерительного прибора. Преобразование Лапласа. Передаточные функции. Частотная характеристика измерительного прибора. Спектральная плотность. Дискретное измерение технологических параметров. Теорема Котельникова. Периодичность измерения.*

### 4.1 Частные характеристики процессов измерения

При динамических условиях, то есть при переменном значении измеряемой величины, возникают динамические ошибки, обусловленные инерционностью измерительного прибора.

Инерционность измерительного прибора выражается в том, что показания прибора отстают от измерения измеряемой величины. Для характеристики инерционности вводят понятие динамических характеристик измерительных приборов.

*Динамической характеристикой* измерительного прибора называется зависимость изменения во времени выходной величины  $x_{\text{вых}}$  от входной  $x_{\text{вх}}$  в переходном режиме при том или ином законе изменения входной величины. Очевидно, входной величиной является измеряемая величина, выходной - показатели измерительного устройства.

Для определения динамической характеристики измерительного устройства в качестве измеряемой величины подают скачкообразное возмущение и записывают постепенное изменение показаний прибора до окончания переходного режима. В качестве примера на рис. 4.1 показана динамическая характеристика термоприёмника при скачкообразной смене температуры (при быстром погружении термоприёмника в горячую среду).

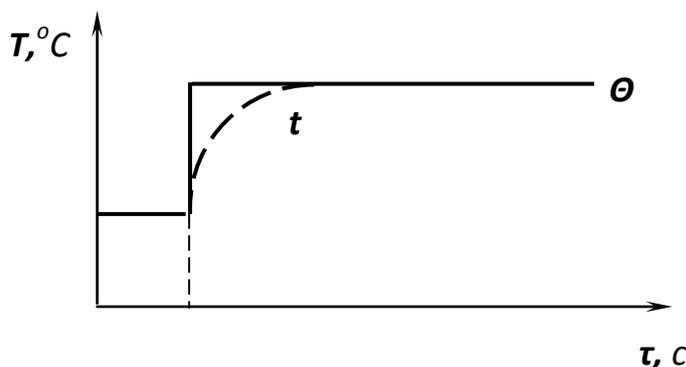


Рис. 4.1 – Динамическая характеристика термоприёмника.

Для практики, однако, удобнее бывает оперировать не с временными (динамическими) характеристиками, а с так называемыми передаточными функциями измерительных приборов. Передаточные функции определяются с помощью преобразования Лапласа. Преобразование Лапласа для функции  $f(t)$  можно записать в таком виде:

$$F(P) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt. \quad (4.1)$$

При этом  $f(t)$  называется оригиналом, а  $F(P)$  – изображением функции.

*Передаточной функцией* измерительного прибора называется отношение выходной величины к входной:

$$K(p) = X_{\text{вых}}(p)/X_{\text{вх}}(p). \quad (4.2)$$

Для многих приборов получены динамические характеристики и передаточные функции. В качестве примера приведены динамические характеристики и передаточные функции двух дифманометров:

$$\left. \begin{aligned} e(t) &= e^{-4t} - 0,16e^{-20t}, \\ K(p) &= \frac{1}{1 + 0,29p + 0,1p^2}; \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

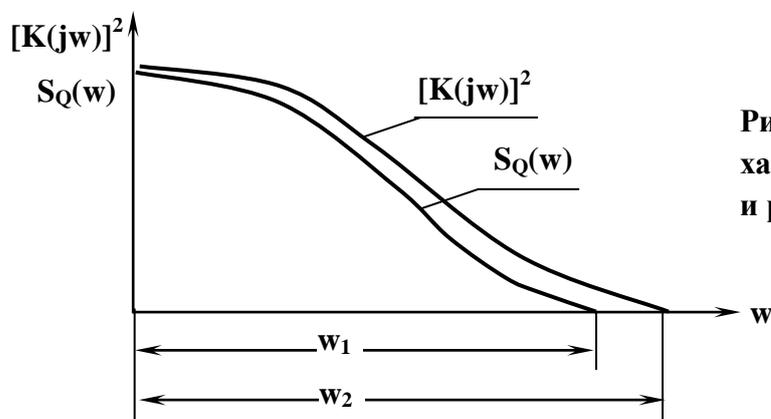
$$\left. \begin{aligned} e(t) &= e^{-8t} - 0,26e^{-19t}, \\ K(p) &= \frac{1 + 0,27p}{1 + 1,8p + 0,07p^2}; \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

При практических расчётах измерительных приборов удобно рассматривать частный случай передаточных функций при  $p = j\omega$ . В этом случае преобразование Лапласа превращается в преобразование Фурье и передаточная функция  $K(p)$  выражается в амплитудно-фазовую характеристику  $K(j\omega)$ , которая даёт представление о частотных свойствах измерительного прибора. В практике можно ограничиться модулем комплексного числа  $[K(j\omega)]$ , получившим название *частотной характеристики* измерительного прибора.

Частотная характеристика прибора характеризует спектр частот, пропускаемых данным прибором. Если прибор обладает большой инерционностью, то есть имеет длительное запаздывание, спектр частот

будет лежать в зоне низких частот, и поэтому он не будет измерять быстро меняющиеся процессы, которые содержат высокочастотные составляющие.

Для характеристики случайных процессов вводится понятие *спектральной плотности*, которая определяет частотные свойства случайного процесса (измеряемого параметра). На рис. 4.2 приведены спектры дифманометра и измеряемого параметра - расходы.



**Рис. 4.2 – Спектральные характеристики дифманометра и расхода вещества.**

Из рис. 4.2 видно, что спектр измеряемого параметра – расхода  $Q$  покрывается спектром измерительного устройства, при этом ширина спектра прибора  $W_2 > W_1$  – ширины спектра измеряемого параметра. Итак, прибор будет хорошо реагировать на изменение измеряемого параметра и будет осуществлять качественное измерение.

#### **4.2 Дискретное измерение технологических параметров**

В практике технологических измерений очень редко осуществляют непрерывную запись параметра, особенно когда становится вопрос о передаче показаний на расстояние. Чаще всего делают замеры параметров с некоторым определённым периодом регистрации (например, давление на компрессорных станциях регистрируют с периодичностью в 2 часа). При этом руководствуются следующими соображениями: если технологический параметр не содержит в своём спектре высоких частот, его регистрация осуществляется реже; для процессов, которые протекают быстро (имеют высокочастотный спектр), необходимо осуществлять частую регистрацию. Таким образом, периодичность измерения находится в прямой связи с характером протекания технологического процесса, то есть с его спектральными свойствами.

В.А. Котельников сформулировал теорему, которая устанавливает количественную связь между спектром процесса и периодичностью его измерения.

*Теорема Котельникова:* Если случайный процесс  $x(t)$  имеет ограниченный спектр с частотой  $W$ , то он полностью определяется

дискретными значениями с принятым шагом  $\Delta t = 1/2W$ . Общая формула теоремы Котельникова имеет вид:

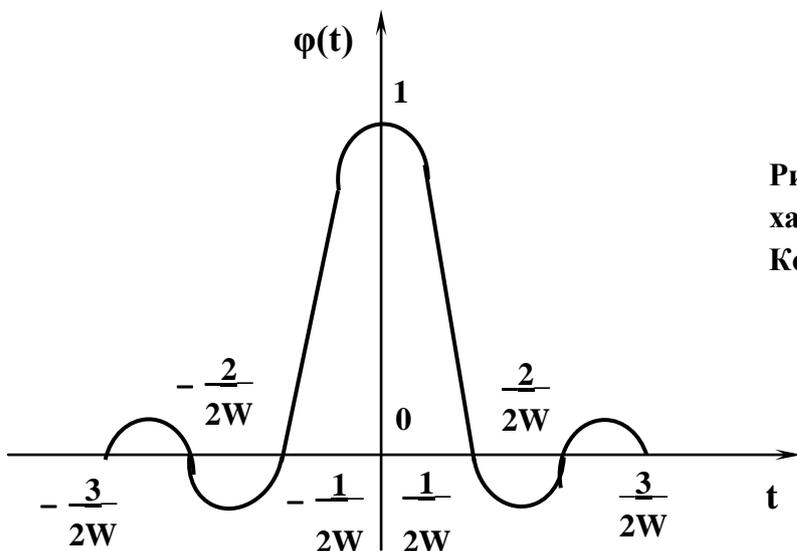
$$X(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{n}{2W}\right) \frac{\sin(2\pi Wt - n\pi)}{2\pi Wt - n\pi}. \quad (4.5)$$

Периодичность измерения действительно определяется соотношением,  $\Delta t = 1/2W$ . При этом  $X(t)$  определяется абсолютно точно во всех точках отсчёта.

Значительный интерес представляет выражение вида:

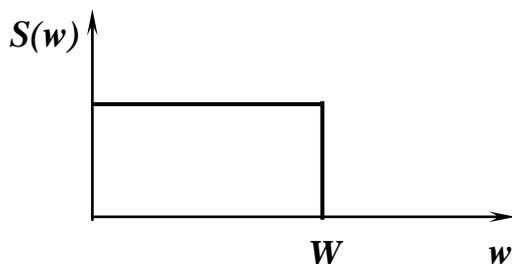
$$\varphi(t) = \frac{\sin 2\pi Wt}{2\pi Wt}. \quad (4.6)$$

График функции  $\varphi(t)$  показан на рис.4.3.



**Рис. 4.3 – Функции, характеризующие ряд Котельникова.**

Эта функция, как видно из графика, обладает рядом свойств. Она равна единице при  $t = 0$  и равна нулю при  $t = n/2W$ , то есть во всех точках отсчёта, за исключением точки  $t = 0$ . Если рассчитать спектр этой функции, то он будет постоянным в пределах полосы от 0 до  $W_{изм}$ , то есть имеет вид рис. 4.4.



**Рис. 4.4 – Спектр функций ряда Котельникова.**

Такие системы, которые пропускают только нижние частоты  $W$  до определённой частоты и не пропускают никаких других частот, называются

фильтрами нижних частот. Откуда вытекает физическая реализация теоремы Котельникова: для того чтобы воссоздать непрерывный процесс по дискретным значениям, принятым через интервал времени, необходимо эти дискретные значения пропустить через фильтр нижних частот.

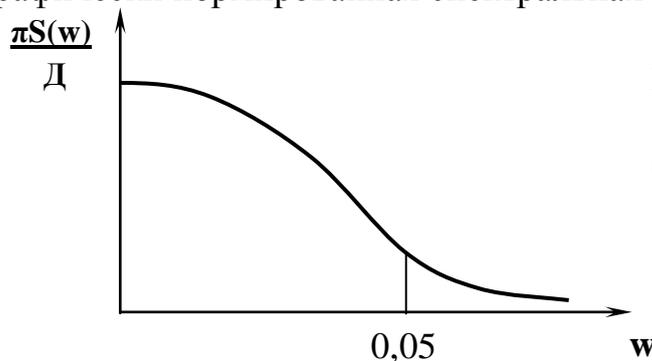
Приведём пример использования теоремы Котельникова. Пусть случайный процесс расхода жидкости имеет автокорреляционную функцию следующего вида:

$$R(\tau) = De^{-\alpha(\tau)},$$

тогда спектральная плотность будет иметь вид:

$$S(w) = \frac{D}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + w^2}$$

Графически нормированная спектральная плотность имеет вид рис. 4.5.



**Рис. 4.5 – Кривая типовой спектральной плотности процесса.**

Как видно из рис. 4.5, теоретически спектр расхода жидкости бесконечный, но практически его ограничивают уровнем 0,05. В этом случае легко подсчитать, что  $w_{np} = 4,32\alpha$ , откуда:

$$\Delta t = \frac{1}{2W} = \frac{1}{\frac{w_{np}}{\pi}} = \frac{\pi}{w_{np}} = \frac{\pi}{4,32\alpha}$$

Если принять  $\alpha = 0,5 \text{ с}^{-1}$ , получаем  $\Delta t \approx 1,5 \text{ с}$ . Таким образом, чтобы точно воспроизвести расхода жидкости по дискретным отсчётам, необходимо шаг временного квантования принять равным 1,5 с.

### ***Контрольные вопросы***

1. Дайте определение динамической характеристике измерительного прибора.
2. Как определяется передаточная функция?
3. Что характеризует частотная характеристика прибора?
4. Для чего используется понятие спектральной плотности?
4. Раскройте суть теоремы Котельникова.

*Литература к теме:* [1-3].

## Предварительные исследования полезных ископаемых

### Вопросы, выносимые на лекцию:

*Определение параметров исходного сырья как объекта обогащения. Минералогический анализ. Анализ гранулометрического состава полезного ископаемого. Фракционный анализ. Исследование физических и технологических характеристик минералов и руд. Методы определения минералогического состава полезного ископаемого: оптический, химический анализ, люминесцентный анализ, спектральный анализ, рентгенометрических фазовый анализ, термический анализ.*

### 5.1 Предварительные исследования полезных ископаемых

Выбор наиболее рациональной схемы обогащения полезных ископаемых сложного вещественного состава возможно только на основе детального исследования их состава и взаимосвязи главных минеральных компонентов.

Для определения параметров исходного сырья как объекта обогащения проводится ряд работ, в состав которых, при необходимости, входят следующие виды исследований: минералогический, гранулометрический и фракционный анализы, определение физических и технологических характеристик минералов и руд.

*Минералогический анализ* должен выполнять инженер-обогачитель и только в исключительных случаях - специалист-минералог. В процессе исследований на этом этапе диагностируют минералы, составляющие полезное ископаемое, определяют их количество, форму и размер зёрен, характер роста минералов (макро- и микроструктура). Для идентификации минералов применяют ряд инструментальных методов, основными из которых являются:

- микроскопический анализ, который применяется для определения рудных компонентов и их взаимного прорастания;
- люминесцентный анализ, который применяется для качественной и количественной оценки люминесцирующих минералов в исходной руде (напр., апатита, гипса, доломита, кварца и других минералов, а также некоторых реагентных покрытий);
- химический метод диагностики, который применяется только в случаях малого различия минералов в окраске при анализе их в отражённом свете (плёночный, капельный, фазовый анализы);

- специальные виды анализов, которые применяются для минералов со специфическими свойствами (радиографический, фотометрический, рентгеноструктурный, термический фазовый анализы).

*Анализ гранулометрического состава полезного ископаемого* выполняется преимущественно двумя методами:

- методом отсева исходного материала на стандартном наборе сит (ситовый анализ);

- методом седиментации частиц исследуемого материала из разбавленных суспензий.

Последний из этих методов в современной практике обогащения применяется редко, так как он может быть использован для анализа материалов с максимальным размером частиц не более 40 мкм.

На основании результатов ситового анализа строят суммарные характеристики крупности, определяют выходы материала каждого класса крупности, а при необходимости и содержание соответствующих минералов в каждом классе крупности.

*Фракционный анализ исходного материала* выполняется с целью получения количественной оценки распределения свободных минеральных зёрен и сростков по фракциям различной плотности и крупности, а для магнитных минералов также и по фракциям различной магнитной восприимчивости.

Такое распределение характеризует возможность разделения исходного материала на концентрат и отходы, качество и количество которых определяются взаимным засорением и количеством сростков с различным соотношением в них разделяемых минералов. Поскольку технически и экономически целесообразно выделять, если это возможно, пустую породу из исходного материала на стадиях обогащения, которые не предусматривают мелкого дробления и измельчения, то фракционный анализ полезных ископаемых (в зависимости от результатов минералогического и ситового анализов) необходимо проводить на первых стадиях исследования на обогатимость. Предварительное исследование выполняется обычно на крупных классах методом ручной рудоразборки. Этот метод может быть использован только для классов, которые обогащаются гравитационными процессами, то есть в пределах крупности от 100 до 3 мм. При ручной рудоразборке частицы сортируют на три группы: пустую породу, концентратную фракцию и сростки. После сортировки исследуемого материала каждую группу частиц взвешивают, измельчают и подвергают химическому анализу.

Приведенный способ даёт качественное представление об исходном материале, но полученных данных недостаточно для принятия инженерных решений для проектирования технологической схемы обогащения полезных ископаемых. Для получения более полной информации применяют методы разделения материала на фракции в зависимости от плотности среды (гравитационный метод обогащения), напряжённости магнитного поля

(магнитный метод обогащения), времени нахождения в разделительном аппарате (флотационный метод обогащения). Полученные в результате разделения фракции, подвергают химическому анализу и на основании этих данных строят кривые обогатимости, которые устанавливают однозначное соответствие между значением параметра разделения и содержанием полезного компонента в концентрате, отходах, промежуточном продукте и элементарных фракциях исследуемого продукта. Для проведения фракционных анализов используют различное оборудование, например, установки с применением тяжёлых жидкостей (раствор хлористого цинка, тетрабромэтан и др.), электромагнитные сепараторы, электрические сепараторы, флотационные машины и др.

Данные фракционных анализов служат исходным материалом при определении теоретических балансов продуктов обогащения, а следовательно, и основным исходным материалом при выборе схемы обогащения полезных ископаемых.

*Исследование физических и технологических характеристик минералов и руд* выполняется с целью определения их параметров, которые оказывают существенное влияние на процесс разделения (обогащения). К ним в первую очередь необходимо отнести:

*истинную и насыпную плотность*, которые оказывают решающее влияние на все вопросы обогатительной технологии;

*относительную прочность и угол трения*, которые оказывают решающее влияние на процессы дробления и измельчения;

*краевой угол смачивания и сорбционную способность*, которые оказывают определяющее влияние на процессы флотации, фильтрования и флокуляции шламов и т.д.

Исследования по определению физических и технологических характеристик обогащаемого полезного ископаемого выполняются в минимальных, но достаточных объёмах, то есть в объёмах, обеспечивающих получение достаточной информации об обогатимости сырья.

Прогнозирование показателей исследуемого полезного ископаемого и предварительный выбор технологической схемы обогащения выполняется по результатам анализа данных, которые определены на этапе предварительных исследований. Полученная схема обогащения является объектом для анализа на следующей стадии исследования на обогатимость.

## **5.2 Минералогический состав полезных ископаемых**

Минералогический состав позволяет получить информацию о полезном ископаемом как об объекте обогащения. Он даёт информацию о составе минералов в полезном ископаемом и их количестве; физических и химических свойствах минералов; форме и размере минеральных зёрен; степени и характере срастания минералов друг с другом; размере и характере вкрапления полезных минералов.

Для идентификации минералов применяют ряд методов, позволяющих определить их физические и химические свойства, такие как: отражательная способность, цвет в отражённом свете, явления поляризации, твёрдость, электропроводность, магнитные свойства, растворимость некоторых минералов химическими реактивами.

**Оптический метод** является основным при определении минерального состава полезного ископаемого и продуктов обогащения. Прозрачные шлифы исследуют в проходящем свете, а полированные - в отражённом. Оптический метод очень трудоёмкий и, к сожалению, даёт достаточно большую погрешность. Для уверенной диагностики минералов оптический метод дополняют другими - химическим, спектральным, рентгенометрическими, термическим, рентгеноспектральным (электронно-зондовым), электронной микроскопией и др.

**Химический анализ** применяется для количественного определения содержания минералов и предусматривает избирательное растворение исследуемых минералов. Он основан на различии в степени или скорости растворения минералов в определённых растворителях. Химический анализ имеет значительные преимущества перед оптическим: позволяет обрабатывать большие количества анализируемого материала (до 20 г) при малом содержании определяемого минерала, что способствует высокой точности измерений. Однако, продолжительность химического анализа для большинства руд составляет от одного до трёх дней. Большинство методик химического фазового анализа даёт количественную оценку только одного элемента.

**Люминесцентный анализ** применяется для определения качественного и количественного состава полезных ископаемых. Использование люминесценции в минералогическом анализе основано на способности многих минералов светиться под действием ультрафиолетовых лучей или потока электронов (катодная люминесценция). Люминесценция кристаллов характеризуется положением в спектре полос излучения и полос возбуждения. Идентификация спектров проводится по положению узких полос путём сопоставления их со справочными данными по спектрам люминесценции.

**Спектральный анализ** применяется для определения химического состава веществ. Спектральный анализ основан на использовании спектров электромагнитного излучения, поглощения, отражения или люминесценции. Количественный анализ основан на измерении интенсивности излучения (длине волн поглощения, отражения и т.д.), принадлежащего анализируемым атомам и молекулам, и последующим расчётом концентраций по их значениям. Спектральный анализ применяется на всех стадиях геологоразведочных работ, при исследовании месторождений полезных ископаемых, при минералогических исследованиях для определения более 70 элементов при содержании от  $10^{-6}$  до 10% с возможностью одновременного определения до 40 элементов в каждой пробе.

**Рентгенометрический фазовый анализ** применяется, главным образом, для качественной, а при использовании специальных методик и для количественной характеристики минеральной состава полезного ископаемого и продуктов обогащения. Рентгенометрический анализ основан на исследовании дифракции рентгеновских лучей (с определённой длиной волны  $\lambda$ ) от плоских сеток кристаллических решёток минералов. Каждая кристаллическая структура характеризуется определённым набором дифракционных максимумов, которые получают при различных углах отражения. Ускорению выполнения рентгенометрических анализов с прямым получением сведений о количественном минеральном составе проб способствует применение автоматизированных дифрактометров, соединённых с ЭВМ.

**Термический анализ** обычно применяют при наличии в полезном ископаемом минералов в виде тонкодисперсных или коллоидных образований, плёнок, корочек и т.п., которые трудно диагностируются оптическим методом. Термический анализ необходим при исследовании полезных ископаемых, содержащих глины, водные силикаты, карбонаты, бораты, сульфаты и гидроокислы тяжёлых металлов. Термический анализ основан на физико-химических изменениях, происходящих при нагревании или охлаждении вещества и зависящих от его состава и структуры. Эти изменения регистрируются графически в виде кривой, которая характеризует тепловые изменения в пробе (эндотермический или экзотермический эффект). Каждое вещество имеет свою индивидуальную термическую характеристику, которая отображается кривой дифференциально-термического анализа. Существуют атласы кривых и сводные таблицы, помогающие идентифицировать кривую термического анализа с эталонной и, таким образом, диагностировать анализируемый минерал.

**Электронно-зондовый рентгеноспектральный микроанализ** позволяет определить состав образца на участках площадью в несколько  $\text{мкм}^2$  и глубиной 1  $\text{мкм}$  по всем элементам от бериллия до урана. Анализ используется на полированных шлифах с кускового или измельчённого материала с помощью специальных приборов - электронно-зондовых микроанализаторов. Электронное зондирование позволяет получить информацию о структуре распределения элементов, их взаимосвязи, размерах вкраплений и т.д. С помощью микрозонда можно проводить качественный и количественный анализ состава минералов. Чувствительность анализа и предел обнаружения элемента по концентрации обычно составляет около 0,01%. Обработка экспериментальных данных для определения состава образца (массовых и атомных концентраций элементов) сложная, поэтому для их обработки используют ЭВМ.

### ***Контрольные вопросы***

1. Перечислите ряд инструментальных методов, применяемых для идентификации минералов.
2. Как проводится анализ гранулометрического состава полезного ископаемого?
3. Для чего проводят фракционный анализ исходного материала?
4. Перечислите основные физические и технологические характеристики минералов и руд.
5. Какими методами можно определить минералогический состав полезных ископаемых?

*Литература к теме: [4, 9-12].*

## Исследование физических свойств и вещественного состава полезных ископаемых

### Вопросы, выносимые на лекцию:

*Исследование физических свойств минералов. Действительная плотность. Насыпная плотность. Влажность. Сыпучесть. Магнитная восприимчивость. Электрическая проводимость. Прочность. Абразивность. Физико-химические методы анализа вещественного состава. Спектральный анализ. Фотометрический анализ. Люминесцентный анализ. Электрохимические методы анализа.*

### 6.1 Исследование физических свойств полезных ископаемых

Полезные ископаемые и продукты обогащения характеризуются плотностью, магнитными и электрическими свойствами, влажностью, прочностью и абразивностью, а также некоторыми технологическими свойствами, которые учитываются в отдельных операциях.

#### Плотность

*Действительная плотность* минерального сырья  $\delta$  - отношение массы твёрдой фазы  $m$  к её объёму  $V$ :

$$\delta = m/V, \text{ кг/м}^3. \quad (6.1)$$

Действительная плотность - одно из характерных свойств минералов. Она определяется химическим составом и структурой минерала, при этом важную роль играют атомная масса элементов, составляющих минерал, их валентность, координационное число, размер ионных радиусов.

Действительная плотность минералов - диагностическое свойство, которое имеет большое практическое значение при гравитационном обогащении минерального сырья, где разница в плотностях используется для разделения минералов. В большинстве случаев действительную плотность используют при определении других параметров (пористость, дробимость, удельная площадь поверхности) и при инженерных расчётах.

Действительную плотность отдельных кусков полезного ископаемого определяют взвешиванием куска сначала на воздухе, а затем погруженного в воду. Для взвешивания с точностью до 0,01-0,02 г используют аналитические или аптекарские весы. Плотность определяют по формуле:

$$\delta = m_1 \Delta / (m_1 - m_2), \text{ кг/м}^3, \quad (6.2)$$

где  $m_1$  - масса куска на воздухе, кг;  $m_2$  - масса куска в воде, кг;  $\Delta$  - плотность воды, кг/м<sup>3</sup>.

Для определения действительной плотности полезных ископаемых и продуктов обогащения используют *пикнометрический метод*. Пикнометрический метод основан на измерении массы пустого пикнометра, наполненного жидкостью и при замене части жидкости пробой исследуемого материала:

$$\delta = \frac{m_3 - m_1}{(m_4 - m_3) - (m_2 - m_1)} \cdot \Delta, \text{ кг/м}^3, \quad (6.3)$$

где  $\delta$  - действительная плотность исследуемого материала, кг/м<sup>3</sup>;  $\Delta$  - плотность жидкости, кг/м<sup>3</sup>;  $m_1$  - масса пустого пикнометра, кг;  $m_2$  - масса пикнометра с жидкостью, кг;  $m_3$  - масса пикнометра с пробой исследуемого материала, кг;  $m_4$  - масса пикнометра с жидкостью и пробой исследуемого материала, кг.

*Насыпная плотность* измельчённого продукта - отношение массы продукта с промежутками между зёрнами и порами к его объёму.

Насыпная плотность зависит от действительной плотности, минерального и гранулометрического состава материала, степени его уплотнения, влажности. Насыпную плотность используют при определении объёма, занимаемого сырьём; при расчётах бункеров и ёмкостей для его хранения и транспортировки; для определения давления на стенки сосудов, вагонов и т.п.

Для определения насыпной плотности используют *метод мерного цилиндра*. При этом методе в цилиндр вместимостью 10-15 мл до определённой метки наливают бензол, спирт или керосин, а затем вводят пробу исследуемого материала массой 3-5 г. После отсчёта объёма вытесненной жидкости при известной массе пробы определяют плотность материала по формуле (6.1). В качестве окончательного результата исследований принимают среднее арифметическое двух испытаний, которые отличаются не более чем на 5%.

Насыпная плотность полезных ископаемых в значительной степени зависит от крупности. В инженерных расчётах и практике горного дела зависимость насыпной плотности от крупности оценивается коэффициентом разрыхления.

### **Влажность**

*Влажность* - отношение массы воды, содержащейся в минеральном сырье, к массе влажного сырья (%).

В зависимости от массовой доли воды тонкоизмельчённое сырье может иметь твёрдую, пластичную и текучую консистенцию. Вода в различных формах всегда присутствует в горных породах и тесно взаимодействует с ними. Воду в горных породах по степени её подвижности, характеру связи и влияния на состояние и свойства горных пород классифицируют на: связанную воду, воду связанную капиллярными силами и свободную воду.

Все эти категории воды присутствуют в горных породах совместно. Различные формы влаги в измельчённых горных породах переходят друг в друга и изменяют физические свойства пробы: объёмную и насыпную плотность, сыпучесть, адгезию, замерзание.

Массовую долю влаги в минеральном сырье обычно определяют высушиванием пробы в сушильном шкафу, при температуре  $105 \pm 5^\circ\text{C}$ . Проба считается высушенной до постоянной массы, если относительное различие между двумя последовательными взвешиваниями составляет не более 0,05%.

Массовую долю влаги  $W_t^r$  рассчитывают с точностью до второго десятичного знака после запятой:

$$W_t^r = \frac{m_1 - m_2}{m_1 - m} \cdot 100, \% , \quad (6.4)$$

где  $m$  - масса листа, на котором сушилась проба, кг;  $m_1$  - масса листа с навеской до высушивания, кг;  $m_2$  - масса листа с навеской после высушивания, кг.

### **Сыпучесть**

*Сыпучесть* минерального сырья оценивается по массе материала, который высыпался за единицу времени через единицу площади выпускного отверстия. Сыпучесть сырья в этом случае зависит не только от размеров выпускного отверстия, но и от конструкции прибора: угла и формы выпускной воронки, высоты слоя материала над выпускным отверстием.

Сыпучесть - важная технологическая характеристика сырья, которая необходима для расчёта выпускных отверстий силосов, бункеров, питателей и других разгрузочно-перегрузочных устройств. Сыпучесть определяется минеральным и гранулометрическим составом сырья, влажностью и в значительной степени размером и формой самих частиц.

Для определения сыпучести материалов крупностью не более 3 мм отбирают пробу массой 6-10 кг из расчёта трёхкратного исследования. Основной прибор для определения сыпучести материалов - воронка Гарри с диаметром выпускного отверстия 30 мм и углом конусности  $35^\circ$ .

Степень сыпучести  $\eta_c$  материала определяется по формуле:

$$\eta_c = m / t, \text{ кг/с}, \quad (6.5)$$

где  $m$  - масса выпавшегося материала, кг;  $t$  - время высыпания материала, с.

Если различие между определениями превышает 10%, исследование повторяют и рассчитывают среднее значение.

### **Магнитная восприимчивость**

*Магнитная восприимчивость* - физическая величина, характеризующая способность тела изменять интенсивность собственной намагниченности.

Объёмная магнитная восприимчивость равна отношению намагниченности тела  $J$  к напряжённости магнитного поля  $H$ , в котором находится тело:

$$\kappa = J/H, \quad (6.6)$$

Основной характеристикой руд, обогащаемых магнитным методом, является удельная магнитная восприимчивость  $\chi$  - объёмная магнитная восприимчивость единицы массы тела:

$$\chi = \kappa/\delta, \text{ м}^3/\text{кг}, \quad (6.7)$$

где  $\delta$  - плотность тела,  $\text{кг}/\text{м}^3$ .

Объёмная магнитная восприимчивость при пондеромоторном методе, предложенном Фарадеем, определяется измерением силы притяжения, действующей на образец в неоднородном магнитном поле с известным значением силы магнитного поля.

Методика измерений заключается в последовательном взвешивании стеклянной колбочки с эталоном и образцом при выключенном и включённом электромагните. Удельная магнитная восприимчивость образца  $\chi$  определяется по формуле:

$$\chi = \frac{C \cdot \Delta m}{m}, \text{ м}^3/\text{кг}, \quad (6.8)$$

где  $C$  - постоянная, которая определяется экспериментально для данных полюсных наконечников, положении образца и тока возбуждения электромагнита,  $\text{м}^3/\text{кг}$ ;  $m$  - масса образца,  $\text{кг}$ ;  $\Delta m$  - изменение массы образца в магнитном поле,  $\text{кг}$ .

Измерения производятся 3-4 раза и затем рассчитывается среднее арифметическое значение удельного магнитной восприимчивости образца исследуемого материала.

Этот метод используется главным образом для определения удельного магнитной восприимчивости слабомагнитных материалов.

Некоторым видоизменением рассматриваемого метода является метод Гюи, основанный на измерении силы, действующей на образец. Образец находится в цилиндре, один конец которого помещён в сильное магнитное поле  $H$ , а второй - в слабое  $H_1$ .

Методика измерений заключается в следующем. Образец исследуемого материала, измельчённый до крупности 0,1 мм, засыпают в стеклянную трубку длиной 40 см и уплотняют до метки 35 см. Трубку с материалом подвешивают к одной чашке весов таким образом, чтобы нижний край находился в однородном магнитном поле. При достаточно большой длине цилиндра его верхний конец удалён от полюсов магнита на большое расстояние и  $H_1 \approx 0$ . Трубку с материалом взвешивают при отсутствии тока в обмотках электромагнита и при заданной величине тока. Эту операцию выполняют несколько раз и определяют среднеарифметическое значение удельной магнитной восприимчивости по формуле:

$$\chi = \frac{2l \cdot \Delta m}{\mu_0 \cdot m \cdot H^2}, \text{ м}^3/\text{кг}, \quad (6.9)$$

где  $l$  - длина образца в трубке, м;  $\Delta m$  - кажущийся прирост массы образца в магнитном поле, кг;  $m$  - масса образца, кг;  $\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6}$  Гн/м - магнитная проницаемость вакуума;  $H$  - напряжённость сильного однородного магнитного поля, А/м.

Метод Гюи может применяться для определения магнитной восприимчивости как слабомагнитных (в поле  $H = 800-1000$  кА/м), так и сильномагнитных минералов (в поле  $H = 80-100$  кА/м).

### **Электрическая проводимость**

*Электрическая проводимость* состоит из объёмной и поверхностной составляющих. Объёмная проводимость минерала зависит от содержания примесей, а поверхностная - от состояния его поверхности.

Методы измерения объёмной проводимости твёрдых веществ разделяются на две группы: методы, основанные на использовании постоянного тока и методы, основанные на использовании переменного тока. При лабораторных исследованиях электрической сепарации применяют методы первой группы (двухэлектродные и четырёхэлектродные).

*Двухэлектродный метод* основан на изменении тока, проходящего через исследуемый образец, при известной разности потенциалов между электродами. В зависимости от электрической проводимости исследуемого образца для регистрации тока используют амперметр, гальванометр или электрометр.

Для исследования минералов с высокой электрической проводимостью обычно применяют амперметр или различные мостиковые схемы на постоянном токе, минералов с рядом электрической проводимостью - высокочувствительные тераомметры, минералов с очень низкой электрической проводимостью - электрометры с непосредственным цифровым отсчётом.

При измерении двумя зондами используют вольфрамовые электроды диаметром 0,1 мм (расстояние между ними  $l = 0,5 \div 1,5$  см), напряжение на образце измеряют компенсационным методом. При этом считают, что сопротивление между зондами изменяется линейно.

Сопротивление образца определяется по формуле:

$$R = R_0 \cdot U / U_0, \text{ Ом} \quad (6.10)$$

где  $R_0$  - сопротивление эталонного образца, Ом;  $U_0$  и  $U$  - напряжение на эталонном и исследуемом образцах, В.

При необходимости получения более точных значений величины электрической проводимости используют четырёхэлектродный метод.

*Четырёхэлектродный метод* основан на измерении разности потенциалов между двумя эквипотенциальными поверхностями образца, находящимися между электродами. Метод позволяет исключить приэлектродную поляризацию и измерить действительную проводимость образца.

Удельную объёмную электрическую проводимость  $\sigma$  можно определить по разность потенциалов  $\Delta U$  между измерительными электродами:

$$\sigma = I \cdot l / (\Delta U \cdot S), \text{ См/м}, \quad (6.11)$$

где  $I$  - величина тока, подведённого к образцу, А;  $l$  - расстояние между измерительными электродами, м;  $\Delta U$  - разность потенциалов между измерительными электродами В;  $S$  - площадь поперечного сечения образца, м<sup>2</sup>.

Более точные результаты получают при специальной подготовке образца в виде параллелепипеда (обычно размером 25x25x0,5 мм), куба, диска или любой геометрической фигуры, имеющей параллельные поверхности, на которые накладывают электроды. Для обеспечения надёжного контакта при температуре, близкой к комнатной, используют графитовые электроды. При повышенной температуре (более 300-350°С) используют золотые или платиновые электроды, но в данном случае поверхность образца должна быть тщательно отшлифована.

### **Прочность**

*Прочность* - свойство горных пород сопротивляться разрушению а также необратимому изменению формы под воздействием внешних нагрузок.

