ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ИНЖЕНЕРНОЙ МЕХАНИКИ И МАШИНОСТРОЕНИЯ
КАФЕДРА ЭНЕРГОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

учебной дисциплины по выбору студента цикла профессиональной подготовки

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ»

для студентов направления подготовки
15.03.02 «Технологические машины и оборудование»
профиль «Гидравлические машины, гидроприводы и гидропневмоавтоматика»

Рассмотрено
на заседании кафедры
«Энергомеханические системы»
Протокол № 6 от 16.02.2017 г.

Донецк, 2017

Методы математического моделирования технологических объектов

Лекция 1. Введение в математическое моделирование

Моделированием

Называется процесс замены одного объекта другим с целью изучения свойств объекта - оригинала путем получения информации об объекте - модели

Модель **– представление объекта, системы или явления, в некоторой форме, отличной от их реального существования**	***Моделирование*** **-** **Во-первых, построение модели** **Во-вторых, изучение модели** **В-третьих, анализ системы на основе данной модели**

Математическая модель

- — это приближенное описание какого-либо класса явлений или объектов реального мира на языке математики.

- Основная цель моделирования — исследовать эти объекты и предсказать результаты будущих наблюдений.

- Однако моделирование — это еще и метод познания окружающего мира, дающий возможность управлять им.

Математической моделью

- ***некоторого объекта, процесса или явления*** *будем называть запись его свойств на формальном языке с целью получения нового знания (свойств) об изучаемом процессе путем применения формальных методов.*

- Альтернативой формальному (математическому) подходу является экспериментальный подход.

Связь курса с другими дисциплинами

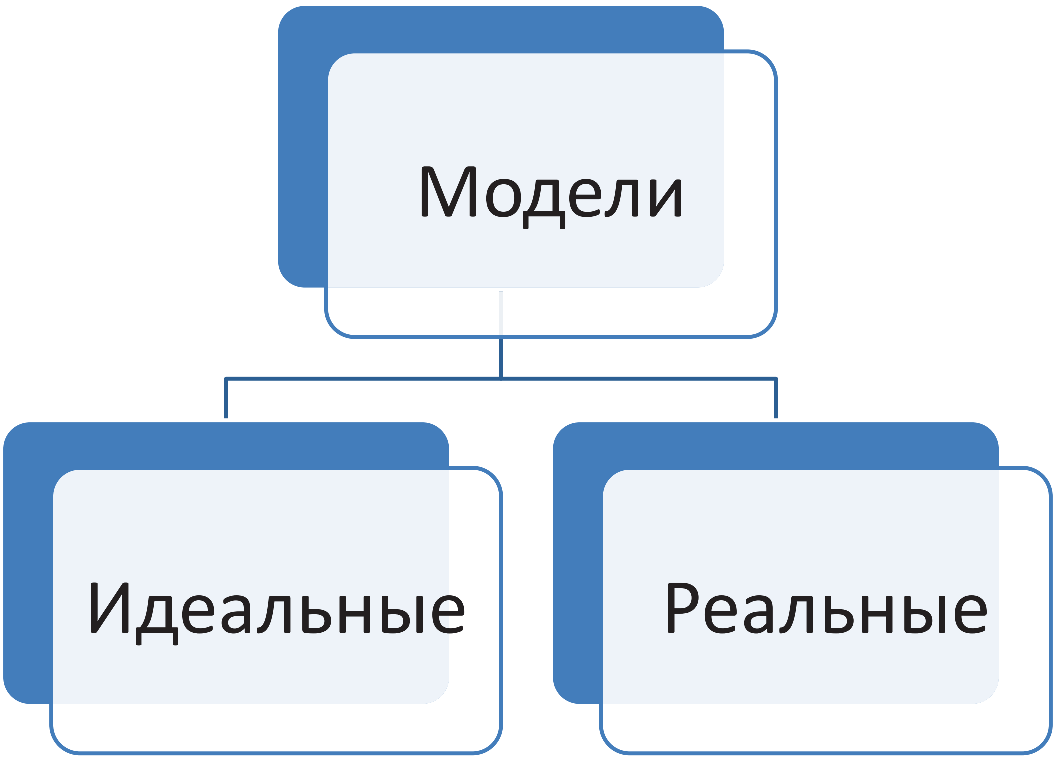
Математические дисциплины

- Математический анализ
- Линейная, абстрактная алгебра, аналитическая геометрия
- Дифференциальные уравнения
- Уравнения математической физики
- Теория вероятностей, случайные процессы
- …

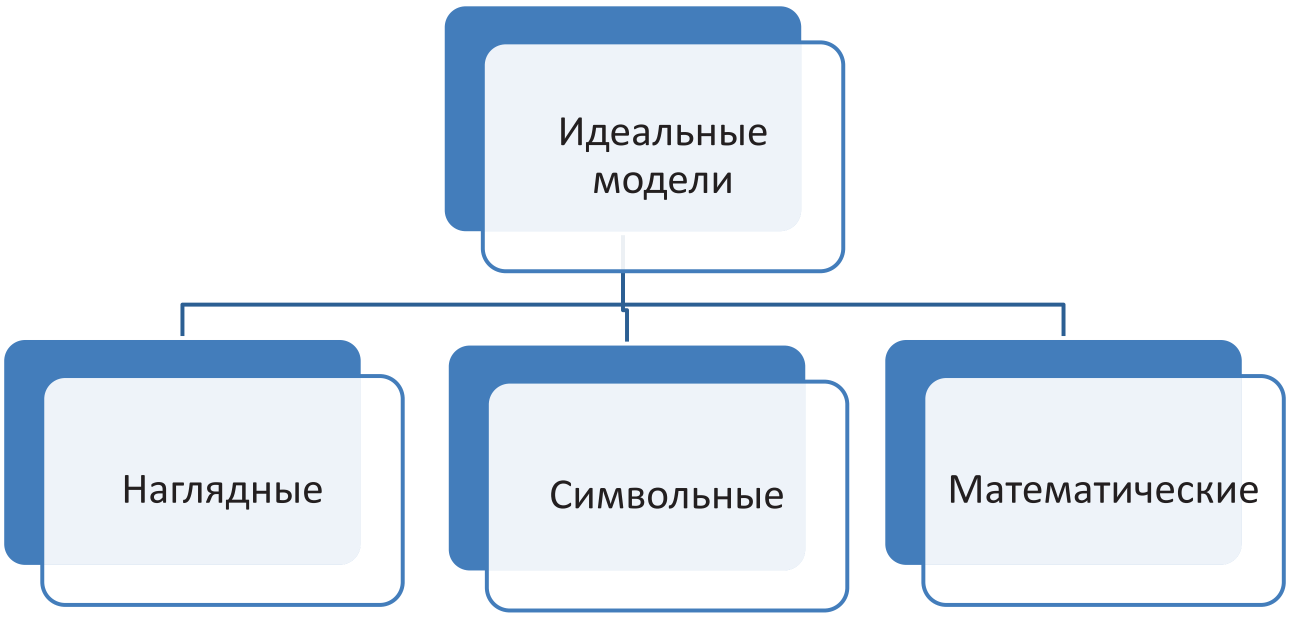
Другие необходимые дисциплины

- Теория технических систем
- Теория и практика научных исследований
- Автоматизированные системы научных исследований
- Знание предметной области