Прочность горных пород определяется химическим составом, генезисом, структурой и твёрдостью минералов. В горной промышленности для оценки прочности минерального сырья пользуются коэффициентом и шкалой прочности, предложенными проф. М. М. Протодяконовым. За единицу прочности принято временное сопротивление одноосному сжатию в 9,8 Н/мм<sup>2</sup>, которое определяется на образцах кубической формы со стороной, равной 50 мм.

Основной метод определения коэффициента прочности - *метод раздавливания* образцов правильной формы.

### **Абразивность**

*Абразивность* - способность горных пород изнашивать твёрдые тела, которые контактируют с ними (детали машин, инструменты и т.п.). Абразивность в основном определяется прочностью, размерами и формой минеральных зёрен, составляющих горную породу.

Абразивность оценивают по степени износа штифтов, стержней, металлических колец, которые трутся о поверхность пород при сверлении или резке, а также по степени стирания пород абразивными материалами. Абразивность горных пород обуславливается в основном двумя их

свойствами - пределом прочности на сжатие отдельных минеральных зёрен ( $\sigma_{ст}$ ) и коэффициентом хрупкости ( $k_{кр}$ ). Поэтому коэффициент абразивности определяют по формуле:

$$k_a = \sigma_{ст} \cdot k_{кр}. \quad (6.12)$$

Кроме того, применяют эмпирические методы оценки абразивности. По методике Л. И. Барона и А. В. Кузнецова показатель абразивности горных пород определяют как суммарную потерю массы (в мг) стандартного стержня, вращающегося с частотой 400 мин<sup>-1</sup>, прижатого к породе, при осевой нагрузке 150 Н за время испытания 10 мин.

При работе машины образец исследуемого материала перемещается по окружности со скоростью 0,48 м/с. Продолжительность опыта составляет 8 часов. Через 8 часов образец исследуемого материала снимают и определяют площадь поверхности пирамиды по её геометрическим размерам. Рассчитывают износ 1 м<sup>2</sup> площади поверхности материала образца за 8 часов работы машины. Полученный результат служит оценкой абразивности минерального сырья. Относительная износостойкость образца материала определяется по формуле:

$$Ab = t/m, \text{ час./г}, \quad (6.13)$$

где  $t$  - постоянная времени истирания образца исследуемого материала, час;  
 $m$  - износ образца исследуемого материала, г.

Определение выполняют на двух образцах и рассчитывают среднее арифметическое, если расхождения результатов двух экзаменов не превышает 1%. При большем расхождении делают третье определение и за окончательный результат принимают среднее арифметическое двух наиболее близких.

## **6.2 Физико-химические методы анализа вещественного состава**

При физико-химических методах анализа (как и при физических) применяется более или менее сложная аппаратура для измерения оптических, электрических и других свойств вещества. Главная особенность заключается в том, что физико-химические методы (в отличие от физических) основаны на химических реакциях. Наиболее широко применяются две группы аппаратурных методов: оптические и электрохимические.

Из оптических методов наиболее распространены спектральный, фотометрический и люминесцентный анализы.

### **Спектральный анализ**

Спектральным называют метод основанный на изучении спектров. Для возбуждения спектров чаще всего применяют электрическую искру или дугу, а также газовое пламя. В дуговом, искровом, а иногда и пламенном спектральном анализе применяют такие типы приборов:

стилоскопы - визуальные приборы для качественного и полуколичественного анализа;

обычные спектрографы, которые фиксируют спектр на фотопластинке; после чего фотопластинки проявляют и с помощью микрофотометра измеряют интенсивность почернения линий;

приборы с фотоэлектрическим устройством (например, квантометром), где интенсивность линий, выпускаемых пламенем при сжигании пробы, измеряются с помощью фотоэлемента или электронного фотоумножителя.

Эмиссионный спектральный анализ применяется, главным образом, для текущего контроля стандартной продукции на металлургических предприятиях, а также для анализа различных проб при геологических исследованиях. Основная особенность спектрального анализа заключается в том, что можно быстро и без предварительной подготовки получить результаты одновременно нескольких элементов. Обычно этот метод применяется для определения содержания в материале примесей от 0,001 до 1%.

### **Фотометрический анализ**

При фотометрическом анализе исследуемое вещество переводят в окрашенное соединение, после чего измеряют светопоглощение раствора. В зависимости от способа измерения светопоглощения различают несколько методов фотометрического анализа. Визуальное сравнение интенсивности окраски по отношению к известному стандарту называют *калориметрическим анализом*. Если для измерения светопоглощения применяют фотоэлемент со светофильтром, то прибор называют фотометром или электрофотокалориметром, а метод анализа - *фотометрическим*. Наиболее точные результаты, особенно при анализе сложных смесей, получают на спектрофотометрах, когда светопоглощение можно измерять в узкой области спектра. Такой метод называется *спектрофотометрическим*.

Основные области применения фотометрического анализа такие же, что и спектрального: определение содержания в разных и природных материалах примесей от 0,001 до 1%. Однако, фотометрический метод по сравнению со спектральным анализом позволяет определить большее количество элементов при большей точности результатов измерений.

### **Люминесцентный анализ**

Люминесцентный анализ по характеру, а нередко и по ходу химических операций, близок к фотометрическому. Исследуемый компонент с помощью определённой химической реакции переводится в химическое соединение, которое способно к люминесценции. Для определения количества продукта реакции, способного к люминесценции, раствор освещают ультрафиолетовым (или коротковолновым видимым) светом, после чего возникающее длинноволновое свечение измеряется визуально или фотометрически.

Люминесцентный анализ близок к фотометрическому также по отраслям применения и отличается более высокой чувствительностью.

### **Электрохимические методы анализа**

Электрохимические методы основаны на взаимодействии вещества с электрическим током. Различают следующие методы количественного электрохимического анализа.

**Электровесовой анализ.** Исследуемый элемент выделяют электролизом, чаще всего осаждением на катоде, после чего электрод взвешивают. Метод применяют, главным образом, для определения некоторых основных компонентов сплавов, цветных металлов. Метод характеризуется высокой точностью, однако для полного осаждения необходимо длительное время.

**Потенциометрическое титрование.** Метод основан на титровании с применением специально подобранного индикаторного электрода. Этот метод применяется для анализа окрашенных или мутных растворов, для анализа смесей нескольких близких по свойствам компонентов. Методика позволяет автоматизировать титрование.

**Кондуктометрическое титрование.** Метод основан на титровании, окончание которого определяют по перегибам кривой зависимости электропроводности от количества добавленного титрованного рабочего раствора. Значительным препятствием для применения метода является присутствие посторонних электролитов, которые увеличивают фон проводимости, уменьшает чувствительность и точность метода.

**Полярографический анализ.** Для определения металлов в раствор погружают два электрода. Обычно берут анод с постоянным потенциалом и большой поверхностью, а катод с малой поверхностью (чаще всего - капля ртути, вытекающая из капилляра). Постепенно увеличивают напряжение на электродах. При этом сначала ток почти не идёт, потом начинается электровыделение металла и ток с напряжением растёт. Однако, увеличение тока продолжается только до определённого предела и зависит от концентрации определяемых ионов. Итак, предельный ток позволяет рассчитать концентрацию иона металла. Метод применяется, главным образом, для определения микроколичеств цветных металлов при анализе руд и сплавов.

**Амперметрическое титрование.** Индикаторным электродом при данном титровании служит полярографический прибор. Это титрование можно рассматривать так же, как вариант потенциометрического титрования, которое отличается тем, что применяется микроэлектрод с наложенным напряжением. Метод применяется обычно в тех случаях, когда трудно подобрать подходящий индикаторный электрод для потенциометрического титрования.

**Кулонометрическое титрование.** Метод основан на измерении количества электрического тока, который расходуется на реакцию с

исследуемым компонентом. При этом методе измеряемое вещество прямо или косвенно участвует в электродной реакции. О количестве вещества судят по количеству затраченного электрического тока. Главная трудность состоит в том, чтобы предотвратить побочных реакций на электродах. Метод применяют для определения микроколичеств компонентов, которые восстанавливаются или окисляются.

### ***Контрольные вопросы***

1. Как определяется действительная плотность минерального сырья?
2. Для чего используют показатели «насыпная плотность» и «сыпучесть»?
3. Опишите методику определения объёмной магнитной восприимчивости.
4. Охарактеризуйте методы измерения объёмной проводимости твёрдых веществ.
5. Какими методами оценивается абразивность горных пород?
6. Перечислите физико-химические методы анализа вещественного состава полезных ископаемых.

*Литература к теме: [4, 9-12].*

## **Исследования полезных ископаемых на обогатимость**

### **Вопросы, выносимые на лекцию:**

*Цель и задачи проведения исследований полезных ископаемых на обогатимость. Основные этапы исследования полезных ископаемых на обогатимость. Поиск априорной информации. Стадии технологических исследований на обогатимость.*

### **7.1 Основные задачи исследований полезных ископаемых на обогатимость**

Под обогатимостью понимают предельно возможную точность разделения полезных ископаемых на соответствующие продукты, которые не зависят от эффективности работы обогатительной установки. Обогатимость является технологической оценкой возможной степени извлечения и концентрации минеральных компонентов при обогащении полезных ископаемых. Обогатимость является обязательной характеристикой месторождения полезного ископаемого и зависит от минерального состава, текстуры и структуры.

Исследование полезных ископаемых на обогатимость выполняют для оценки и утверждения запасов месторождения, разработки технологии и схем обогащения, получения необходимых данных для проектирования новых обогатительных фабрик и совершенствования технологии обогащения на действующих фабриках, а также при испытании новых машин и реагентов.

Исследование полезных ископаемых на обогатимость представляет собой комплекс различных испытаний: исследование вещественного состава полезного ископаемого, крупности и характера вкрапления полезных минералов, разработку технологии обогащения выбранными методами и определение технологических показателей с учётом комплексного использования сырья и охраны окружающей среды.

Исследование полезных ископаемых для оценки и утверждения запасов месторождения выполняют главным образом в лабораторном масштабе и в сокращённом объёме, так как в этом случае детальная разработка технологии обогащения не нужна. Для проектирования новых обогатительных фабрик или совершенствования технологии на действующих предприятиях исследования во многих случаях проводят в три этапа (лабораторные, полупромышленные, промышленные).

Полупромышленные исследования проводят на опытных установках непрерывного действия или на опытных фабриках небольшой производительности. Исследования проводят для уточнения технологии, разработанной в лабораторном масштабе, и полученных при этом технологических показателей. Кроме того, в полупромышленном масштабе исследуют процессы и аппараты, не поддающиеся моделированию в лабораторных условиях.

Промышленные исследования выполняются на секциях действующих обогатительных фабрик при необходимости сравнения новых схем и режимов обогащения, новых реагентов и оборудования с принятыми на действующем производстве.

Перед началом исследований с учётом вещественного состава и свойств разделяемых минералов составляют программу и намечают перспективные технологические процессы и схемы обогащения, а также выбирают аппаратуру, на которой будут проводить исследования. В процессе исследований может быть разработано несколько вариантов схем. Выбор наиболее эффективной схемы обогащения осуществляется после технико-экономического сравнения разработанных вариантов.

При разработке технологических схем необходимо предусмотреть возможность предварительного отделения отвальных отходов с использованием простых и экономичных методов обогащения; учесть необходимость использования в ряде случаев подготовительных операций; решить вопрос замкнутого водооборота, комплексной переработки сырья, охраны окружающей среды и др.

При наличии в полезном ископаемом значительного количества относительно крупных включений ценных компонентов проверяют возможность их выделения гравитационным или иным экономичным методом. Наиболее простыми и экономичными являются гравитационные и магнитные методы обогащения. Разделение в тяжёлых суспензиях обычно применяют для обогащения материала крупнее 6 - 8 мм, а отсадкой - крупнее 0,5 мм. Материал крупностью до 2 мм обогащают на концентрационных столах, винтовых и конусных сепараторах, струйных желобах, шлюзах и др.

Магнитную сепарацию применяют для обогащения сильно- и слабомагнитных руд. Руды и их продукты обогащения, содержащие магнетит, титаномагнетит или пирротин, исследуют на обогатимость в сепараторах со слабым магнитным полем. При исследовании руд и продуктов, содержащих окислы, гидроокислы и карбонаты железа и марганца, ильменит, вольфрамит и некоторые силикаты железа, используют сепарацию в сильном магнитном поле. Магнитную сепарацию применяют также в сочетании с другими процессами (гравитационными, флотационными).

Если полезные компоненты исследуемого материала тонковкрапленные и легко флотируются, то такой материал исследуют флотацией. Флотационный метод обогащения является основным для

сульфидных руд. При наличии в руде минералов, легко и трудно флотируемых применяют комбинированные гравитационно-флотационные схемы.

Электрическое обогащение используют в тех случаях, когда другие более экономичные методы не позволяют получить удовлетворительные результаты разделения минералов, отличающихся по электропроводности. Электрическое обогащение эффективно при доводке редкометаллических концентратов.

При переработке труднообогатимых полезных ископаемых, которые не обогащаются обычными методами, применяют химико-металлургические - выщелачивание, обжиг, гидрометаллургию и др.

Таким образом, прежде чем приступить к проектированию обогатительного производства или рекомендовать технологию переработки нового сырья на действующей фабрике, необходимо провести комплекс экспериментальных исследований, то есть выполнить комплекс исследований полезных ископаемых на обогатимость.

Исследование полезных ископаемых на обогатимость выполняют в определённой последовательности. Основные этапы исследования полезных ископаемых на обогатимость следующие:

- сбор априорной информации о сырье, поиск аналогов;
- разработка схемы обработки проб и исследования свойств сырья (гранулометрический, фракционный, минералогический и химический состав, зольность, влажность, прочность руды и др.);
- анализ построенных кривых обогатимости (при необходимости);
- поиск возможных методов обогащения и разработка технологической схемы (по данным выполненных анализов и априорной информации);
- выбор критериев эффективности принятых процессов обогащения;
- разработка плана экспериментальных работ;
- выполнение экспериментов, обработка полученных данных и получения моделей процессов;
- разработка рациональных технологических режимов процессов;
- экспериментальная проверка и корректировка разработанной схемы и режимов на действующей фабрике;
- разработка исходных данных для экономического анализа вариантов переработки исследуемого сырья.

## **7.2 Поиск априорной информации**

Исследование полезных ископаемых на обогатимость, поиск методов комплексного использования сырья, разработка эффективной и экономичной схемы обогащения, управление процессами на фабрике является сложной задачей со многими неизвестными.

Основные причины этой сложности определяются многофакторностью процессов обогащения, вероятностным характером большинства процессов,

постоянным неконтролируемым изменением свойств сырья, наличием в сырье частиц с промежуточными свойствами (сростки), несовершенством разделительных процессов и т.д.

Случайный характер причин, влияющих на процесс, их массовость вызывают необходимость использования для оценки разделения сырья вероятностные характеристики. Все технологические показатели разделительных процессов являются, таким образом, не чем иным, как интегральными или усреднёнными характеристиками. Поэтому процессы обогащения могут адекватно описываться только моделями со статистически распределёнными параметрами.

По этой причине большинство исследований в обогащении проводятся на основе статистического планирования экспериментов. Впервые применил этот метод в обогащении А. Доренфельд, который указывал, что на обогатительной фабрике есть только одна постоянная характеристика - изменчивость факторов - и только статистические методы позволяют упорядочить результаты этого беспорядка. С помощью статистической обработки можно оценить вероятность определённого значения факторов и результатов обогащения.

Получение новой информации возможно в результате экспериментальных работ. Приступая к эксперименту, исследователь должен обладать некоторым объёмом сведений об объекте исследования, то есть так называемой первичной априорной информации. Поэтому проведение любого исследования обычно начинается с поиска и анализа существующей информации по интересующему исследователя вопросу.

При исследовании на обогатимость к априорной информации относятся, например, сведения о типе, марке сырья, его вещественном составе, существующих способах обогащения подобного сырья, характеристиках машин и др. В априорных сведениях указывается и весь предыдущий опыт и технологические знания, позволяющие до начала эксперимента выбрать подходящие варианты схем и режимов обогащения. Иными словами, априорная информация позволяет выбрать экспериментальную область.

Информацию в области обогащения полезных ископаемых можно разделить на следующие виды:

- первичная, в которую входят оригинальные монографии, журнальные статьи, описания патентов и т.п.;
- вторичная - включает рефераты, обзоры, справочники, библиографические описания, каталоги;
- числовая - технологические и экономические показатели работы фабрик, параметры технологического процесса, числовые характеристики сырья, параметры работы оборудования и др.

Числовая информация может содержаться во всех рассмотренных выше других видах информации и кроме того - в сменных журналах, производственных отчётах, диаграммах записи режимных параметров

процесса автоматическими приборами, в качественно-количественных схемах действующих фабрик и т.д .

В обогащении полезных ископаемых можно выделить основные типы числовой информации:

- постоянные характеристики сырья, реагентов и т.п., например, плотность минералов, твёрдость и т.п.;
- характеристики оборудования - удельная производительность, рабочая площадь (объем), установленная мощность электродвигателей и т.п.;
- параметры процесса - плотность и вязкость пульпы, разрыхленность постели, расход реагентов, температура и т.п.;
- содержание компонентов в сырье, промпродукте, концентрате и отходах;
- технологические показатели - выход продуктов, извлечение, качество конечных продуктов, коэффициент обогащения, селективности и др.;
- экономические показатели - себестоимость продукции, рентабельность производства, срок окупаемости, основные расходы, энергоёмкость процесса и др.

Приступая к исследованию, необходимо по возможности более полно осуществить поиск априорной информации. Однако, стоит разумно ограничить этот поиск. Во-первых, получение априорной информации требует времени и затрат. Во-вторых, не следует забывать, что многие исследования выполнены в условиях, далёких от рассмотренных, с несколько иной целью, и, возможно, не лучшим образом. В ряде случаев результаты могут быть и ложными. Поэтому желательно ограничить объем используемой информации только бесспорными данными. Имеющаяся априорная информация не должна сковывать исследователя.

### **7.3 Стадии технологических исследований на обогатимость**

После сбора априорной информации об исследуемом сырье и обосновании аналогов (сырье - технология) проводят предварительные исследования, включающие минералогический, фракционный, гранулометрический анализы, а также некоторые определения физических свойств материалов. Результаты этих исследований позволяют наметить схему исследования на обогатительных аппаратах.

Все исследования на обогатимость можно разбить на ряд последовательных стадий, каждая из которых преследует определённую в какой-то степени самостоятельную цель, хотя и взаимосвязанную с другими стадиями.

Целью первой стадии является выделение максимального количества пустой породы при минимальной степени измельчения каким-либо простым и дешёвым способом. Эта стадия обусловлена содержанием в добытой горной массе значительного количества породы, которая практически не содержит ценных минералов. Особенно большое значение это имеет при

использовании высокопроизводительных методов добычи (открытые методы разработки, системы с массовым обрушением), а также разработке россыпей.

Считается, что отвальные хвосты первой стадии обогащения должны содержать полезного компонента не более, чем отвальные хвосты в случае отсутствия такого предварительного обогащения. Однако экономически оправданы и более богатые хвосты первой стадии, так как высокая степень концентрации на этой стадии не только удешевляет всю переработку, но и позволяет в следующих стадиях переработки обогащённого продукта, достигать более высокого извлечения.

На первой стадии чаще всего применяют гравитационные методы обогащения (в тяжёлых суспензиях, отсадку и др.). Иногда - магнитную сепарацию, коллективную флотацию сульфидов, а в последнее время - бактериальное выщелачивание.

Целью второй стадии (иногда бывает первой) является подготовка сырья к последующему обогащению - максимальное раскрытие ценных минералов с учётом возможности применения тех или иных методов обогащения. При этом следует учитывать, с одной стороны, потери с тонкими классами (шламами) при тонком измельчении, с другой - размеры вкрапления драгоценных материалов.

Кроме измельчения подготовительная стадия может включать намагничивающий, сульфатизирующий или другой вид обжига, кондиционирование пульпы перед флотацией (аэрация, обдирки, обработка реагентами). На этой стадии достигается возможность максимальной обогатимости исходного сырья теми методами, которые будут применены в следующей стадии.

Третья стадия исследований включает определение оптимального режима обогащения для получения черного концентрата. Целью этой стадии является получение максимального извлечения всех ценных компонентов. Согласно этой цели определяются параметры работы обогатительных аппаратов, реагентный режим основной флотации и т.п.

В четвертой стадии выясняется возможность получения конечных продуктов заданного качества (кондиционных концентратов), определяется вид и режим доводочных операций, выясняется необходимость и возможность использования химических и металлургических методов переработки продуктов.

На пятой стадии исследования отрабатывается схема: выбирается количество перечистных и контрольных операций, определяется целесообразность выделения и способы переработки промежуточных продуктов. Эти исследования не всегда можно осуществить в лабораторных условиях. Иногда их проводят на полупромышленных установках или на действующих фабриках.

Последняя (шестая) стадия - технико-экономическое исследование - предполагает сравнение вариантов по технологическим и экономическим показателям.

Необходимо заметить, что чётких правил выбора технологических схем пока не существует. Правильность выбора зависит от опыта исследователя. Поэтому на последней стадии целесообразно привлечение широкого круга специалистов для консультации, изучение опыта переработки руд аналогичного состава и анализ различных методов переработки минерального сырья.

### ***Контрольные вопросы***

1. Цель проведения исследований полезных ископаемых на обогатимость?
2. Для чего проводятся полупромышленные и промышленные исследования?
3. Охарактеризуйте основные этапы исследования полезных ископаемых на обогатимость.
4. Какие операции включает в себя сбор априорной информации об объекте исследований?
5. Раскройте принцип составления схемы проведения исследований на обогатимость.

*Литература к теме:* [4, 11, 12].

# Процесс обогащения как объект исследований

### Вопросы, выносимые на лекцию:

*Взаимосвязь технологических факторов. Причины неопределённости и непредсказуемости поведения процесса обогащения. Применение методов математической статистики для анализа технологических процессов. Активный эксперимент. Пассивный эксперимент. Статистические методы обработки полученной информации. Дисперсионный, корреляционный и регрессионный анализы. Применение теории графов для исследования технологических процессов.*

### 8.1 Взаимосвязь технологических факторов

Исследование полезных ископаемых на обогатимость, изыскания методов комплексного использования сырья, разработка эффективной и экономичной схемы обогащения, управление технологическим процессом на фабрике - являются очень сложными задачами со многими неизвестными. Каждый фактор, влияющий на технологический процесс, связан с десятками других, от которых он зависит и которые зависят от него, а также друг от друга.

В таких условиях вряд ли возможен достаточно полный анализ влияния всех факторов на процесс. Дело ещё усугубляется тем, что в большинстве случаев мы имеем только качественные характеристики и зависимости факторов, многие из которых экстремального характера, то есть в одном диапазоне влияют на технологический параметр положительно, а во втором диапазоне - отрицательно.

Вследствие многочисленности факторов и их взаимодействия, влияющих на процесс, возникает типичная для многих сложных производств ситуация: мы можем с привлечением соответствующей группы факторов объяснить любое изменение поведения процесса. Объяснения могут быть разные, но одинаково правдоподобны. Однако, если при тех же условиях произошли противоположное изменение, мы с использованием другой группы факторов можем объяснить и её.

Неопределённость и непредсказуемость поведения рассматриваемой системы (технологических показателей работы обогатительной фабрики) является следствием четырёх причин.

Одной из причин неопределённости является сложность процесса, невозможность учёта всех факторов и их взаимодействия. На основе предварительного опроса можно лишь ожидать тех или иных результатов с некоторой, большей или меньшей, вероятностью.

Второй причиной неопределённости является неконтролируемое изменение параметров. Оценить вероятность определённого значения факторов и результатов обогащения позволяет статистическая обработка.

Третья причина неопределённости связана с массовостью процесса обогащения. Число элементарных агрегатов - частиц, подлежащих разделению, огромное. В процессах разделения, которые особенно сложны по своей технологии, всегда существует определённая вероятность того, что даже при чётком различии свойств разделяемых частиц некоторое их количество попадёт не в свой продукт и, следовательно, состоится засорение концентрата чужеродными частицами, с одной стороны, и неполное извлечение полезного вещества в концентрат, с другой.

Четвертой причиной неопределённости является существование погрешностей, связанных с несовершенством разделительных аппаратов, а также с существованием частиц с промежуточными свойствами.

Таким образом, в результате промышленного разделительного процесса из исходной смеси получают не чистые продукты, а только в той или иной степени обогащённые или обеднённые продукты. Случайный характер причин, влияющих на процесс, и его массовость порождают необходимость использования вероятностных характеристик для оценки разделения. Все технологические показатели процессов разделения, таким образом, являются интегральными или усреднёнными характеристиками.

Стохастичность процессов обогащения, которая связана с их сложностью, вероятностным характером и трудностями моделирования, изучалась и использовалась многими известными учёными - В.И. Мелких, М.М. Виноградовым, Л.А. Барским, А.Н. Тихоновым, В.З. Козиним, А.А. Абрамовым, С.И. Митрофановым, Ю.Б. Рубинштейном, П.И. Пиловым и др.

## **8.2. Методы математической статистики**

Применение методов математической статистики для анализа технологических процессов и построения математических моделей связано с постановкой задачи создания систем автоматического управления для выявления количественных характеристик и количественной оценки влияния тех или иных факторов. При этом можно использовать такие методы статистического анализа как дисперсионный, корреляционный, регрессионный.

Традиционным в исследованиях по обогатимости полезных ископаемых является применение статистических методов и оценок для характеристики воспроизводимости экспериментов и, в частности, опробования. Так, вывод формул для расчёта минимальной массы пробы в зависимости от крупности основан на статистических критериях, которые связывают распределение минеральных частиц (с учётом содержания ценного компонента) и допустимую ошибку опробования.

Применение математической статистики в лабораторных исследованиях на обогатимость связано в первую очередь с анализом экспериментального материала и компактным представлением полученных результатов. На практике часто возникает необходимость свести первоначальную массу данных к небольшому количеству показателей, которые достаточно полно характеризуют свойства всей совокупности.

Статистические параметры являются наиболее удобными для характеристики крупности вкрапления ценных компонентов, раскрытия минералов, распределения флотационных реагентов по поверхности частиц. Физические свойства одних и тех же минералов могут существенно меняться не только в зависимости от месторождения, но и в пределах одного и того же месторождения. Это в значительной степени затрудняет предварительный выбор схем для исследований обогатимости полезного ископаемого и режимов его обогащения. Значительный объём накопленной информации об обогатимости различных минеральных комплексов может быть обработан статистическими методами и использован при исследовании новых полезных ископаемых на обогатимость.

Методы математической статистики позволяют определить, в какой степени свойства выборки отражают свойства генеральной совокупности, оценить параметры генеральной совокупности и установить для них доверительные интервалы даже по очень малым выборкам. Методы математической статистики очень разные и могут использоваться при решении широкого круга вопросов.

При получении исследователем математических моделей процессов возможные следующие ситуации.

- При исследовании есть возможность устанавливать входные факторы на всех уровнях, находящихся в области экспериментирования. То есть исследователь играет активную роль. Такой эксперимент называют активным. Это основной вид исследований в лабораторных условиях.

- Исследователь не имеет возможности по своему плану устанавливать значения входных параметров, он играет пассивную роль - фиксирует только величины всех факторов, которые его интересуют. Это - пассивный эксперимент или наблюдение. Такая ситуация возникает при исследованиях на действующем производстве.

- Исследователь имеет возможность получить информацию об исследуемом процессе только путём опроса специалистов, которые хорошо знают данный процесс. Такой подход называют эвристическим.

Наиболее информативный и целесообразный первый - активный эксперимент, когда исследователь имеет возможность применить современные методы планирования экспериментов. Он не только более экономичный по числу необходимых опытов для получения той же информации, но и в нём принципиально иначе распределяется информация о входных факторах. Равномерность и равноточность задания входного

аргумента при планировании эксперимента позволяет оценивать модель процесса во всем факторном пространстве.

При пассивном эксперименте вид модели и оценка её адекватности зависят от функции распределения входных параметров. Однако с учётом того, что результаты наблюдений получают только путём снятия информации с рабочего процесса без особых затрат, игнорировать эту информацию не следует.

Можно отметить те случаи, когда пассивный эксперимент неизбежен:

- при исследовании влияния на результаты промышленных процессов каких-либо переменных действий, стабилизация которых на определённых уровнях невозможна или экономически невыгодна (например, практически невозможно осуществить поступления на обогатительную фабрику руды вполне определённого состава, стабилизировать температуру пульпы, учесть износ оборудования и т.п.);

- при исследовании закономерностей в свойствах продуктов обогащения;

- при исследовании фактических изменений показателей за прошлый период;

- при исследовании хода технологического процесса;

- при исследовании результативности управления процессом и т.д.

Таким образом, при надлежащем внимании к активным методам, необходимо знать и уметь использовать пассивные методы.

Статистические методы обработки полученной информации можно использовать как при активном, так и при пассивном эксперименте. Разница заключается в последовательности обработки данных и переходом от метода наименьших квадратов, применяемого при пассивном эксперименте, к учёту отклонений наблюдаемых и расчётных значений выходного критерия при активном эксперименте.

При пассивном эксперименте в «чистом виде» широко применяются дисперсионный, корреляционный и регрессионный анализы.

*Дисперсионный анализ* применяется для оценки вклада в разброс (дисперсию) выходного параметра какого-либо фактора. Такая оценка может потребоваться при исследовании колебаний данных, воспроизводимости экспериментов, определении доверительного интервала значений какой-либо величины или коэффициентов в уравнении, описывающем процесс. Дисперсионный анализ с многосторонней классификацией может служить для оценки влияния различных факторов на отклонение параметров исследуемого материала от среднего значения.

В обогащении полезных ископаемых дисперсионный анализ нашёл применение для оценки воспроизводимости химических анализов, лабораторных экспериментов, а в случае анализа промышленного продукта среднеквадратичное отклонение является мерой стабильности работы фабрики.

Близко к дисперсионному анализу примыкает факторное планирование экспериментов. *Факторный анализ* позволяет оценить вклад исследуемых факторов и их взаимодействия на среднее значение параметра, который характеризует процесс в целом.

*Корреляционный анализ* позволяет оценить тесноту связи различных параметров или факторов, влияющих на процесс. Этот метод широко распространён при исследовании промышленных процессов. Если коэффициент корреляции достаточно большой, можно получить информацию, позволяющую выбрать основные регулирующие действия на процесс, точки и методы измерения факторов, установить минимально необходимое количество измеряемых параметров. Если коэффициент линейной корреляции мал по абсолютной величине, то это свидетельствует о более сложной (нелинейной) зависимости между параметрами или о существенном влиянии других факторов. В этом случае необходимо вычисление более сложной зависимости в виде нелинейного уравнения.

Получение таких уравнений методом наименьших квадратов составляет основу *регрессионного анализа*. Однако при использовании регрессионного анализа необходима обязательная проверка адекватности модели и процесса.

Одним из направлений регрессионного анализа является *планирование экстремальных экспериментов*, которое включает: выбор основных факторов, действующих на процесс; определение направления крутого восхождения (градиента) до экстремального значения с помощью факторного плана или его дробных реплик; движение по градиенту; получение регрессионного уравнения с помощью плана более высокого порядка в экстремальной (почти стационарной) области.

Большое распространение получили статистические методы *определения статических и динамических характеристик* сложных недетерминированных процессов для их автоматизации. Выбор регуляторов и машин для управления, основанный на таких статистических характеристиках, осуществлён применительно к процессам флотации, измельчения, отсадки и т.д.

### **8.3. Применение теории графов**

Распространённый во всех областях науки и техники метод графического изображения процессов, зависимостей, структур и т.п. с помощью точек и соединяющих их линий привёл к созданию специфических и привычных для специалистов каждой отрасли графических схем типа электрических, технологических и т.п. В математике эти вопросы решаются в теории графов, которая является топологическим отображением теории множеств. Эта теория может быть приложена к любым схематическим изображениям процессов и служит общим математическим инструментом для их исследований. В ряде случаев использование математического

аппарата теории графов позволяет сделать некоторые выводы и упрощения, которые не столь очевидны в обычных схемах. В этом смысле целесообразно использование языка теории графов и перевод на него технологических схем и зависимостей, которые рассматриваются в обогащении полезных ископаемых.

Графом называется совокупность узлов и соединяющих их рёбер. Тем самым даётся представление о структуре исследуемого объекта, устанавливаются связи между его отдельными узлами, а если ввести для рёбер соответствующую массовую характеристику, можно получить и количественную оценку связей.

Технологические схемы переработки полезных ископаемых могут быть представлены в виде состояний совокупности зёрен, которые последовательно меняются. Совокупность зёрен в каждом состоянии - полезного ископаемого в месторождении, дроблёном, измельчённом, классифицированном по крупности, разделённом по физическим свойствам - характеризуются определёнными параметрами, как совокупность, ограниченная предельными значениями параметров. Переход из одного состояния в другое может быть представлен направленными графами, вершины которых обозначают соответствующее состояние, а рёбра - процессы перехода в новое состояние (рис. 8.1).

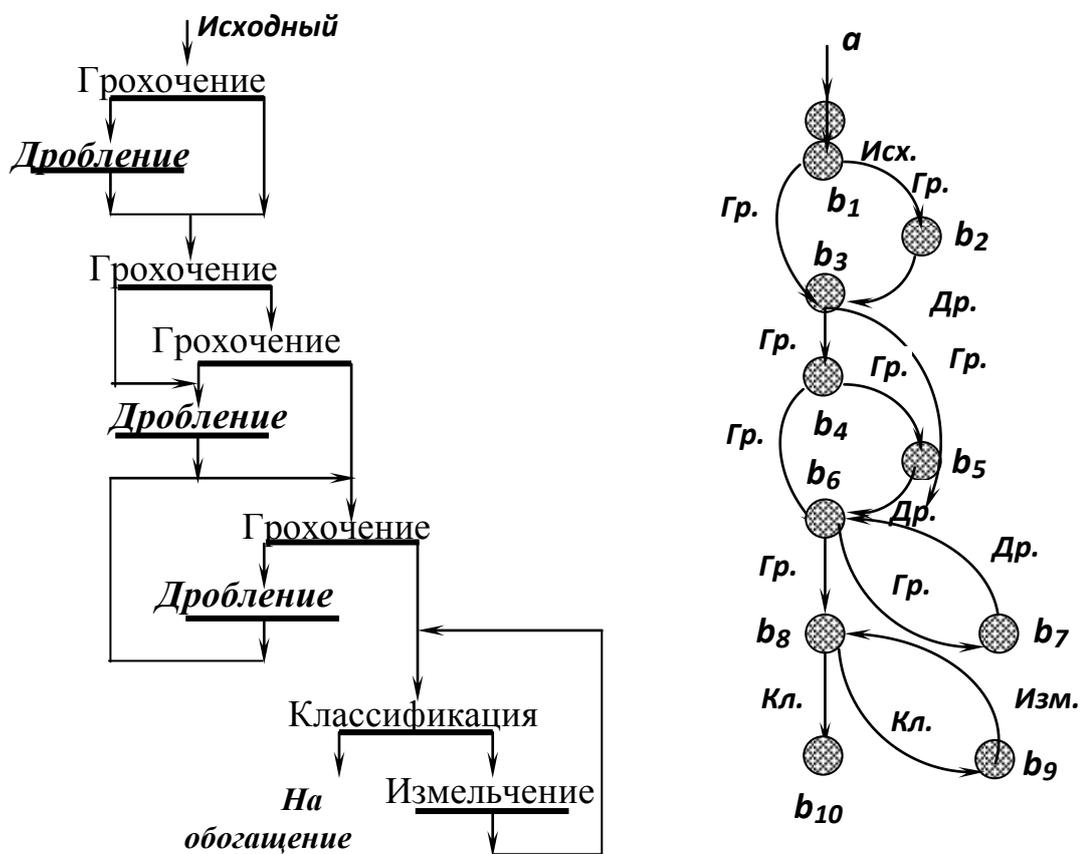


Рис. 8.1 – Схема технологического процесса и граф.  
 $b_i$  – состояние материала; Гр. – грохочение; Др. – дробление;  
 Кл. – классификация; Изм. – измельчение.