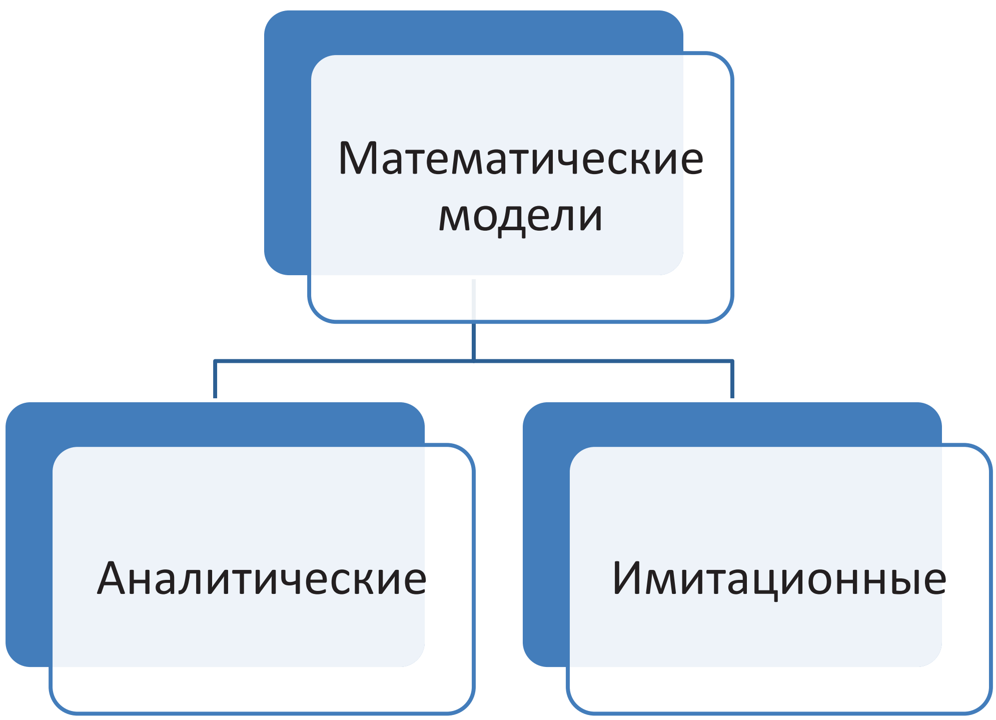
Классификация моделей



Классификация идеальных (мысленных) моделей



Классификация математических моделей

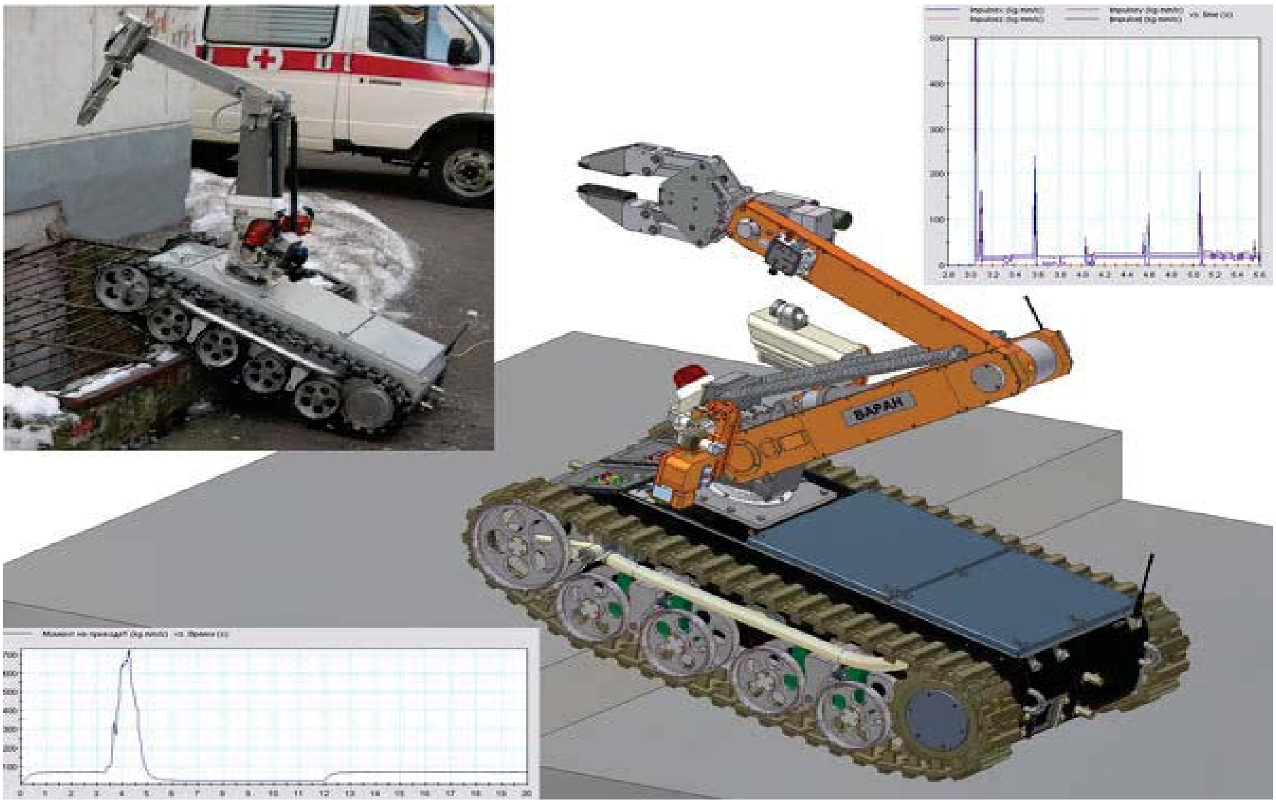


Аналитические модели

Детерминирован-ные	Стохастические
Линейные	Нелинейные
Аналитически решаемые	Численно решаемые
Теоретические	Эмпирические
Статические	Динамические

Имитационное моделирование

метод, позволяющий строить модели, описывающие процессы так, как они проходили бы в действительности. Такую модель можно «проиграть» во времени как для одного испытания, так и заданного их множества. При этом результаты будут определяться случайным характером процессов. По этим данным можно получить достаточно устойчивую статистику.



Имитационное моделирование

— это частный случай математического моделирования. Существует класс объектов, для которых по различным причинам **не** разработаны аналитические модели, либо не разработаны методы решения полученной модели. В этом случае аналитическая модель заменяется имитатором или имитационной моделью.

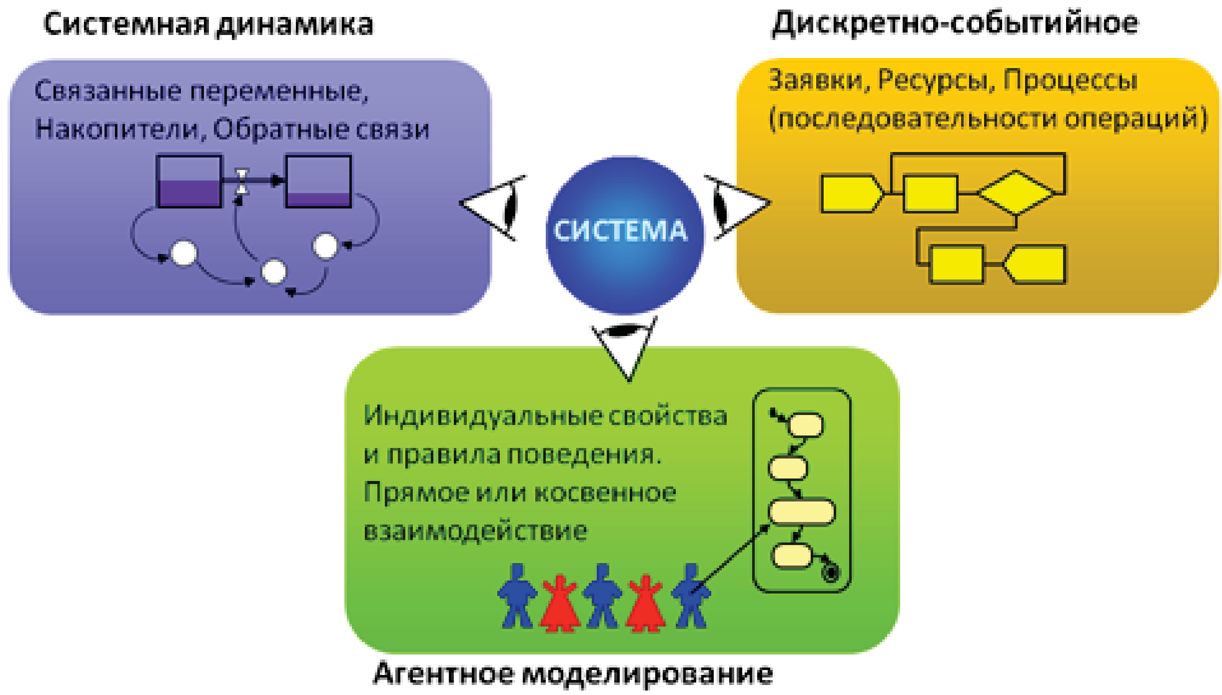
Имитационное моделирование

— это метод исследования, при котором изучаемая система заменяется моделью, с достаточной точностью описывающей реальную систему, с которой проводятся эксперименты с целью получения информации об этой системе.

- Экспериментирование с моделью называют **имитацией** (имитация — это постижение сути явления, не прибегая к экспериментам на реальном объекте).

- экспериментирование на компьютере проводится в целях **проектирования**, **анализа** и **оценки функционирования объекта.**

Виды имитационного моделирования



Системная динамика

- 1-й этап: Построение графических диаграмм причинных связей и глобальных влияний одних параметров на другие во времени;
- 2-й этап: созданная на основе диаграмм модель имитируется на компьютере. Такой вид моделирования помогает понять суть происходящего и выявить причинно-следственные связи.

Системная динамика

- С помощью системной динамики строят модели технических объектов, в том числе, отдельных устройств и целых систем, бизнес-процессов, развития города, модели связей в системе производства, динамики популяции, экологии и развития эпидемии. Метод основан Джеем Форрестером в 1950 годах.

Дискретно-событийное моделирование

- функционирование системы представляется как хронологическая последовательность событий. Событие происходит в определенный момент времени и знаменует собой изменение состояния системы.

Дискретно-событийное моделирование

- подход к моделированию, предлагающий абстрагироваться от непрерывной природы событий и рассматривать только основные события моделируемой системы, такие, как: «ожидание», «обработка заказа», «движение с грузом», «разгрузка» и другие.

Дискретно-событийное моделирование

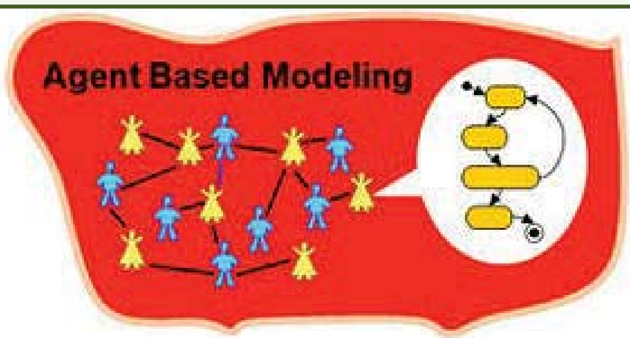
- наиболее развито и имеет огромную сферу приложений — от логистики и систем массового обслуживания до транспортных и производственных систем. Этот вид моделирования наиболее подходит для моделирования производственных процессов. Основан Джеффри Гордоном в 1960-х годах.

Агентное моделирование

- относительно новое (1990-е-2000-е гг.) направление в имитационном моделировании, которое используется для исследования децентрализованных систем, динамика функционирования которых определяется не глобальными правилами и законами, а наоборот, когда эти глобальные правила и законы являются результатом индивидуальной активности членов группы.

Агент -

некая сущность, обладающая активностью, автономным поведением, может принимать решения в соответствии с некоторым набором правил, взаимодействовать с окружением, а также самостоятельно изменяться.



Цель агентных моделей

- получить представление об этих глобальных правилах, общем поведении системы, исходя из предположений об индивидуальном, частном поведении её отдельных активных объектов и взаимодействии этих объектов в системе.

Для чего применяются математические модели

- модель нужна для того, чтобы понять, как устроен конкретный объект, какова его структура, основные свойства, законы развития и взаимодействия с окружающим миром **(понимание)**;
- модель нужна для того, чтобы научиться управлять объектом (или процессом) и определить **наилучшие способы управления** при заданных целях **(оптимизация);**

- модель нужна для того, чтобы прогнозировать прямые и косвенные последствия реализации заданных способов и форм воздействия на объект (**прогнозирование**).

Два основных класса задач, связанных с математическими моделями

- **Прямая задача:** структура модели и все её параметры считаются известными, главная задача — провести исследование модели для извлечения полезного знания об объекте.

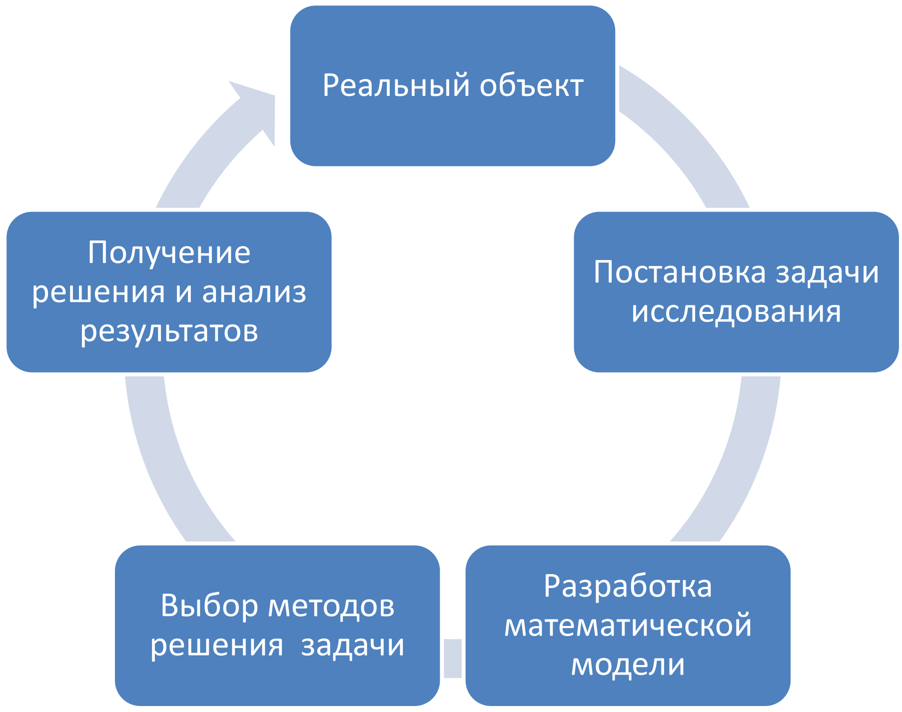
Обратная задача:

- известно множество возможных моделей, надо выбрать конкретную модель на основании дополнительных данных об объекте. Чаще всего структура модели известна, и необходимо определить некоторые неизвестные параметры

  (наблюдение, задачи проектирования)

Пример – метод Ньютона восстановления сил трения по наблюдаемым затухающими колебаниями

Схема применения математической модели



Математическое моделирование позволяет

- до создания реальной системы (объекта) или возникновения реальной ситуации рассмотреть возможные режимы работы, выбрать оптимальные управляющие воздействия, составить объективный прогноз будущих состояний системы.

Вычислительные эксперименты,

- проводимые на основе математических моделей, помогают увидеть за частным общее, развить универсальные методы анализа объектов различной физической природы, познать свойства изучаемых процессов и систем.

математическое моделирование

- наконец, является основой интенсивно разрабатываемых автоматизированных систем проектирования, управления и обработки данных.

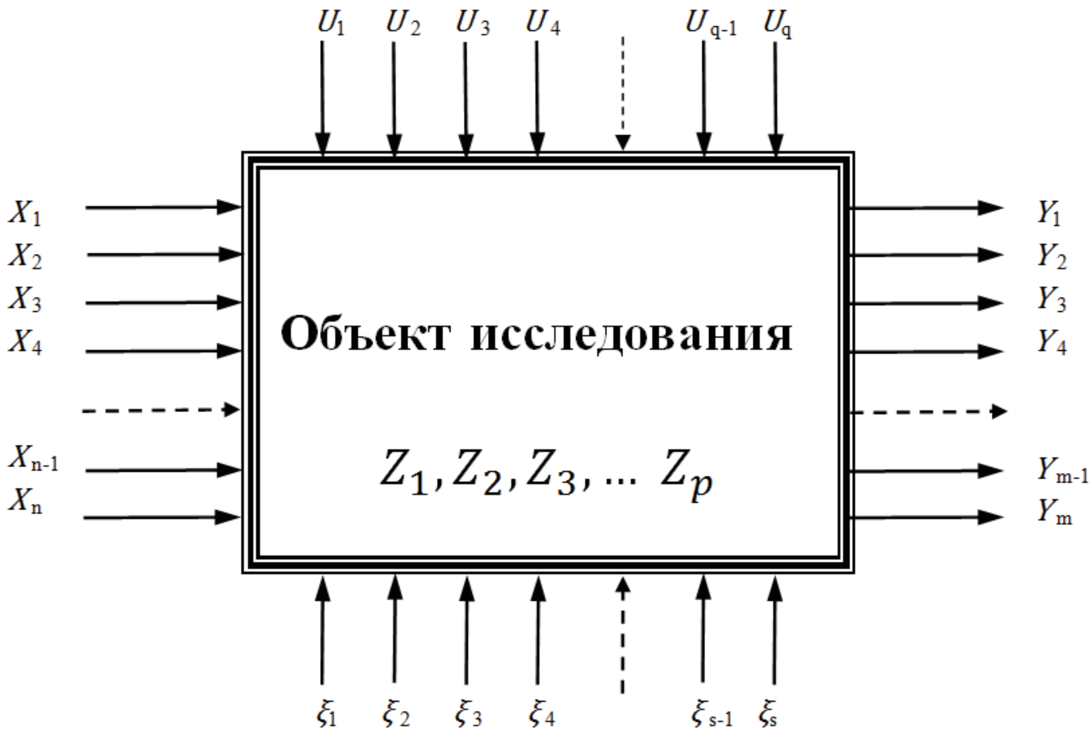
Методы математического моделирования технологических объектов

Лекция 2. Постановка задачи моделирования. Требования, предъявляемые к математическим моделям

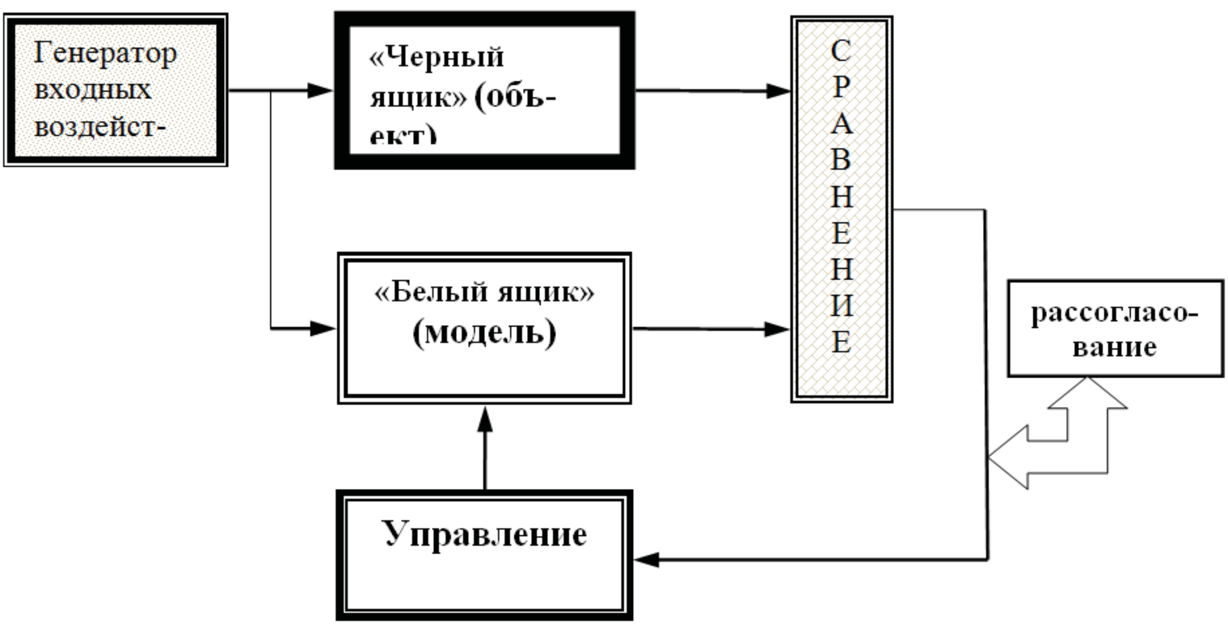
Общая характеристика математических моделей

- **Математическая модель** представляет собой идеализированную схему технического объекта (или его составных частей), построенную путем отображения в ней наиболее существенных свойств и «элементарных» процессов с помощью комплекса математических зависимостей и логических соотношений.