В процессах дробления и измельчения, когда весь материал переходит в один продукт иного состояния, граф имеет одно ребро; при классификации и разделении по физическим свойствам процесс характеризуется многорёберным (по числу полученных продуктов) графом. Вершины и ребра могут быть окрашены разными цветами в соответствии с принятыми обозначениями: такой хроматический граф содержит подграфы разного цвета.

Теория графов для исследования технологических процессов позволяет более глубоко оценить структуру процесса. При сравнении двух или нескольких технологических схем, предназначенных для переработки одного и того же материала с получением тех же конечных продуктов, сопоставление графов позволяет выбрать наиболее короткий и, следовательно, более экономичный процесс с меньшим числом операций. На графе чётко выделяются циклы операций над отдельными промпродуктами. Наличие таких циклов указывает на существование продуктов, циркулирующих или накапливающихся в процессе, и для которых необходимо найти точку вывода.

Операции над графами не ограничиваются анализом технологических схем, а позволяют при использовании статистических данных выделить значимые факторы, влияющие на процесс, определить минимальный набор критериев оптимизации и другую информацию.

### ***Контрольные вопросы***

1. Укажите основные причины неопределённости и непредсказуемости поведения процессов обогащения.
2. Для чего используются методы математической статистики при исследовании технологических процессов?
3. Укажите различия между активным и пассивным экспериментами.
4. В каких ситуациях неизбежен пассивный эксперимент?
5. Опишите суть теории графов.

*Литература к теме:* [3, 5, 9, 11, 13].

## Математическое моделирование технологических процессов

### Вопросы, выносимые на лекцию:

*Понятие математической модели. Аналитические и эмпирические методы подходов к получению моделей. «Чёрный ящик». Теоретическое исследование физической системы. Статические и динамические математические модели. Закономерности разделения минералов в наиболее распространённых процессах. Общие сведения о сепарационных характеристиках технологических процессов обогащения. Исследования технологических схем обогащения минерального сырья.*

### 9.1 Понятие математической модели

Значение моделей при исследовании мира определил Дж. Форрестер: «Каждый индивидуум в своей личной и общественной жизни использует модели для принятия решений. Мысленный образ мира, окружающего нас, есть модель. Человек не несёт в себе полные образы семьи, бизнеса, правительства, страны. Он только отбирает концепции и взаимосвязи, которые использует, чтобы представить себе реальную систему. Мысленный образ - это модель. Все наши решения и действия определяются моделями. Вопросы заключается не в том, чтобы использовать или игнорировать модели, а состоит только в выборе между альтернативными моделями».

Естественно, одно из самых широких определений модели - мысленный образ. Специалисту требуется определение более конкретное. Поэтому при исследованиях под моделью понимают формализованный мысленный образ. Если эта формализация доведена до математических соотношений, то имеют дело с математической моделью. Она находит определённые свойства реального процесса формализованные на том или ином языке, например, в виде дифференциальных или регрессионных уравнений. Однако, большинство физических процессов настолько сложны, что при современном состоянии науки очень редко удаётся создать их универсальные модели, действующие в любое время и на всех участках исследуемого процесса.

Поэтому, существует ряд подходов к получению моделей, приемлемых для работы. Главные из них - аналитические и эмпирические (экспериментальные). Аналитические методы основаны на использовании концепций и закономерностей, которые проверены веками, но справедливы, как правило, при многих ограничениях. Для физических процессов, особенно многофакторных, носящие вероятностный характер, определяются

комбинированные или аналитико-экспериментальные модели. К этим процессам относятся все методы обогащения.

Итак, процессы обогащения достаточно сложны, зависят от многих факторов и их взаимодействия. Для исследования такой сложной системы необходимо принять некоторые упрощения, то есть при анализе технологического процесса рассмотреть не все разнообразные факторы, влияющие на него, а только наиболее существенные.

Самой простой моделью любой системы является так называемый «чёрный ящик». Внутренняя структура этой модели может быть совсем недоступна для наблюдения, но в пределах поставленной задачи модель ведёт себя так же, как и реальная система. Оптимальный план исследования «чёрного ящика» предполагает не только достижение максимального значения искомого параметра наиболее быстрым способом, но и получение математической модели процесса. Во многих случаях модель позволяет также с помощью физических аналогий и математического анализа лучше понять внутреннее строение «чёрного ящика». Иногда «чёрный ящик» является вообще единственно возможным инструментом исследования, так как только в редких случаях удаётся «заглянуть» внутрь системы без нарушения естественного состояния и хода процесса.

Если объект хорошо изучен, то на основе известных физических или химических законов составляются уравнения, которые и являются математической моделью этого объекта. Для объектов типа «чёрный ящик» используются входные и выходные данные, полученные при экспериментальных методах. Получение математической модели иллюстрируется рис. 9.1.

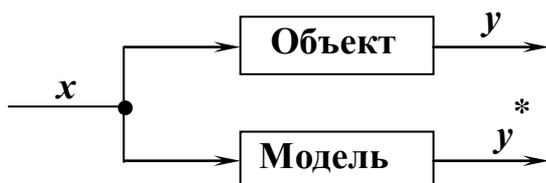


Рис. 9.1 – Схема получения модели объекта.

Входную  $x$  и выходную  $y$  переменные объекта замеряют и по результатам измерений находят связь между ними. Задача моделирования состоит в том, чтобы величина  $y^*$ , полученная с помощью математической модели, была близка к значению  $y$  на выходе объекта.

Под *математической моделью* процесса понимают совокупность соотношений, адекватных процессу, достаточных для решения поставленной задачи. Использование математической модели даёт возможность:

- выбрать оптимальный технологический режим процесса;
- сократить план исследовательских работ при разработке технологии производства;

- создать оптимальную схему автоматизации процесса (или предприятия в целом).

В большинстве случаев построение математической модели производственного процесса занимает значительное место в общем комплексе работ по автоматизации управления. Работы по автоматизации производственных процессов связаны с решением ряда взаимосвязанных проблем, к которым относятся: методы построения математических моделей производственных процессов; разработка алгоритмов управления; методы получения, передачи и переработки информации; разработка критериев оптимизации; разработка структурных схем управления и т.д. Статистические методы получения математических моделей делают возможным описание процессов по результатам наблюдений в условиях нормальной работы.

## **9.2 Математическое моделирование технологических процессов**

В промышленной практике универсальным и общим является стремление к максимально возможному приближению к поставленной цели наиболее быстрым способом и с наименьшими затратами.

Практика показывает, что большие затруднения вызывает даже однозначная формулировка цели в количественном выражении, так называемая целевая функция или критерий эффективности. При этом часто приходится одновременно решать противоречивые задачи, например, повышение извлечения полезного компонента при одновременном снижении себестоимости переработки полезных ископаемых. Задача заключается в том, чтобы найти экстремальное значение целевой функции, аргументами которой являются - производительность, качество полезного ископаемого, расход материалов и реагентов и т.д. Также необходимо считаться с тем, что действия управления могут изменяться только в определённых пределах. Кроме того, на систему могут быть наложены дополнительные ограничения: на значения параметров процесса, сложность алгоритма управления, на объем использованной информации и др.

Оптимальное управление процессом может рассматриваться как принятие определённых решений, соответствующих изменениям ситуации. Принятие решения связано с выбором из множества всевозможных допустимых обстоятельств некоторого одного определённого решения. Чем больше вариантов, тем больше информации необходимо для их разграничения и тем более громоздким будет описание всей задачи.

В процессе принятия решения оперируют функцией, аргументами которой являются допустимые варианты решения, а значениями - числа, описывающие меру достижения поставленной цели. Задача принятия решения тем самым сводится к нахождению максимального (или минимального) значения целевой функции, а также значений аргументов, при которых этот максимум достигается. Для отыскания оптимального

решения в подобной ситуации одним из наиболее эффективных методов является *математическое моделирование*. Правильно построенная модель может предоставить исследователю новую информацию о моделируемом процессе. При этом, в случае сложных технологических систем, которые часто встречаются в практике работы обогатительных фабрик, такая информация может быть получена только таким способом.

Теоретическое исследование физической системы начинается с изучения общих законов, которые отражают опыт, накопленный для других аналогичных систем. Используются уравнения кинетики химических реакций, энергетического и материального баланса, которые вытекают из общих законов сохранения массы и энергии, и особенно закон больших чисел или больших масс.

Многие технологические процессы трудно удовлетворительно описать теоретическими моделями, основанными на принципах физических явлений массопереноса или балансовых уравнений из-за сложности протекания этих процессов и ещё недостаточно чёткого их понимания. В этом случае для практических целей можно применить эмпирический способ построения моделей. Они состояются на основе методологической концепции «чёрного ящика» и выходят из возможности описание механизма протекания процессов на основе входных и выходных переменных параметров без проникновения в сущность изучаемого процесса.

Математические модели бывают статические « $y = f(x)$ » и кинетические или динамические « $y = f(x, t)$ », которые прямо или косвенно учитывают время исследуемого процесса. Полученная любым способом модель чаще всего справедлива только в определённом диапазоне изменений фактора  $x$ , которой нужно указывать рядом с погрешностью при записи модели.

Рассмотрим закономерности разделения минералов в наиболее распространённых процессах.

#### ***Фракционный состав минерального сырья.***

Минеральное сырьё и продукты обогащения отличаются тем, что любое физическое свойство  $\xi$  смеси частиц непрерывно изменяется в середине определённого диапазона  $[\xi_{\min}; \xi_{\max}]$  из-за содержания в ней сгустков с переменными свойствами (символом  $\xi$  обозначена любая физическое свойство). Дискретное изменение является частным случаем, например, для смеси, состоящей из чистых минералов.

Узкая или конечная фракция  $[\xi_i; \xi_i + \Delta\xi_i]$  - это частицы из какого-либо диапазона  $[\xi_{\min}; \xi_{\max}]$ . Её представляют только те частицы смеси, для которых физическое свойство находится между границами фракции  $\xi_i \prec \xi \prec \xi_i + \Delta\xi_i$  или  $\xi_i \prec \xi \prec \xi_{i+1}$ . Размер (ширина) фракции есть  $\Delta\xi_i = \xi_{i+1} - \xi_i$ .

В частных случаях гравитационного, магнитного, флотационного, электрического, радиометрического обогащения получают такие фракции: плотности  $[\delta_i; \delta_{i+1}]$  магнитной восприимчивости  $[\chi_i; \chi_{i+1}]$  флотируемости  $[k_i; k_{i+1}]$ , удельной электропроводности  $[\sigma_i; \sigma_{i+1}]$ , удельного заряда  $[q_i; q_{i+1}]$ , светимости  $[\varphi_i; \varphi_{i+1}]$ .

Бесконечно узкую или элементарную фракцию получают, если размер конечной фракции стремится к нулю  $\Delta\xi_i = d\xi \rightarrow 0$ .

Диапазон  $[\xi_{\min}; \xi_{\max}]$  может быть разделён на конечные фракции с различным шагом  $\Delta\xi_i$ , равномерным или неравномерным.

Массовая доля (выход)  $i$ -й фракции  $[\xi_i; \xi_{i+1}]$  является отношением массы  $G_i$  её частиц к массе  $\sum G_i$  частиц всех фракций. Долю  $i$ -й фракции обозначим:

$$\bar{\gamma}_i = \gamma(\xi_i)\Delta\xi_i = G_i / \sum_{i=1}^n G_i. \quad (9.1)$$

Очевидно, что условием нормирования будет:

$$\sum_{i=1}^n \bar{\gamma}_i = \sum_{i=1}^n \gamma(\xi_i)\Delta\xi_i = 1. \quad (9.2)$$

Выражение  $\gamma(\xi_i)\Delta\xi_i$  в формуле (9.1) разделяет выход  $\bar{\gamma}_i$  на два сомножителя, из которых один является размером фракции  $\Delta\xi_i$ , а второй  $\gamma(\xi_i)$  - дифференциальной функцией распределения  $\gamma(\xi)$  частиц смеси с физическим свойством  $\xi$ . Дифференциальная функция распределения  $\gamma(\xi)$  - это такая функция, для которой произведение  $\gamma_{\text{эл}} = \gamma(\xi)d\xi$  равно массовой доле элементарной фракции  $[\xi; \xi + d\xi]$  в смеси. Дифференциальную функцию распределения  $\gamma(\xi)$  можно определить как отношение доли  $\gamma_{\text{эл}}$  элементарной функции  $[\xi; \xi + d\xi]$  к её размеру  $d\xi$ . Размерность для  $\gamma(\xi)$  является всегда обратной размерности соответствующего физического свойства  $\xi$ :  $[\gamma(\xi)] = 1/[\xi]$ , например,  $[\bar{\gamma}(\delta)] = \text{м}^3/\text{т}$  при  $[\delta] = \text{т}/\text{м}^3$ . Кроме того, дифференциальную функцию распределения  $\gamma(\xi)$  можно характеризовать как плотность распределения твёрдого по элементарным фракциям.

Функция  $\gamma(\xi)$  учитывает физические свойства  $\xi$  частиц. Её вводом заканчивается первая часть количественной характеристики фракционного состава минеральных материалов.

Вторая часть должна учитывать содержание  $\beta$  ценных компонентов (или вредных примесей) в частицах. Для этого нужно знать среднее содержание  $\bar{\beta}_i$  компонента в каждой  $i$ -й фракции  $[\xi_i; \xi_{i+1}]$ , то есть знать набор цифр  $\bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \dots, \bar{\beta}_n$ . При уменьшении размера фракций  $\Delta\xi \rightarrow 0$  (и

соответствующем увеличении их числа  $n \rightarrow \infty$ ) в диапазоне  $[\xi_{\min}; \xi_{\max}]$  этот набор цифр заменяет непрерывную функцию  $\beta(\xi)$ .

Полученная зависимость  $\beta(\xi)$  содержания компонента от физического свойства частиц является второй после  $\gamma(\xi)$  и последней характеристикой фракционного состава сырья.

*Типичный метод экспериментального определения выходов фракций  $\bar{\gamma}_i = \gamma(\xi_i)\Delta\xi_i$  и содержаний  $\bar{\beta}_i$  в них ценных компонентов, а также функций  $\gamma(\xi)$  и  $\beta(\xi)$  сводится к следующему.* Пробу материала взвешивают для получения  $\sum G_i$ , после чего её разделяют на  $n = 4 \div 10$  фракций с размерами  $\Delta\xi_1, \dots, \Delta\xi_n$ , перекрывающих диапазон  $[\xi_{\min}; \xi_{\max}]$ . Для разделения на фракции в зависимости от исследуемого физического свойства используют соответствующие методы и аппаратуру. При разделении по крупности ( $\xi = d$ ) применяют ситовый или седиментационный анализы; по плотности ( $\xi = \rho$ ) - денсиметрический анализ; по магнитной восприимчивости ( $\xi = \chi$ ) - магнитный анализ и т.д. После разделения каждую  $i$ -ую фракцию взвешивают для нахождения  $G_i$  и  $\bar{\gamma}_i = G_i / (\sum G_i)$ ; параллельно в каждой фракции определяют содержание расчётного компонента. По этим данным ( $\bar{\gamma}_i$  и  $\bar{\beta}_i$ ) находят функции  $\gamma(\xi)$  и  $\beta(\xi)$ .

В общем случае сложного сырья, если частицы его различаются несколькими ( $n$ ) физическими свойствами ( $\xi_1, \dots, \xi_n$ ) и содержат несколько ( $m$ ) ценных компонентов, фракционный состав характеризуется набором  $n$ -мерных функций:  $\gamma_j(\xi_1, \dots, \xi_n)$ ,  $\beta_j(\xi_1, \dots, \xi_n)$   $j = 1, 2, \dots, m$ , (где  $j$  - название или номер ценного компонента).

*Общие сведения о сепарационных характеристиках технологических процессов обогащения.* Извлечение конечной фракции  $[\xi_i; \xi_{i+1}]$  или  $[\xi_i; \xi_i + \Delta\xi_i]$  в концентрат отдельной операции или схемы обогащения равно отношению масс твёрдого этой фракции в концентрате  $G_{ik}$  и в питании  $G_{in}$ :

$$\bar{\varepsilon}_{ik} = \frac{G_{ik}}{G_{in}} = \frac{Q_k \bar{\gamma}_{ik}}{Q_n \gamma_{in}} = \frac{Q_k \gamma_k(\xi_i) \Delta\xi_i}{Q_n \gamma_n(\xi_i) \Delta\xi_i}, \quad (9.3)$$

где  $Q_k$  и  $Q_n$  - производительность по твёрдому, соответственно для концентрата и питания, т/ч.

В числителе формулы (9.3) произведение  $Q_k$  и выхода фракции даёт производительность этой фракции  $\bar{\gamma}_{ik} = \gamma_k(\xi) \Delta\xi$  для концентрата, а в знаменателе для питания. Здесь  $\gamma_k(\xi)$  характеризует распределение твёрдого по фракциям в концентрате, а  $\gamma_n(\xi)$  - в питании.

При  $\Delta\xi_i \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$  получают непрерывную функцию - сепарационную характеристику:

$$\varepsilon_{\kappa}(\xi) = \frac{Q_{\kappa} \gamma_{\kappa}(\xi_i) \Delta \xi_i}{Q_n \gamma_n(\xi_i) \Delta \xi_i} = \bar{\gamma}_{\kappa} \frac{\gamma_{\kappa}(\xi)}{\gamma_n(\xi)}, \quad (9.4)$$

где  $\bar{\gamma}_{\kappa} = Q_{\kappa} / Q_n$  - выход концентрата, доли ед.

Сепарационная характеристика операции или схемы является непрерывная функция  $\varepsilon_{\kappa}(\xi)$ , показывающая извлечение элементарных фракций  $[\xi; \xi + d\xi]$  в концентрат в зависимости от их физического свойства  $\xi$ . Сепарационную характеристику  $\varepsilon_{\kappa}(\xi)$  также называют разделительной функцией, главной технологической характеристикой сепаратора (или схемы), кривой извлечения фракций в концентрат и др.

Сепарационную характеристику для отходов  $\varepsilon_o(\xi)$  получают с использованием  $\varepsilon_{\kappa}(\xi)$  по формуле:

$$\varepsilon_{\kappa}(\xi) + \varepsilon_o(\xi) = 1. \quad (9.5)$$

Таким образом, для двухпродуктовых схем и сепараторов достаточно знать только одну из характеристик  $\varepsilon_{\kappa}(\xi)$  или  $\varepsilon_o(\xi)$ .

Баланс по любой элементарной фракции для двухпродуктовой операции (или схемы в целом):

$$q_{\kappa}(\xi) + q_o(\xi) = q_n(\xi); \quad (9.6)$$

$$q_{\kappa}(\xi) = \varepsilon_{\kappa}(\xi) q_n(\xi), \quad (9.7)$$

где  $q_{\kappa}(\xi) = Q_{\kappa} \gamma_{\kappa}(\xi) d\xi$ ;  $q_o(\xi) = Q_o \gamma_o(\xi) d\xi$ ;  $q_n(\xi) = Q_n \gamma_n(\xi) d\xi$  - производительность по узкой фракции  $[\xi; \xi + d\xi]$ , соответственно, для концентрата, отходов и питания.

Идеальная сепарационная характеристика имеет ступенчатый вид (рис. 9.2):

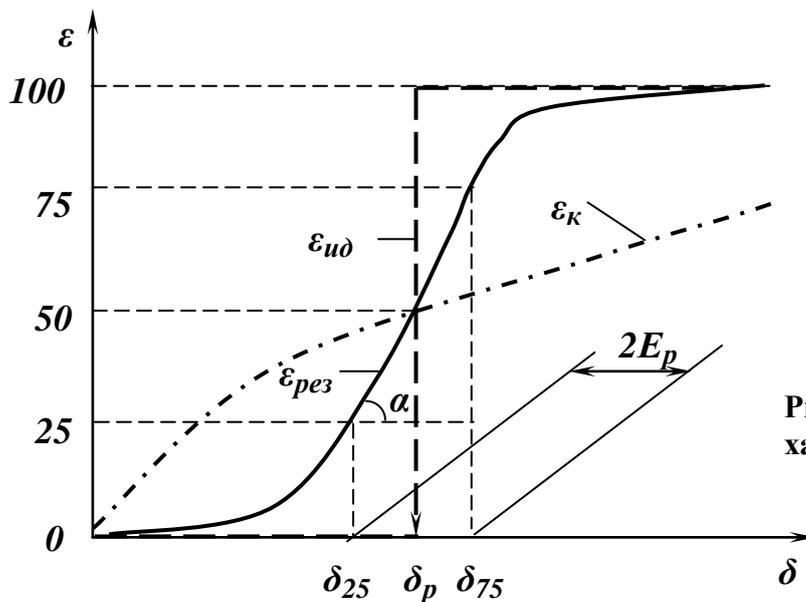


Рис. 9.2 – Сепарационные характеристики.

$$\varepsilon_{уд}(\xi) = \bar{1}(\xi - \xi_p) = \begin{cases} 1 & \text{для } \xi \succ \xi_p; \\ 0,5 & \text{для } \xi = \xi_p; \\ 0 & \text{для } \xi \prec \xi_p. \end{cases} \quad (9.8)$$

Здесь для краткости применён символ единичной ступенчатой функции  $\bar{1}(\xi - \xi_p)$ , где константа  $\xi_p$  указывает точку, в которой происходит скачок на единицу.

*Неидеальные сепарационные характеристики.* Здесь возможны различные кривые в зависимости от типа сепаратора или схемы. Реальные сепараторы, как правило, имеют неидеальные сепарационные характеристики.

Граница разделения  $\xi_p = const$  соответствует элементарной фракции, которая наполовину извлекается в концентрат, наполовину в отходы. Координата границы  $\xi_p$  при известном  $\varepsilon_k(\xi)$  может быть рассчитана по формуле:

$$\varepsilon_k(\xi) = 0,5. \quad (9.9)$$

Во всех сепараторах и схемах обогащения предусмотрена возможность изменения положения границы разделения в желаемом направлении.

Крутизна сепарационной характеристики  $tg \alpha = d\varepsilon_k(\xi) / d\xi \Big|_{\xi=\xi_p}$  в рабочей точке, соответствующей границы раздела  $\xi = \xi_p$ , является одной из оценок степени несовершенства сепарации для операции или схемы: чем больше крутизна, тем ближе сепарационная характеристика к идеальной. Совершенствование сепаратора или схемы - это, в первую очередь, повышение крутизны в рабочей точке.

Два параметра: граница разделения  $\xi_p$  и крутизна в рабочей зоне  $tg \alpha = \varepsilon'_k(\xi_p)$  являются главными параметрами сепарационной характеристики  $\varepsilon_k(\xi)$ . По этим параметрам можно приблизительно оценить функцию и нарисовать её график. Типичный метод экспериментального определения сепарационной характеристики основан на использовании формулы (9.4):

- для работающего сепаратора или схемы измеряют производительности  $Q_n$  и  $Q_k$  для расчёта  $\bar{\gamma}_k = Q_k / Q_n$ ;
- отбирают пробы питания и концентрата и выполняют их фракционный анализ для определения функций распределения  $\gamma_n(\xi)$  и  $\gamma_k(\xi)$ ;
- производят расчёт сепарационной характеристики по формуле (9.4).

Для случая идеального обогащения (сепарационная характеристика имеет вид ступенчатого импульса) технологические показатели можно рассчитать, если фракционный состав сырья известен:

$$\bar{\gamma}_\kappa = \int_{\xi_{\min}}^{\xi_p} \gamma_{ucx}(\xi) d\xi ; \quad (9.10)$$

$$\bar{\beta}_\kappa = \frac{1}{\gamma_\kappa} \int_{\xi_{\min}}^{\xi_p} \beta(\xi) \gamma_{ucx}(\xi) d\xi. \quad (9.11)$$

При неидеальной сепарации в отдельном аппарате или по схеме обогащения в формулы прогноза технологических показателей вводят дополнительную сепарационную характеристику:

$$\bar{\gamma}_\kappa = \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \varepsilon_\kappa(\xi) \gamma_{ucx}(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^n \varepsilon_\kappa(\xi_i) \gamma_{ucx}(\xi_i) \Delta \xi_i ; \quad (9.12)$$

$$\bar{\beta}_\kappa = \frac{1}{\gamma_\kappa} \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \varepsilon_\kappa(\xi) \beta(\xi) \gamma_{ucx}(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^n \varepsilon_\kappa(\xi_i) \beta(\xi_i) \gamma_{ucx}(\xi_i) \Delta \xi_i / \gamma_\kappa. \quad (9.13)$$

Сепарационные характеристики основных обогатительных аппаратов приведены в табл. 9.1.

Рассмотрим подробнее гравитационное обогащение.

Для одномерной модели отсадочной машины с естественной постелью совокупные уравнения имеют вид:

$$g\delta - g\bar{\delta}(x,t) - aV_x - \frac{k}{\gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0 ; \quad (9.14)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial (\gamma V_x)}{\partial x}, \quad (9.15)$$

где  $\alpha$  и  $k$  - коэффициенты.

Исключением скорости  $V_x(\delta, x, t)$  получено уравнение сепарации с одной неизвестной функцией  $\gamma(\delta, x, t)$  (рис. 6.4):

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2} - \frac{g}{\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial x} [\gamma(\delta - \bar{\delta})], \quad (9.16)$$

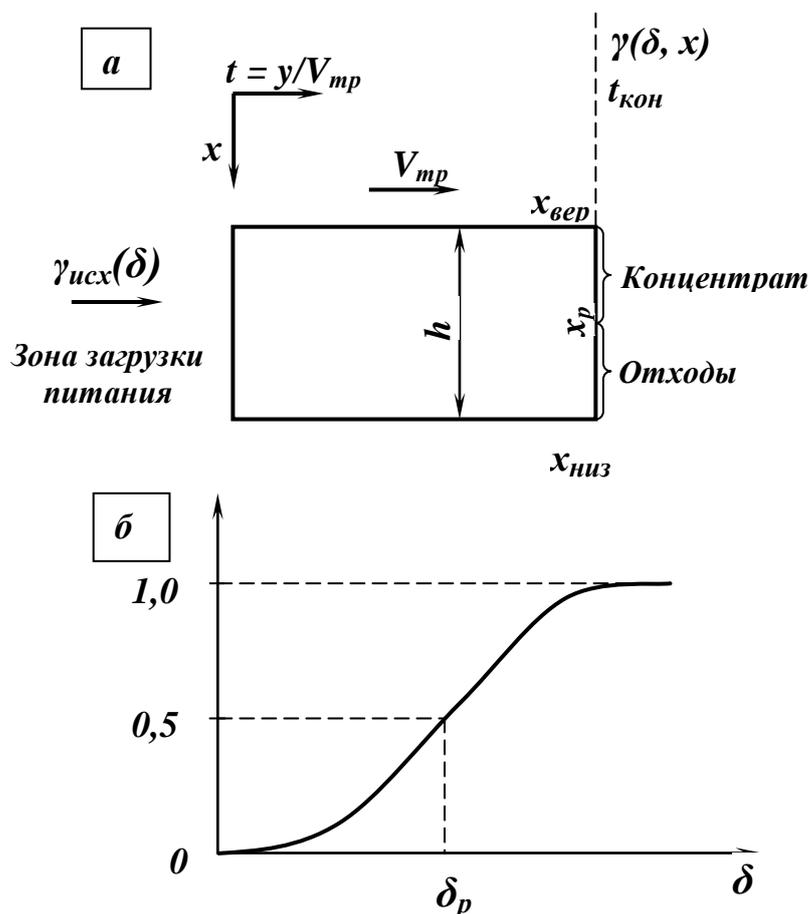
где

$$\bar{\delta} = \bar{\delta}(x,t) = \int_{\delta_{\min}}^{\delta_{\max}} \delta \gamma(\delta, x, t) d\delta ; \quad (9.17)$$

$D$  - коэффициент микродиффузии, м<sup>2</sup>/с;  $t = y / V_{\text{тр}}$  - время сепарации, соответствует продвижению материала от загрузки до разгрузки, с.

Средняя плотность  $\bar{\delta}(x,t)$  среды (постели) изменяется по пространству  $x$  и для нестационарных режимов со временем  $t$ .

Для нахождения сепарационной характеристики  $\varepsilon_k(\delta)$  предварительно по уравнению (9.18) определяют фракционный состав материала  $\gamma_{np}(\delta, x) = \gamma(\delta, x, t_{кон})$  в зоне разгрузки концентрата и отходов при  $t = t_{кон} = y_{разгр} / V_{mp}$ .



**Рис. 9.3 - Рабочая зона (а) и сепарационная характеристика (б) отсадочной машины.**

Для стационарного режима в зоне разгрузки  $\partial\gamma / \partial t = 0$ , уравнение (9.17) упрощается и его решение имеет вид:

$$\gamma_{np}(\delta, x) = \frac{\gamma_{np}(\delta, x_0) \exp\left[\frac{g}{\alpha D} - \delta(x - x_0)\right]}{\int_{\delta_{\min}}^{\delta_{\max}} \gamma_{np}(\delta, x_0) \exp\left[\frac{g\delta}{\alpha D}(x - x_0)\right] d\delta}. \quad (9.18)$$

Таким образом, материал, который предельно расслоился, в конце зоны имеет фракционный состав  $\gamma_{np}(\delta, x)$ , который меняется с глубиной постели согласно статического распределения Гиббса.

Таблица 9.1 - Сепарационные характеристики обогатительных аппаратов

Аппарат и его режим	Сепарационная характеристика $\varepsilon_{\kappa}(\xi)$	Граница разделения $\varepsilon_{\kappa}(\xi_p) = 0,5$	Крутизна характеристики в точке разделения $\varepsilon'(\xi_p)$
Отсадочная машина с природной постелью, суспензионный сепаратор с большим стеснением	$\varepsilon_{\kappa}(\delta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\frac{gh\gamma_{\text{уцх}}(\delta)}{\alpha D}} (\delta - \bar{\delta}) \right]$	$\delta_p = \bar{\delta}$	$\sqrt{\frac{gh}{2\pi\alpha D(\delta_{\text{max}} - \delta_{\text{min}})}}$
Отсадочная машина с искусственной постелью, суспензионный сепаратор с умеренным стеснением	$\varepsilon_{\kappa}(\delta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} th \left[ \frac{gh}{4\alpha D} (\delta - \delta_p) \right]$	$\delta_p = \bar{\delta}$	$\frac{gh}{8\alpha D}$
Грохот	$\varepsilon_{\text{верх}}(d) = 1 - \exp \left[ -\frac{V_c(d)M}{hQ_{\text{уцх}}} \right]$	$d_p \approx d_0$	$\frac{MV_c(d_0)}{2hQ_{\text{уцх}}}$
Гидроклассификатор с восходящим потоком при стеснённых условиях	$\varepsilon_{\text{сл}}(\delta, d) = \begin{cases} 1 & \text{для слива} \\ 0 & \text{для песков} \end{cases}$	$\delta_p = \delta_{\text{cp}} + \frac{V_{\text{cp}}\alpha}{gd_p^2}$	$\infty$
Гидроклассификатор при стеснённых условиях	$\varepsilon_{\text{сл}}(\delta, d) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} th \left[ \frac{ah}{4D} (d^2 - d_p^2) \right],$ где $a = g(\delta - \delta_{\text{cp}})/\alpha$	$d_p = \sqrt{\frac{\alpha V_{\text{cp}}}{g(\delta - \delta_p)}}$	$\frac{g(\delta_0 - \delta_{\text{cp}})h}{4\alpha D}$

Окончание табл. 9.1

1	2	3	4
Гидроциклон	$\varepsilon_{cl}(\delta, d) = 0,5 - 0,5th[Ah/(4D)],$ где $A = \frac{V_o^2 d^2}{R} \cdot \frac{\delta - \bar{\delta}}{\alpha} - V_{cp}$	$d_p = \sqrt{\frac{Q_{ucx} \alpha R}{SV_o^2(\delta - \bar{\delta})}}$	$\frac{hV_o^2(\delta - \bar{\delta})}{4\alpha RD}$
Роликовый (барабанный) магнитный сепаратор для стеснённых условиях	$\varepsilon_k(\delta, \chi) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{ для зоны } \begin{matrix} \text{концентрат} \\ \text{отходы} \end{matrix}$	$\delta_p = \frac{RHgradH}{V_o^2} \chi_p$	$\infty$
Ленточный магнитный сепаратор	$\varepsilon_k(\delta, \chi) = 0,5 + 0,5th[Ah/(4D)],$ где $A = \frac{1}{\alpha} [g(\delta - \bar{\delta}) - HgradH(\chi - \bar{\chi})]$	$g(\delta_p - \bar{\delta}) - HgradH \times (\chi_p - \bar{\chi}) = 0$	$\frac{hHgradH}{8\alpha D}$ при $\delta = \delta_0 = const$
Флотационная машина	$\varepsilon_k(k) = 1 - \exp(-St_{\phi l} k)$ $(S = 500 - 1200 \text{ м}^2/\text{м}^3)$	$k_p = \ln 2 / (St_{\phi l})$	$0,5St_{\phi l}$
Электрический сепаратор в стеснённых условиях	$\varepsilon_k(\delta, q) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} th \left[ \frac{Eh(q - q_p)}{4\alpha D} \right]$	$q_p = \frac{V_o^2 \delta}{RE}$	$\frac{Eh}{8\alpha D}$
<p><i>Примечание.</i> <math>Q_{ucx}</math>, <math>M</math> - производительность и масса материала на грохоте; <math>V_c(d)</math> - зависимость скорости просеивания на сетке грохота от размера частиц; <math>h</math> - глубина зоны сепарации; <math>V_{cp}</math> - скорость восходящего потока в гидрокласификаторе; <math>V_o</math>, <math>R</math> - окружная скорость и радиус кривизны для гидроциклона; <math>H</math>, <math>E</math> - напряжённость магнитного и электрического полей.</p>			

Общее решение уравнения (9.18) превращается в конкретное частное с учётом начальных условий, которые зависят от фракционного состава исходного питания  $\gamma(\delta, \tilde{\delta}, t_0) = \gamma_{\text{нн0}}(\delta)$ :

Для нахождения произвольной  $\gamma_{np}(\delta, x_0)$  через заданную функцию  $\gamma_{ucx}(\delta)$  нужно воспользоваться интегральным законом сохранения и по известным  $\gamma_{ucx}(\delta)$  и  $\gamma_{np}(\delta, x)$  рассчитать сепарационную характеристику по формуле:

$$\varepsilon_{\kappa}(\delta) = \frac{Q_{\kappa}\gamma_{\kappa}(\delta)}{Q_{ucx}\gamma_{ucx}(\delta)} = \int_{x_{\text{верх}}}^{x_p} \gamma_{np} dx / \int_{x_{\text{низ}}}^{x_{\text{верх}}} \gamma_{np} dx, \quad (9.19)$$

где  $Q_{\kappa}/Q_{ucx} = (x_p - x_{\text{верх}})/(x_{\text{верх}} - x_{\text{низ}})$ ;  $x_p$  - координата положения отсекавателя концентрата и отходов.

Средний фракционный состав концентрата получают усреднением:

$$\gamma_{\kappa}(\delta) = \frac{1}{x_p - x_{\text{верх}}} \int_{x_{\text{верх}}}^{x_p} \gamma_{np}(\delta, x) dx. \quad (9.20)$$

С использованием формул (6.19) - (6.20) для  $\gamma_{np}$  получают приближённую формулу сепарационной характеристики (концентрат - лёгкий продукт):

$$\varepsilon_{\kappa}(\delta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi \left[ \sqrt{\frac{gh\gamma_{ucx}(\delta)}{\alpha D}} (\delta_p - \delta) \right], \quad (9.21)$$

где  $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \exp(-t^2/2) dt$  - интеграл вероятности;  $h = x_{\text{верх}} - x_{\text{низ}}$

- толщина постели.

Полученное выражение для  $\varepsilon_{\kappa}(\delta)$  не является в точности законом вероятности, потому что под знаком  $\Phi$  стоит функция  $\gamma_{ucx}(\delta)$  при равномерном распределении по фракциям в питании. То есть, при  $\gamma_{ucx}(\delta) = 1/(\delta_{\text{max}} - \delta_{\text{min}}) = \text{const}$  для  $\varepsilon_{\kappa}(\delta)$  получают нормальный закон (при условии, что  $x_p$  находится в середине постели).