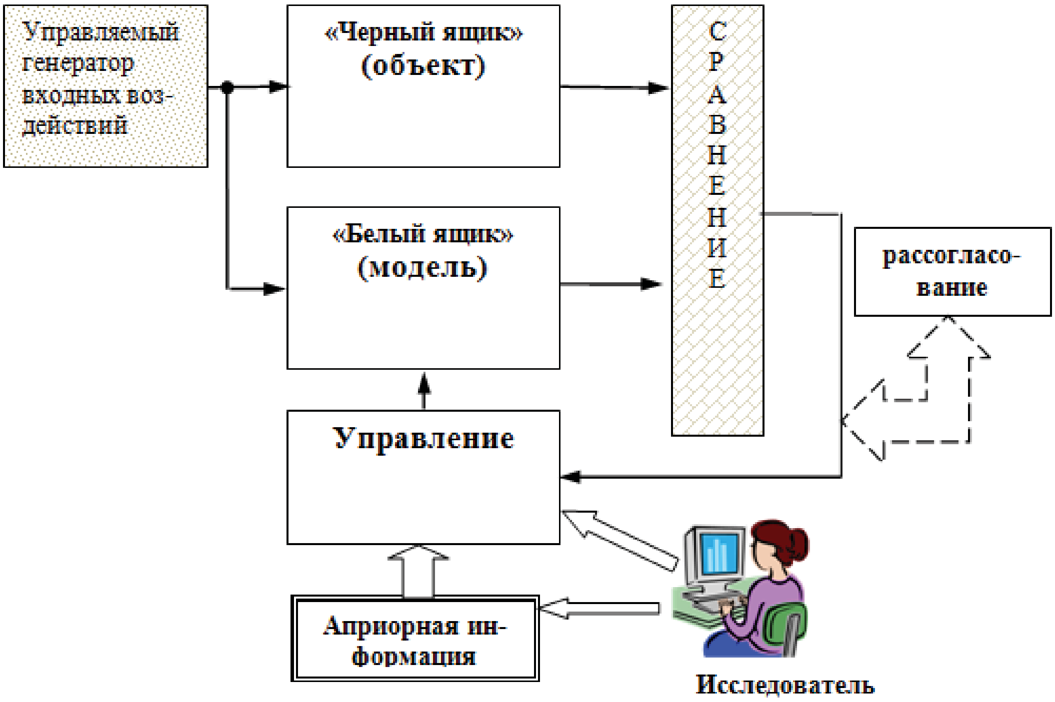
Информационная модель исследуемой системы



Структурная схема «раскрытия» «черного ящика»



Усовершенствованная структура исследования



- *Любая математическая модель должна рассматриваться в совокупности трех ее аспектов*
- *смыслового,*
- *аналитического,*
- *вычислительного.*

Смысловая сторона модели (содержательное описание)

1 - производится определение границ исследуемого объекта,

2 - обобщаются сведения о физической природе протекающих в нем процессов и соответствующих количественных характеристиках,

3 - выделяется степень взаимодействия его элементов, выбираются управляемые переменные и критерии оптимальности, учитываются ограничения и принятые допущения.

Аналитическая сторона модели - математическое описание -

- При этом вся совокупность используемых параметров представляется в абстрактных математических терминах
- все качественные зависимости между факторами переводятся в функциональные или иные соотношения,
- устанавливаются граничные и начальные условия.

По своей форме математическое описание модели обычно состоит из

- зависимостей, отражающих **общие физические законы**: уравнений, описывающих «элементарные» процессы;
- различных **эмпирических** и **полуэмпирических** соотношений, полученных в результате статистической обработки экспериментальных данных.

Состав математического описания модели

Вычислительный аспект математической модели

алгоритм решения с использованием компьютера - определяется как упорядоченная последовательность операций, которые надо выполнить над уравнениями связи, чтобы получить искомые результаты самым эффективным путем.

При разработке алгоритма должны быть

- установлены размерности всех используемых величин,
- определены допустимые границы, в которых будут изменяться параметры,
- задана предельная ошибка вычислений.

Основными требованиями,

предъявляемыми к математическим моделям являются:

- ***универсальность,***
- ***математическая строгость,***
- ***точность***
- ***экономичность.***

Универсальность математической модели

- определяется возможностью ее использования для различных технических объектов.
- Как пример - модульные (блочные) модели, которые описываются известными физическими закономерностями.

Компьютерные системы Simulink, Vissim, SciLab и др.

Математическая строгость

- связана с качеством идеализации объекта оригинала.
- ***Под идеализацией понимается выделение основных и отбрасывание второстепенных*** (в условиях поставленной задачи) ***свойств и характеристик указанного объекта.***

Пути идеализации на практике

- Переход от распределенных параметров к сосредоточенным
- Сокращение числа независимых переменных
- Снижение размерности решаемой задачи
- Замена переменных константами
- Изменение принимаемых ограничений
- усреднение свойств по объему и направлению
- гипотезы плоских сечений и т.п.

Точность математической модели

- оценивается ее способностью отображать значения искомых параметров моделируемого объекта с ошибкой, не более заданной.

Экономичность математической модели

- характеризуется затратами вычислительных ресурсов ЭВМ (машинного времени и памяти) на ее реализацию, а также количеством параметров, используемых в модели.

Требования по универсальности, математической строгости и экономичности моделей противоречивы. Необходимо иметь удачное компромиссное решение. По этой причине в каждом случае следует располагать не одной, а несколькими математическими моделями.

Верификация математической модели и ее реализация

- выполняется для оценки качества и интерпретации полученных результатов созданной математической модели. Она заключается в поочередном выполнении трех основных шагов:

- Проверка адекватности
- Качественная оценка
- Определение области использования

1-й этап верификации

- устанавливается достоверность, т.е. **адекватность** модели. Основной путь оценки адекватности - проведение тестовых исследований, при которых сравниваются результаты расчетов по модели с результатами опытов на реальном объекте.
- При данном этапе возможна корректировка модели путем внесения некоторых уточнений и дополнений.

2-й этап верификации

- Полученное по математической модели решение подвергается качественной оценке, т.е. объясняется с позиций технологии и механики происходящих явлений.

3-й этап верификации

- решение анализируется в зависимости от изменения диапазонов варьирования параметров.

Проверка адекватности математической модели

Вид работы	Этап работы	Применяемый метод
Планирование эксперимента	Отсеивающий эксперимент	Метод ранжирования факторов; Корреляционный анализ
	Определение плана и стратегии основного эксперимента	ПДЭ или ДФЭ; Центрально-композиционное или Ротатабельное планирование
Подготовка и проведение эксперимента	Подготовка объекта к эксперименту	Выбор экспериментальной установки или экспериментального объекта
	Метрологическое обеспечение	Определение диапазона изменения параметров, погрешности измерения и постоянной времени средств измерения

продолжение табл.

Вид работы	Этап работы	Применяемый метод
	Определение объема экспериментальных исследований	Равномерное или неравномерное дублирование опытов
Обработка результатов эксперимента и получение уравнения регрессии	Выявление и исключение ошибок	Методы последовательного удаления ошибок
	Получение уравнения регрессии	Корреляционный и регрессионный анализ
Экспериментальное определение адекватности модели	Сравнение результатов моделирования с полученным уравнением регрессии	Критерий Фишера, корреляционное отношение (индекс корреляции)

продолжение табл.

Вид работы	Этап работы	Применяемый метод
Определение погрешности моделирования	Определение погрешностей: 1. От упрощений при постановке задачи 2. От используемых математических зависимостей 3. От аппроксимации исходных зависимостей 4. От решения систем уравнений 5. От вычислений 6. РЕЗУЛЬТИРУЮЩЕЙ	Методы математического анализа

Полученная математическая модель может использоваться

- для определения таких параметров, которые обеспечивали бы оптимальное преобразование входных воздействий в выходные координаты;
- для построения алгоритма эффективного управления технической системой; для расширения объема исследований за счет реализации большего числа вариантов и увеличения номенклатуры используемых показателей;
- для прогнозирования поведения технической системы при различных условиях функционирования;
- для изучения других технических объектов со сходным математическим описанием.

Основные методы решения задач математического моделирования

- 1) **графические** — оценочные приближенные методы, основанные на построении и анализе графиков;
- 2) **аналитические** — решения, полученные строго в виде аналитических выражений (пригодны для узкого круга задач);
- 3) **численные** — основной инструмент для решения сложных математических задач, основанный на применении различных численных методов, современных прикладных программ, средств визуализации и анализа получаемых результатов.

Основные источники погрешности модели

- 1. Математическая модель является лишь приближенным описанием реального процесса (погрешность модели).
- 2. Исходные данные, как правило, содержат погрешности (погрешность данных).
- 3. Применяемые для решения задачи методы в большинстве случаев являются приближенными (погрешность метода).
- 4. При вводе исходных данных в компьютер и их дальнейшей обработке производятся округления (вычислительная погрешность).

Оценка обусловленности вычислительной задачи

— еще одно обязательное требование при выборе метода решения и построении математической модели.

Как влияют малые, но конечные погрешности входных данных на решение? Насколько сильно они искажают результат?

- Задачу называют **хорошо обусловленной**, если малым погрешностям входных данных отвечают малые погрешности решения, и **плохо обусловленной**, если возможны сильные изменения решения.
- **Число обусловленности** позволяет количественно оценить степень обусловленности задачи.