*Обобщающая компактная теория* всех разнообразных процессов обогащения полезных ископаемых основана на понятиях о фракционном составе минерального сырья и сепарационных характеристиках обогатительных аппаратов и технологических схем. Фракционный состав позволяет оценивать распределения твёрдой фазы и ценных компонентов по фракциям, различающихся физическими свойствами частиц. Сепарационная характеристика даёт оценку степени извлечения каждой из фракций в концентрат по отношению к сырью.

Фракционный состав минерального сырья и сепарационные характеристики позволяют прогнозировать технологические результаты

обогащения (выход, содержание, извлечение) любой сырья с помощью исследуемой технологической схемы; оценивать эффективность работы и сравнивать обогатительные аппараты различных конструкций; решать задачи экономически оптимальной стратегии обогащения сложного сырья.

### **9.3 Исследование технологических схем**

Исследования технологических схем обогащения минерального сырья, выполненные в лабораторных условиях, проверяют с целью подтверждения воспроизводимости полученных показателей обогащения в условиях непрерывного и замкнутого процесса, моделирующего промышленное предприятие.

К *стадии лабораторных* относятся исследования, проводимые на отдельных аппаратах с навесками массой не более 10 кг. По результатам лабораторных исследований составляют технологическую схему для дальнейших исследований.

В зависимости от поставленных задач дальнейшие исследования выполняют в укрупнённом, полупромышленном или опытно-промышленном масштабе.

*Укрупнённые лабораторные исследования* проводят в непрерывном режиме по полной схеме обогащения, составленной из лабораторного оборудования (производительность такой схемы обычно не превышает 100 кг/ч). В результате укрупнённых исследований составляют товарный баланс продуктов обогащения и нарабатывают необходимую массу концентрата для дальнейших исследований, кроме того отбирают пробу отходов с целью определения возможности их дальнейшего использования. На основе результатов укрупнённых лабораторных исследований составляют технологический регламент.

Укрупнённые исследования проводят на стадии предварительной разведки месторождений. Их результаты используются для обоснования целесообразности проведения детальной разведки месторождений, а также для подготовки к следующим полупромышленным исследованиям.

*Полупромышленные исследования* являются контрольными, поскольку с их помощью проверяется технология переработки минерального сырья, разработанная в результате укрупнённых лабораторных исследований. Исследование проводят, как правило, в непрерывном режиме с полным воспроизведением рекомендаций технологической схемы с учётом оборота воды и очистки сточных вод. Полупромышленные исследования заканчивают определением не менее, чем суточного баланса продуктов и наработкой концентратов в количествах, необходимых для дальнейших работ, предусмотренных схемой (например, окомкование, гидро- или пирометаллургические процессы), а также отходов в количествах, достаточных для производства опытных партий строительной или иной продукции.

Результаты полупромышленных исследований - технологический регламент, который используется для составления ТЭО проекта кондиций разведываемого месторождения; подсчёт и утверждение запасов месторождения. Данные полупромышленных исследований также необходимы при разработке проектов промышленных горно-обогатительных предприятий.

*Промышленные исследования* применяют для отработки и проверки технологии нетрадиционных видов минерального сырья, а также с целью отработки нового технологического оборудования и уточнения исходных данных для проектирования промышленных предприятий по переработке минерального сырья. Производительность установок составляет обычно 50-150 т/ч. Часто для промышленных исследований используют секции действующих обогатительных фабрик. При промышленных исследованиях нарабатывают крупные партии концентрата (до 100 тыс. т) для последующего окомкования и металлургического передела.

Программа промышленных исследований включает такие разделы: цель, задачи и сроки проведения исследовательских работ; этапы работ (наладка и регулирование оборудования, отработка узлов и вариантов схем, наладка рекомендованных схем); контрольные исследования (балансовые и товарные опробования, активирование показателей переработки сырья); обобщение полученных результатов и составление отчёта. На основе программы исследований составляют смету расходов, необходимых для выполнения всего объёма исследовательских работ.

Продолжительность исследований определяется для каждой пробы программой исследований в зависимости от типа минерального сырья, массы пробы, сложности и вариантов исследуемых проб, необходимой массы конечных продуктов.

Полученные результаты - исходные данные для разработки проекта новой обогатительной фабрики или для реконструкции действующей.

### ***Контрольные вопросы***

1. Опишите принцип моделирования процесса с использованием «чёрного ящика».
2. Для чего используется математическое моделирование технологических процессов?
3. Раскройте закономерности разделения минералов при фракционном анализе.
4. Как определяются сепарационные характеристики технологических процессов обогащения?
5. Опишите стадии исследования технологических схем обогащения минерального сырья.

*Литература к теме:* [3, 5, 9, 11, 13].

### **Лекция № 10**

# Статистическая оценка вероятности исследований

## Вопросы, выносимые на лекцию:

*Последовательность статистического исследования процесса обогащения полезного ископаемого. Нормальный закон распределения (закон Гаусса). Среднее квадратическое отклонение. Математическое ожидание. Закон сложения дисперсий. Доверительный интервал. Ошибка воспроизводимости. Нулевая гипотеза. Критерии проверки статистической гипотезы.*

Рост потребления промышленностью металлов, угля и других полезных ископаемых ставят задачи поиска и освоения новых видов минерального сырья (в том числе труднообогатимых руд), разработки новой эффективной технологии обогащения полезных ископаемых. Сложность технологического процесса, недостаточный уровень развития теории и необходимость учёта большого количества факторов не позволяют систематизировать разнообразную информацию об обогатимости различных типов полезных ископаемых и предложить способ априорной оценки обогатимости на основе минералогическо-петрографического описания. Как правило, существует несколько приемлемых режимов обогащения, между которых трудно выбрать оптимальный.

Необходимость постановки большого количества экспериментов, множество методик исследований, плохая воспроизводимость экспериментов и существенное влияние на их результаты большого количества параметров, которые не регистрируются, вносит элемент случайности в результаты оценки обогатимости полезного ископаемого. Опыт и квалификация исследователя, набор использованной аппаратуры и реагентов, продолжительность исследований и даже время года могут повлиять на оценку обогатимости и выбор технологической схемы переработки полезных ископаемых.

Из всех методов оценки обогатимости, применяемых в теоретических, технологических и проектных исследованиях, эксперимент считается наиболее достоверным и распространённым. Но даже прямой лабораторный метод определения обогатимости позволяет установить только качественную оценку влияния различных параметров на технологические показатели, так как опыты, как правило, имеют плохую воспроизводимость. Аналогичные трудности возникают в исследованиях на полупромышленных установках и фабриках. Здесь также нет стандартной методики сравнения различных режимов и оценки получаемых результатов, а субъективные факторы и оценки, хотя и в меньшей степени, играют существенную роль. Кроме того, на результаты исследований оказывают значительное влияние различные неконтролируемые воздействия и причины, трудно поддающиеся учёту (например, износ оборудования, мелкие аварии, ненадёжность усреднения проб, точность химических анализов и т.д.).

Таким образом, создание количественных зависимостей и математических моделей невозможно при детерминистском подходе к процессу и определяет

необходимость использования методов математической статистики как при исследованиях на обогатимость, так и при создании систем автоматического управления на действующих обогатительных фабриках. Внедрение экспериментально-статистических методов в практику исследований даёт возможность объективно оценивать качество исследовательской работы (качество постановки, проведения и конечных результатов эксперимента).

*Последовательность статистического исследования процесса обогащения* полезного ископаемого может быть сформулирована следующим образом:

- постановка цели исследования, выбор параметров оптимизации процесса, анализ их взаимосвязи и областей применения тех или иных параметров;
- выбор методики экспериментов, анализ воспроизводимости и оценка количества параллельных измерений для получения результатов с необходимой достоверностью;
- выделение факторов, влияющих на исследуемый процесс;
- составление плана экспериментов, его реализация и получение статистической модели процесса и рациональных режимов его ведения;
- получение кинетической или динамической модели процесса (при необходимости).

### 10.1 Оценка ошибок измерений

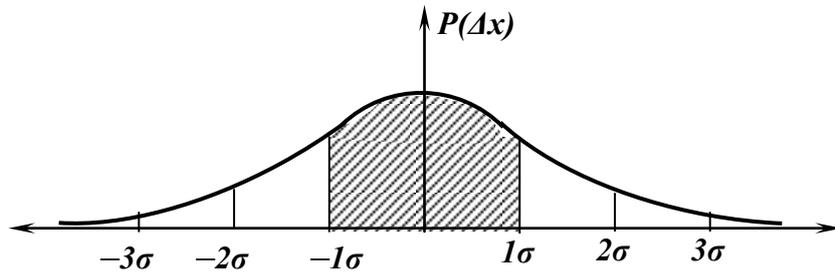
Воспроизводимость лабораторных опытов имеет большое значение при исследованиях на обогатимость, а также при теоретическом изучении процессов обогащения. В соответствии с теорией ошибок различают:

- *грубые ошибки (промахи)* - результаты, резко отличающиеся от других измерений и являющиеся следствием нарушения условий измерения;
- *систематические ошибки*, связанные с дефектом прибора или метода; их величина одинакова при всех измерениях. К одному виду систематических ошибок относятся ошибки, природа которых известна и величину которых можно определить (поправки), ко второму - ошибки, которые выявляются только другими методами измерения той же величины;
- *случайные ошибки*, которые зависят от множества неконтролируемых факторов. Случайные ошибки учесть невозможно, их величину можно определить только повторными измерениями и статистической обработкой результатов. Размер случайной ошибки характеризует воспроизводимость измерений.

В соответствии с теорией вероятности случайные ошибки подчиняются нормальному закону распределения (закон Гаусса), по которому вероятность ошибки:

$$P(\Delta x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(\Delta x)^2}{2\sigma^2}}, \quad (10.1)$$

где  $\sigma^2$  - дисперсия распределения;  $\sigma$  - среднее квадратическое отклонение. Вероятность отклонения от среднего значения показана на рис. 10.1.



**Рис. 10.1 - Вероятность отклонения от среднего значения на величину  $\sigma$  (заштрихованная площадь).**

Поскольку истинное значение измеряемой величины  $\mu$  и дисперсия  $\sigma^2$  неизвестны, используют их статистические оценки  $\bar{x}$  и  $S^2$ . Для ряда случайной величины  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$   $\Delta x = \mu - x_i$ .

Среднее арифметическое  $\bar{x}$  для  $n$  значений величины  $x_i$ :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i. \quad (10.2)$$

При обработке очень большого материала расчёты можно упростить, если  $n$  наблюдаемых значений  $x_1, x_2, \dots, x_n$  сгруппировать в  $m$  интервалов со средними  $t_1, t_2, \dots, t_m$  при одной длине интервала  $\Delta t$ . Если каждому из этих интервалов соответствуют частоты наблюдений  $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_m$ , то среднее определяется выражением:

$$\bar{x} \approx \bar{t} = \frac{\sum_{j=1}^m t_j \nu_j}{\sum_{j=1}^m \nu_j}. \quad (10.3)$$

$\bar{x} \approx \bar{t}$  в результате округления при расчёте  $t_j$ . Разница между  $\bar{x}$  и  $\bar{t}$  будет небольшой, если число наблюдений велико, а интервалы малы. Каждую из частот ( $\nu_1, \nu_2$  и т.д.) можно назвать весом соответствующего значения, а  $\bar{x}$  будет средневзвешенным значением.

Выборочная дисперсия (математическое ожидание):

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}, \quad (10.4)$$

где  $S$  - средняя квадратичная ошибка (стандартное отклонение).

Относительная квадратичная ошибка, выраженная в процентах от случайной величины, называется коэффициентом вариации:

$$V_x = 100S_x / \bar{x}, \% \quad (10.5)$$

Вероятность того, что результат измерений отличается от истинного значения на величину не больше чем  $\Delta x$ ,

$$P(\bar{x} - \Delta x < X < \bar{x} + \Delta x) = A \quad (10.6)$$

называется доверительным интервалом или коэффициентом надёжности.

Интервал значений от  $\bar{x} - \Delta x$  и до  $\bar{x} + \Delta x$  называется доверительным интервалом, то есть с вероятностью, равной  $A$ , результат не выходит за пределы доверительного интервала от  $\bar{x} - \Delta x$  и до  $\bar{x} + \Delta x$ . Разумеется, чем больше надёжность нужна, тем больше будет соответствующий доверительный интервал, и наоборот, чем больший доверительный интервал задаётся, тем вероятнее, что результаты измерений не выходят за его пределы. Таким образом, для характеристики величины случайной ошибки необходимо задать два числа: величину ошибки (или доверительного интервала) и величину доверительной вероятности.

По закону Гаусса средней квадратической ошибке  $\sigma$  соответствует доверительная вероятность 0,68, удвоенной средней квадратической ошибке  $2\sigma$  - доверительная вероятность 0,95, утроенной средней квадратической ошибке  $3\sigma$  - доверительная вероятность 0,997. Обычно при технических исследованиях принимают доверительный интервал при доверительной вероятности  $P = 0,95$ .

По закону случайных ошибок, если измеряемая величина  $z$  является суммой или разностью двух случайных величин  $X$  и  $Y$ , то:

$$S_z^2 = S_x^2 + S_y^2 \quad \text{или} \quad S_z = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} \quad (10.7)$$

Закон сложения дисперсий сохраняется для любого числа слагаемых, откуда выходит, что средняя квадратическая погрешность среднего арифметического:

$$S_{\bar{x}} = S_x / \sqrt{n} \quad (10.8)$$

Доверительный интервал определяется с помощью  $t$ -распределения Стьюдента (приложение 1), зависящего от доверительной вероятности  $P$  и числа степеней свободы  $f = n - 1$ :

$$\Delta x = \frac{t_p S_x}{\sqrt{n}} \quad (10.9)$$

Значение  $t_p$  очень сильно зависит от  $f$  при малых её значениях ( $n < 30$ ), при больших значениях  $n$  ( $n > 30$ ) эта зависимость значительно меньше. Из формулы (10.9) при  $\Delta x = \delta$  следует:

$$n \geq \frac{t_p^2 S_x^2}{\delta^2} \quad (10.10)$$

Статистические оценки случайной величины (среднее арифметическое  $\bar{x}$  и стандартное отклонение  $S_x$ ) рассчитываются из предположения, что выборка  $x_i$

не содержит грубых ошибок (промахов). Для исключения промахов из большой выборки можно пользоваться правилом  $2\sigma$  или  $3\sigma$ . Для промаха  $x^*$  рассчитывается абсолютное значение разницы  $|x^* - \bar{x}|$ . При доверительной вероятности  $P = 0,95$   $x^*$  отвергается, если  $|x^* - \bar{x}| > 2\sigma$ , а при  $P = 0,997$ , если  $|x^* - \bar{x}| > 3\sigma$ .

Для небольших выборок, когда  $S_x$  существенно отличается от  $\sigma$  пользуются критерием Стьюдента, при этом сравнивают:

$$t = \frac{|x^* - \bar{x}|}{S_x} \quad (10.11)$$

с  $t_p$  (приложение 1). Если  $t > t_p$ , то с доверительной вероятностью  $P$  можно считать, что измерения  $x^*$  является грубая ошибка, но и при  $t \leq t_p$  нельзя говорить об отсутствии грубой ошибки, а можно только говорить о недостаточных основания для исключения данного измерения. После исключения грубой ошибки оценки  $\bar{x}$  и  $S_x$  необходимо вновь пересчитать и рассмотреть вопрос о промахах в оставшейся выборке.

## 10.2 Правила проверки статистической гипотезы

В ходе исследований, особенно промышленных, накапливается значительный объём экспериментального материала в виде показателей обогащения, характеристик полезного ископаемого и т.д., которые соответствуют одинаковым или различным технологическим режимам, конструкциям аппаратов и типам полезных ископаемых. При этом возникают следующие вопросы:

- однородны ли показатели обогащения, полученные при различных режимах или конструкциях аппаратов, или эти выборки относятся к различным статистическим совокупностям;
- одинаково ли стабильны результаты, полученные при различных режимах, или в каком-то случае показатели менее стабильны и разброс данных больший;
- относится ли та или иная проба полезного ископаемого или результат к данной статистической совокупности;
- соответствует ли данное эмпирическое распределение тому или иному теоретическому распределению;
- адекватна ли выбранная математическая модель экспериментальным данным.

Эти вопросы решаются проверкой статистической гипотезы о принадлежности всех полученных данных к одной генеральной совокупности. Общий подход заключается в проверке нулевой гипотезы  $H_0$  об отсутствии реального различия между экспериментальными результатами, разброс которых объясняется случайными факторами, обуславливающими ошибку воспроизводимости.

Нулевой гипотезой ( $H_0$ ) называется выдвинутая гипотеза, отклонения от которой считаются случайными, противоположная ей гипотеза ( $H_1$ ) - альтернативной или конкурирующей.

Критерий проверки гипотезы позволяет выявить по результатам опытов, верна или неверна данная гипотеза. Критерий составляется на основе статистики  $Q_n = Q_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , распределение которой известно (нормальное,  $t$ ,  $F$  или  $\chi^2$ ). Критерий разделяет множество возможных значений статистики на область принятия гипотезы и область её неприятия (критическую). В случае попадания статистики в область неприятия гипотезы  $H_0$  она отвергается. Возможны такие случаи:

- гипотеза  $H_0$  верна и принимается в соответствии с критерием;
- гипотеза  $H_0$  неверна и отвергается в соответствии с критерием;
- гипотеза  $H_0$  верна, но её отвергают в соответствии с критерием (*ошибка первого рода*);
- гипотеза  $H_0$  неверна, но её принимают (*ошибка второго рода*).

Справедливость нулевой гипотезы проверяется расчётом вероятности того, что из-за случайности выборки различия могут достичь фактически наблюдаемой величины; если эта вероятность окажется очень маленькой, то нулевая гипотеза отвергается (т.е. маловероятно, что различия вызывается случайными величинами, а не реальными расхождениями). Вероятность  $P$ , которую принимают за основу при статистической гипотезе, определяет уровень значимости.

По результатам, полученным для двух выборок, рассчитывают значение некоторой контрольной величины  $\lambda$  и определяют область  $A$ , внутри которой следует ожидать  $\lambda$  с определённой вероятностью  $P$ . Если контрольная величина  $\lambda$  лежит вне области  $A$ , то выбранная гипотеза отвергается, различие между полученными величинами считается статистически значимым. Если контрольная величина  $\lambda$  лежит в области  $A$ , то выбранная гипотеза принимается. Вопрос отбросить или принять статистическую гипотезу решают на основе выборочных измерений, поэтому следует оценить возможность ошибки. Если, например, с вероятностью  $P$  отвергают гипотезу о том, что два средних значения  $x_1$  и  $x_2$  принадлежат к одной и той же генеральной совокупности, то из этого можно сделать вывод о различии этих значений. Вероятность того, что оба средних значения относятся одной и той же генеральной совокупности, будет  $\alpha = 1 - P$ .

Обычно задают вероятность ошибки первого рода  $\alpha$ , которую называют уровнем значимости, ошибка второго рода определяется вероятностью  $1 - \beta$ , где  $\beta$  - вероятность того, что ошибка не будет допущена. Это - мощность критерия. Уровень значимости  $\alpha$  принимают равным 0,05; 0,1; 0,01 или 0,005. Выбор доверительной вероятности  $P$  определяется конкретными задачами исследования. При этом следует учитывать, что с уменьшением  $\alpha$  возрастает вероятность ошибки второго рода.

При принятии или отбрасывании гипотезы используют три правила:

- проверяемая гипотеза отбрасывается, если ошибка первого рода может появиться в менее чем  $100\alpha = 1\%$  всех случаев, то есть  $P \geq 0,99$ . Тогда рассмотренная разница является значимой;

- проверяемая гипотеза принимается, если ошибка первого рода может появиться в более чем  $100\alpha = 5\%$  всех случаев, то есть  $P \leq 0,95$ . Тогда рассмотренная разница является незначимой;

- отвергаемую гипотезу следует дополнительно обсудить, если число возможных ошибок первого рода лежит в интервале между 5 и 1% ( $0,95 < p < 0,99$ ). В данном случае необходимо провести дополнительные исследования.

Суть ошибок первого и второго рода можно пояснить следующим примером. Пусть нулевая гипотеза  $H_0$  означает, что содержание полезного компонента в концентрате удовлетворяет требованиям потребителя (условиям поставки). Если поставка концентрата отклоняется, хотя  $H_0$  верна, то рискует производитель - ошибка первого рода. Если поставка концентрата принимается, хотя  $H_0$  неверна, то рискует потребитель - ошибка второго рода.

Таким образом, гипотеза либо принимается, либо отвергается. Принятие гипотезы не означает того, что она является единственно правильной. Принятая статистическая гипотеза - это правдоподобное, не противоречащее опыту утверждение.

### ***Контрольные вопросы***

1. Опишите последовательность статистического исследования процесса обогащения полезного ископаемого.

2. Раскройте суть нормального закона распределения (закона Гаусса).

3. Что такое «выборочная дисперсия» и как она определяется?

4. Охарактеризуйте понятия «доверительный интервал» и «доверительная вероятность».

5. Укажите правила, которые используются при принятии или отбрасывании гипотезы.

*Литература к теме:* [3, 4, 5,11].

## **Лекция № 11**

# Критерии оценки полученных результатов исследований

## Вопросы, выносимые на лекцию:

*Критерий Стьюдента (t-критерий). Сравнение средних значений. Сравнение сопряжённых пар. Последовательный анализ Вальда. Критерий Фишера (F-критерий). Парное сравнение дисперсий. Критерий Кохрена (G-критерий). Сравнение нескольких дисперсий. Критерий Пирсона ( $\chi^2$ -критерий). Сравнение распределений.*

### 11.1 Критерий Стьюдента (t-критерий)

#### *Сравнение средних значений*

При сравнении средних значений рассматривают совместно доверительные интервалы двух статистических совокупностей. Для оценки доверительного интервала используют *t*-критерий.

Пусть имеется две статистические выборки: *x* - с параметрами  $\bar{x}$  и  $S_x$ , полученные при  $n_x$  измерений и *y* - с параметрами  $\bar{y}$  и  $S_y$ , полученными при  $n_y$  измерений. Распределения *x* и *y* близки к нормальному. Нулевая гипотеза состоит в предположении, что математические ожидания  $\mu_x$  и  $\mu_y$  равны, то есть  $\mu_x - \mu_y = 0$ .

Если дисперсии  $S_x^2$  и  $S_y^2$  отличаются незначительно, рассчитывают средневзвешенное двух дисперсий и параметр *t*:

$$\bar{S}^2 = \frac{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}{n_x + n_y - 2}; \quad (11.1)$$

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\bar{S}^2}} \sqrt{\frac{n_x n_y}{n_x + n_y}}. \quad (11.2)$$

Число степеней свободы:

$$f = n_x + n_y - 2. \quad (11.3)$$

Если  $t > t_{95\%}$ , различие между  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  значимое.

**Пример 11.1.** При испытании двух блоков были получены такие результаты по зольности угольных концентратов (табл. 11.1).

Таблица 11.1 - Результаты испытания блоков

<i>n</i>	I блок	II блок
----------	--------	---------

	$x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$y_i$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	7,10	- 0,06	0,0025	6,95	0,05	0,0025
2	7,05	- 0,10	0,0100	6,80	- 0,10	0,0100
3	7,20	0,05	0,0025	7,05	0,15	0,0225
4	7,15	-	-	7,00	0,10	0,0100
5	7,30	0,15	0,0225	6,90	-	-
6	7,15	-	-	6,70	- 0,20	0,0400
7	7,10	- 0,05	0,0025	6,85	- 0,05	0,0025
8	-	-	-	6,95	0,05	0,0025
$\Sigma$	50,05	-	0,0400	55,20	-	0,0900
Среднее	7,15	-	-	6,90	-	-

Выполняем расчёт следующих параметров:

\* Выборочные дисперсии блоков I и II:

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n_x - 1} = \frac{0,0400}{7 - 1} = 0,0067 ;$$

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n_y - 1} = \frac{0,0900}{8 - 1} = 0,0129 .$$

\* Средневзвешенная двух дисперсий:

$$\bar{S}^2 = \frac{(n_x - 1)S_x^2 + (n_y - 1)S_y^2}{n_x + n_y - 2} = \frac{(7 - 1) \cdot 0,0067 + (8 - 1) \cdot 0,0129}{7 + 8 - 2} = 0,0100 .$$

\* Критерий Стьюдента

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\bar{S}^2}} \sqrt{\frac{n_x n_y}{n_x + n_y}} = \frac{7,15 - 6,90}{0,010} \cdot \sqrt{\frac{7 \cdot 8}{7 + 8}} = 4,83 .$$

При  $f = n_x + n_y - 2 = 7 + 8 - 2 = 13$  по таблице значений критерия Стьюдента (приложение 1) находим  $t_{0,95} = 2,16$ .

Таким образом, полученное значение параметра  $t$  больше табличного и, соответственно, различие между зольностью в блоках нужно считать значимым.

### Сравнение сопряжённых пар

Работу двух аппаратов или два технологических режима часто приходится сравнивать в очень изменяющихся условиях, например при изменении качества полезного ископаемого, температуры пульпы и т.п. Попарное сравнение позволяет исключить вариацию, связанную с влиянием других факторов.

При этом оценивается не различие средних  $\bar{x} - \bar{y}$ , а разница пар наблюдений  $\Delta_i = x_i - y_i$ . Вариационный ряд  $\Delta$  рассматривается как самостоятельный со средним  $\bar{\Delta}$ , дисперсией  $S_{\Delta}^2$  и числом степеней свободы  $f = n - 1$ , где  $n$  - число сопряжённых пар наблюдений. Тогда рассчитывают дисперсию и критерий Стьюдента:

$$S_{\Delta}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta_i - \bar{\Delta})^2}{n(n-1)} ; \quad (11.4)$$

$$t_{\Delta} = \frac{|\bar{\Delta}|}{S_{\Delta}} \succ t_p . \quad (11.5)$$

Если  $t_{\Delta} \succ t_p$ , различие считают значимым, и наоборот.

**Пример 11.2.** *Сравнивались два режима флотации угольных шламов. При равных условиях по исходному сырью получены концентраты с зольностью, приведенной в табл. 11.2.*

Таблица 11.2 - Результаты опробования режимов флотации

$n$	$x_i$	$y_i$	$\Delta_i = x_i - y_i$	$\Delta_i - \bar{\Delta}$	$(\Delta_i - \bar{\Delta})^2$
1	10,1	9,3	0,8	0,1	0,01
2	9,8	9,1	0,7	-	-
3	11,0	9,5	0,5	- 0,2	0,04
4	11,3	9,8	0,5	- 0,2	0,04
5	10,5	10,0	0,5	- 0,2	0,04
6	9,2	9,0	0,2	- 0,5	0,25
7	10,8	10,2	0,6	- 0,1	0,01
8	10,6	9,6	1,0	0,3	0,09
9	10,4	9,7	0,7	-	-
10	11,3	9,8	1,5	0,8	0,64
$\Sigma$	105,0	96,0	7,0	-	1,12
Среднее	10,5	9,6	0,7	-	-

Выполняем расчёт следующих параметров:

\* Выборочная дисперсия вариационного ряда  $\bar{\Delta}$  :

$$S_{\Delta}^2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta_i - \bar{\Delta})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{1,12}{10(10-1)}} = 0,11.$$

\* Критерий Стьюдента:

$$t_{\Delta} = \frac{|\bar{\Delta}|}{S_{\Delta}} = \frac{0,7}{0,11} = 6,36.$$

При  $f = n - 1 = 10 - 1 = 9$  по таблице значений критерия Стьюдента (приложение 1) находим  $t_{0,99} = 3,25$ .

Таким образом, полученное значение параметра  $t$  больше табличного и, соответственно, различие следует считать значимым.

## 11.2. Последовательный анализ Вальда

Так как внедрение нового метода в промышленность требует определённых затрат, часто возникает необходимость повышения эффективности процесса не менее, чем на определённую величину  $\Delta$ , при которой данное внедрение становится оправданным. Если при этом каждый эксперимент достаточно сложный и трудоёмкий, возникает задача сведения к минимуму количества таких экспериментов при условии подтверждения гипотезы  $\bar{y} \geq \bar{x} + \Delta$  с заданной доверительной вероятностью  $P$ .

При использовании метода последовательного анализа математическая обработка результатов выполняется не после завершения серии опытов, а после каждого опыта. В результате этой обработки выясняется, можно ли принять одну из конкурирующих гипотез (и какую) или продолжить исследования. Число необходимых наблюдений при этом оказывается в среднем в три раза меньше, чем при классическом анализе. Вальд показал, что при задании ошибки первого рода  $\alpha$  и ошибки второго рода  $\beta$ , можно получить в координатах  $\Sigma y_i - n_y$  три области, как показано на рис. 11.2.

Уравнения линий имеют вид:

$$L_0 = an - b; \quad (11.6)$$

$$L_1 = an + b, \quad (11.7)$$

$$\text{где } a = \frac{\bar{x} + \bar{y}}{2}; \quad b = \frac{S_y^2}{\Delta} \ln \frac{1 - \beta}{\alpha}. \quad (11.8)$$

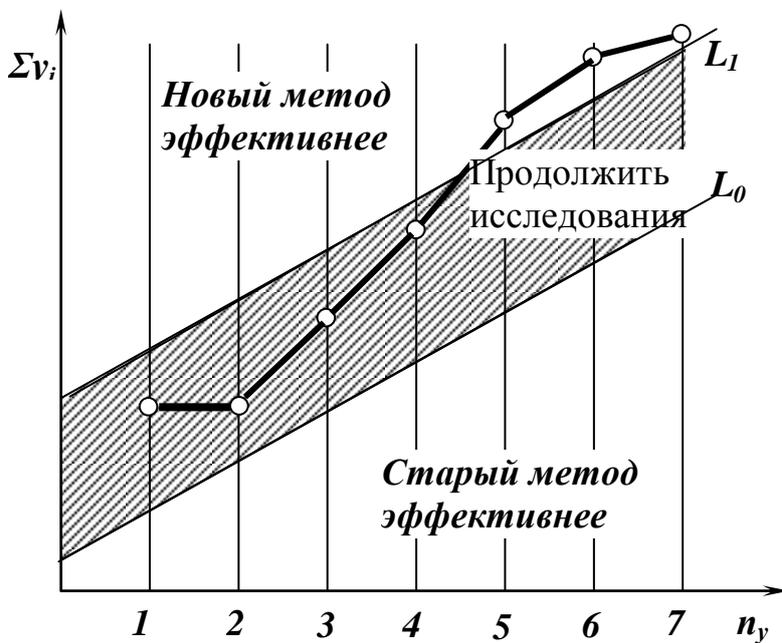


Рис. 11.2 - Сравнение вариантов при последовательном анализе Вальда.

**Пример 11.3.** Расходы при внедрении системы автоматизации одного из технологических узлов обогатительной фабрики окупятся, если извлечение полезного компонента повысится не менее, чем на  $\Delta\varepsilon = \bar{y} - \bar{x} = 2\%$ . Среднее извлечение по фабрике составляет  $\bar{x} = 82\%$  при стандартном отклонении  $\bar{S}_x = 0,8\%$ . Поскольку исследование с целью установления рациональности внедрения системы автоматизации технологического узла оказались трудоёмкими было принято решение использовать метод Вальда.

Выполняем расчёты следующих параметров:

\* Дисперсия  $S_y$  рассчитывается с использованием коэффициента вариации  $V_x$ :

$$V_x = S_{\bar{x}} / \bar{x} = 0,8 / 82 = 0,00976 = 0,976 \%$$

Примем, что во всех случаях  $V_y \leq V_x$ , тогда при

$$\bar{y} = \bar{x} + \Delta\varepsilon = 82 + 2 = 84$$

дисперсия  $S_y$

$$S_y = \bar{y} \cdot V_x = 84 \cdot 0,00976 = 0,82 \%$$

Выберем  $\alpha = 0,01$ ,  $\beta = 0,01$  и рассчитаем коэффициенты  $a$  и  $b$ .

$$a = \frac{\bar{x} + \bar{y}}{2} = \frac{82 + 84}{2} = 83,$$

$$b = \frac{S_y^2}{\Delta} \ln \frac{1 - \beta}{\alpha} = \frac{0,82^2}{2} \cdot \ln \frac{0,99}{0,01} = 1,55$$

Результаты расчётов статистической оптимизации процесса приведены в табл. 11.3.

Таблица 11.3 - Результаты исследования статистической оптимизации процесса

№ опыта	1	2	3	4	5	6
$Y_i$	83,1	83,5	83,8	84,2	84,0	84,3
$L_1=an+b$	84,55	167,55	250,55	333,55	416,55	499,55
$L_0=an-b$	81,45	164,45	247,45	330,45	413,45	496,45
$\Sigma Y_i$	83,1	166,6	250,4	334,6	418,6	502,9

Результаты исследований показывают, что внедрение автоматизации технологического процесса целесообразно, так как уже на четвёртом опыте система оптимизации показывает эффект, а пятый и шестой опыты подтверждают наличие эффекта.

### 11.3 Критерий Фишера (F-критерий)

#### *Парное сравнение дисперсий*

Две выборочные совокупности могут не различаться значимо по своему среднему значению, но различаться по стандартным отклонениям (или дисперсиями). Задача сравнения дисперсий возникает при сравнении точности различных приборов или методов измерения, а также в рассмотренных выше применениях  $t$ -критерия, когда приходится предварительно проверять равенство дисперсий.

Если разница лежит в пределах возможных случайных колебаний, то оба распределения относятся к одной и той же генеральной совокупности. Нулевая гипотеза состоит в предположении, что  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ . Для решения вопроса о случайном или неслучайном различии дисперсий рассматривают отношение большей эмпирической дисперсии к меньшей:

$$S_1^2 / S_2^2 = F \succ 1. \quad (11.9)$$

Затем задают желаемую надёжность вывода  $P = 0,95$  или  $P = 0,99$  и по таблице (приложение 2) критическое значение отношения  $F$ , соответствующее данным числам степеней свободы  $f_1$  и  $f_2$  (число степеней свободы  $f_1$  относится к большей эмпирической дисперсии). Если отношение (11.9), рассчитанное по результатам исследований, будет больше критического значения, то различие дисперсий считают неслучайным (значимым) с надёжностью  $P$ .

**Пример 11.4.** При определении содержания меди в концентрате использованы два метода анализа. Первым методом анализа выполнено 5 измерений, вторым - 8. Результаты исследования методов анализа приведены в табл. 11.4.

Таблица 11.4 - Результаты исследования методов анализа

$n$	I анализ	II анализ
-----	----------	-----------

	$x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$y_i$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$
1	27,5	0,04	0,0016	27,9	0,85	0,7225
2	27,0	- 0,44	0,1936	26,5	- 0,55	0,3025
3	27,3	- 0,14	0,0196	27,2	0,15	0,0225
4	27,6	0,16	0,0256	26,5	- 0,55	0,3025
5	27,8	0,36	0,1296	27,0	- 0,05	0,0025
6	-	-	-	27,4	0,35	0,1225
7	-	-	-	27,3	0,25	0,0625
8	-	-	-	26,8	0,25	0,0625
$\Sigma$	137,2	-	0,3700	216,4	-	1,6000
Среднее	27,44	-	-	27,05	-	-

Нулевая гипотеза состоит в предположении, что между методами анализа нет различия в отношении воспроизводимости стабильности анализов.

Выполняем расчёт следующих параметров:

\* Выборочные дисперсии I и II:

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n_x - 1} = \frac{0,37}{5 - 1} = 0,0925 ;$$

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n_y - 1} = \frac{1,60}{8 - 1} = 0,2657 .$$

\* Отношение большей эмпирической дисперсии к меньшей:

$$F = S_y^2 / S_x^2 = 0,2657 / 0,0925 = 2,87 .$$

При  $f_x = 4$  и  $f_y = 7$  по таблице значений критерия Фишера (приложение 2) находим  $F_{(0,95, 4, 7)} = 6,09$ .

Таким образом, полученное значение параметра  $F$  меньше табличного и, соответственно, предположение, что между методами анализа нет различия в отношении воспроизводимости стабильности анализов, не опровергается.