- введя ν_Δ - абсолютное число обусловленности , ν_δ — относительное число обусловленности

$$\Delta y^* \leq \nu_\Delta \Delta(x^*)$$

$$\delta y^* \leq \nu_\delta \delta(x^*)$$

Основные классы численных методов

- 1 – метод эквивалентных преобразований
- 2 – методы аппроксимации
- 3 – конечно-разностные методы
- 4 – Прямые (точные) методы
- 5 – Итерационные методы (методы последовательных приближений)
- 6 – методы статистических испытаний (Монте-Карло)

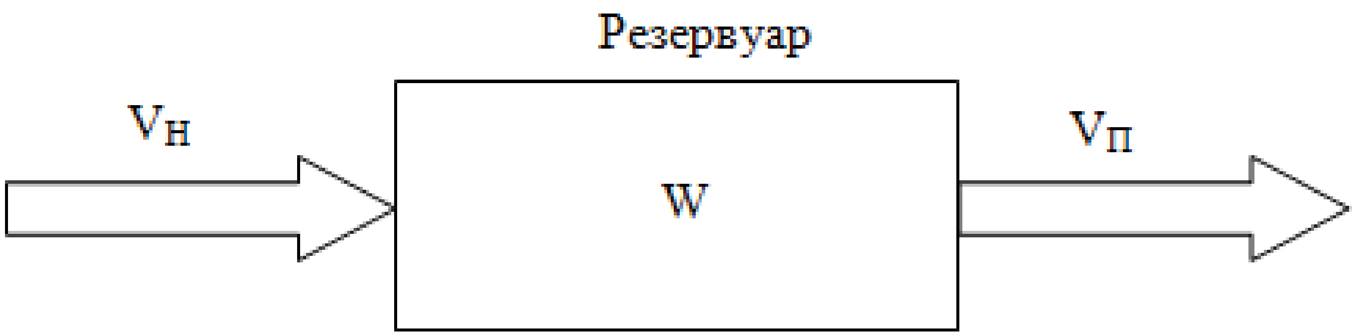
Контроль правильности модели. Основные приемы

- Анализ размерности
- Проверка порядков и характера зависимостей
- Исследование предельных случаев
- Проверка замкнутости и корректности математической задачи

Задача является корректной, если

- Ее решение существует при любых допустимых входных данных
- Это решение единственно (однозначно определено)
- Решение непрерывно зависит от данных задачи – устойчиво по отношению к малым возмущениям входных данных