## 11.4 Критерий Кохрена (G-критерий)

### Сравнение нескольких дисперсий

Если между несколькими приборами (или несколькими сериями измерений) обнаружен прибор (серия измерений), эмпирическая дисперсия  $S_1^2$  которого заметно отличается от других, необходимо выяснить, можно ли считать

отличие выделенной дисперсии  $S_1^2$  от других случайным или это различие следует считать значимым. Каждым из  $m$  исследуемых приборов делают одинаковое число  $n$  измерений, подсчитывают эмпирические дисперсии  $S_1^2, S_2^2, \dots, S_m^2$  (при этом  $S_1^2 < S_i^2$ ) и сравнивают наибольшую дисперсию с суммой всех дисперсий:

$$G = \frac{S_1^2}{S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_m^2} \quad (11.10)$$

Если отношение (11.10) будет больше критического (приложение 3), то отличие первой дисперсии от других является существенным, то есть первый прибор (первая серия измерений) обладает меньшей точностью, чем другие. В противном случае для такого утверждения нет достаточных оснований.

**Пример 11.5.** Каждая из четырёх лабораторий выполнила анализ 17 проб шихты для коксования с целью определения процентного содержания серы при одних и тех же условиях. Дисперсии оказались равными соответственно 0,40; 0,25; 0,34 и 0,21. Можно ли считать, что все измерения обеспечивают одинаковую воспроизводимость результатов, то есть различие между дисперсиями незначимое?

Выполняем расчёт критерия  $G$ :

$$G = \frac{S_1^2}{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2} = \frac{0,40}{0,40 + 0,25 + 0,34 + 0,21} = 0,3333.$$

При числе степеней свободы  $f = 16$  и числе выборок  $k = 4$  по таблице значений критерия Кохрена (приложение 3) находим  $G_{(0,95; 17; 4)} = 0,4884$ .

Таким образом, полученное значение параметра  $G$  меньше табличного. Следовательно, можно сделать вывод, что различия между дисперсиями незначимые и все измерения обеспечивают одинаковую воспроизводимость результатов.

## 11.5 Критерий Пирсона ( $\chi^2$ -критерий)

### Сравнение распределений

Если необходимо сравнить не только основные параметры, но и все распределения, применяют критерий Пирсона  $\chi^2$  (приложение 4). При помощи этого критерия можно доказать принадлежность данной выборки к нормальному распределению; доказать, что два эмпирических распределения относятся к одному и тому же виду; определить значимо ли отличается частота появления какого-либо события ожидаемого значения во всех интервалах, где эти значения предсказаны на основе теоретических представлений или математической модели.

Нулевая гипотеза состоит в предположении, что между эмпирическими и теоретическими распределениями не существует никакого различия. Выборку  $n$

значений делят на  $m$  классов, при этом должно быть  $m \approx \sqrt{n}$ . Для каждого такого класса определяют абсолютную частоту  $h$  содержащихся в нем значений измеряемой величины и сопоставляют её с частотой  $h_t$ , которая теоретически ожидается в соответствии с моделью:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(h - h_t)^2}{h_t}. \quad (11.11)$$

Если теоретически найденное значение  $h_t$  для отдельных классов достаточно велико ( $h_t > 5$ ), то найденное значение будет принадлежать  $\chi^2$ -распределению с числом степеней свободы  $f = m - k$ . При этом  $k$  задаётся числом параметров, необходимых для характеристики выборки. Для нормального распределения  $k = 3$ .

Если при проверке следует, что  $\chi^2 \succ \chi^2_{(P;f)}$ , то проверяемая гипотеза отвергается, то есть между эмпирическими и теоретическими распределениями существует значимое различие. Различие незначимое, если  $\chi^2 \prec \chi^2_{(P;f)}$ .

**Пример 11.6.** На обогатительной фабрике за сутки тремя сменами выпущено сверхплановой продукции соответственно: 2, 13 и 15 т. Можно ли считать различия между количеством сверхплановой продукции по сменам случайным? Данные о работе смен приведены в табл. 11.5.

Таблица 11.5 - Результаты работы смен

Выпуск сверхплановой продукции, т	Смена			Всего
	I	II	III	
Фактический	2	13	15	30
Ожидаемый	10	10	10	30

Если связи между количеством сверхплановой продукции и временем работы смены нет, то количество сверхплановой продукции должна быть одинаковым для каждой смены и равным  $h_t = 30/3 = 10$  (ожидаемое количество сверхплановой продукции).

Выполняем расчёт критерия  $\chi^2$ :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(h - h_t)^2}{h_t} = \frac{(2 - 10)^2}{10} + \frac{(13 - 10)^2}{10} + \frac{(15 - 10)^2}{10} = 9,8.$$

Для уровня значимости  $\alpha = 0,05$  и числа степеней свободы  $f = 3 - 1 = 2$  параметр  $\chi^2 = 6,0$ . Значит, выпуск сверхплановой продукции зависит от времени работы смены.

### Контрольные вопросы

1. Опишите методику сравнения двух средних значений при помощи критерия Стьюдента.
2. Раскройте суть последовательного анализа Вальда.
3. Опишите методику парного сравнения дисперсий при помощи критерия Фишера.
4. Для каких целей используется критерий Кохрена (G-критерий)?
5. Раскройте суть методики сравнения распределений при помощи критерия Пирсона.

*Литература к теме: [5,9,11].*

## Дисперсионный анализ

### Вопросы, выносимые на лекцию:

*Предмет дисперсионного анализа и условия его выполнения. Однофакторный дисперсионный анализ. Проверка нулевой гипотезы о равенстве групповых средних. Сравнение факторной и остаточной дисперсии. Двухфакторный дисперсионный анализ.*

Ошибка воспроизводимости экспериментов, которая оценивается с помощью дисперсии, может быть следствием не одной, а нескольких причин или операций. Так, например, при исследовании на обогатимость дисперсия результатов может складываться из ряда компонентов: химического анализа, отбора проб и обогатительного эксперимента. Если известна величина компонентов дисперсии, совершенствуют соответствующие операции, чтобы наиболее эффективно снизить ошибку эксперимента.

При полупромышленных и промышленных испытаниях вопрос о влиянии полноты усреднения и однородности проб приобретает первостепенное значение. Важность раздельной оценки дисперсий, связанных с вариацией сортности полезного ископаемого, точностью поддержания режима обогащения и ошибкой анализа, определяется необходимостью подбора такого режима обогащения, который наряду с высокими средними показателями обеспечивает стабильность результатов при изменении качества полезного ископаемого.

Решение подобных задач составляет предмет дисперсионного анализа. С помощью дисперсионного анализа определяются дисперсии, обусловленные действием каждого фактора в отдельности и их взаимодействием, и оценивается статистическая значимость этих величин с учётом ошибки воспроизводимости.

Дисперсионный анализ можно выполнять только при следующих условиях:

- серии измерений можно рассматривать как случайные выборки из генеральных совокупностей, которые подчинены нормальному распределению;
- дисперсии, обусловленные ошибками воспроизводимости, для всех серий измерений однородны. Если такой уверенности нет, необходимо проверить однородность дисперсий с использованием критериев Кохрена или Фишера.

### **Однофакторный дисперсионный анализ**

Если наблюдается действие одного фактора (простой случай), задачу можно сформулировать следующим образом: пусть наблюдают  $m$  независимых нормально распределённых величин  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , и при этом предполагают, что все они имеют одно и то же среднее квадратическое отклонение  $S$ . Над каждым переменным выполняется  $n$  наблюдений (табл. 12.1).

Таблица 12.1 - Результаты наблюдений

№ испытания, $i$	№ прибора (уровень фактора), $j$			
	1	2	3	$m$
1	$x_{11}$	$x_{12}$	...	$x_{1m}$
2	$x_{21}$	$x_{22}$	...	$x_{2m}$
...	...	...	...	...
$n$	$x_{n1}$	$x_{n2}$	...	$x_{nm}$
Групповая средняя, $\bar{x}_{2pj}$	$\bar{x}_{2p1}$	$\bar{x}_{2p2}$	...	$\bar{x}_{2pm}$

В задаче необходимо на уровне значимости  $\alpha$  проверить нулевую гипотезу о равенстве групповых средних при допущении, что групповые генеральные дисперсии хотя и неизвестны, но одинаковы.

Для решения этой задачи вводятся:

- *общая сумма* квадратов отклонений наблюдаемых значений признака от общей средней:

$$S_{\hat{a}\hat{u}} = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x})^2 ; \quad (12.1)$$

- *факторная сумма* квадратов отклонений групповых средних от общей средней (характеризует рассеяние между группами):

$$S_{\hat{a}\hat{e}\hat{d}} = \sum_{j=1}^m (\bar{x}_{\hat{a}\hat{d}j} - \bar{x})^2 ; \quad (12.2)$$

- *остаточная сумма* квадратов отклонений наблюдаемых значений группы от своей групповой средней (характеризует рассеяние в середине группы):

$$S_{\hat{o}\hat{n}\hat{d}} = S_{\hat{a}\hat{u}} - S_{\hat{a}\hat{e}\hat{d}} . \quad (12.3)$$

Для вычисления общей и факторной сумм более удобны такие формулы:

$$S_{\hat{a}\hat{u}} = \sum_{j=1}^m P_j - \frac{\left[ \sum_{j=1}^m R_j \right]^2}{mn} , \quad (12.4)$$

$$S_{\hat{a}\hat{e}\hat{d}} = \frac{\sum_{j=1}^m R_j^2}{n} - \frac{\left[ \sum_{j=1}^m R_j \right]^2}{mn} , \quad (12.5)$$

где  $P_j = \sum_{i=1}^n x_{ij}^2$  - сумма квадратов наблюдаемых значений признака на уровне  $m_j$ ;

$R_j = \sum_{i=1}^n x_{ij}$  - сумма наблюдаемых значений признака на уровне  $m_j$ .

Если наблюдаемые значения признака являются сравнительно большими числами, то для упрощения вычислений вычитают из каждого значения одно и

то же число  $C$ , которое примерно равно общей средней. Если уменьшенные значения  $y_{ij} = x_{ij} - C$ , то

$$S_{\hat{a}\hat{u}} = \sum_{j=1}^m Q_j - \frac{\left[ \sum_{j=1}^m T_j \right]^2}{mn}, \quad (12.6)$$

$$S_{\hat{\delta}\hat{\epsilon}\hat{\delta}} = \frac{\sum_{j=1}^m T_j^2}{n} - \frac{\left[ \sum_{j=1}^m T_j \right]^2}{mn}, \quad (12.7)$$

где  $Q_j = \sum_{i=1}^n y_{ij}^2$  - сумма квадратов уменьшенных значений признака на уровне

$m_j$ ;  $T_j = \sum_{i=1}^n y_{ij}$  - сумма уменьшенных значений признака на уровне  $m_j$ .

Факторную и остаточную сумму делят на соответствующее число степеней свободы и находят факторную и остаточную дисперсии:

$$S_{\hat{\delta}\hat{\epsilon}\hat{\delta}}^2 = \frac{S_{\hat{\delta}\hat{\epsilon}\hat{\delta}}}{m-1}, \quad (12.8)$$

$$S_{\hat{o}\hat{n}\hat{\delta}}^2 = \frac{S_{\hat{o}\hat{n}\hat{\delta}}}{m(n-1)}. \quad (12.9)$$

После этого сравнивают факторную и остаточную дисперсии по критерию Фишера:

$$F_{\hat{i}\hat{a}\hat{a}\hat{e}} = S_{\hat{\delta}\hat{\epsilon}\hat{\delta}}^2 / S_{\hat{o}\hat{n}\hat{\delta}}^2. \quad (12.10)$$

Если  $F_{\hat{i}\hat{a}\hat{a}\hat{e}} < F_{\hat{e}\hat{\delta}}$  - различие групповых средних незначимо.

Если  $F_{\hat{i}\hat{a}\hat{a}\hat{e}} > F_{\hat{e}\hat{\delta}}$  - различие групповых средних значимо.

Если факторная дисперсия окажется меньше остаточной, то отсюда следует справедливость нулевой гипотезы о равенстве групповых средних, поэтому дальнейшие вычисления (сравнение дисперсий с помощью критерия  $F$ ) лишние.

**Пример 12.1.** При совместном анализе точности группы измерительных приборов (потенциометров) решается вопрос: можно ли считать их систематические ошибки одинаковыми. Число потенциометров -  $m$  ( $m = 3$ ) и каждый из них измеряет рН одной и той же пульпы  $n$  раз ( $n = 4$ ). Результаты исследований приведены в табл. 12.2.

Таблица 12.2 - Результаты исследований

Число измерений, $n$	Число уровней фактора (число потенциометров), $m$
----------------------	---

	1	2	3
1	13,5	13,0	12,1
2	13,2	12,4	12,2
3	13,1	12,6	13,4
4	13,0	12,0	13,1
$\Sigma$	58,2	50,0	50,8
Среднее	13,2	12,5	12,7

Для упрощения вычислений вычитаем из каждого наблюдаемого значения общую среднюю  $\bar{x} = (13,2 + 12,5 + 12,7) / 3 = 12,8$  и переходим к уменьшенным величинам, например,  $y_{11} = x_{11} - 12,8 = 13,5 - 12,8 = 0,7$  и т.д.

Составляем расчётную таблицу (табл. 12.3) и с использованием итогового столбца вычисляем общую, факторную и остаточную суммы квадратов отклонений при числе уровней фактора  $m = 3$  и числе измерений на каждом уровне  $n = 4$ .

Таблица 12.3 - Расчётная таблица

№ опыта	Уровни фактора						Итоговый столбец
	$m_1$		$m_2$		$m_3$		
	$y_{i1}$	$y_{i1}^2$	$y_{i2}$	$y_{i2}^2$	$y_{i3}$	$y_{i3}^2$	
1	0,7	0,49	0,2	0,04	- 0,7	0,49	
2	0,4	0,16	- 0,4	0,16	- 0,6	0,36	
3	0,3	0,09	- 0,2	0,04	0,6	0,36	
4	0,3	0,04	- 0,8	0,64	0,3	0,09	
$Q_j$		0,78		0,88		1,30	$\Sigma Q_j = 2,96$
$T_j$	1,6		- 1,2		- 0,4		$\Sigma T_j = 0$
$T_j^2$	2,56		1,44		1,69		$\Sigma T_j^2 = 5,69$

Выполняем расчёт следующих параметров:

\*Общая сумма квадратов отклонений:

$$S_{\text{общ}} = \sum_{j=1}^m Q_j - \frac{\left[ \sum_{j=1}^m T_j \right]^2}{mn} = 2,96 - 0 = 2,96$$

\* Факторная сумма квадратов отклонений:

$$S_{\text{факт}} = \frac{\sum_{j=1}^m T_j^2}{n} - \frac{\left[ \sum_{j=1}^m T_j \right]^2}{mn} = \frac{5,69}{4} - 0 = 1,42$$

\* Остаточная сумма квадратов отклонений:

$$S_{o\bar{n}\bar{d}} = S_{i\bar{a}\bar{u}} - S_{\bar{d}\bar{a}\bar{e}\bar{d}} = 2,96 - 1,42 = 1,54.$$

\* Факторная дисперсия:

$$S_{\bar{d}\bar{a}\bar{e}\bar{d}}^2 = \frac{S_{\bar{d}\bar{a}\bar{e}\bar{d}}}{m-1} = \frac{1,42}{3-1} = 0,71.$$

\* Остаточная дисперсия:

$$S_{o\bar{n}\bar{d}}^2 = \frac{S_{o\bar{n}\bar{d}}}{m(n-1)} = \frac{1,54}{3(4-1)} = 0,17.$$

Сравнение факторной и остаточной дисперсии с помощью критерия Фишера:

$$F_{i\bar{a}\bar{e}} = S_{\bar{d}\bar{a}\bar{e}\bar{d}}^2 / S_{o\bar{n}\bar{d}}^2 = 0,71/0,17 = 4,17.$$

По таблице значений критерия Фишера (приложение 2) при числе степеней свободы числителя  $f_1 = 2$ , а знаменателя  $f_2 = 9$  находим  $F_{(0,95; 2; 9)} = 4,26$ .

Так как  $F_{i\bar{a}\bar{e}} < F_{\bar{e}p}$ , то нет оснований отвергать нулевую гипотезу и, соответственно, различие между групповыми средними незначимо. То есть, все группы наблюдений извлечены из одной генеральной совокупности.

### **Двухфакторный дисперсионный анализ**

При увеличении числа факторов, влияющих на результаты исследования, процедура дисперсионного анализа принципиально не меняется, однако расчеты усложняются.

Задача двухфакторного дисперсионного анализа (двухступенчатой классификации, кросс-классификации) связана с экспериментом, в котором одновременно действуют два фактора  $A$  и  $B$ , которые варьируют в  $k$  и  $m$  уровнях, соответственно.

Оценку воспроизводимости результатов исследований с помощью двухфакторного дисперсионного анализа рассмотрим на примере.

**Пример 12.2.** Исследовались три реагентных режима флотационного процесса (фактор  $A$ ) для четырёх проб полезного ископаемого (фактор  $B$ ). На каждой пробе при различных режимах было проведено по два опыта. Необходимо оценить влияние этих факторов на изменение извлечение полезного компонента в концентрат. Результаты исследований приведены в расчётной табл. 12.4.

Таблица 12.4 - Результаты опробования и расчёта

№ режима (фактор $A$ )	№ пробы полезного ископаемого (фактор $B$ )				$X_A$	$X_B$
	1	2	3	4		
1	2	3	2	4		
	2	4	3	2		
	$X_{11} = 4$	$X_{12} = 7$	$X_{13} = 5$	$X_{14} = 6$	22	484
2	1	0	1	- 1		
	2	- 1	1	- 1		
	$X_{21} = 3$	$X_{22} = - 1$	$X_{23} = 2$	$X_{24} = - 2$	2	4
3	3	6	- 2	1		
	2	5	1	2		
	$X_{31} = 5$	$X_{32} = 7$	$X_{33} = - 1$	$X_{34} = 3$	18	324
$X_B$	12	17	6	7	42	1764
$X_B^2$	144	289	36	49	518	300/160

$X_A$  - сумма всех значений строки  $A$ ;  $X_B$  - сумма всех значений столбца  $B$ ;  $X$  - сумма всех значений таблицы;  $n$  - число значений в каждой клетке.

С использованием формул табл. 12.5 выполняем расчёт следующих параметров:

Таблица 12.5 - Расчётные формулы

Рассеивание	Сумма квадратов	Число степеней свободы	Дисперсия
Между столбцами $A$	$S_A^2 = \frac{\sum_{a=1}^k X_A^2}{mn} - \frac{X^2}{km}$	$f_A = k - 1$	$S_A^2 / f_A$
Между строчками $B$	$S_B^2 = \frac{\sum_{b=1}^m X_B^2}{kn} - \frac{X^2}{km}$	$f_B = m - 1$	$S_B^2 / f_B$
Взаимодействие факторов $AB$	$S_{AB}^2 = \sum_{a=1}^k \sum_{b=1}^m \sum_{n=1}^n X^2 - \frac{X^2}{km} - (S_A^2 + S_B^2 + S_Z^2)$	$f_{AB} = (k - 1)(m - 1)$	$S_{AB}^2 / f_{AB}$
Воспроизводимость	$S_Z^2 = \sum_{a=1}^k \sum_{b=1}^m \sum_{n=1}^n X^2 - \frac{\sum_{a=1}^k \sum_{b=1}^m \sum_{n=1}^n X^2}{n}$	$f_Z = km \times (n - 1)$	$S_Z^2 / f_Z$
Сумма	$S^2 = \sum_{a=1}^k \sum_{b=1}^m \sum_{n=1}^n X^2 - \frac{X^2}{kmn}$	$f = km \times (n - 1)$	$S^2 / f$

\* Средние арифметические:

$$X = \sum_{a=1}^k X_A = \sum_{b=1}^m X_B = 22 + 2 + 18 = 12 + 17 + 6 + 7 = 42;$$

$$\sum_{a=1}^k X_A^2 = 484 + 4 + 324 = 812;$$

$$\sum_{b=1}^m X_B^2 = 144 + 289 + 36 + 49 = 518;$$

$$\sum_{a=1}^k \sum_{b=1}^m \left( \sum_{i=1}^n x_{abi} \right)^2 = 4^2 + 7^2 + 5^2 + 6^2 + \dots + (-1)^2 + 3^2 = 300;$$

$$\sum_{a=1}^k \sum_{b=1}^m \sum_{i=1}^n x_{abi}^2 = 2^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 1^2 + 2^2 = 160.$$

\* Сумма квадратов, характеризующая рассеяние отдельных наблюдений под влиянием:

- фактора А:

$$S_A^2 = \frac{\sum_{a=1}^k X_A^2}{mn} - \frac{\left( \sum_{a=1}^k X_A \right)^2}{kmn} = \frac{812}{4 \cdot 2} - \frac{42^2}{3 \cdot 4 \cdot 2} = 28,00;$$

- фактора В:

$$S_B^2 = \frac{\sum_{b=1}^m X_B^2}{kn} - \frac{\left( \sum_{b=1}^m X_B \right)^2}{kmn} = \frac{518}{3 \cdot 2} - \frac{42^2}{3 \cdot 4 \cdot 2} = 12,83;$$

- случайных погрешностей:

$$S_Z^2 = \sum_{a=1}^k \sum_{b=1}^m \sum_{i=1}^n x_{abi}^2 - \frac{\sum_{a=1}^k \sum_{b=1}^m \left( \sum_{i=1}^n x_{abi} \right)^2}{n} = 160 - \frac{300}{2} = 10,00;$$

- взаимодействия факторов:

$$S_{AB}^2 = \sum_{a=1}^k \sum_{b=1}^m \sum_{i=1}^n x_{abi}^2 - \frac{\left( \sum_{a=1}^k X_A \right)^2}{kmn} - (S_A^2 + S_B^2 + S_Z^2) =$$

$$= 160 - \frac{42^2}{3 \cdot 4 \cdot 2} - (28 + 12 + 10) = 36,50.$$

\*Число степеней свободы:

$$f_A = k - 1 = 3 - 1 = 2;$$

$$f_B = m - 1 = 4 - 1 = 3;$$

$$f_{AB} = f_A \cdot f_B = 2 \cdot 3 = 6;$$

$$f_Z = km(n - 1) = 3 \cdot 4 \cdot (2 - 1) = 12.$$

\*Средневзвешенные выборочные дисперсии:

$$\bar{S}_A^2 = S_A^2 / f_A = 28 / 2 = 14,00;$$

$$\bar{S}_B^2 = S_B^2 / f_B = 12,83 / 3 = 4,28;$$

$$\bar{S}_{AB}^2 = S_{AB}^2 / f_{AB} = 36,5 / 6 = 6,10;$$

$$\bar{S}_Z^2 = S_Z^2 / f_Z = 10 / 12 = 0,83.$$

\* Оценка значимости факторов *A*, *B* и *AB* по величине рассчитанного критерия Фишера:

$$F_{A/Z} = \bar{S}_A^2 / \bar{S}_Z^2 = 14 / 0,83 = 16,87;$$

$$F_{B/Z} = \bar{S}_B^2 / \bar{S}_Z^2 = 4,28 / 0,83 = 3,55;$$

$$F_{AB/Z} = \bar{S}_{AB}^2 / \bar{S}_Z^2 = 6,1 / 0,83 = 7,35.$$

Сравниваем расчётные и табличные значения критерия Фишера и делаем выводы о значимости исследуемых факторов на флотационный процесс.

Результаты дисперсионного анализа приведены в табл. 12.6.

Таблица 12.6 - Результаты дисперсионного анализа

Расхождение	$S^2$	$f$	$\bar{S}^2$	$F_p$	$F_{99}$
По реагентным режимам ( <i>A</i> )	28,00	2	14,00	16,87	6,93
По качеству проб руды ( <i>B</i> )	12,83	3	4,28	3,55	5,95
По взаимодействию ( <i>AB</i> )	36,50	6	6,10	7,35	4,82
Случайное	10,00	12	0,83		
Полное	87,33				

Сравнение расчётных значений критерия Фишера ( $F_p$ ) и табличного ( $F_{99}$ ) показывает, что влияние фактора *A* и взаимодействия факторов *AB* значимо ( $F_p > F_{99}$ ), фактора *B* - незначимо ( $F_p < F_{99}$ ).

### Контрольные вопросы

1. Для каких целей используется дисперсионный анализ и условия его применения?

2. Раскройте суть однофакторного дисперсионного анализа.
3. Какие различия между общей, факторной и остаточной суммами квадратов отклонений наблюдаемых значений?
4. Опишите использование однофакторного дисперсионного анализа на примере оценки точности группы измерительных приборов.
5. В чём заключается задача двухфакторного дисперсионного анализа, особенности его проведения?

*Литература к теме: [5,9,11].*

### **Лекция № 13**

## **Корреляционный и регрессионный анализы**

### **Вопросы, выносимые на лекцию:**

*Статистическое исследование промышленного процесса. Назначение корреляционного анализа. Метод наименьших квадратов. Остаточная дисперсия. Регрессионные модели технологических процессов. Корреляционное*

*поле. Коэффициент корреляции. Критерий надёжности коэффициента корреляции. Множественная регрессия.*

Дисперсионный анализ позволяет подтвердить влияние тех или иных факторов на исследуемый результативный признак, но он не даёт возможности определить ни степень их влияния (тесноты связи), ни форму зависимости. Для решения этих вопросов используют корреляционный анализ. Чтобы изучить характер влияния одной величины  $x$  на другую  $y$  выполняют эксперимент, при котором измеряют значение величины  $y$  при различных значениях величины  $x$ . Если две переменные величины  $x$  и  $y$  зависят друг от друга так, что каждому значению одной из них соответствует вполне определённое значение другой, то между ними имеется функциональная связь. Эта связь может быть выражена уравнениями, вид которых определяется характером существующей связи.

Статистические методы позволяют определить уравнение связи, анализировать параметры процесса, построить математическую модель процесса, или, другими словами, установить взаимную зависимость между различными факторами и технологическими результатами процесса.

Статистическое исследование промышленного процесса включает:

- определение законов распределения параметров процесса для выяснения возможности применения тех или иных статистических методов обработки результатов;
- определение тесноты и формы связи между отдельными параметрами процесса;
- получение статистической модели процесса в виде регрессионного уравнения и оценка его адекватности;
- определение динамических характеристик процесса.

Корреляционный анализ позволяет оценивать тесноту связи различных параметров и факторов, влияющих на процесс. Этот метод широко применяется при исследованиях промышленных процессов. При определении коэффициента корреляции, если он достаточно высокий, можно получить информацию, которая позволяет выбрать основные регулировочные влияния на процесс, точки и методы измерения факторов, установить минимально необходимое число измеряемых параметров. Если коэффициент линейной корреляции по абсолютной величине мал, это свидетельствует о более сложной (нелинейной) зависимости между измеряемыми параметрами или о существенном влиянии на них других параметров. В этом случае необходимы вычисления более сложной зависимости в виде нелинейного уравнения. Получение таких уравнений методом наименьших квадратов является основой регрессионного анализа.

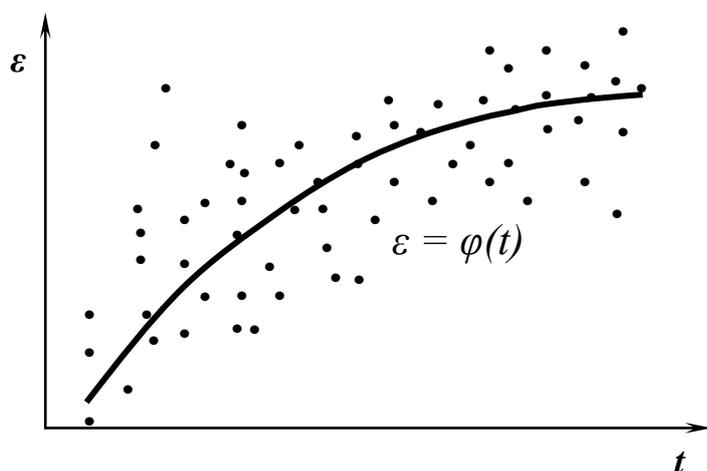
Для корреляционного и регрессионного анализов, как правило, используются данные промышленного процесса (записи в рабочих журналах) и данные специального опробования и специальных исследований.

Регрессионные модели можно использовать, главным образом, для анализа влияния отдельных факторов или их взаимодействия. Кроме того, на регрессионном анализе основано планирование экстремальных экспериментов.

### **Метод наименьших квадратов**

Метод наименьших квадратов применяется в тех случаях, когда искомые величины нельзя измерить непосредственно или представить в виде функций измеряемых величин. Для нахождения  $n$  неизвестных величин достаточно выполнить  $m$  серий наблюдений ( $m > n$ ), чтобы составить число уравнений, необходимое для определения неизвестных величин.

При экспериментальном изучении функциональной зависимости одной величины  $y$  от другой величины  $x$  выполняют ряд измерений величины  $y$  при различных значениях величины  $x$ . Например, на обогатительной фабрике получены различные извлечения при различной продолжительности процесса флотации  $t$ . Результаты исследований, представленные точками в координатах  $\varepsilon - t$ , создают корреляционное поле (рис. 13.1).



**Рис. 13.1 - Корреляционная связь между продолжительностью флотации и извлечением.**

Через это поле можно провести кривую и подобрать формулу, которая описывает существующую стохастическую зависимость таким образом, чтобы параметры этой кривой оказались наилучшими (из всех других кривых). Наличие случайных ошибок измерения указывает на нецелесообразность подбора такой формулы, которая точно бы описывала все опытные значения, то есть график искомой функции не должен проходить через все точки (рис. 13.1), а должен сглаживать случайные ошибки.

Аналитические выражения, которые выбираются на основе теоретических представлений или понятий простоты и удобства, имеют вид:

$$y = b_1x + b_0; \quad (13.1)$$

$$y = b_2x^2 + b_1x + b_0; \quad (13.2)$$

$$y = b_1e^{b_2x} + b_0; \quad (13.3)$$

$$y = 1/(b_1x + b_0) \quad (13.4)$$

и т.д. В общем виде:

$$y = \varphi(x, b_0, b_1, \dots, b_n). \quad (13.5)$$

Оценка параметров  $b_0, b_1, \dots, b_n$  определяется из условия, что сумма квадратов отклонений измеренных значений  $y_n$  от расчётных  $\varphi(x_n, a_0, a_1, \dots, a_n)$

$$S^2 = \sum_{n=1}^N [y_n - \varphi(x_n, b_0, b_1, \dots, b_n)]^2, \quad (13.6)$$

принимала бы наименьшее значение.

Величина  $S^2$  называется остаточной дисперсией и представляет собой сумму квадратов расстояний от каждой точки корреляционного поля до линии регрессии по вертикали. Нахождение значений параметров  $b_0, b_1, \dots, b_n$ , при которых получается наименьшее значение функции:

$$S^2 = S^2(b_0, b_1, \dots, b_n) \rightarrow \min, \quad (13.7)$$

состоит в решении системы уравнений:

$$\frac{\partial S^2}{\partial b_0} = 0; \quad \frac{\partial S^2}{\partial b_1} = 0; \quad \dots; \quad \frac{\partial S^2}{\partial b_n} = 0. \quad (13.8)$$

Система уравнений (13.8) решается в зависимости от вида функций (13.1) - (13.5). Наиболее приемлем тот вид формулы, для которого остаточная дисперсия  $S_{ad}^2$  (дисперсия адекватности) минимальна.

Точность аппроксимации оценивается остаточной дисперсией  $S_{ad}^2$ , которая определяется ошибкой измерения величины  $y$  при каждом значении  $x$  и, соответственно, не должна значительно отличаться от дисперсии воспроизводимости  $S_{\hat{a}i\hat{n}i\hat{d}}^2$ . Сравнение по критерию Фишера:

$$F = S_{aa}^2 / S_{\hat{a}i\hat{n}i\hat{d}}^2 \leq F_{P, f_1, f_2} \quad (13.9)$$

указывает на адекватность регрессионной модели.

В качестве меры оценки информативности уравнения регрессии принято отношение дисперсий:

$$F = S_{(\bar{y})}^2 / S_{ad}^2, \quad (13.10)$$

где  $S_{\bar{y}}^2$  - рассеяние относительно среднеарифметического;

$$S_{(\bar{y})}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 - \text{средний квадрат отклонений (по ординате) точек}$$

корреляционного поля от линии  $\bar{y} = C$ ;

$$S_{ad}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [y_i - \varphi(x_i)]^2 - \text{средний квадрат отклонений (по ординате) точек}$$

корреляционного поля от эмпирической линии регрессии.

При оценке практической ценности уравнения регрессии важен не столько статистический уровень значимости, то есть превышение  $F_m$ , сколько числовое значение  $F$ . Не имеет смысла использовать уравнение регрессии, для которого  $F = 1,4$ , даже если оно формально значимо. Действительно, если квадратичная ошибка, которая определяет рассеяние результатов наблюдений относительно уравнения регрессии, меньше, чем ошибка, которая характеризует рассеяние результатов относительно среднего, всего в  $\sqrt{1,4} \approx 1,2$  раз, то ясно, что преимущества уравнения регрессии по сравнению с уравнением  $y = \bar{y}$  несут существенны.

Регрессионные модели технологических процессов, полученные как в результате активного эксперимента, так и в результате пассивной обработки данных, могут служить для расчёта оптимальных значений параметров. Математические модели содержат существенную информацию о влиянии отдельных факторов и эффектов взаимодействия факторов. Размер коэффициентов уравнения оценивает степень влияния данного параметра или их взаимодействия. Существенную информацию даёт знак, которой указывает направление изменения параметра оптимизации (его уменьшение «-» или увеличение «+»).

### **Корреляция**

О наличии или отсутствии связи между двумя случайными величинами в первом приближении судят по корреляционному полю.

Для характеристики тесноты связи между величинами  $X$  и  $Y$  используют безразмерную величину - коэффициент корреляции  $r_{xy}$ , изменяющийся в пределах  $-1 < r_{xy} < 1$ . Положительная корреляция между случайными величинами характеризует такую вероятностную зависимость между ними, когда при росте одной вторая в среднем тоже будет расти. Отрицательная корреляция характеризует зависимость, когда при росте одной случайной величины вторая в среднем будет убывать. Величина коэффициента корреляции определяет тесноту связи между случайными величинами: чем ближе значения  $r_{xy}$ , тем теснее статистическая связь. Близкое к нулю значение  $r_{xy}$  свидетельствует об отсутствии линейной связи.

Коэффициент парной корреляции определяется по формулам:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{n S_{\bar{x}} S_{\bar{y}}}, \quad (13.11)$$

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 (y_i - \bar{y})^2}}, \quad (13.12)$$

$$r_{xy} = \frac{\left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i y_i) \right] - \bar{x} \bar{y}}{S_{\bar{x}} S_{\bar{y}}} . \quad (13.13)$$

где  $n$  - число измерений;  $S_{\bar{x}}$  и  $S_{\bar{y}}$  - среднеквадратичные отклонения

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2} \quad \text{и} \quad S_{\bar{y}} = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n} - \bar{y}^2} . \quad (13.14)$$

Надёжность статистических характеристик ослабевает с уменьшением объёма выборки. Принципиально возможны случаи, когда отклонение полученной величины коэффициента корреляции от нуля оказывается статистически незначимым. Связь можно считать достоверной, если:

$$|r| \geq t S_r , \quad (13.15)$$

где  $r$  - абсолютное значение коэффициента корреляции;  $t$  - критерий Стьюдента;  $S_r$  - среднеквадратичная ошибка коэффициента корреляции:

$$S_r = \frac{1 - r^2}{\sqrt{n}} . \quad (13.16)$$

Критерий надёжности коэффициента корреляции:

$$\mu = |r| / S_r . \quad (13.17)$$

Если  $\mu > 2,6$ , связь между переменными считается значимой.

Практически во всех случаях статистических исследований реального процесса коэффициент корреляции является довольно грубой оценкой тесноты связи, которая имеет смысл только при линейной зависимости между параметрами.