Пример построения математической модели

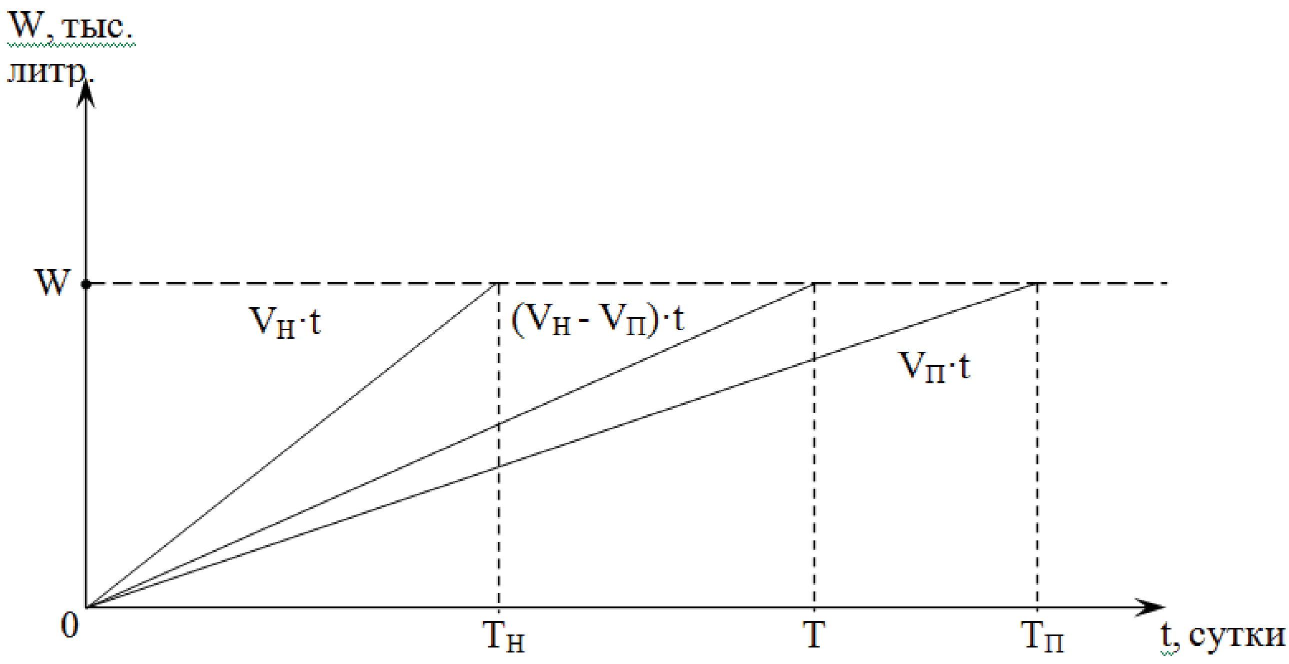


- Время заполнения резервуара

–

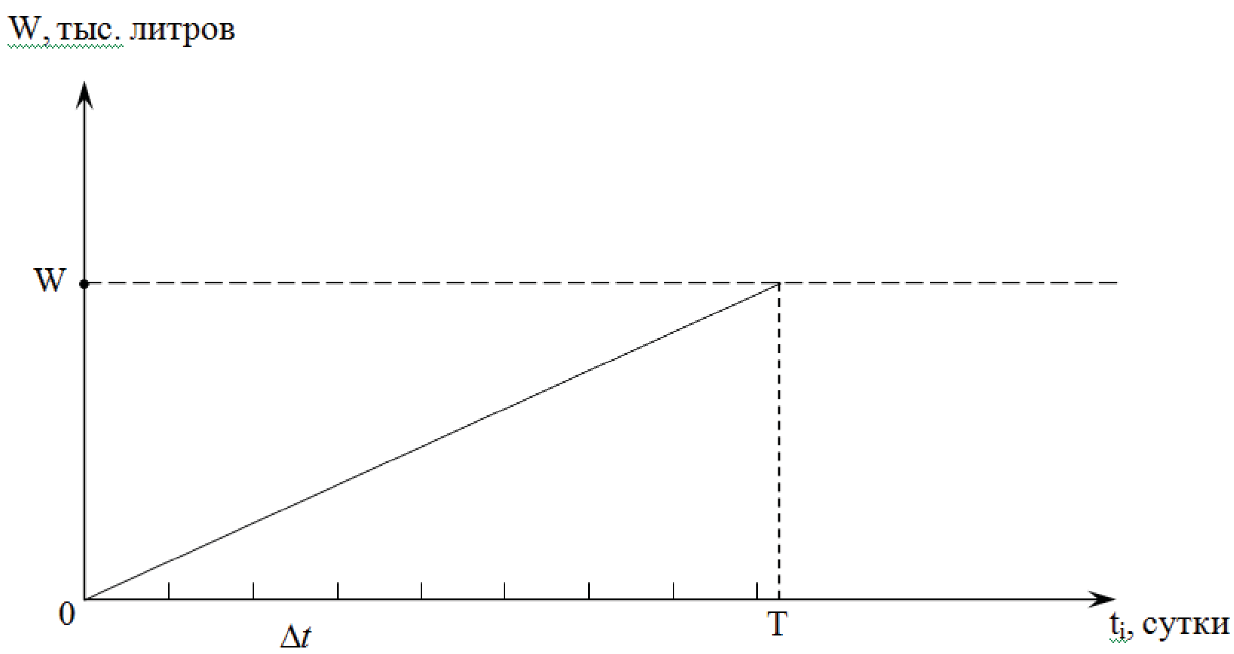
$$T = \frac{W}{V_Н - V_П}$$

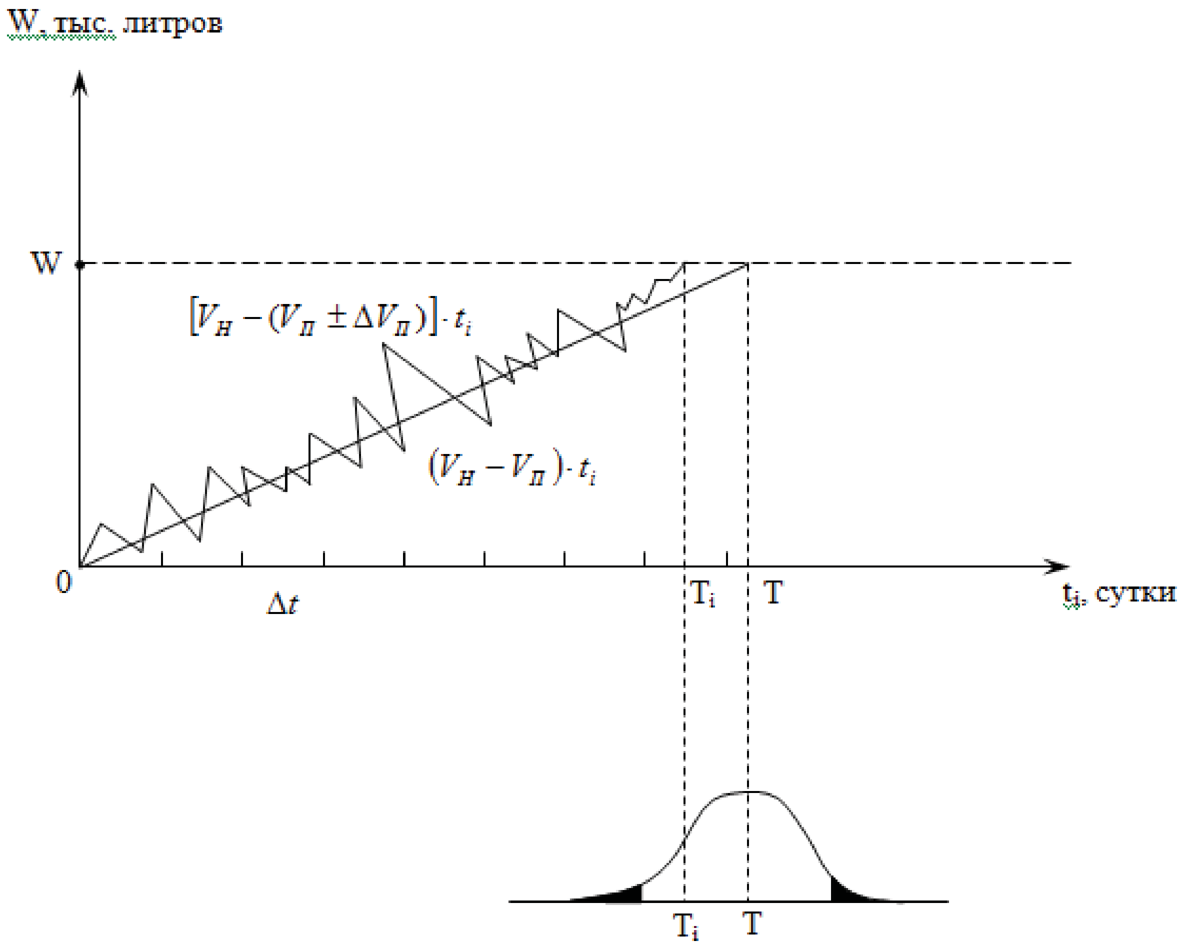
$$W = (V_Н - V_П)T$$



$$W_i = (V_H - V_П)t_i,$$

где $t_i = t_{i-1} + \Delta t \qquad (i = 1,2,3...)$

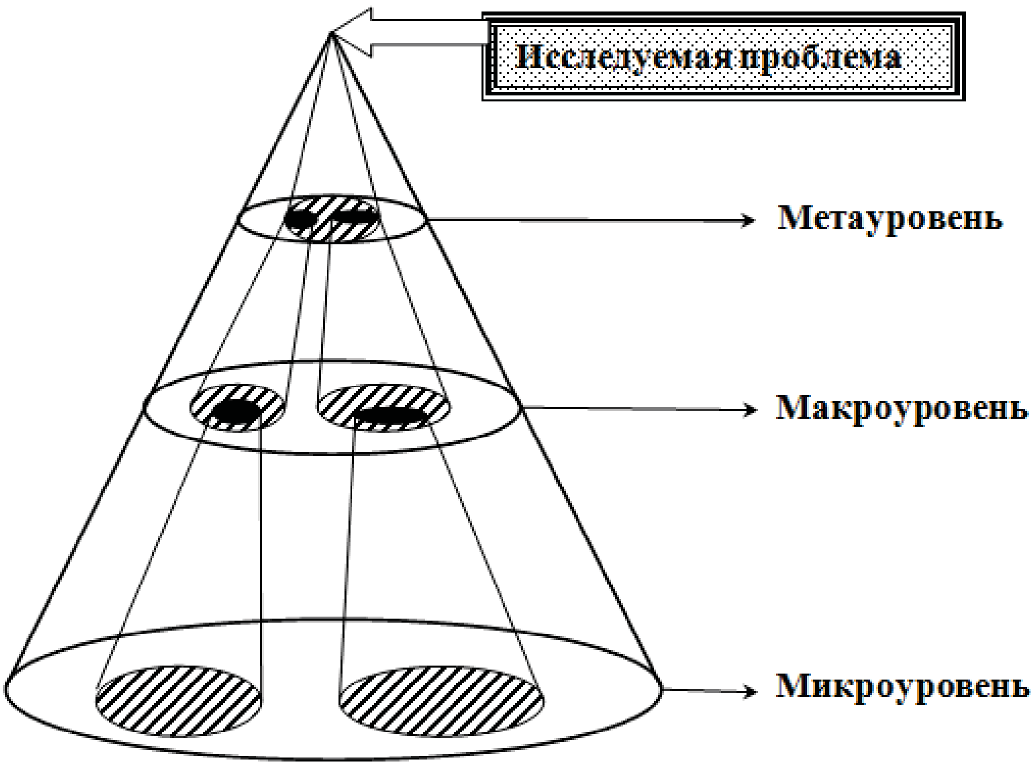



W, тыс. литров
W
$\left[V_H - (V_\Pi \pm \Delta V_\Pi)\right] \cdot t_i$
$(V_H - V_\Pi) \cdot t_i$
0
Δt
T_i
T
t_i, сутки
T_i
T

Методы математического моделирования технических систем

Лекция 3. **Уровни детализации математических моделей**

Уровни детализации ММ



Метауровень

соответствует начальные стадиям исследования (проектирования), задачей которого является научно-технический поиск и прогнозирование, разработка концепции и технического решения, разработка технического предложения. Обычно на этом уровне используются методы теории графов, математической логики, теории автоматического управления, теории массового обслуживания, теории конечных автоматов.

Пример решения задачи структурного синтеза на метауровне

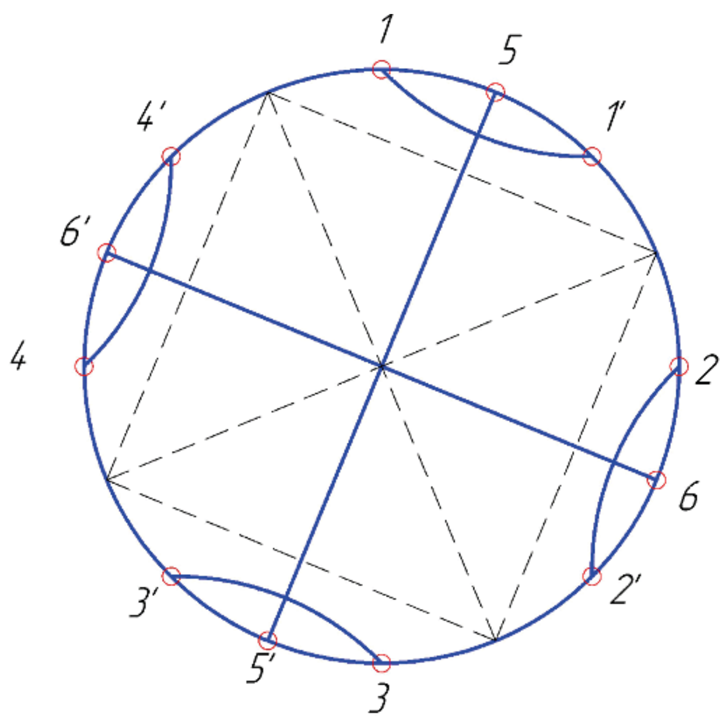
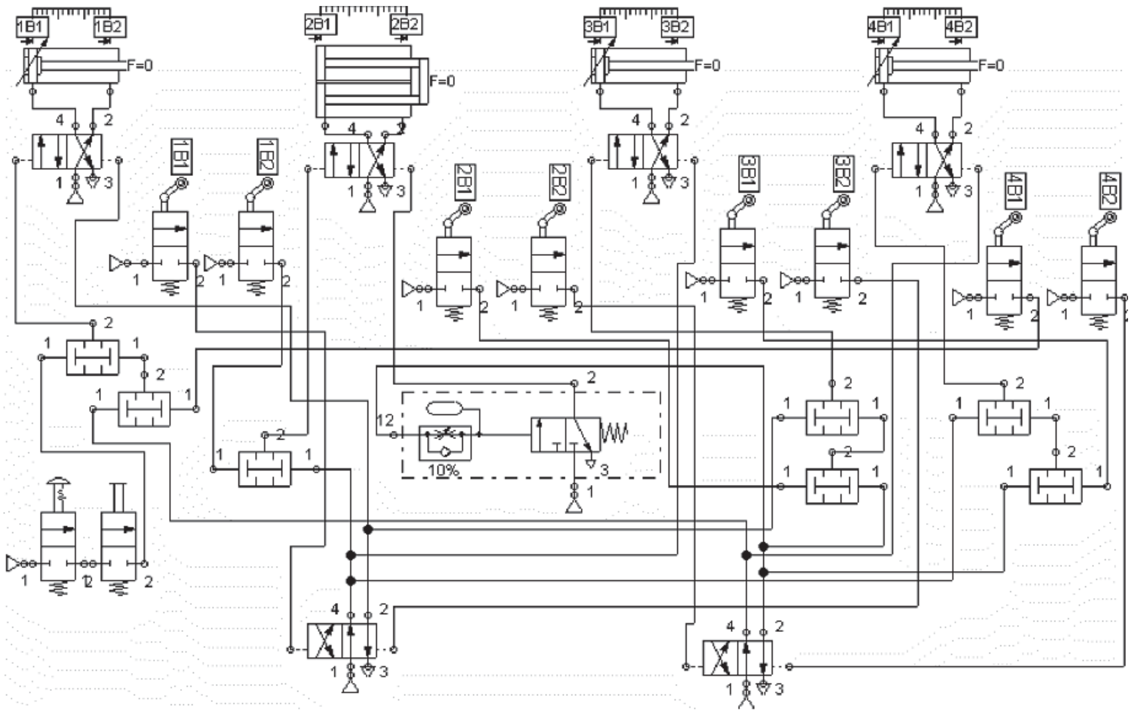


Схема пневмоавтоматики, соответствующая графу состояний



На **макроуровне**

- объект рассматривается как динамическая система с сосредоточенными параметрами. Математические модели этого уровня обычно представляют собой системы **обыкновенных дифференциальных уравнений**. Эти модели используются обычно для определения параметров технического объекта и его функциональных элементов.