**Пример 13.1.** На обогатительную фабрику поступает руда, содержащая два полезных компонента - минералы  $X$  и  $Y$ . При этом в партиях сырья с повышенным содержанием  $X$  обычно наблюдается и более высокое содержание  $Y$ , поэтому есть основания ожидать, что эти величины находятся в связи друг с другом. Анализы 10 проб руды приведены в столбцах 2 и 3 расчётной таблицы 13.1.

Таблица 13.1 - Исходные данные и результаты расчёта

$n$	$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$y_i^2$	$x_i y_i$	$Y_{\text{выч}}$
1	6,7	2,4	44,89	5,76	16,08	2,15
2	5,4	1,5	29,16	2,25	8,10	1,84
3	7,2	2,3	51,84	5,29	16,56	2,27
4	6,4	1,9	40,96	3,61	12,16	2,07
5	3,9	1,6	15,21	2,56	6,24	1,48
6	2,2	1,1	4,84	1,21	2,42	1,07
7	5,8	2,0	33,64	4,00	11,60	1,93
8	4,3	1,6	18,49	2,56	6,88	1,57

9	4,6	1,7	21,16	2,89	7,82	1,64
10	3,4	1,3	11,56	1,69	4,42	1,36
$\Sigma$	49,9	17,4	271,75	31,82	92,28	17,38
Среднее	4,99	1,74	-	-	-	1,74

Выполняем расчёт следующих параметров:

\* Средние квадратические отклонения:

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2} = \sqrt{\frac{271,75}{10} - 4,99^2} = 1,51;$$

$$S_{\bar{y}} = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n} - \bar{y}^2} = \sqrt{\frac{31,82}{10} - 1,74^2} = 0,40.$$

\* Коэффициент корреляции:

$$r_{xy} = \frac{\left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i y_i)^2 \right] - \bar{x} \bar{y}}{S_{\bar{x}} S_{\bar{y}}} = \frac{\frac{92,28}{10} - 4,99 \cdot 1,74}{1,51 \cdot 0,40} = 0,90.$$

Полученный коэффициент корреляции достаточно высок, что указывает на наличие тесной связи между содержанием минералов  $X$  и  $Y$ . Найдём уравнение регрессии, которое позволяет вычислить значения наиболее вероятного содержания одного из минералов при известных значениях содержания второго.

\* Коэффициент регрессии:

$$r \frac{S_y}{S_x} = \frac{0,90 \cdot 0,40}{1,51} = 0,24.$$

\* Уравнение регрессии  $Y$  по  $X$ :

$$Y = 1,74 + 0,24(X - 4,99) = 0,54 + 0,24X.$$

С использованием уравнения регрессии вычисляем значения  $y_{\text{выч}}$  и сопоставляем с заданными значениями  $y_i$ . В данном случае результат сопоставления удовлетворительный.

### Множественная регрессия

При изучении множественной регрессии аналитические выражения, которые выбираются на основе теоретических представлений о процессе, в общем виде можно записать:

$$y = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, b_0, b_1, \dots, b_n). \quad (13.18)$$

Например, при изучении связи между тремя переменными, две из которых ( $x_1$  и  $x_2$ ) принимаются за независимые, третья ( $y$ ) - за функцию, их линейная регрессия определяется зависимостью:

$$y = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_0. \quad (13.19)$$

С геометрической точки зрения это уравнение определяет плоскость в пространстве переменных  $x_1, x_2, y$ . Для определения параметров  $b_0, b_1, b_2$  используют способ наименьших квадратов. Сумма квадратов отклонений фактических значений  $y_i$  от вычисленных  $\hat{y}_i$  должна иметь наименьшее значение:

$$\phi = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \rightarrow \min. \quad (13.20)$$

Функция  $\phi$  будет иметь минимум, если  $b_0, b_1, b_2$  удовлетворяют системе уравнений:

$$\frac{\partial \phi}{\partial b_0} = 0; \quad \frac{\partial \phi}{\partial b_1} = 0; \quad \frac{\partial \phi}{\partial b_2} = 0. \quad (13.21)$$

Дифференцирование функции  $\phi$  по переменным  $b_0, b_1, b_2$  позволяет получить уравнение множественной регрессии:

$$y_i - \bar{y} = b_1 (x_{1i} - \bar{x}_1) + b_2 (x_{2i} - \bar{x}_2), \quad (13.22)$$

где коэффициенты  $b_1, b_2$  определяют с применением системы уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 + b_2 \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2) = \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)(y_i - \bar{y}); \\ b_1 \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2) + b_2 \sum_{i=1}^n (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 = \sum_{i=1}^n (x_{2i} - \bar{x}_2)(y_i - \bar{y}). \end{array} \right. \quad (13.23)$$

Для оценки тесноты связи применяют коэффициент множественной корреляции, который определяется через суммы квадратов отклонений:

$$R = \sqrt{\frac{b_1^2 \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 + b_2^2 \sum_{i=1}^n (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 - 2b_1 b_2 \sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2i} - \bar{x}_2)}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (13.24)$$

или через парные коэффициенты корреляции:

$$R = \sqrt{\frac{r_{yx1}^2 + r_{yx2}^2 - 2r_{yx1} r_{yx2} r_{x1x2}}{1 - r_{x1x2}^2}}, \quad (13.25)$$

где парные коэффициенты корреляции:

$$r_{x_1y} = \frac{\left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{1i}y_i) \right] - \bar{x}_1\bar{y}}{S_{\bar{x}_1} S_{\bar{y}}}; \quad (13.26)$$

$$r_{x_2y} = \frac{\left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{2i}y_i) \right] - \bar{x}_2\bar{y}}{S_{\bar{x}_2} S_{\bar{y}}}; \quad (13.27)$$

$$r_{x_1x_2} = \frac{\left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{1i}x_{2i}) \right] - \bar{x}_1\bar{x}_2}{S_{\bar{x}_1} S_{\bar{x}_2}}. \quad (13.28)$$

Связь можно считать достоверной, если:

$$|R| \geq tS_R, \quad (13.29)$$

где  $r$  - абсолютное значение коэффициента корреляции;  $t$  - критерий Стьюдента;  $S_R$  - среднеквадратичная ошибка коэффициента корреляции:

$$S_R = \frac{1 - R^2}{\sqrt{n}}. \quad (13.30)$$

Критерий надёжности коэффициента корреляции:

$$\mu = |R|/S_R. \quad (13.31)$$

**Пример 13.2.** В результате исследования процесса флотации необходимо установить зависимость между содержанием полезного компонента в концентрате ( $\beta$ ) и отходах ( $\mathcal{G}$ ) и извлечением полезного компонента в концентрат ( $\varepsilon$ ). Результаты опробования и расчётные данные приведены в табл. 13.2.

С использованием исходных данных табл. 13.2 составляем уравнение множественной регрессии:

$$\varepsilon_i = \bar{\varepsilon} + b_1(\beta_i - \bar{\beta}) + b_2(\mathcal{G}_i - \bar{\mathcal{G}}).$$

Выполняем расчёт коэффициентов и составляем уравнение регрессии:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 \sum_{i=1}^n (\beta_i - \bar{\beta})^2 + b_2 \sum_{i=1}^n (\beta_i - \bar{\beta})(\mathcal{G}_i - \bar{\mathcal{G}}) = \sum_{i=1}^n (\beta_i - \bar{\beta})(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}); \\ b_1 \sum_{i=1}^n (\beta_i - \bar{\beta})(\mathcal{G}_i - \bar{\mathcal{G}}) + b_2 \sum_{i=1}^n (\mathcal{G}_i - \bar{\mathcal{G}})^2 = \sum_{i=1}^n (\mathcal{G}_i - \bar{\mathcal{G}})(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}), \end{array} \right.$$

то есть:

$$b_1 \cdot 0,971 - b_2 \cdot 0,258 = 11,780;$$

$$-b_1 \cdot 0,258 + b_2 \cdot 0,0854 = -3,590,$$

откуда:  $b_1 = 4,86$ ;  $b_2 = -27,38$ .

$$\varepsilon_i = 75,9 + 4,86(\beta_i - 7,78) - 27,38(\vartheta_i - 0,60)$$

или  $\varepsilon_i = 54,52 + 4,86\beta_i - 27,38\vartheta_i$ .

Оценка тесноты связи по коэффициенту множественной корреляции:

$$R = \sqrt{\frac{b_1^2 \sum_{i=1}^n (\beta_i - \bar{\beta})^2 + b_2^2 \sum_{i=1}^n (\vartheta_i - \bar{\vartheta})^2 - 2b_1b_2 \sum_{i=1}^n (\beta_i - \bar{\beta})(\vartheta_i - \bar{\vartheta})}{\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2}},$$

то есть:

$$R = \sqrt{\frac{4,86^2 \cdot 0,971 + (-27,38)^2 \cdot 0,0854 - 4,86 \cdot (-27,38) \cdot (-0,258)}{162,9}} = 0,86$$

Величина коэффициента корреляции достаточно велика, что свидетельствует о тесной связи исследуемых параметров.

Для установления достоверности рассчитаем среднеквадратичную ошибку коэффициента корреляции:

$$S_R = \frac{1 - R^2}{\sqrt{n}} = \frac{1 - 0,86^2}{\sqrt{10}} = 0,08.$$

Таблица 13.2 - Результаты исследований и предварительные расчёты

$n$	$\beta_i$	$\vartheta_i$	$\varepsilon_i$	$\beta_i - \bar{\beta}$	$\vartheta_i - \bar{\vartheta}$	$\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}$	$(\beta_i - \bar{\beta})^2$	$(\vartheta_i - \bar{\vartheta})^2$	$(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2$	$(\beta_i - \bar{\beta}) \cdot (\vartheta_i - \bar{\vartheta})$	$(\beta_i - \bar{\beta}) \cdot (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})$	$(\vartheta_i - \bar{\vartheta}) \cdot (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})$	$\varepsilon_{\text{аўт}}$
1	8,0	0,48	82	0,22	- 0,12	6,1	0,0484	0,0144	37,21	- 0,0264	1,342	- 0,732	80,26
2	8,3	0,52	81	0,52	- 0,08	5,1	0,2704	0,0064	26,01	- 0,0416	2,652	- 0,408	80,62
3	8,1	0,47	80	0,32	- 0,13	4,1	0,1024	0,0169	16,81	- 0,0416	1,312	- 0,533	81,02
4	8,0	0,53	78	0,22	- 0,07	2,1	0,0484	0,0049	4,41	- 0,0154	0,462	- 0,147	78,89
5	7,9	0,62	76	0,12	0,02	0,1	0,0144	0,0004	0,01	0,0024	0,012	0,003	75,93
6	7,7	0,59	75	- 0,08	- 0,01	- 0,9	0,0064	0,0001	0,81	0,0008	0,072	0,009	75,79
7	7,5	0,65	74	- 0,28	0,05	- 1,9	0,0784	0,0025	3,61	- 0,0140	0,532	- 0,095	73,17
8	7,6	0,69	72	- 0,18	0,09	- 3,9	0,0324	0,0081	15,21	- 0,0162	0,702	- 0,351	72,75
9	7,4	0,74	71	- 0,38	0,14	- 4,9	0,1444	0,0196	24,01	- 0,0532	1,862	- 0,686	70,72
10	7,3	0,71	70	- 0,48	0,11	- 5,9	0,2304	0,0121	34,81	- 0,0528	2,832	- 0,649	70,56
$\Sigma$	77,8	6,00	759	-	-	-	0,9710	0,0854	162,90	- 0,2580	11,780	- 3,590	759,71
Ср.	7,78	0,60	7,59	-	-	-	-	-	-	-	-	-	76,0

При  $f = n - 1 = 9$  по таблице значений критерия Стьюдента (приложение 1) находим  $t_{0,95} = 2,26$ .

Поскольку  $|R| > S_R \cdot t$ , то есть  $0,86 > 0,08 \cdot 2,26$ , полученная зависимость достоверна с коэффициентом надежности (значимости):

$$\mu = R/S_R = 0,86/0,082 = 10,5 \quad \text{и} \quad \mu > t.$$

Таким образом, связь между содержанием полезного компонента в концентрате ( $\beta$ ), отходах ( $\vartheta$ ) и извлечением полезного компонента в концентрат ( $\varepsilon$ ) следует считать значимой. Полученное уравнение регрессии позволяет с достаточной степенью надёжности рассчитывать взаимосвязанные технологические показатели ( $\beta, \vartheta, \varepsilon$ ) в зависимости друг от друга.

### **Контрольные вопросы**

1. В чём заключается статистическое исследование промышленного процесса?
2. Для чего применяется корреляционный анализ?
3. Раскройте суть метода наименьших квадратов.
4. Что такое «коэффициент корреляции» и как он вычисляется?
5. Опишите последовательность составления уравнения множественной регрессии и оценки её достоверности.

*Литература к теме: [5,4,8,9,11].*

## Техника постановки активного эксперимента

### Вопросы, выносимые на лекцию:

*Традиционный метод планирования экспериментов (метод Зайделя-Гаусса). Ограничивающие условия применения метода статистического планирования. Функция отклика. Требования, предъявляемые к факторам в активном эксперименте. Область определения фактора. Критерий эффективности процесса. Статическая модель процесса. Этапы планирования эксперимента.*

### 14.1 Терминология и основные понятия

Существует два метода планирования эксперимента: классический (метод Зайделя-Гаусса) и статистический.

При классическом методе поочередно меняется каждый фактор до определения частичного максимума при постоянном значении всех факторов. Число опытов, необходимое для нахождения оптимальных условий процесса, зависит от числа факторов, взаимного влияния факторов и числа вариаций каждого из них. Минимальное число опытов будет соответствовать предположению, что взаимодействие факторов отсутствует, а максимальное число опытов будет соответствовать предположению, что оптимальное значение любого фактора будет существенно меняться в зависимости от взаимодействия всех остальных. Например, при четырёх факторах и пяти вариациях минимально необходимое число опытов будет  $5^4 = 625$ .

При исследовании сложных руд делают выборочную постановку отдельных серий опытов. При этом в большинстве случаев удаётся подобрать не оптимальный режим обогащения, а только некоторое приближение к нему. Постановка же полного эксперимента для учёта взаимодействия факторов, если и возможна, то мало полезна, потому что до окончания экспериментов результаты первых окажутся несопоставимы с результатами последних, так как происходят неконтролируемые изменения свойств исходных материалов, оборудования и т.д. Большинство результатов, полученных в таких громоздких экспериментах, не представляют интереса, так как нет необходимости знать зависимость параметра оптимизации в области, которая находится далеко от оптимальных условий исследуемого процесса.

Область применения классического метода ограничивается нахождение частных зависимостей между двумя-тремя параметрами. Эти зависимости представляют интерес, главным образом для теоретической интерпретации, особенно в случае наличия двух или нескольких экстремумов. В этом случае

необходимо получить экспериментальные точки во всем диапазоне изменения параметра.

Если целью исследования является нахождение оптимальных условий процесса, классический метод оказывается неэффективным. Кроме того, сложные системы, например флотационные, часто вообще не допускают изменения одного фактора вследствие их внутренней взаимосвязи. Изменение одного фактора может служить причиной изменения других.

Методы статистического планирования экспериментов основаны на одновременной смене многих факторов, при этом планы экспериментов допускают такую следующую статистическую обработку данных, которая позволяет выделить влияние каждого отдельного фактора и их совокупности на изменение исходных параметров процесса. Метод статистического планирования можно применять при таких ограничивающих условиях:

- существует выходной параметр (функция цели) процесса, который количественно и однозначно определяет его эффективность (возможно при ограничениях, налагаемых на другие выходные параметры);

- функция отклика непрерывная, то есть при изменении значений факторов функция цели изменяется непрерывно;

- функция отклика имеет один экстремум, то есть существует одно оптимальное соотношение факторов, при котором функция цели имеет максимальное (минимальное) значение;

- известны все факторы, существенно влияющие на процесс, и эти факторы управляемые, то есть возможно изменять их значения по предварительно составленному плану;

- результаты экспериментов воспроизводимые: ошибка воспроизводимости существенно меньше изменения выходного параметра под влиянием заданного изменения значений факторов с учётом ошибки, вносимой точностью поддержания факторов на заданном уровне.

Экспериментально-статистические методы позволяют даже при низком уровне теоретических знаний о механизме процесса получить математическую модель, которая включает все существенные факторы независимо от их физического смысла. Эти методы позволяют при значительном сокращении количества опытов получить больше информации, чем при классическом методе. Статистика позволяет оценить надёжность полученных результатов рассчитать доверительные интервалы отдельных опытов, экстремальных точек и коэффициентов уравнений.

Предположим, что на процесс влияет только один фактор, тогда изменение параметра оптимизации  $y$  в зависимости от фактора  $x$  может быть представлено графически в виде кривой  $ab$  (рис. 14.1) и аналитически:

$$Y = f(X). \quad (14.1)$$

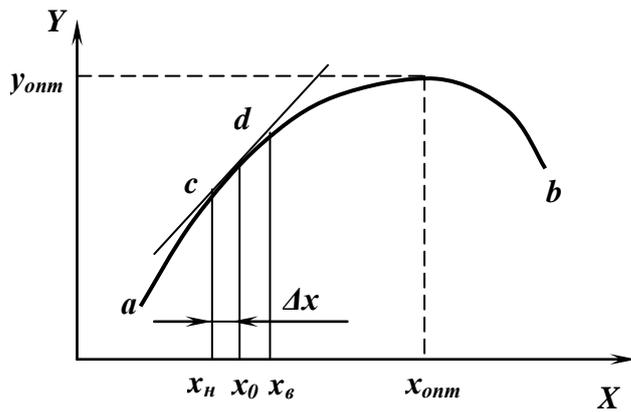


Рис. 14.1- Одномерная функция отклика.

Такая функция называется функцией отклика, экстремуму которой соответствуют координаты  $x_{opt}$  и  $y_{opt}$ . При планировании первой серии опытов уровень фактора  $x_0$  называется нулевым уровнем;  $\Delta x$  - интервал варьирования  $x_n$ , - нижний уровень (кодируется «-»),  $x_e$  - верхний уровень (кодируется «+»). В результате первых двух опытов можно сделать вывод, что значение  $x$  необходимо увеличивать.

При двух факторах функция отклика графически может быть представлена как поверхность в трёхмерном пространстве или уравнением:

$$Y = f(X_1, X_2). \quad (14.2)$$

На рис. 14.2 нанесены кривые равного значения параметра оптимизации для двух переменных  $X_1$  и  $X_2$ .

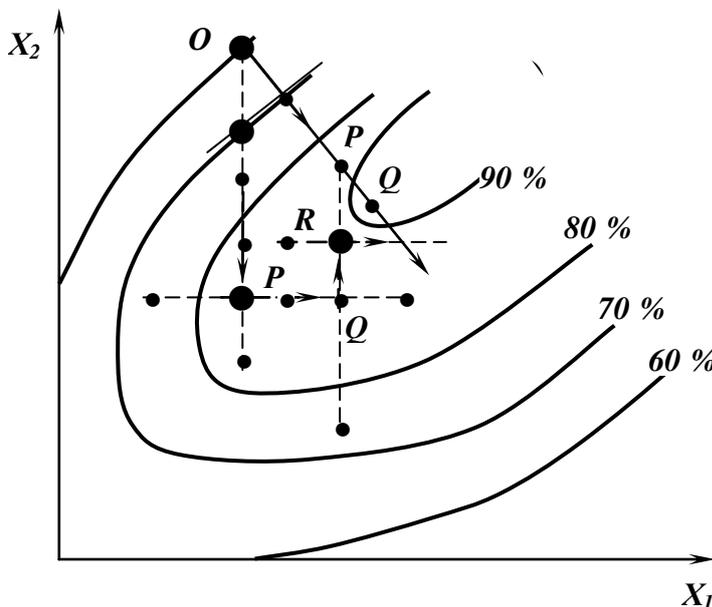


Рис. 14.2 - Движение до максимума поверхности отклика методами однофакторного эксперимента и крутого восхождения.

При классическом методе сначала исследователь фиксирует переменную  $X_1$ , движется из точки  $O$  в направлении переменной  $X_2$  и определяет точку  $P$ , соответствующую экстремальному значению параметра оптимизации. В точке  $P$  фиксируется переменная  $X_2$  и начинается движение в направлении оси  $X_1$ , что

позволяет найти точку  $Q$ . Опять фиксируется  $X_1$  и продолжается движение по  $X_2$  и т.д. до достижения оптимума. Очевидно, что более эффективен план, по которому первоначально определяется направление  $Q$ , а детальное изучение поверхности отклика осуществляется в оптимальной области.

В случае большого числа факторов графическое представление функции невозможно, а аналитическое уравнение будет иметь вид:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n). \quad (14.3)$$

Эффективность планирования тем выше, чем больше факторов влияет на процесс.

Опыты должны быть рандомизированы, то есть они должны проводиться в последовательности, устанавливаемой с помощью таблицы случайных чисел, или любой другой процедурой, обеспечивающей случайный характер проведения опытов. Рандомизация позволяет нивелировать систематические (например, периодические) влияния неконтролируемых факторов.

Далее мы будем иметь дело с некоторым абстрактным объектом, на котором осуществляется эксперимент. В процессе эксперимента исследователь ставит опыты.

*Опыт* - осуществление определённого действия на объект и регистрация полученного результата.

На объект действуют *факторы*. Фактором называется входная независимая переменная, которая может принимать на некотором интервале времени определённые значения. Каждый фактор имеет область определения (или существования). Эта область может быть непрерывной или дискретной, а сам фактор - количественным или качественным.

Пример количественного фактора - содержание твёрдого в пульпе, а качественного фактора - сорт руды, тип реагента, способ флотации и т.п.

К каждому фактору в активном эксперименте предъявляются такие требования:

- фактор должен быть *управляемый*;
- фактор должен быть *операционным*, то есть должны быть указаны последовательность и способ его установки и контроля;
- фактор должен быть *первичным*, то есть непосредственно действовать на объект, а не быть функцией других, более элементарных действий;
- фактор должен быть измеряемым достаточно точно.

К совокупности факторов предъявляется требование совместимости, то есть все их комбинации осуществимы, безопасны и независимы.

Важным понятием является *область определения фактора*. Эта область определяется ограничениями. Ограничениями могут быть:

- *принципиальные*; например, температура не может быть меньше абсолютного нуля, для конкретного аппарата может быть невозможной подача отрицательного количества воды, содержание компонента не может быть меньше нуля и т.д. (это условия физической осуществимости);

- *технические*, связанные с возможностями аппаратуры, дозаторов и т.п.
- *экономические*, связанные с дефицитностью компонентов, продолжительностью эксперимента и т.п.

Изменение входных факторов приводит к изменению принятого критерия исследуемого процесса (критерий эффективности, параметр оптимизации, целевая функция).

Критерий эффективности процесса - это выходная величина, изменение которой интересует экспериментатора. Обычно стремятся достичь экстремального значения этого критерия. Во многих случаях экстремум может быть технически не достижимым, тогда находится наибольшее (или наименьшее) значение критерия.

Между параметрами оптимизации и факторами обычно существует некоторая функциональная связь, например,  $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

Геометрически функция для  $Y$  может быть представлена в виде поверхности, расположенной в многомерном пространстве факторов. Такая, поверхность называется *гиперповерхностью*, а если функция  $f$  - линейная, то *гиперплоскостью*. Геометрическая трактовка функций оказывается полезной, так как в этом случае процесс движения к экстремуму может быть отождествлён с подъёмом (или спуском) на гору, правда, тоже многомерную.

Если зависимость  $f(x)$  достаточно точно описывает исследуемый процесс в интересующей экспериментатора области, то эта зависимость называется *статической моделью процесса*.

Если в зависимость  $f(x)$  включено время, то такая зависимость называется динамической моделью процесса. Модель - это приблизительное математическое описание процесса. Качество этого приближения оценивается ошибками.

Результат какого-либо опыта иногда называют *откликом*, а гиперповерхность - *функцией отклика*.

В соответствии с этим в отличие от физического закона модель может быть хорошей или плохой. Более того, очевидно, существует много моделей, которые описывают объект. Разница между ними будет проявляться только в величине ошибки. Кроме того, одной и той же ошибке (если она не стремится к нулю) может также соответствовать некоторое множество моделей.

*Сравнительные эксперименты.* Целью многих работ не является установление некоторых абсолютных констант, а только установление того факта, что некоторый набор факторов лучше другого. В этом случае, если устойчиво наблюдается разница между наборами, можно не требовать точных измерений, а с использованием методов статистики с необходимой вероятностью установить интересующий нас факт.

Например, если хотят получить максимальное извлечение, то извлечение - целевая функция, если хотят получить максимальное извлечение при заданном качестве концентрата, то фактически отыскивается условный экстремум.

## 14.2 Этапы планирования эксперимента

Рассмотренные ранее методы регрессионного анализа базируются на обработке результатов «пассивного эксперимента», например, данных опробования промышленного процесса, при этом математические методы применяют только на последнем этапе - при обработке результатов наблюдений. Планирование эксперимента предполагает постановку опытов по некоторой ранее составленной схеме (матрице), которая обладает специальными свойствами. Планирование эксперимента предусматривает применение математических методов на всех этапах: при анализе априорной информации, планировании эксперимента, обработке его результатов и принятии решений на промежуточных этапах (для выбора стратегии исследований) и в конце работы (для интерпретации полученных данных).

С усложнением объектов исследований эффективность традиционного подхода к осуществлению активного эксперимента, согласно которому варьировался один фактор, а остальные поддерживались на постоянном уровне, резко снижается, так как не учитывалось взаимное влияние факторов, возмущающее действие среды и наличие обратных связей. Кроме того, при традиционном подходе требовалось проведение большого числа опытов, а надёжность и достоверность результатов, компактность их представления были очень невысоки.

При активном планировании эксперимента все факторы, определяющие процесс, меняют (варьируют) одновременно в соответствии с правилами планирования, а результаты эксперимента представляют в виде математической модели. Выделяют следующие этапы планирования:

- сбор и анализ априорной информации;
- обоснование критерия эффективности исследуемого процесса;
- выбор зависимых и независимых переменных, области изменения независимых переменных;
- определение методов контроля параметров;
- выбор типа математической модели;
- Разработка методики и плана (последовательность проведения) экспериментов;
- разработка схемы и методики испытания;
- определение метода анализа экспериментальных данных;
- осуществление эксперимента и проверка статистических предпосылок для получения данных;
- обработка результатов получения математической модели и её интерпретация;
- выдача рекомендаций.

### ***Контрольные вопросы***

1. Раскройте суть классического метода планирования эксперимента.
2. Укажите ограничивающие условия применения метода статистического планирования экспериментов.
3. Опишите одномерную функцию отклика.
4. Что такое «рандомизация опытов»?
5. Перечислите основные этапы планирования эксперимента.

*Литература к теме:* [5,4,11].

## Выбор критерия эффективности процесса, структуры модели и плана эксперимента

### Вопросы, выносимые на лекцию:

*Выбор критерия эффективности процесса. Определение независимых факторов. Продолжительность переходного процесса. Выбор структуры модели. Методы построения моделей. План эксперимента. Критерии оптимальности планов. D-оптимальность. A-оптимальные планы. E-оптимальные планы.*

### 15.1 Выбор критерия эффективности процесса

Критерий эффективности, оптимизации, функция цели, выходной параметр - все это формализованный смысл наших стремлений и степень понимания, что хорошо, а что плохо. В любых исследованиях выбор критерия определяет их успех.

Выбор критерия - сложная и важная задача. Любой обогатительный процесс характеризуется рядом выходных показателей. Среди них:

- непосредственно измеряемые, такие как выход продуктов, содержание полезного компонента в продуктах, объем переработки;
- технологические критерии, которые вычисляются: извлечение, коэффициент селективности и многочисленный ряд других;
- технико-экономические, вычисляемые с использованием первых двух групп, цен и затрат: себестоимость переработки, рентабельность, прибыль, производительность труда и т.д.

Извлечение в концентрат ценного продукта является одной из важнейших характеристик разделительных процессов. Производительность процесса по готовому продукту - второй важнейший показатель. Третья характеристика процесса разделения - качество концентрата. Указанные критерии процесса связаны между собой так, что рост эффективности каждого из них снижает в какой-то степени эффективность других. Очевидно, что один показатель, например извлечение, не может быть критерием разделения без учета качества концентрата. Иначе, выгоднее будет не обогащать руду, поскольку извлечение в этом случае будет 100%.

Проф. Барский Л.А. сформулировал требования к критериям эффективности процесса:

- критерий должен быть численным и однозначным;
- критерий должен учитывать конечную цель производства;
- критерий должен быть максимально простым и, по возможности, иметь физический смысл.

В настоящее время существует более 100 критериев и ни один из них не удовлетворяет сформулированным требованиям.

В каждом конкретном случае в зависимости от поставленной цели принимают наиболее универсальный критерий.

При планировании экстремальных экспериментов часто в качестве критерия принимается два показателя. Один из них - основной, по которому ищется оптимальный режим (экстремум), и дополнительный, который учитывает, как правило, какие-либо ограничения. Например, при исследовании процесса обогащения угля, критерием можно принять условие:

$$A_{отх} \rightarrow \max$$
$$A_{к-т} < 8\% \text{ (любое допустимое значение),}$$

где  $A_{отх}$ ,  $A_{к-т}$  - зольность отходов и концентрата, соответственно.

В этом случае при поиске экстремума или наибольшего значения ( $A_{отх}$ ) эксперименты прекращают при достижении порогового значения ( $A_{к-т}$ ).

## 15.2 Определение независимых факторов

При исследовании обогатительных процессов очень важно выявить все факторы, влияющие на процесс, а также оценить степень их влияния. Если какой-либо из значимых факторов не включён в рассмотрение, но имеет случайные отклонения в некотором диапазоне значений, то погрешности результатов эксперимента резко возрастают. С одной стороны, включение в план исследований всех факторов, которые существенно влияют на процесс, очень важно, потому что эксперимент, который направлен на отыскание оптимальных условий, может потерять всякое значение, если один или несколько факторов не учтены. С другой стороны, включение в программы исследований всех факторов, которые существенно влияют на процесс, усложняет задачу - увеличивает её размерность.

Степень влияния различных факторов на процесс неодинакова. Обычно только несколько факторов оказывают существенное влияние на конечную величину, а другие влияют на неё незначительно. Задача заключается в выявлении и идентификации существенных факторов на «нулевом» фоне всех остальных, при этом необходимо учитывать как качественные, так и количественные характеристики существенных факторов. Выделить существенные факторы можно на основе анализа публикаций и опроса мнений специалистов. Для анализа такой априорной информации применяют различные методы экспертных оценок: дисперсионный анализ, использование дробных и полных насыщенных планов эксперимента, методы случайного баланса и разветвлённой стратегии. При выборе факторов необходимо соблюдать следующие условия:

- диапазоны изменения факторов должны быть технологические и «умные», нельзя допускать таких значений, при которых возможны выпуск брака или авария;

- факторы в середине диапазона должны подчиняться всем предпосылкам метода наименьших квадратов;

- при очень узком диапазоне модель может быть неинформативной.

Последнее обстоятельство может быть проиллюстрировано следующим примером: известно, что извлечение горючей массы во флотационный угольный концентрат зависит от удельного расхода собирателя и изменяется по экспоненциальному закону (рис. 15.1). Однако при анализе изменения извлечения  $\varepsilon$  в диапазоне расхода собирателя  $q = 1,7-2$  кг/т можно сделать парадоксальный вывод о независимости извлечения от расхода собирателя.

Факторы могут иметь и качественные отличия, например различные реагенты, различные конструкции и т.п.

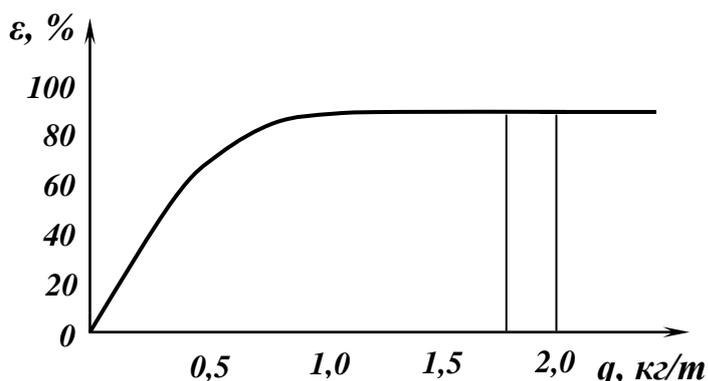


Рис. 15.1 - Зависимость извлечения горючей массы от удельного расхода собирателя.

При экспериментах на оборудовании, работающем в непрерывном режиме, необходимо определить *продолжительность переходного процесса* после изменения значения какого-либо фактора. Отбор проб, снятие показаний можно делать только в установившемся режиме. Опробование следует делать только по истечении времени  $t$  (рис. 15.2).

При исследовании необходимо выбрать независимую переменную, отклик (функцию отклика) на воздействие факторов. Отклик зависит от цели и специфики исследований. Он может быть технологическим (извлечение полезного компонента в концентрат, индекс селективности и т.п.), экономическим (прибыль, рентабельность и т.д.), статистическим и т.п. Отклик должен быть чувствительным к изменению факторов, легко вычисляемым, выражаться одним числом, иметь физический смысл.

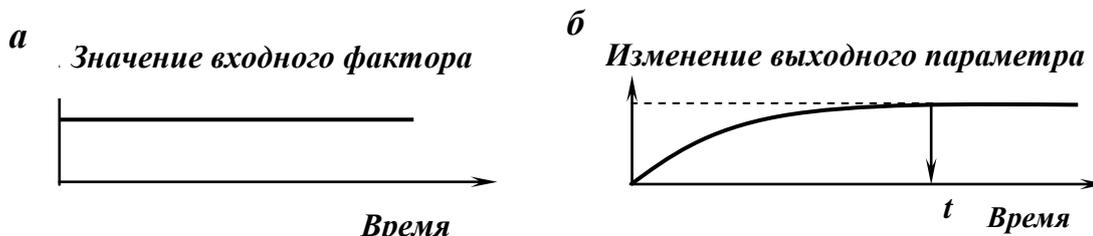


Рис. 15.2 - Режимы работы оборудования.  
а - непрерывный; б - переходный.

Структуру модели исследователь выбирает на основе априорных знаний и интуиции, при этом выбор модели зависит также от знаний об объекте исследований, математического аппарата и цели исследований. Если вид функции отклика неизвестен, её раскладывают в степенные ряды и представляют в виде полинома. Полиномиальные модели очень эффективны, при определённых условиях разложение в степенные ряды возможно для всех функций. С использованием экспериментальных данных получают оценки параметров модели:

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2 + \dots, \quad (15.1)$$

где  $\hat{y}$  - оценка отклика;  $b$  - оценки коэффициентов.

Для определения оценок коэффициентов применяют метод наименьших квадратов. Чтобы убедиться в правильности оценки, осуществляют статистический анализ, при котором проверяют значимость коэффициентов и адекватность модели. Под проверкой значимости коэффициента подразумевают проверку гипотезы о равенстве его нулю, под адекватностью понимают соответствие модели опытным данным.

### 15.3 Выбор структуры модели и плана эксперимента

Благодаря возможности использования ЭВМ можно выбирать структуру модели в соответствии с концепцией «веера моделей». Традиционно при исследованиях рассматривалась одна модель или совокупность различных моделей и из них выбиралась единственная (осуществлялась дискриминация). Концепция «веера моделей» заключается в том, что модель, которая подходит для прогнозирования значений отклика, часто оказывается не пригодной для экстраполяции, а модель, хорошо описывающая процесс в лабораторных условиях, оказывается не пригодной для промышленных условий. Всё это и обусловило необходимость рассмотрения различных моделей без их дискриминации.

Например, сначала рассматривают достаточно простую модель, которая учитывает только линейные эффекты:

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i. \quad (15.2)$$

Затем рассматривают эффекты взаимодействия факторов, то есть  $x_i x_j$  при  $i \neq j$ :

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i x_i + \sum_{i \neq j}^n b_{ij} x_i x_j, \quad (15.3)$$

после чего учитывают квадратичные эффекты  $x_i^2$ ; осуществляют перестройку независимых переменных:  $\ln x$ ,  $\sqrt{x}$ ,  $x^{3/2}$ ,  $e^x$  и т.п.