Пример рассмотрения технической системы на макроуровне

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=(p_1-p_a)S_1-j_{np}x-F$$

$$\frac{dp_1}{dt}=\frac{kf_1^{э}Kp_м\sqrt{RT_м}}{S_1(x_{01}+x)}\varphi(\sigma_1)-\frac{kp_1}{(x_{01}+x)}\frac{dx}{dt}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=j_{np}(s-x)-(p_2-p_a)S_1-F'$$

$$\frac{dp_2}{dt}=\frac{kf_2^{э}Kp_2^{\frac{3k-1}{2k}}\sqrt{RT_м}}{S_2(s+x_{02}-x)p_м^{\frac{k-1}{2k}}}\varphi(\frac{\sigma_a}{\sigma_2})+\frac{kp_2}{(s+x_{02}-x)}\frac{dx}{dt}$$

На **микроуровне**

- объект представляется как сплошная среда с **распределенными** параметрами. Для математического описания процессов функционирования обычно используются **дифференциальные уравнения в частных производных**. На микроуровне проектируются **неделимые** по функциональному признаку элементы, которые называются **базовыми**.

Основные виды уравнений математической физики (дифференциальных уравнений в частных производных)

- Уравнения механических колебаний струн, стержней, мембран и трехмерных объектов (волновые уравнения), электромагнитных колебаний приводятся к виду:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = div(p\ grad\, u) - qu + F(x,t),$$

Уравнение диффузии

- описывает процессы распространения тепла или диффузии частиц в среде

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = div(p\ grad\, u) - qu + F(x,t)$$

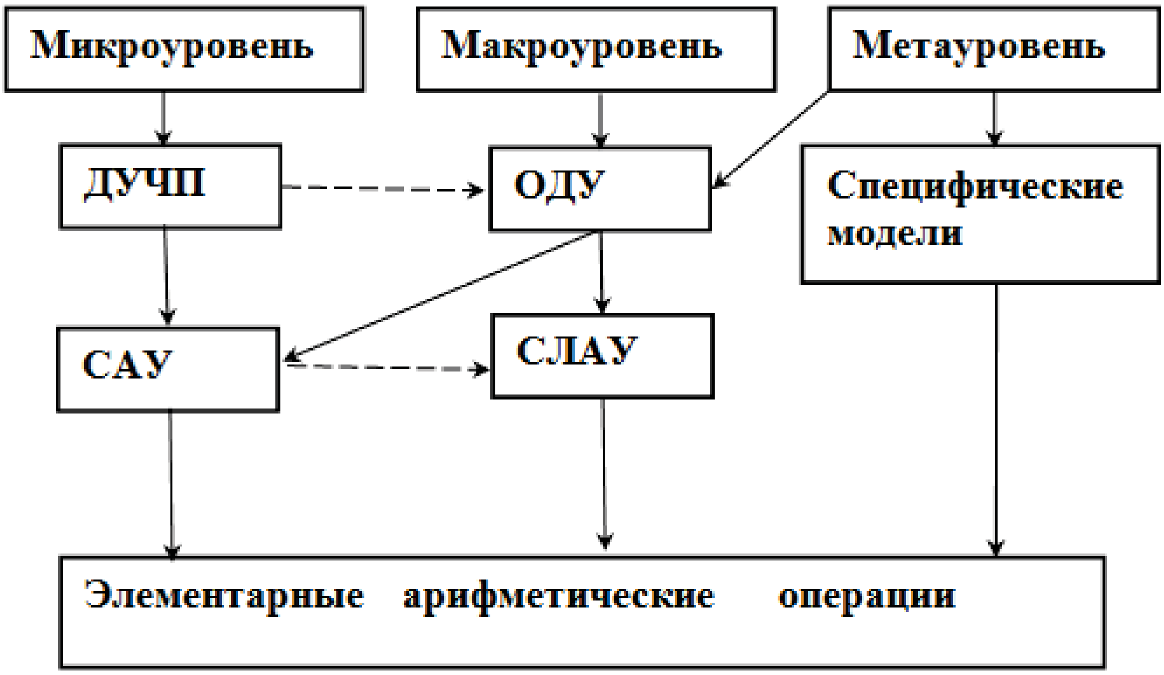
Уравнения гидродинамики

- описываются системой следующих уравнений (уравнение неразрывности потока и уравнение Эйлера)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho V) = f, \\ \dfrac{\partial V}{\partial t} + (V, grad\, V) + \dfrac{1}{\rho} grad\, p = F \end{cases}$$

- путем приведения уравнений в частных производных к каноническому виду, можно определить его тип, который может быть
- эллиптическим,
- параболическим,
- гиперболическим,
- смешанным.

Процесс нахождения решений для задач различных уровней



- ДУЧП - дифференциальные уравнения с частными производными;
- ОДУ - обыкновенные дифференциальные уравнения;
- САУ – системы алгебраических уравнения;
- СЛАУ - системы линейных алгебраических уравнений.

- Численные методы решения основаны на ***дискретизации*** переменных и ***алгебраизации*** задачи.
- То есть от частных производных исследователь переходит к решению системы алгебраических уравнений путем представления исходных уравнений в виде разностной схемы, где производные заменяются конечными разностями.
- ***дискретизация*** - это замена непрерывных переменных конечным множеством их значений в заданных для исследования пространственном и временном интервалах;
- ***алгебраизация*** - замена алгебраическими соотношениями.

Методы математического моделирования технических систем

Лекция № 4

- Замена изучаемого объекта его «образом» - математической моделью и дальнейшая работа не с самим объектом (явлением, процессом) дает возможность относительно быстро и без существенных затрат исследовать свойства и поведение объекта в любых мыслимых ситуациях.

Элементы ММ используются с древности

- многие методы вычислений, используемые в алгоритмах моделирования, носят имена великих ученых Ньютона, Эйлера, Гаусса и др. Второе рождение этой методологии пришлось на конец 40-х-начало 50-х гг. 20-ого века и было обусловлено, по крайней мере 2-мя причинами:

- 1- появление ЭВМ
- 2- выполнение национальных программ СССР и США по созданию ракетно-ядерного щита, которое требовало применения нетрадиционных методов.

- Сейчас математическое моделирование вступает в третий принципиально важный этап своего развития, встраиваясь в структуру, так называемого, информационного общества.

- Сама постановка вопроса о математическом моделировании порождает четкий план действий. Его можно условно разбить на три этапа: **модель - алгоритм - программа**.

- После того, как **адекватность** (достаточное соответствие) триады исходному объекту удостоверена, с моделью проводятся разнообразные и подробные опыты, дающие все качественные и количественные свойства и характеристики объекта.

Ключевые понятия

- Ими являются понятия **системы, фазового пространства, вектора состояния, порядка системы и управления.**

Понятие системы

- Всякая система – это сложный объект, который не может быть сведен просто к совокупности всех своих частей благодаря наличию связей, объединяющих различные части в одно целое.

- Причем отдельные части оказываются связаны друг с другом не только непосредственно, но и через посредников. Следовательно, поведение некоторых частей системы может приобретать новое качество, отсутствовавшее у таких частей по отдельности.

- В целом система может повести себя таким образом, что предсказать ее поведение путем анализа отдельных свойств ее объектов, не возможно. Такое свойство системы называется **«эмерджентность»** или более известным словосочетанием «**системный эффект**».

- Под понятием **системы** будем понимать объект, состоящий из некоторого множества частей, взаимодействующих друг с другом так ,что знание поведения каждой из частей еще не позволяет сделать очевидный вывод о поведении всей системы в целом.

- Таким образом, в основе определения лежат 2 основных свойства - сложность и системный эффект.

- **Вектором состояний** будем называть упорядоченный набор переменных, однозначно и без избытка описывающих состояние системы в любой момент ее наблюдения:

- **Фазовое пространство** – множество всех возможных значений вектора состояний системы. Другими словами его можно назвать пространством состояний системы.

- Например: фазовое пространство материальной точки: 6-мерное пространство, 3 координаты – декартовы координаты положения материальной точки, 3 другие – 3 декартовы скорости.

- Если математическая модель системы была проанализирована, и было установлено, что для однозначного описания системы требуется n координат, то число n называют порядком системы.

- Фазовые переменные, достаточные для однозначной идентификации состояния объекта, называются **базисными координатами.** Через базисные координаты могут быть вычислены значения и всех остальных фазовых переменных.

Требования, предъявляемые к математическим моделям

- Адекватность
- Экономичность
- Универсальность

Эти требования противоречивы, поэтому для каждого объекта используют свою оригинальную модель

Классификация математических моделей

- В технике используется множество моделей, в зависимости от уровня иерархии (упорядочение ММ по признаку сложности и полноты), степени декомпозиции системы, аспекта исследования, стадии и этапа проектирования.

- В зависимости от степени абстрагирования при описании физических свойств технической системы различают три основных технических уровня: верхний или **метауровень**; средний или **макроуровень**; нижний или **микроуровень**.

Метауровень

- соответствует начальным стадиям проектирования; его задачей является научно-технический поиск и прогнозирование, разработка концепции и технического решения, **разработка технического предложения**.

- Обычно на этом уровне используются методы теории графов, математической логики, теории автоматического управления, теории массового обслуживания, теории конечных автоматов.

Макроуровень

- Объект рассматривается как динамическая система с сосредоточенными параметрами. Математические модели этого уровня обычно представляют собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Эти модели используются обычно для определения параметров технического объекта и его функциональных элементов.

Микроуровень

- На **микроуровне** объект представляется как сплошная среда с распределенными параметрами. Для математического описания процессов функционирования обычно используются дифференциальные уравнения в частных производных.