Рассмотрим методы построения моделей вида (15.3) с применением идеи активного планирования эксперимента.

После выбора модели (или их совокупности) осуществляют эксперимент, по результатам которого определяют параметры выбранной модели. Активное планирование эксперимента предполагает проведение опытов в соответствии с планом эксперимента.

План эксперимента определяет расположение опытных точек в пространстве независимых переменных (факторном пространстве), то есть условия проведения опыта. План эксперимента задаётся в виде матрицы плана, например в виде таблицы, каждая строка которой соответствует условиям опыта, а столбец - значению независимой переменной в каждом опыте. С использованием матричных обозначений модель (15.3) можно записать как:

$$\hat{Y} = XB, \quad (15.4)$$

где  $\hat{Y}$  - вектор-столбец оценок отклика;  $X$  - матрица плана;  $B$  - вектор-столбец оценок коэффициентов.

Модель (15.3) имеет вид:

$$Y = XB + E, \quad (15.5)$$

где  $Y$  - вектор-столбец наблюдений значений отклика;  $E$  - вектор-столбец погрешностей.

Стандартный способ определения значений  $B$  - применение метода наименьших квадратов:

$$B = (X^T X)^{-1} X^T Y. \quad (15.6)$$

В статистическом анализе фундаментальную роль играет информационная матрица  $(X^T X)/s_y^2$ , а также обратная ей дисперсионная матрица. Выбором элементов матрицы плана (матрицы  $X$ ) можно определённым образом формировать статистические свойства модели.

Для представления планов в стандартной форме их обычно центрируют с переносом начала координат в центр факторного пространства. Кроме того, при составлении матрицы плана  $X$  независимые переменные  $x$  нормируют и задают для них факторное пространство:

$$-1 \leq x_i \leq 1; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad x_i = (x_i^* - x_{i0}^*) / \Delta x_i^*, \quad (15.7)$$

где  $x_i^*$  - значение фактора  $i$  в натуральном масштабе;  $x_{i0}^*$  - значения координат  $i$ -го фактора в центре плана в натуральном масштабе, то есть  $x_{i0}^* = (x_{i\max}^* - x_{i\min}^*) / 2$ ;  $\Delta x_i^*$  - интервал варьирования  $i$ -го фактора, то есть  $x_{i0}^* = (x_{i\max}^* - x_{i\min}^*) / 2$ .

При составлении матрицы плана можно задаться условием ротатабельности, которое заключается в том, что дисперсия оценки функции отклика зависит от удаления  $r$  точки  $x$  от центра плана. В соответствии с уравнением (15.6) это условие может быть записано так:

$$\begin{cases} Y^T (X^T X)^{-1} Y = const; \\ r = \sqrt{(x - x_0)^T (x - x_0)} = const. \end{cases} \quad (15.8)$$

План является насыщенным, если число запросов равно числу коэффициентов модели и ненасыщенным, если число опытов больше числа коэффициентов.

Таким образом, планирование эксперимента заключается в том, чтобы до постановки опытов обеспечить оптимизацию анализа данных, игнорирование которой значительно усложняет вычисления и интерпретацию данных.

Понятие оптимальности плана можно трактовать по-разному. Одну и ту же задачу можно решать с помощью различных планов. Если свойства плана известны, можно осуществить эксперимент и анализ данных с наибольшей эффективностью.

Критерии оптимальности планов связаны со свойствами информационной и дисперсионной матриц. Планы можно формировать с использованием критериев оптимальности оценок коэффициентов, например, с минимизацией обобщённой дисперсии коэффициентов. Обобщённая дисперсия коэффициентов модели определяется как дисперсия вектора коэффициентов, она задаётся определителем дисперсионной матрицы. Чем меньше обобщённая дисперсия, тем меньше определитель. Для ортогональных планов обобщённая дисперсия равна произведению дисперсий коэффициентов модели. Подобная оптимальность планов называется *D-оптимальностью* (по первой букве слова *Determinant* - определитель). При *D-оптимальности* точность определения одного коэффициента может быть повышена за счёт снижения точности определения других. Если экспериментатора не удовлетворяет ситуация, в которой он рискует получить некоторые коэффициенты с очень большими дисперсиями оценок, то он может применить другие критерии оптимальности. Например, использовать *A-оптимальные планы* (от слов *Average value* - среднее значение), для которых характерна минимальная средняя дисперсия оценок коэффициентов. При этом точность оценок всех коэффициентов будет одинаковой. *A-оптимальным* планам соответствует минимум следа дисперсионной матрицы, то есть минимум суммы диагональных элементов. Можно принять условия, при которых дисперсии оценок коэффициентов не были бы слишком велики. Этим требованиям соответствуют *E-оптимальные планы* (от слов *Eigen value* - собственное значение), в которых минимизируется максимальное собственное число дисперсионной матрицы. Используют также другие критерии оптимальности планов. Среди критериев оптимальности планов, связанных с прогнозными свойствами модели, можно назвать *G-критерий*, который минимизирует максимальную дисперсию прогноза. К планам, связанным с прогнозными свойствами модели, относятся ротатабельные планы.

При осуществлении любого эксперимента естественно желание экспериментатора сократить число экспериментов, упростить расчёты, перейти

от простой модели, например, первого порядка, к более сложным, используя результатов предыдущих опытов (свойство композиционности плана) - эти требования необходимо учитывать при выборе того или иного плана.

Очень немногие планы одновременно удовлетворяют различным критериям оптимальности. Часто критерии оптимальности противоречивы, поэтому экспериментатору следует искать компромиссный план: оптимальный по одному критерию и квазиоптимальный по другим.

В следующих лекциях рассмотрим несколько наиболее показательных планов эксперимента, которые могут быть использованы при исследовании обогатительных процессов и аппаратов.

### ***Контрольные вопросы***

1. Сформулируйте требования к критериям эффективности процесса.
2. Какие условия необходимо соблюдать при выборе факторов, влияющих на процесс?
3. Опишите методику выбора структуры модели процесса в соответствии с концепцией «веера моделей».
4. Что такое «план экспериментов»? Укажите основные правила составления матрицы плана.
5. Перечислите критерии оптимальности планов.

*Литература к теме:* [5,9,13].

## Факторное планирование экспериментов

### Вопросы, выносимые на лекцию:

*Полный факторный эксперимент (ПФЭ). Матрица полного факторного эксперимента. Определение коэффициентов уравнения регрессии. Причины незначимости коэффициента регрессии. Дробный факторный эксперимент (ДФЭ). Определяющий и обобщающий контраст ДФЭ. Правило смешивания коэффициентов. Метод крутого восхождения. Движение по градиенту.*

### 16.1 Полный факторный эксперимент

Факторное планирование позволяет оценивать линейные эффекты взаимодействия при большом числе независимых переменных и получать модели, связывающие зависимую и независимые переменные.

В полном факторном эксперименте (ПФЭ) для каждого фактора выбирается определённое число уровней и затем осуществляются все возможные их комбинации. В факторных экспериментах варьируют одновременно всеми переменными. Недостатком ПФЭ является необходимость постановки большого числа опытов, так как с ростом числа факторов число опытов растёт по степенному закону:

$$N = k^n, \quad (16.1)$$

где  $N$  - число опытов;  $k$  - число факторов;  $n$  - число уровней каждого фактора.

Все возможные комбинации варьирования двух факторов на двух уровнях будут исчерпаны при постановке четырёх опытов ( $N = 2^2$ ), а трёх факторов на двух уровнях - при постановке восьми опытов ( $N = 2^3$ ). Геометрическая интерпретация ПФЭ показана на рис. 16.1.

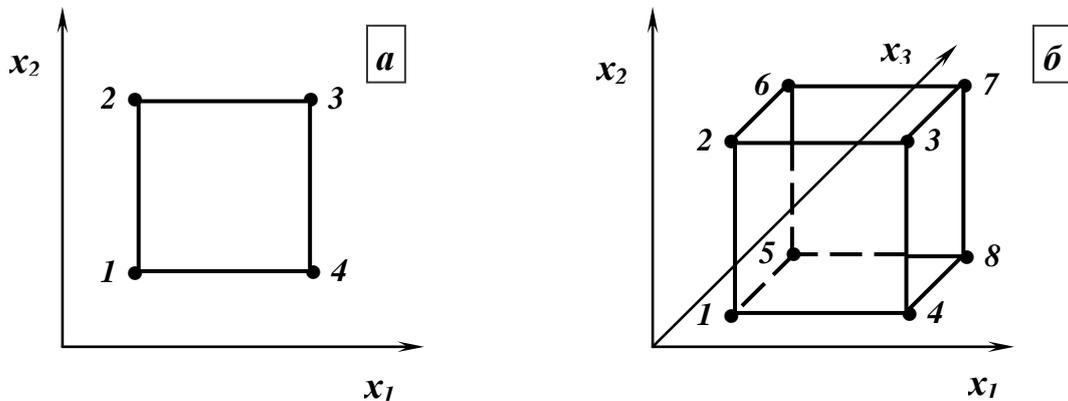


Рис. 16.1 - Геометрическая интерпретация полного факторного эксперимента: а - план типа  $2^2$ ; б - план типа  $2^3$ .

План экспериментов формально представляется матрицей, где каждая строка соответствует одному опыту и определяет его условия. При реализации матрицы каждый фактор может принимать только два значения - «верхнее» и «нижнее». Знаки «+1» или «-1» обозначают, на каком уровне находятся значения факторов («+1» - на верхнем уровне, «-1» - на нижнем уровне).

При заполнении матрицы руководствуются правилом: частота смены знака (уровня) каждого следующего фактора вдвое меньше предыдущего. Если в матрице перебраны все возможные комбинации значений факторов, то матрица представляет полный факторный эксперимент «ПФЭ».

Матрица полного факторного эксперимента при трёх факторах приведена в табл. 16.1. Число строк матрицы -  $N = 2^3 = 8$ . В матрице условно не показаны «1», но они там незримо присутствуют.

Перед экспериментом (реализацией матрицы планирования) задаются основными уровнями факторов (в натуральных единицах: %, г/л, кг/т и т.д.) и интервалами варьирования для каждого фактора. Основным уровнем обозначают:  $X_{oi}$ , интервал варьирования -  $\Delta x$ . Кодовое обозначение основного, верхнего и нижнего уровней соответственно «0», «+1» и «-1».

Тогда для матрицы (табл. 16.1) условия проведения первого, второго и третьего опытов (значения факторов):

$$\begin{array}{lll} X_1 = X_{o1} - \lambda_1 & X_2 = X_{o2} - \lambda_2 & X_3 = X_{o3} - \lambda_3 \\ X_1 = X_{o1} + \lambda_1 & X_2 = X_{o2} - \lambda_2 & X_3 = X_{o3} - \lambda_3 \\ X_1 = X_{o1} - \lambda_1 & X_2 = X_{o2} + \lambda_2 & X_3 = X_{o3} - \lambda_3 \text{ и т.д.} \end{array}$$

Полный факторный эксперимент для трёх факторов позволяет отдельно оценить основные эффекты  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , эффекты взаимодействия первого порядка  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$  и эффект взаимодействия второго порядка  $ABC$ .

Таблица 16.1 - Полный факторный эксперимент для трёх независимых переменных (планирование типа  $2^3$ )

№ опыта	Факторы			Параметр оптимизации
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$Y$
1	-	-	-	$Y_1$
2	+	-	-	$Y_2$
3	-	+	-	$Y_3$
4	+	+	-	$Y_4$
5	-	-	+	$Y_5$
6	+	-	+	$Y_6$
7	-	+	+	$Y_7$
8	+	+	+	$Y_8$

Выбор нулевой точки (центра эксперимента) соответствует оптимальным значениям факторов на основе априорной информации, опыта экспериментатора

и результатов обогащения аналогичных полезных ископаемых. При выборе интервала варьирования  $\Delta x$  руководствуются следующим:

- все значения факторов в матрице должны быть реализованы, то есть должны находиться в области существования этих факторов;
- величина интервала от «+1» до «-1» должна существенно превышать ошибку фиксирования данного фактора;
- интервал варьирования данного фактора должен обеспечивать влияние на выходные параметры процесса.

При постановке эксперимента опыты следует рандомизировать. Рандомизация заключается в случайном выборе очередности постановки опытов. Для случайного выбора номеров опытов можно использовать таблицу случайных чисел или лотерею. Рандомизацию применяют для исключения возможной систематической ошибки опытов и придания ей случайного характера.

Функцию отклика моделируется полиномом первого порядка с учётом парных взаимодействий факторов:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3.$$

Благодаря ортогональности планов ПФЭ, их симметричности коэффициенты уравнения регрессии определяются по формулам:

$$b_0 = N^{-1} \sum_{u=1}^N \bar{y}_u ; \quad (16.2)$$

$$b_i = N^{-1} \sum_{u=1}^N \bar{y}_u x_{iu} ; \quad i, j = 1, 2, \dots, n ; \quad (16.3)$$

$$b_{ij} = N^{-1} \sum_{u=1}^N \bar{y}_u x_{iu} x_{ju} ; \quad i \neq j ; \quad (16.4)$$

$$b_{ijk} = N^{-1} \sum_{u=1}^N \bar{y}_u x_{iu} x_{ju} x_{ku} ; \quad i \neq j \neq k , \quad (16.5)$$

где  $x_{ijk}$  - элементы матрицы планирования (+1 или -1), в которой  $ij$  - номер фактора, а  $u$  - номер опыта.

Различные знаки при коэффициентах свидетельствуют о том, что влияние одного коэффициента слабеет при росте другого. Если коэффициенты имеют один знак, то совместное изменение факторов оказывает большее влияние на функцию отклика, чем индивидуальное изменение каждого фактора.

Гипотезу об однородности выборочных дисперсий воспроизводимости проверяют по критерию Кохрена со степенями свободы  $f_1 = m - 1$  ( $m$  - число опытных данных в каждой серии опытов),  $f_2 = N$  и степени риска  $\alpha$ :

при 
$$G = \frac{S_{y \max}^2}{\sum_1^n S_y^2} < G_{табл} \quad (16.6)$$

гипотеза об однородности не отвергается.

Рассчитывается оценка дисперсии воспроизводимости со степенью свободы  $f = f_1 \cdot f_2$ :

$$S^2 = \left( \sum_1^n S_y^2 \right) / N. \quad (16.7)$$

В случае непринятия гипотезы об однородности оценки дисперсий воспроизводимости можно увеличить число параллельных опытов для вариантов варьирования с большими значениями выборочных дисперсий или признать невозпроизводимость эксперимента. Для выявления источников неоднородности применяют методы дисперсионного анализа.

Значимость коэффициентов регрессии проверяют с помощью критерия Стьюдента. Коэффициент значим, если:

$$|b_i| \geq t S_{bi}. \quad (16.8)$$

Возможны такие причины незначимости коэффициента регрессии:

- интервал варьирования фактора близок к оптимуму;
- интервал варьирования узкий; чем меньше интервал варьирования, тем вероятнее, что даже фактор с сильным влиянием не обнаружит себя как существенный;
- параметр оптимизации процесса не зависит от варьирования фактора.

Если имеет место первая или третья причина, значение фактора стабилизируется на определённом уровне; во втором случае увеличивают интервал варьирования.

После исключения незначимых коэффициентов проверяют адекватность модели - выясняют соотношение между дисперсией адекватности  $S_{ад}^2$  и дисперсией воспроизводимости опытных данных  $S^2$ . Дисперсия адекватности  $S_{ад}^2$  характеризует рассеяние результатов наблюдений вблизи уравнения регрессии:

$$S_{ад}^2 = m^{-1} (N - d)^{-1} \sum_{u=1}^N (y_u - \bar{y}_u)^2, \quad (16.9)$$

где  $m$  - число параллельных опытов;  $d$  - число оцениваемых параметров в уравнении регрессии. Дисперсия адекватности оценивается с  $f = N - d$  степенями свободы.

Если  $S_{ад}^2$  не превышает погрешности эксперимента, оценке которой является  $S^2$ , то считается, что модель адекватна, а если  $S_{ад}^2 > \delta^2$ , то модель

нельзя считать пригодной. Адекватность проверяется по критерию Фишера с уровнем значимости  $1 - \alpha$  и степенями свободы  $f_1 = N - d$  и  $f_2 = N(m - 1)$ :

если отношение:

$$F = S_{a\delta}^2 / S^2 < F_{кр}, \quad (16.10)$$

модель признается адекватной. В случае непринятия гипотезы об адекватности модели переходить к рассмотрению более сложной модели не следует, целесообразнее, если это возможно, провести эксперимент с меньшим интервалом варьирования факторов.

Использование полного факторного эксперимента не всегда целесообразно, так как с одной стороны необходимо большое число опытов, с другой стороны на первом этапе исследования не требуется высокая точность уравнений аппроксимирующей поверхности. Поэтому чаще используют дробный факторный эксперимент (ДФЭ).

**Пример 16.1.** На обогатительной фабрике были проведены исследования процесса фильтрования магнетитового концентрата. Изучали влияние содержания твёрдого в пульпе ( $X_1 = 30-60\%$ ), величины разряжения ( $X_2 = 0,03-0,09$  МПа) и частоты вращения дисков ( $X_3 = 0,2-0,5$  мин<sup>-1</sup>) на удельную производительность вакуум-фильтра ( $Y$ , т/ч · м<sup>2</sup>).

Для планирования эксперимента был использован ПФЭ типа  $2^3$ , который позволил оценить все линейные эффекты и все их взаимодействия. Матрица планирования и результаты экспериментов приведены в табл. 16.2.

Функцию отклика моделируется полиномом первого порядка с учётом парных взаимодействий факторов:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3.$$

Коэффициенты уравнения регрессии определяются по формулам:

$$b_0 = N^{-1} \sum_{u=1}^N \bar{y}_u; \quad b_0 = 1,21;$$

$$b_i = N^{-1} \sum_{u=1}^N \bar{y}_u x_{iu}; \quad b_1 = -0,099; \quad b_2 = 0,129; \quad b_3 = -0,179;$$

$$b_{ij} = N^{-1} \sum_{u=1}^N \bar{y}_u x_{iu} x_{ju}; \quad b_{12} = -0,019; \quad b_{13} = 0,024; \quad b_{23} = -0,054;$$

$$b_{ijk} = N^{-1} \sum_{u=1}^N \bar{y}_u x_{iu} x_{ju} x_{ku}; \quad b_{123} = -0,001.$$

Уравнение регрессии принимает вид:

$$\hat{y} = 1,21 - 0,099x_1 + 0,129x_2 - 0,179x_3 - 0,019x_1x_2 + 0,024x_1x_3 - 0,054x_2x_3 - 0,001x_1x_2x_3.$$

Проводится проверка гипотезы об однородности выборочных дисперсий воспроизводимости.

Критерий Кохрена  $G_{табл.}$  со степенями свободы:  $f_1 = m - 1 = 6 - 1 = 5$ ,  $f_2 = N = 8$  и степенью риска  $\alpha = 0,05$ :  $G_{табл.} = 0,4387$

при 
$$G = \frac{S_{y \max}^2}{\sum_1^n S_y^2} = 0,326 < G_{табл.}$$

гипотеза об однородности не отвергается.

Рассчитывается оценка дисперсии воспроизводимости со степенью свободы  $f = f_1 \cdot f_2 = 5 \cdot 8 = 40$ :

$$S^2 = \left( \sum_1^n S_y^2 \right) / N = 57 \cdot 10^{-3} / 8 = 7,125 \cdot 10^{-3}$$

Значимость коэффициентов регрессии проверяют с помощью критерия Стьюдента. Коэффициент значим, если  $|b_i| \geq tS_{bi}$ .

$$S_{bi} = \sqrt{S^2 / Nm} = \sqrt{7,125 / 8 \cdot 6} = 0,0121.$$

При  $\alpha = 0,05$  и  $f = N(m-1) = 40$   $t = 2,0211$ .

$$b_{кр} = tS_{bi} = 2,0211 \cdot 0,0121 = 0,0244.$$

Таким образом, коэффициенты  $b_{12}$ ,  $b_{13}$  и  $b_{123}$  принимаются незначимыми и уравнение регрессии принимает вид:

$$\hat{y} = 1,21 - 0,099x_1 + 0,129x_2 - 0,179x_3 - 0,054x_2x_3.$$

Проверка адекватности модели:

$$S_{ад}^2 = m^{-1}(N-d)^{-1} \sum_{u=1}^N (y_u - \bar{y}_u)^2 = [6 \cdot (8-5)]^{-1} \cdot 100,8 \cdot 10^{-3} = 5,6 \cdot 10^{-3}.$$

Адекватность проверяется по критерию Фишера. При уровне значимости  $1 - \alpha = 95\%$  и степенях свободы  $f_1 = N - d = 3$  и  $f_2 = N(m-1) = 40$  критерий Фишера  $F_{кр} = 2,84$ .

$$\text{Отношение } F = S_{ад}^2 / S^2 = 5,6 \cdot 10^{-3} / 7,125 \cdot 10^{-3} = 0,79 < F_{кр};$$

Модель признается адекватной.

## 16.2 Дробный факторный эксперимент

При увеличении числа факторов число вариантов варьирования в ПФЭ растёт по показательному закону, например, для исследования 15 факторов с применением ПФЭ нужна постановка как минимум  $2^{15} = 32768$  опытов.

Реализовать столько экспериментов практически невозможно, в первую очередь из за значительных затрат времени и средств. Но если последние и найдутся, то за время проведения опытов состоятся неконтролируемые изменения сырья, оборудования и других факторов, в результате чего полученные результаты окажутся несопоставимыми. Кроме того, при проведении исследований во многих случаях достаточно получить только линейную аппроксимацию функции отклика без оценки некоторых факторов взаимодействия.

Уменьшить необходимое число опытов можно введением в план  $2^n$  факторов в большем количестве, чем предполагается матрицей планирования, т.е. насыщением плана до числа опытов, кратного двум, например, для трёхфакторного плана нужно поставить четыре опыта ( $2^2$ ). Для сокращения числа опытов в матрицу планирования следует ввести дополнительные столбцы, характеризующие эффекты взаимодействия, которыми можно пренебречь. Например, для трёхфакторного плана нужно ввести фиктивный фактор  $x_3$  и варьировать его как вектор-столбец  $x_1x_2$ . Таким образом, можно поставить четыре опыта вместо  $2^3 = 8$ .

Обычно планы дробного факторного эксперимента (ДФЭ) обозначают  $2^{n-p}$ . Из множества  $n$  факторов отбирают  $p$  вспомогательных и  $n - p$  основных факторов, для которых строят полный факторный план. Этот план потом дополняют  $p$  столбцами, соответствующими оставшимся факторам.

Способ построения каждого из  $p$  столбцов определяется генераторами плана ДФЭ - произведениями основных факторов. В случае плана  $2^{n-p}$  должно быть  $p$  генераторов.

В случае ДФЭ с планом  $2^{3-1}$  генератор может быть равен  $x_3 = x_1x_2$ . Полученный план (табл. 16.3) является полурепликой (половиной) полного факторного плана. При этом все свойства полного факторного эксперимента сохранены.

Таблица 16.3 - Дробный факторный эксперимент для трёх независимых переменных (планирование типа  $2^{3-1}$ )

№ опыта	Факторы			Параметр оптимизации
	$x_1$	$x_2$	$x_3 = x_1x_2$	$Y$
1	-	-	+	$y_1$
2	-	+	-	$y_2$
3	+	+	+	$y_3$
4	+	-	-	$y_4$

Таблица 16.2 - Матрица планирования и результаты эксперимента

Интервал варьирования. № опыта	Уровни факторов			Взаимодействия факторов				Опытные данные		Расчет $\hat{\delta}$
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1x_2$	$x_1x_3$	$x_2x_3$	$x_1x_2x_3$	$\bar{y}$	$S_y^2 \cdot 10^3$	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Основной уровень $x_i = 0$	45	0,06	0,4							
Интервал варьирования $\Delta x$	15	0,03	0,2							
Верхний уровень $x_i = + 1$	60	0,09	0,6							
Нижний уровень $x_i = - 1$	30	0,03	0,2							
№ опыта:										
1	+	+	+	+	+	+	+	1,01	2,2	1,01
2	-	+	+	-	-	+	-	1,20	5,5	1,21
3	+	-	+	-	+	-	-	0,90	7,4	0,85
4	-	-	+	+	-	-	+	1,01	9,1	1,05
5	+	+	-	+	-	-	-	1,43	18,6	1,47
6	-	+	-	-	+	-	+	1,71	3,2	1,67
7	+	-	-	-	-	+	+	1,10	0,9	1,11
8	-	-	-	+	+	+	-	1,31	10,1	1,30

Примечание. В столбце 9 приведены средние значения функции отклика  $\bar{y}$  (удельная производительность вакуум-фильтра, т/ч · м<sup>2</sup>); в столбце 10 - дисперсия воспроизводимости опытных данных в каждой серии опытов ( $m = 6$ ); в столбце 11 - результаты расчёта удельной производительности фильтра по полученным уравнениям.

Матрица ДФЭ представляет собой  $1/2$ ,  $1/4$ ,  $1/8$  и т.д. реплику, в которой столбец одного из эффектов получают перемножением столбцов других эффектов.

При выборе дробных реплик необходимо определить и проанализировать с учётом априорной информации смешивание оценок коэффициентов модели. Для этого рассчитывают *определяющий контраст* ДФЭ. Поясним его на примере дробной реплики  $2^{3-1}$ . Для произведения трёх столбцов матрицы выполняется соотношение  $x_1x_2x_3 = +1$  - это и есть определяющий контраст. Таким образом, контраст - это произведение левой и правой частей равенства, определяющего генераторы плана. Например, для плана  $2^{5-2}$  в качестве генераторов взяты соотношения  $x_4 = x_1x_3$  и  $x_5 = x_1x_2x_3$ . Тогда определяющими контрастами являются  $1 = x_1x_3x_4$  и  $1 = x_1x_2x_3x_5$ .

*Обобщающий контраст* плана строится из определяющих контрастов и их произведений во всех возможных сочетаниях  $n = 2, 3, \dots, p$ . Перемножая контрасты и считая, что  $x^2 = 1$ , получим ещё один контраст  $x_2x_4x_5$ . Таким образом, обобщающий контраст равен  $x_1x_3x_4 = x_2x_4x_5 = x_1x_2x_3x_5$ .

Умножая все составляющие обобщающего контраста на факторы и учитывая, что  $x^2 = 1$ , получаем правило смешивания коэффициентов:

$$x_1 = x_3x_4 = x_1x_2x_4x_5 = x_2x_3x_5;$$

$$x_2 = x_1x_2x_3x_4 = x_4x_5 = x_1x_3x_5;$$

$$x_3 = x_1x_4 = x_2x_3x_4x_5 = x_1x_2x_5;$$

$$x_4 = x_1x_3 = x_2x_5 = x_1x_2x_3x_4x_5;$$

$$x_5 = x_1x_3x_4x_5 = x_2x_4 = x_1x_2x_3;$$

$$x_{12} = x_2x_3x_4 = x_1x_4x_5 = x_3x_5;$$

$$x_{23} = x_1x_2x_4 = x_3x_4x_5 = x_1x_5,$$

то есть  $b_1 = \beta_{34} + \beta_{1245} + \beta_{235} + \beta_1$  и т. д.

В зависимости от выбора генераторов получают дробные факторные планы с различной разрешающей способностью. Число элементов в контрасте определяет разрешающую способность плана.

Следует отдавать предпочтение дробным факторным планам с наибольшей разрешающей способностью - главным дробным факторным планам.

Для оценок коэффициентов и анализа моделей с использованием ДФЭ и ПФЭ применяют одни и те же формулы.

### 16.3 Метод крутого восхождения

Факторное планирование может успешно применяться только тогда, когда исследователь находится в оптимальной области. Рассмотренное выше факторное планирование, как правило, не позволяет определить рациональные технологические режимы изучаемого процесса. Однако выбор преимущественных факторов и оценка их значимости по коэффициентам линейной регрессии позволяет спланировать следующие эксперименты для достижения оптимальной области кратчайшим путём.

Кратчайшее расстояние до максимума (минимума) непрерывной однозначной функции отклика из любой точки определяется градиентом - прямой, перпендикулярной изолинии параметра оптимизации (рис. 16.2):

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial X_i} \bar{i} + \frac{\partial f}{\partial X_j} \bar{j} + \dots + \frac{\partial f}{\partial X_m} \bar{m}, \quad (16.11)$$

где  $\partial f / \partial X_i$  - частная производная функции отклика по  $i$ -му фактору;  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{m}$  - единичные векторы в направлении координатных осей факторного пространства.

Оценками частных производных  $\partial f / \partial X_i$  являются коэффициенты линейной регрессии  $b_i$ , следовательно, для движения по градиенту необходимо менять факторы пропорционально их коэффициенту регрессии и в ту сторону, куда указывает знак коэффициента. Это изменение факторов называют шагом крутого восхождения. В большинстве случаев за шаг крутого восхождения каждого фактора можно принимать его коэффициент в модели, выраженный в единицах измерения фактора. Для этого вычисляется произведение коэффициентов на интервале варьирования  $b_i \Delta x_i$ , и фактор с максимальным произведением принимается за базовый  $b_{iB}$ . Для него выбирают шаг варьирования  $\Delta x_{iB}$ . Пропорционально базовому определяют шаги и по другим факторам:

$$\Delta x_i = \Delta x_{iB} b_i / b_{iB}, \quad (16.12)$$

где  $\Delta x_i$  - новый шаг варьирования для  $i$ -го фактора.

Шаговый процесс движения по поверхности отклика продолжается до тех пор, пока исследователь не попадёт в экстремальную область, где линейное приближение уже оказывается недостаточным. Момент перехода через экстремум будет сопровождаться ухудшением значения выходного параметра (параметра оптимизации). Таким образом определяется оптимальная область.

Базовый шаг варьирования определяется на основе тех же соображений, что и первоначальный интервал варьирования. На расчёт градиента  $b_0$  влияния не оказывает. Для качественных факторов на двух уровнях или фиксируется лучший уровень, или градиент реализуется дважды для каждого уровня отдельно. Незначительные факторы

стабилизируются на любом уровне в интервале  $\pm 1$ . Если нет специальных соображений, выбирают нулевой уровень. Если же, например, по экономическим соображениям целесообразно поддерживать нижний уровень, то выбирают его. В движении по градиенту эти факторы не участвуют.

Движение по градиенту возможно и в случае получения неадекватной модели. В эксперимент могут быть включены и некоторые факторы, коэффициенты при которых оказались незначимыми, но важные по технологическим соображениям, так как причины незначительности коэффициентов могут зависеть от неверного выбора интервалов варьирования.

**Пример 16.2.** Необходимо определить оптимальные условия флотации цинковой руды.

Факторы, их основные уровни и интервалы варьирования выбирали с учётом условий работы обогатительной фабрики. Изучали влияние шести факторов ( $x_1$  - продолжительность перемешивания с медным купоросом, мин;  $x_2$  - расход бутилового ксантогената, г/т;  $x_3$  - расход медного купороса, г/т;  $x_4$  - продолжительность аэрации, мин;  $x_5$  - продолжительность флотации, мин;  $x_6$  - расход дитиофосфата, г/т) на индекс селективности - параметр  $y$ :

$$y = \sqrt{\varepsilon(1-R) / [R(1-\varepsilon)]}, \quad (16.13)$$

где  $\varepsilon = \gamma\beta / \alpha$  - извлечение полезного компонента в концентрат, доли ед.;  $\alpha, \beta$  - содержание металла в исходном продукте и концентрате, доли ед.;  $\gamma$  - выход концентрата, доли ед.;  $R$  - извлечение породного компонента в концентрат, доли ед.

$$R = \sqrt{\frac{\varepsilon(1-R)}{R(1-\varepsilon)}}. \quad (16.14)$$

Использована 1/4 реплики от факторного эксперимента  $2^{6-2}$ , реализовано 16 опытов.

По данным результатов ДФЭ (табл. 16.4) получены оценки коэффициентов регрессии для выбранного параметра оптимизации  $y$ . Статистический анализ полученного уравнения регрессии показал, что оно адекватно с надёжностью 95%.

Таблица 16.4 - Результаты проведения ДФЭ

Фактор	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$	$\tilde{x}_5$	$\tilde{x}_6$
Основной уровень	3	15	50	7,5	8	10
Шаг варьирования	–	10	–4	–1	1	3,5
Интервал варьирования	2	10	15	7,5	2	6
Коэффициент регрессии	0,3	0,768	–0,196	–0,197	0,31	0,44

Последовательность применения метода крутого восхождения поясняется табл. 16.5.

Таблица 16.5 - Результаты, полученные при оптимизации цинковой флотации методом крутого восхождения

№ опыта	Факторы						Индекс селективности
	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$	$\tilde{x}_5$	$\tilde{x}_6$	
1	5	25	46	6,5	9	13,5	–
2	5	35	42	5,5	10	17,0	14,86
3	5	45	38	4,5	11	20,5	16,43
4	5	55	34	3,5	12	24,0	17,65
5	5	65	30	2,5	13	27,5	15,83
6	5	75	26	1,5	14	31,0	14,36

За базовый принят фактор  $x_2$ , так как произведение коэффициента  $b_2$  на интервал его варьирования ( $\Delta x_2 = 10$ ) равно 7,68, то есть максимально. Фактор  $x_1$  в расчётах не учитывается и его уровень зафиксирован:  $\tilde{x}_1 = 5$ . Реализация экспериментов в точках 3 - 5 метода крутого восхождения позволила существенно улучшить процесс: достичь индекса селективности 17,65.

Таким образом, методом крутого восхождения были определены оптимальные условия процесса флотации цинковой руды: расходы бутилового ксантогената, медного купороса и дитиофосфата - соответственно 55, 34 и 24 г/т; продолжительность аэрации, флотации и перемешивания с медным купоросом - соответственно 3,5; 12 и 5 мин (незначимых фактор). Определение оптимальных условий флотации с учётом шести факторов потребовало постановки 22 опытов (16 опытов по ДФЭ  $2^{6-2}$  и 6 опытов крутого восхождения).

### Контрольные вопросы

1. Для каких целей применяется факторное планирование экспериментов?
2. Раскройте суть полного факторного эксперимента (ПФЭ).
3. Как формируется план дробного факторного эксперимента (ДФЭ)?
4. В чём выражается отличие определяющего контраста и обобщающего контраста?
5. Опишите метод крутого восхождения.

Литература к теме: [3, 5, 9, 13].

## Симплексный метод и ротатабельное центрально-композиционное планирование экспериментов

### Вопросы, выносимые на лекцию:

*Симплексный метод планирования экспериментов. Преимущества и недостатки метода. Полиномиальная модель. Ротатабельное центрально-композиционное планирование. Звёздные точки. Нулевые центральные точки. Применение компьютерных технологий обработки данных при исследованиях.*

### 17.1 Симплексный метод планирования экспериментов

Симплексный метод планирования экспериментов по сравнению с методом крутого восхождения при анализе одного параметра оптимизации более громоздкий и менее точен.

Сущность симплексного метода состоит в том, что первая серия экспериментов ставится так, чтобы точки, которые отвечают условиям проведения опытов, создавали правильный (регулярный) симплекс в многомерном пространстве. Правильный симплекс - это множество  $n + 1$  равноудалённых друг от друга точек в  $n$ -мерном пространстве. Для  $n = 2$  это равносторонний треугольник, для  $n = 3$  - тетраэдр и т.д.

Правильный симплекс с центром в начале координат в  $n$ -мерном пространстве задаётся матрицей:

$$\begin{pmatrix} -k_1 & -k_2 & \dots & -k_{n-1} & -k_n \\ R_1 & -k_2 & \dots & -k_{n-1} & -k_n \\ 0 & R_2 & \dots & -k_{n-1} & -k_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & k_{n-1} & -k_n \\ 0 & 0 & \dots & R_{n-1} & -k_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & R_n \end{pmatrix} \quad (17.1)$$

где  $k_i = 1/\sqrt{2i(i+1)}$ ;  $R_i = 1/\sqrt{2(i+1)}$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$ .

В матрице каждая строка соответствует одному из опытов серии. В столбцах указаны кодированные значения факторов при единичной длине ребра симплекса. Например, для двухмерного пространства  $k_1 = 0,5$ ;  $R_1 = 0,5$ ;  $k_2 = 0,2887$ ;  $R_2 = 0,4082$ . Вершины начального симплекса имеют такие координаты:  $(0,5; -0,2887)$ ;  $(0,5; 0,2887)$ ;  $(0; 0,4082)$ . Перед проведением экспериментов необходимо выбрать интервал варьирования каждого фактора и принять его равным единице. После построения исходного

симплекса и проведения опытов результаты анализируют и выбирают вершину симплекса, в которой получено наименьшее значение целевой функции (при поиске максимума).

Для движения к оптимуму необходимо поставить опыт в точке, которая является зеркальным отражением точки с минимальным значением функции отклика относительно противоположной грани симплекса.

Для определения условий проведения опыта в отражённой точке используют формулу:

$$x_{ij}^{n+2} = \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_{ij} - x_{ij}^* \quad (17.2)$$

где  $x_{ij}^{n+2}$  - координата новой точки;  $x_{ij}^*$  - координата точки, соответствующей худшему результату;  $\sum_{i=1}^n (x_{ij})$  - сумма координат всех точек симплекса, кроме худшей.

На рис. 17.1 иллюстрируется движение правильного симплекса к экстремуму поверхности отклика, представленной линиями равного значения критерия эффективности двухфакторного процесса (факторы  $X_1$  и  $X_2$ ).

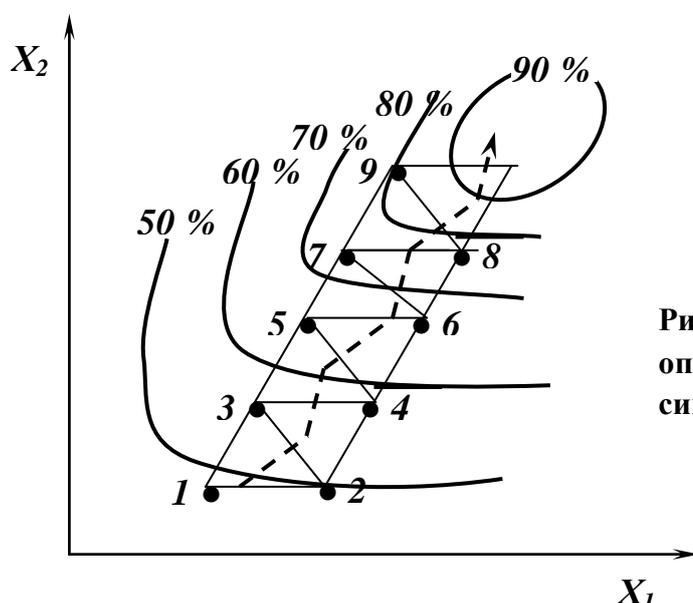


Рис. 17.1 - Схема движения к оптимальной области симплексным методом.

Опыты, поставленные в вершинах симплекса 1, 2 и 3 показали, что худшим результатом оказался опыт 1. Следующий опыт ставится в вершине 4, которая является зеркальным отражением вершины 1 и создаёт с вершинами 1 и 2 новый симплекс. Далее сопоставляются опыты в вершинах 2, 3 и 4. Худший результат (вершина 2) заменяют новой - вершиной 5, где проводится следующий эксперимент и т.д. При достижении области оптимума размер симплекса уменьшают. Условие достижения оптимума следующее:

$$\left( \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} (y_i - y_m)^2} \right) / n \leq \varepsilon, \quad (17.3)$$

где  $\varepsilon$  - заданная малая величина;  $y_m$  - среднее значение отклика в вершинах симплекса.

Целесообразно в каждой вершине симплекса опыты повторить несколько раз и в дальнейшем учитывать математическое ожидание функции отклика.

К преимуществам последовательного симплексного метода относят достаточную простоту, высокую эффективность (повышается с увеличением числа параметров оптимизации), возможность применения в случае временного дрейфа характеристик объекта и совмещения изучения поверхности функции отклика с движением симплекса к экстремуму. Недостатки данного метода - в невозможности описания поверхности отклика (однако по данным, полученным в результате движения симплексов, можно построить уравнение регрессии) и в невозможности учёта качественных изменений факторов.

Несмотря на преимущества, метод часто характеризуется медленной сходимостью и сравнительно высокой погрешностью определения оптимальных значений факторов в области экстремума целевой функции, которые обусловлены, главным образом, субъективным выбором интервала изменения факторов, а также отражением симплекса без учета поведения целевой функции в исследуемой области.

**Пример 17.1.** *Необходимо с применением симплекс-метода найти оптимальную область флотации угля (табл. 17.1).*

*Двухмерность факторного пространства позволила показать на рис. 17.2 схему движения симплекса в процессе поиска. Факторами оптимизации  $x_1$  и  $x_2$  являлись расходы собирателя и вспенивателя, соответственно. В качестве целевой функции было принято извлечение горючей массы в концентрат  $\varepsilon$ . Интервалы изменения расхода собирателя и вспенивателя составляют, соответственно, 200 г/т и 10 г/т. Центр плана -  $x_1 = 1000$  г/т и  $x_2 = 50$  г/т.*

*После реализации экспериментов в точках А, В, С исходного симплекса, то есть при условиях, которые заданы координатами этих точек, очевидно, что худший технологический результат  $\varepsilon_1 = 80\%$  получен в точке А. На следующем шаге применена операция отображения координат точки А.*

Таблица 17.1 - Применение симплекс-метода для оптимизации флотации угля

№ опыта	Симплекс		Расход				Извлечение ε, %
	координаты	вершина	собиратель		вспениватель		
			кодир. ед.	г/т	кодир. ед.	г/т	
1	ABC	A	-0,5	900	0,0	50	80
2	ABC	B	0,0	1000	0,5	55	83
3	ABC	C	-0,5	900	1,0	60	82
4	ABC	A*	0,0	1000	1,5	65	86
5	A*BC	C*	1,5	1100	1,0	60	89
6	A*BC*	B*	1,5	1100	2,0	70	91
7	A*B*C*	A**	2,0	1200	1,5	65	93
8	A**B*C*	C**	2,0	1200	2,5	75	92
9	A**B*C**	B**	2,5	1300	2,0	70	91

Координаты новой точки эксперимента A\* рассчитывают по формуле (17.2):

$$x_1^{A^*} = \frac{2(0-0,5)}{2} - (-0,5) = 0; \quad x_2^{A^*} = \frac{2(0,5+1)}{2} - 0 = 1,5.$$

В следующем симплексе с вершинами A\*, B, C худший результат в точке C. Для этого симплекса по той же формуле (17.2) определяют координаты точки C\* ( $x_1^{C^*} = 1,5; x_2^{C^*} = 1$ ). Таким же образом определяют и другие точки симплекс-метода.

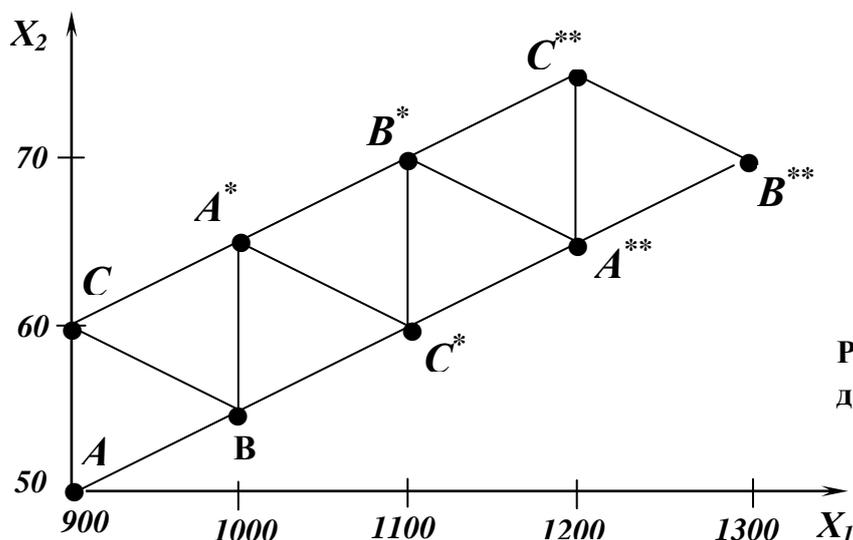


Рис. 17.2 – Схема движения симплекса.

Результат опыта в вершине A\*\*: ε = 93. Продолжение исследования показывает, что приращения функции ε практически нет. Можно сделать вывод, что симплекс достиг экстремальной области. Продолжение поиска приводит к «вращения» симплекса. Принимаем координаты максимума:

расходы собирателя  $X_1 = 1200$  г/т, расходы вспенивателя  $X_2 = 65$  г/т, при этом извлечение составляет  $\varepsilon = 93\%$ .

Если исследовать исходную модель на максимум, например, с помощью частных производных, то получим координаты экстремума, мало отличающиеся от найденных симплекс-методом. Некоторое расхождение в результатах связано с конечными размерами симплекса, но если принять его меньшим (уменьшить шаги варьирования), точность повысится.

## 17.2 Ротатабельное центрально-композиционное планирование экспериментов

Для получения статистической модели при планировании эксперимента в области оптимальных значений параметров необходимо детально изучить функцию отклика. С этой целью её обычно задают в виде полинома второй, а иногда и большей степени. На основе полиномиальной модели можно решить различные задачи:

- интерполяционные - прогнозирование значения функции отклика в середине исследуемого факторного пространства в любой его точке;
- экстраполяционные - прогнозирование функции отклика для точки, расположенной вне факторного пространства;
- оптимизационные - определение оптимальных значений параметров на основе максимизации или минимизации целевой функции.

Полиномиальная модель позволяет оценить степень влияния на функцию отклика различных факторов, минимизировать ресурсы и построить различные графики и диаграммы. Математическая модель почти стационарной области помогает образно представить и исследовать более точно экстремальную поверхность отклика. В большинстве случаев экстремальную область можно описать полиномами второго порядка.

Рассмотренное ранее факторное планирование типа ПФЭ  $2^n$  не позволяет оценить коэффициенты при квадратичных членах модели. Нужно использовать планирование типа  $3^n$ , но оно сложно и требует большого числа опытов. Для достижения этой цели существует несколько методов планирования экспериментов - ортогональное центрально-композиционное, ротатабельное центрально-композиционное и др. Последнее предпочтительнее, так как позволяет получить одинаковую точность модели во всех направлениях. В основе этих методов лежит факторное планирование типа ПФЭ  $2^n$ , матрица которого дополняется так называемыми «звёздными точками» ( $\alpha$ ) и нулевыми (центральными) точками. Метод позволяет получить модель в виде:

$$Y = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i X_i + \sum_{i=1}^n b_{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^n b_{ii} X_i^2, \quad (17.4)$$

где  $b_0$  - свободный член,  $b_i$  - коэффициенты при линейных членах,  $b_{ij}$  - коэффициенты при взаимодействиях,  $b_{ii}$  - коэффициенты при квадратичных членах модели,  $X_i$  - факторы.

Новый план экспериментов разбивается как бы на 2 части, первая из которых (ПФЭ) позволяет найти коэффициенты  $b_0$ ,  $b_j$  и  $b_{ji}$ , вторая - при квадратичных членах.

Характеристика ротатабельного центрально-композиционного планирования приведена в табл. 17.2.

Таблица 17.2 - Характеристика ротатабельного центрально-композиционного планирования

Число факторов	Число точек				$\alpha$
	ПФЭ	звёздных	центральных	общее	
2	4	4	5	13	1,414
3	8	6	6	20	1,682
4	16	8	7	31	2,000
5	32	10	10	52	2,378

Размер плеча звёздных точек рассчитывается по выражению:

$$\alpha = 2^{n/4}, \text{ где } n - \text{число факторов.}$$

Центральный ротатабельный композиционный план второго порядка для трёх факторов приведен в табл. 17.3.

В первой части матрицы представлен план ПФЭ  $2^3$ , во второй - звёздные точки, а в третьей части - нулевые центральные точки. Расчёт коэффициентов модели производится по формулам:

$$b_0 = 0,166(oy) - 0,057 \sum_{j=1}^n (jy), \quad (17.5)$$

$$b_j = 0,073(jy), \quad (17.6)$$

$$b_{jj} = 0,0625(jy) + 0,0069 \sum_{j=1}^n (jy) - 0,0568(oy), \quad (17.7)$$

$$b_{ju} = 0,125(juy), \quad (17.8)$$

$$\text{где } (oy) = \sum_i y_i; (jy) = \sum_i X_{ji}^2 y_i; (jy) = \sum_i X_{ji} y_i; (juy) = \sum_i X_{ji} X_{ui} y_i.$$

Таблица 17.3 - Ротатабельный центрально-композиционный план для трёх факторов

Матрица планирования			Матрица вычисления					
X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>1</sub> <sup>2</sup>	X <sub>2</sub> <sup>2</sup>	X <sub>3</sub> <sup>2</sup>	X <sub>1</sub> X <sub>2</sub>	X <sub>1</sub> X <sub>3</sub>	X <sub>2</sub> X <sub>3</sub>
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8	9
-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1
+1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1
-1	+1	-1	1	1	1	-1	1	-1
+1	+1	-1	1	1	1	1	-1	-1
-1	-1	+1	1	1	1	1	-1	-1
+1	-1	+1	1	1	1	-1	1	-1
-1	+1	+1	1	1	1	-1	-1	1
+1	+1	+1	1	1	1	1	1	1
-1,682	0	0	2,828	0	0	0	0	0
+1,682	0	0	2,828	0	0	0	0	0
0	-1,682	0	0	2,828	0	0	0	0
0	+1,682	0	0	2,828	0	0	0	0
0	0	-1,682	0	0	2,828	0	0	0
0	0	+1,682	0	0	2,828	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

Регрессионный анализ модели осуществляется аналогично планированию ПФЭ 2<sup>n</sup>, но дисперсии коэффициентов модели рассчитываются по другим формулам:

$$b_0 = AN^{-1} \left\{ 2\lambda_1^2 [n+2] \sum_{\mu=1}^n y_{\mu} - 2\lambda_1\lambda_2 \sum_{i=1}^n \sum_{\mu=1}^N x_{i\mu}^2 y_{\mu} \right\}; \quad (17.9)$$

$$b_i = \lambda_2 N^{-1} \sum_{\mu=1}^N x_{i\mu} y_{\mu}; \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (17.10)$$

$$b_{ij} = \lambda_2^2 N^{-1} \lambda_1^{-1} \sum_{\mu=1}^N x_{i\mu} x_{j\mu} y_{\mu}; \quad i, j = 1, 2, \dots, n; \quad i \neq j; \quad (17.11)$$

$$b_{ij} = AN^{-1} \left\{ \lambda_2^2 [(n+2)\lambda_1 - n] \sum_{\mu=1}^N x_{i\mu}^2 y_{\mu} + \right. \\ \left. + \lambda_2^2 (1 - \lambda_1) \sum_{i=1}^n \sum_{\mu=1}^N x_{i\mu}^2 y_{\mu} - 2\lambda_1 \lambda_2 \sum_{\mu=1}^N y_{\mu} \right\}; \quad (17.12)$$

$$\lambda_1 = (2^{n-p} N)(2^{n-p} + 2\alpha^2)^2; \quad (17.13)$$

$$\lambda_2 = (2^{n-p} + 2\alpha^2)^{-1} N; \quad (17.14)$$

$$A = \{2\lambda_1[(n+2)\lambda_1 - n]\}^{-1}. \quad (17.15)$$

Ротатабельное центрально-композиционное планирование экспериментов рационально использовать только при условии получения однородной дисперсии оценки целевой функции.

### 17.3 Применение компьютерных технологий обработки данных при исследованиях

Возможности рассмотренных выше математических аппаратов статистической обработки массивов и планирования активных экспериментов значительно расширяются, а продолжительность обработки результатов исследований сокращается при использовании современных компьютерных систем обработки данных. В результате бурного прогресса технического и программного обеспечения персональных компьютеров решение задач, возникающих при исследованиях, стало доступным практически каждому.

Достаточно вспомнить популярное приложение Windows - Excel, содержащее богатую библиотеку статистических методов обработки данных. Однако, существуют и более специализированные программы, направленные не только на обработку данных, но и на многочисленные методы моделирования и планирования экспериментов.

К таким программам можно отнести приложения Windows с различными версиями Mathcad, Statistica, Axum7, Statgraphics Plus, Simulink и др.

**Mathcad** является мощным математическим редактором, который позволяет проводить различные научные и инженерные расчёты с использованием принципа Wysiwyg («что Вы видите, то и получите»). Например, для выполнения сложных расчётов достаточно ввести математическое выражение с помощью встроенного редактора формул и тут же получить результат. Есть возможность графического представления

результатов. В состав Mathcad входят несколько интегрированных между собой компонентов: текстовый редактор; вычислительный процессор, выполняющий расчёты по введённым формулам с использованием численных методов; символьный процессор, который является, по сути, системой искусственного интеллекта; большое количество справочной информации, как математической, так и инженерной, оформленной в виде библиотеки интерактивных электронных книг.

**Statistica** - это профессиональный статистический модуль, который обладает широкой гаммой базовых и специфических аналитических процедур для обработки данных в бизнесе, науке и инженерном деле. Есть возможность провести дисперсионный и регрессионный анализы, нелинейное моделирование, кластерный факторный и канонический анализ. Характеризуется наличием подпрограмм для осуществления различных методов планирования и обработки результатов активного факторного эксперимента.

В приложении 5 приведен пример подготовки и проведения физического эксперимента по воздушной сепарации с использованием методов планирования и программного модуля **Statistica**.

Программный модуль **Axum7** удобный для создания профессиональных двух- и трёхмерных графиков различных типов. Обладает Microsoft Office интерфейсом и широкими возможностями управления исходными данными, их математической обработки и редактирования графического представления результатов.

**Statgraphics Plus for Windows** является наиболее популярным статистическим графическим продуктом, обладающим удобством пользования интерфейсом. Рассмотрим возможности данной программы подробнее.

Statgraphics Plus включает более 250 статистических и системных процедур, которые могут применяться практически во всех областях научных исследований и при решении промышленных задач.

Статистические процедуры имеют модульную структуру в составе:

- меню *Describe*: содержит статистические методы анализа по одной и множеству переменных, процедуру подбора распределений и средства табуляции данных;

- меню *Compare*: включает методы сравнения двух и более выборок данных, процедуры дисперсионного анализа;

- меню *Relate*: посвящено процедурам простого, полиномиального и множественного регрессионного анализа;

Кроме того, программа содержит меню *Special*, где предусмотрены модули:

- модуль *«Контроль качества»*: предназначен для оценки эффективности всех цепей промышленного процесса и формирования контрольных карт;

- модуль *«Планирование эксперимента»*: поможет сформулировать критерий эффективности исследуемого процесса, подобрать лучший план, организовать сбор и обработку нужной информации. В модуле предлагаются эффективные способы упрощения и интеграции знаний о процессе. Процедура имеет последовательность: определение факторов; выбор плана; генерация рабочей таблицы для сбора данных; выбор модели; интерпретация полученных результатов;

- модуль *«Многомерные методы»*: предназначен для изучения и раскрытия взаимоотношений множества переменных факторов. Модуль поможет сгруппировать данные, определить взаимосвязи между переменными, выдвинуть и проверить различные статистические гипотезы. Существуют процедуры для проведения кластерного анализа, анализа по методу главных компонент, факторного и канонического корреляционного анализа;

- модуль *«Расширенный регрессионный анализ»* включает (кроме базовых процедур регрессионного анализа) сравнение линий регрессии, нелинейную множественную регрессию и ряд других полезных процедур.

Одной из сильных сторон Statgraphics является интерактивная графика с Windows-интерфейсом, которая позволяет пользователю взаимодействовать с данными с помощью графики любым способом. Существует возможность вращения и рассматривания со всех сторон трёхмерного изображения.

Следует остановиться на широких возможностях модуля *«Планирование эксперимента»*. Модуль включает в себя полный набор различных типов планов, учитывающих взаимодействия факторов до восьмого порядка. Основные процедуры, входящие в рассматриваемый модуль:

- планирование эксперимента - полные и дробные планы, планы Плакетта-Бурмена, блочные планы;

- формирование поверхности отклика - центральные композиционные планы, трёхуровневые факториалы, планы Бокса-Бенкена, блочные планы и др.;

- формирование сечений поверхностей отклика;

- смешанные планы.

Для примера рассмотрим использование Statgraphics Plus в качестве аппарата исследования процесса обогащения угольного шлама в винтовом сепараторе.

С помощью данной программы был разработан и в лабораторных условиях реализован ротатбельный композиционный факторный план второго порядка, для которого дисперсия функции отклика является постоянной во всех точках, равноудалённых от центра эксперимента.

Входными факторами приняты: производительность сепаратора,  $Q$ ; содержание твёрдого в питании,  $T$ ; содержание в исходном питании класса  $<0,1$  мм,  $\gamma$ . Выходными параметрами служили качественные показатели продуктов обогащения - зольность концентрата ( $A_{к-т}$ ) и зольность отходов ( $A_{отх}$ ).

После ввода в программу результатов реализации плана были получены (при доверительной вероятности  $P=95\%$ ) следующие математические модели в стандартизированном масштабе:

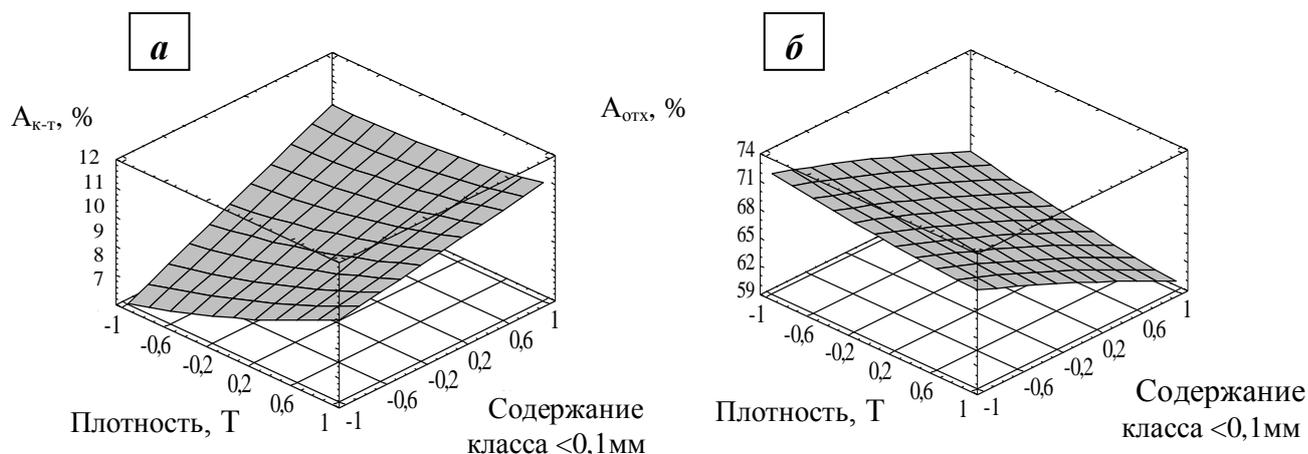
$$A_{отх} = 66,33 - 1,55 \cdot T - 2,41 \cdot Q - 4,40 \cdot \gamma + 0,27 \cdot T^2 - 0,12 \cdot T \cdot Q - 0,34 \cdot T \cdot \gamma + 0,81 \cdot Q^2 - 0,41 \cdot Q \cdot \gamma - 0,34 \cdot \gamma^2 \quad (17.16)$$

$$A_{к-т} = 9,25 + 0,87 \cdot T + 1,01 \cdot Q + 1,16 \cdot \gamma + 0,21 \cdot T^2 - 0,39 \cdot T \cdot Q - 0,59 \cdot T \cdot \gamma + 0,79 \cdot Q^2 + 0,75 \cdot Q \cdot \gamma \quad (17.17)$$

Статистически незначимые коэффициенты модели, удалённые программой, здесь не показаны. Адекватность моделей проверена с помощью критерия Фишера ( $F_{таб} > F_{расч}$ ). Среднеквадратичная ошибка эксперимента составила  $S_{отх} = 1,55\%$ ,  $S_{к-т} = 0,24\%$ .

На рис. 17.3 приведены частичные пересечения поверхностей отклика, представленные рассмотренным модулем в соответствии с выражениями (17.16) и (17.17). Сечения реализованы при постоянном значении объёмной нагрузки на сепаратор.

Программа позволяет получать и контурные графики в плоском координатном пространстве, так называемые «линии равного выхода», которые иллюстрируют наличие (или отсутствие) экстремума функции отклика и его координаты.



**Рис. 17.3 - Частичные сечения поверхностей отклика зольности концентрата (а) и отходов (б) по осям плотность питания - содержание класса  $<0,1$  мм.**

**Simulink** - это программный пакет, предназначенный для построения модели, проведения модельных экспериментов и анализа динамических систем. Он поддерживает работу с линейными и нелинейными системами, которые моделируются в непрерывном времени, промежутке времени. Системы могут быть многоскоростными, то есть состоять из различных частей, которые выбраны или обновлены с различными скоростями.

Пакет содержит модуль Matlab, который позволяет получать результаты анализа полученных динамических моделей как в аналитическом представлении, так и в визуальном.

Благодаря Simulink есть возможность выйти за пределы идеализированных линейных моделей и исследовать более реальные нелинейные модели, которые учитывают всевозможные факторы, например, сопротивление среды, влияние температуры и др.

Пакет может быть полезным при анализе уравнений кинетики некоторых процессов обогащения, накопления продуктов в циркуляционных схемах и др.

### ***Контрольные вопросы***

1. В чём состоит сущность симплексного метода?
2. Изобразите схему движения правильного симплекса к экстремуму поверхности отклика.
3. Какие задачи можно решить на основе полиномиальной модели?
4. Опишите матрицу ротатабельного центрально-композиционного плана для трёх факторов.
5. Охарактеризуйте специализированные компьютерные программы обработки данных при исследованиях.

*Литература к теме:* [4, 5, 9, 11].

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чертов, А.Г. Физические величины / А.Г. Чертов. – М.: Высшая школа, 1990. – 335 с.
2. Кучин, Б.Л. Технологические измерения и измерительные приборы / Б.Л. Кучин. – М.: Металлургия, 1971. – 94 с.
3. Смирнов, В.О. Моделювання процесів збагачення корисних копалин / В.О. Смирнов, П.В. Сергеев, В.С. Білецький. – Донецьк: Східний видавничий дім, 2011. – 300 с.
4. Папушин, Ю.Л. Дослідження корисних копалин на збагачуваність / Ю.Л. Папушин, В.О. Смирнов, В.С. Білецький. – Донецьк: Східний видавничий дім, 2006. – 344 с.
5. Рубинштейн, Ю.Б. Математические методы в обогащении полезных ископаемых / Ю.Б. Рубинштейн, Л.А. Волков. – М.: Недра, 1987. – 296 с.
6. Повх, И.Л. Техническая гидромеханика / И.Л. Повх. – Л.: Машиностроение, 1969. – 524 с.
7. Клайн, С.Д. Подобие и приближенные методы / С.Д. Клайн. – М.: Мир, 1968. – 304 с.
8. Козин, В.З. Экспериментальное моделирование и оптимизация процессов обогащения полезных ископаемых / В.З. Козин – М.: Недра, 1984. – 112 с.
9. Технологическая оценка минерального сырья. Методы исследования: Справочник / Под ред. П.Е. Остапенко. – М.: Недра, 1990. – 264 с.
10. Митрофанов, С.И. Исследование полезных ископаемых на обогатимость / С.И. Митрофанов, Л.А. Барский, В.Д. Самыгин. – М.: Недра, 1974. – 352 с.
11. Тихонов, О.Н. Закономерности эффективного разделения минералов в процессах обогащения полезных ископаемых / О.Н. Тихонов. – М.: Недра, 1984. – 208 с.
12. Пилов, П.И. Математическое моделирование и структурно-экстраполяционный анализ в задачах обогащения: монография / П.И. Пилов, А.М. Мильцын, В.И. Олевский. – 2-е изд., испр. и доп. – Д., Национальный горный университет, 2011. – 187 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Критерий Стьюдента  $t$

Число степеней свободы, $f$	Уровень значимости, $\alpha$			
	0,10	0,05	0,01	0,001
1	6,31	12,70	63,70	637,00
2	2,92	4,30	9,92	31,60
3	2,35	3,18	5,84	12,90
4	2,13	2,78	4,60	8,61
5	2,01	2,57	4,03	6,86
6	1,94	2,45	3,71	5,96
7	1,89	2,36	3,50	5,40
8	1,86	2,31	3,36	5,04
9	1,83	2,26	3,25	4,78
10	1,81	2,23	3,17	4,59
11	1,80	2,20	3,11	4,44
12	1,78	2,18	3,05	4,32
13	1,77	2,16	3,01	4,22
14	1,76	2,14	2,98	4,14
15	1,75	2,13	2,95	4,07
16	1,75	2,12	2,92	4,01
17	1,74	2,11	2,90	3,96
18	1,73	2,10	2,88	3,92
19	1,73	2,09	2,86	3,88
20	1,73	2,09	2,85	3,85
21	1,72	2,08	2,83	3,82
22	1,72	2,07	2,82	3,79
23	1,71	2,07	2,81	3,77
24	1,71	2,06	2,80	3,74
25	1,71	2,06	2,79	3,72
26	1,71	2,06	2,78	3,71
27	1,71	2,05	2,77	3,69
28	1,70	2,05	2,76	3,66
29	1,70	2,05	2,76	3,66
30	1,70	2,04	2,75	3,65
40	1,68	2,02	2,70	3,55
60	1,67	2,00	2,66	3,46
120	1,66	1,98	2,62	3,37
$\infty$	1,64	1,96	2,58	3,29

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Критерий Фишера  $F$

Уровень значимости, $\alpha = 0,01$								
$f_1 \backslash f_2$	4	7	10	16	24	40	100	$\infty$
1	5625,0	5928,0	6056,0	6169,0	6234,0	6286,0	6334,0	6366,0
2	99,25	99,34	99,40	99,44	99,46	99,48	99,49	99,50
3	28,71	27,67	27,23	26,83	26,60	26,41	26,23	26,12
4	15,98	14,98	14,54	14,15	13,93	13,74	13,57	13,46
5	11,39	10,45	10,05	9,68	9,47	9,29	9,13	9,02
6	9,15	8,26	7,87	7,52	7,31	7,14	6,99	6,88
7	7,85	7,00	6,62	6,27	6,07	5,90	5,75	5,65
8	7,01	6,19	5,82	5,48	5,28	5,11	4,96	4,86
9	6,42	5,62	5,26	4,92	4,73	4,56	4,41	4,31
10	5,99	5,21	4,85	4,52	4,33	4,17	4,01	3,91
12	5,41	4,65	4,30	3,98	3,78	3,61	3,46	3,36
14	5,03	4,28	3,94	3,62	3,43	3,26	3,11	3,00
16	4,77	4,03	3,69	3,37	3,18	3,01	2,86	2,75
18	4,58	3,85	3,51	3,19	3,00	2,83	2,68	2,57
Уровень значимости, $\alpha = 0,05$								
$f_1 \backslash f_2$	4	7	10	16	24	40	100	$\infty$
1	225,0	237,0	242,0	246,0	249,0	251,0	253,0	254,0
2	19,25	19,36	19,39	19,43	19,45	19,47	19,49	19,50
3	9,12	8,88	8,78	8,69	8,64	8,60	8,56	8,53
4	6,39	6,09	5,96	5,84	5,77	5,71	5,66	5,63
5	5,19	4,88	4,74	4,60	4,53	4,46	4,40	4,36
6	4,53	4,21	4,06	3,92	3,84	3,77	3,71	3,67
7	4,12	3,79	3,63	3,49	3,41	3,34	3,28	3,23
8	3,84	3,50	3,34	3,20	3,12	3,05	2,98	2,93
9	3,63	3,29	3,13	2,98	2,90	2,82	2,76	2,71
10	3,48	3,14	2,97	2,82	2,74	2,67	2,59	2,54
12	3,26	2,92	2,76	2,60	2,50	2,42	2,35	2,30
14	3,11	2,77	2,60	2,44	2,35	2,27	2,19	2,13
16	3,01	2,66	2,49	2,33	2,24	2,16	2,07	2,01
18	2,93	2,58	2,41	2,25	2,15	2,07	1,98	1,92

Примечание:  $f_1$  – относится к большей дисперсии,  $f_2$  – к меньшей.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Критерий Кохрена G

Уровень значимости, $\alpha = 0,01$								
$f \backslash k$	1	3	6	10	16	36	144	$\infty$
2	0,9999	0,9794	0,9172	0,8539	0,7949	0,7067	0,6062	0,5000
3	0,9933	0,8831	0,7606	0,6743	0,6059	0,5153	0,4230	0,3333
4	0,9676	0,7814	0,6410	0,5536	0,4884	0,4057	0,3251	0,2500
5	0,9279	0,6957	0,5531	0,4697	0,4094	0,3351	0,2644	0,2000
6	0,8828	0,6258	0,4866	0,4084	0,3529	0,2858	0,2229	0,1667
7	0,8376	0,5685	0,4347	0,3616	0,3105	0,2494	0,1929	0,1429
8	0,7945	0,5209	0,3932	0,3248	0,2779	0,2214	0,1700	0,1250
9	0,7544	0,4810	0,3592	0,2950	0,2514	0,1992	0,1521	0,1111
10	0,7175	0,4469	0,3308	0,2704	0,2297	0,1811	0,1376	0,1000
15	0,5747	0,3317	0,2386	0,1918	0,1612	0,1251	0,0934	0,0667
20	0,4799	0,2654	0,1877	0,1501	0,1248	0,0960	0,0709	0,0500
30	0,3632	0,1913	0,1327	0,1054	0,0867	0,0658	0,0480	0,0333
40	0,2940	0,1508	0,1033	0,0816	0,0668	0,0503	0,0363	0,0250
60	0,2151	0,1069	0,0722	0,0567	0,0461	0,0344	0,0245	0,0167
120	0,1225	0,0585	0,0387	0,0302	0,0242	0,0178	0,0125	0,0083
$\infty$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Уровень значимости, $\alpha = 0,05$								
$f \backslash k$	1	3	6	10	16	36	144	$\infty$
2	0,9985	0,9392	0,8534	0,7880	0,7341	0,6602	0,5813	0,5000
3	0,9669	0,7977	0,6771	0,6025	0,5466	0,4748	0,4031	0,3333
4	0,9065	0,6841	0,5598	0,4884	0,4366	0,3720	0,3093	0,2500
5	0,8412	0,5981	0,4783	0,4118	0,3645	0,3066	0,2513	0,2000
6	0,7808	0,5321	0,4184	0,3568	0,3135	0,2612	0,2129	0,1667
7	0,7271	0,4800	0,3726	0,3154	0,2756	0,2278	0,1833	0,1429
8	0,6798	0,4377	0,3362	0,2829	0,2462	0,2022	0,1616	0,1250

9	0,6385	0,4027	0,3067	0,2568	0,2226	0,1820	0,1446	0,1111
---	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------	--------

*Окончание таблицы*

10	0,6020	0,3733	0,2823	0,2353	0,2032	0,1655	0,1308	0,1000
15	0,4709	0,2758	0,2034	0,1671	0,1429	0,1144	0,0889	0,0667
20	0,3894	0,2205	0,1602	0,1303	0,1108	0,0879	0,0675	0,0500
30	0,2929	0,1593	0,1137	0,0921	0,0771	0,0604	0,0457	0,0333
40	0,2370	0,1259	0,0887	0,0713	0,0595	0,0462	0,0347	0,0250
60	0,1737	0,0895	0,0623	0,0497	0,0411	0,0316	0,0234	0,0167
120	0,0998	0,0495	0,0337	0,0260	0,0218	0,0165	0,0120	0,0083
$\infty$	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Критерий Пирсона  $\chi^2$

Число степеней свободы, $f$	Уровень значимости					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0