- На микроуровне проектируются неделимые по функциональному признаку элементы, которые называются **базовыми**

На любом из уровней ММ бывают

- детерминированные и вероятностные;
- теоретические и экспериментальные;
- линейные и нелинейные;
- динамические и статические;
- непрерывные и дискретные;
- функциональные и структурные;

По форме представления различают

- · инвариантную;
- · алгоритмическую;
- · аналитическую;
- ·графическую **модели проектирования.**

- В **инвариантной** форме ММ представляется системой уравнений (дифференциальных, алгебраических), вне связи с методом решения этих уравнений.

- В **алгоритмической** форме соотношения модели связаны с выбранным численным методом решения и записаны в виде алгоритма – последовательности вычислений.

- **Аналитическая** модель представляет собой явные зависимости искомых переменных от заданных величин (обычно зависимости выходных параметров объекта от внутренних и внешних параметров).

Аналитические модели получают

на основе физических законов;

в результате прямого интегрирования исходных дифференциальных уравнений, используя табличные интегралы;

- к ним относят также регрессионные модели, полученные на основе результатов эксперимента.

Графическая (схемная) модель

- представляется в виде графов, эквивалентных схем, динамических моделей, диаграмм и т.п. Для использования графических моделей должно существовать правило однозначного соответствия условных изображений элементов графической и компонентов инвариантной математических моделей.

- Среди алгоритмических моделей выделяют **имитационные** модели, предназначенные для имитации физических и информационных процессов, протекающих в объекте при функционировании его под воздействием различных факторов внешней среды.

- Существует деление ММ на **функциональные и структурные**. Характерным признаком является отображение свойств технического объекта.

Структурные модели

- отображают только структуру объектов и используются при решении задач структурного синтеза. Параметрами структурных моделей являются признаки функциональных или конструктивных элементов, из которых состоит технический объект и по которым один вариант структуры объекта отличается от другого.

Функциональные модели

- описывают процессы функционирования ТО и имеют форму систем уравнений. Они учитывают структурные и функциональные свойства объекта и позволяют решать задачи как параметрического, так и структурного синтеза.

- По способам получения функциональные математические модели делятся на **теоретические и экспериментальные.**

- **Теоретические** модели получают на основе описания физических процессов функционирования объекта, а **экспериментальные** – на основе изучения поведения объекта во внешней среде, рассматривая его как кибернетический «черный ящик».

- Экспериментальные модели при этом могут быть **физические** (на техническом объекте или его физической модели) или **вычислительные** (на теоретической математической модели).

- При построении теоретических моделей используют **физический и формальный подходы.**

Физический подход

- сводится к непосредственному применению физических законов для описания объектов, например, законов Ньютона. Гука, Кирхгофа, Фурье, и др.

Формальный подход

- использует общие математические принципы и применяется при построении как теоретических, так и экспериментальных моделей.
- Построение теоретических **формальных моделей** основано на вариационном принципе Гамильтона – Остроградского.

- **Экспериментальные модели** – формальные. Они не учитывают всего комплекса физических свойств элементов исследуемой системы, а лишь устанавливают обнаруживаемую в процессе эксперимента связь между отдельными параметрами системы, которые удается варьировать и(или) осуществлять их изменение.

Функциональные ММ могут быть **линейные и нелинейные.**

- **Линейные** модели содержат только лишь линейные функции фазовых переменных и их производных. Характеристики многих реальных технических объектов нелинейны.

- Если при моделировании учитываются инерционные свойства ТО и(или) изменение во времени параметров объекта или внешней среды, то модель называют **динамической.**
- В противном случае модель статическая.

- Математическое представление динамической модели обычно выражается системой дифференциальных уравнений, а статической – системой алгебраических уравнений.

- Динамическая модель может также представлять собой интегральные уравнения, передаточные функции, а в аналитической форме – явные зависимости фазовых координат или выходных параметров ТО от времени.

- Воздействие внешней среды на ТО носят случайный характер и описываются случайными функциями. При проектировании также учитывают случайный разброс параметров элементов объекта, обусловленный технологическим процессом изготовления.

К построению вероятностной модели

- Все процессы, происходящие в объекте, также случайны и могут быть оценены вероятностными и статистическими характеристиками:
- вероятностью выполнения тех или иных требований,
- корреляционной функцией,
- спектральной плотностью,
- математическим ожиданием,
- дисперсией и др.

- Анализ функционирования объекта в этом случае требует построения **вероятностной модели**. Однако такая модель весьма сложна и ее применяют на заключительном этапе проектирования.
- Большинство проектных процедур выполняется на детерминированных моделях. **Детерминированная** ММ характеризуется взаимно однозначным соответствием между внешним воздействием на динамическую систему и ее реакцией на это воздействие.

Режимы функционирования ТО

- В зависимости от характера внешних возмущающих и управляющих воздействий ТО может находиться в установившемся или неустановившемся состоянии. Изменение его состояния выявляется анализом поведения фазовых переменных.

- **Установившееся** состояние технической системы достигается при неизменных характеристиках внешних воздействий. Если воздействие непрерывно меняется, то состояние системы будет **неустановившемся**. Режим работы системы при этом называют **динамическим.**

- при приложении воздействия система осуществляет переход из одного установившегося состояния в другое, находясь при этом в течение некоторого времени в динамическом режиме. Такой динамический режим называют **переходным процессом**, а графики изменения фазовых координат системы – **переходными характеристиками**.

- Если внешние воздействия ***F(t)*** переменны во времени, то они вызывают в ней непрерывный ряд переходных процессов и состояние системы в течение всего времени наблюдения будет неустановившимся.

- Переходные процессы возникают также при изменении структуры или параметров технической системы в процессе ее функционирования.

- Внешние воздействия реальной среды обитания ТС описываются случайными функциями, а изменение фазовых координат системы представляют собой случайные процессы. Техническая система в этом случае все время находится в динамическом режиме.

- При постоянных характеристиках случайных процессов их называют ***стационарными***, а при переменных – ***нестационарными***. Способы анализа и оценки выходных параметров системы при стационарных и нестационарных случайных процессах различны.

Основные задачи анализа технических систем.

- В зависимости от модельного режима, различают следующие виды анализа:
- статических состояний;
- переходных процессов;
- устойчивости;
- стационарных режимов колебаний;
- частотных характеристик;
- чувствительности;
- статистический.

Математические модели на микроуровне

Лекция №5

- Микроуровень – нижний иерархический уровень при анализе объекта при составлении его математического описания.

Основы построения математических моделей

- Для построения ММ ТО с распределенными параметрами обычно используют фундаментальные физические законы. Это, прежде всего, законы сохранения (массы, энергии, количества движения).

- На этом уровне производится детальное описание физических свойств ТО. Объекты рассматриваются как сплошные среды, имеющие конечные области определения, выделяемые в 3хмерном пространстве.

- Такие объекты представляют собой *динамические системы с распределенными параметрами*. Их также называют *непрерывными* системами. Функционирование этих систем описывается обычно дифференциальными уравнениями в частных производных.

- Общий вид уравнений математической модели описания физических свойств ТО с распределенными параметрами

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, \varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}, ..., \frac{\partial\varphi}{\partial t}) = 0,$$

- (1)

- Или в компактной форме

$$L\varphi(\overrightarrow{Z}) = \Theta(\overrightarrow{Z}),$$

- Если фазовые переменные не являются явными функциями времени, задачу анализа называют ***стационарной***, в противном случае – ***нестационарной***. Стационарная задача характеризует статическое состояние технического объекта.

- Динамические режимы функционирования относятся к нестационарным задачам и для их исследования требуется исследование ***переходных процессов***.

- Уравнение (1) имеет множество решений. Для получения единственного решения необходимо задать ***краевые условия***. Краевые условия включают граничные и начальные условия.

Понятие корректности

- Задача для уравнения в частных производных в рассматриваемой области поставлена корректно, если решение существует, единственно и устойчиво к малым изменениям входных данных.

- ***Граничные условия*** – это сведения об искомых непрерывных функциях и(или) их производных на границе области определения объекта, характеризующие условия взаимодействия с окружающей внешней средой.

- ***Начальные условия*** – это значения этих же функций во всей области определения в начальный момент времени. Начальные условия задаются только при решении нестационарных задач (при исследовании переходных процессов).

Способы задания граничных условий:

- Граничные условия **первого рода** означают задание на границе области определения значений искомой функции фазовой переменной .
- При граничных условиях **второго рода** задают на границе значения частных производных искомой функции по пространственным координатам.

- Граничные условия **третьего рода** представляют собой уравнения баланса потоков, характеризующих обмен энергией объекта с окружающей внешней средой.

  Т.е. на границах могут быть заданы линейные комбинации первой производной и самой искомой функции.

- Исходное дифф.уравнение в частных производных (1) вместе с краевыми условиями носит название дифференциальной краевой задачи и представляет собой мат.модель ТО с распределенными параметрами.

- Наиболее часто в мат.физике встречаются уравнения 2-ого порядка

$$F(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y, \varphi_{xx}, \varphi_{xy}, \varphi_{yy}) = 0$$

- Если уравнение линейно относительно старших производных, то его называют **квазилинейным**

$$a_{11}\varphi_{xx} + 2a_{12}\varphi_{xy} + a_{22}\varphi_{yy} + F_1(x, y, \varphi, \varphi_x, \varphi_y) = 0$$

a_{11}, a_{12}, a_{22} - функции независимых переменных

- Если уравнение линейно относительно искомой функции и ее частных производных

$$a_{11}\varphi_{xx} + 2a_{12}\varphi_{xy} + a_{22}\varphi_{yy} + b_1\varphi_x + b_2\varphi_y + c\varphi + f(x,y) = 0$$

то оно называется **линейным**

- В соответствие уравнениям можно поставить квадратичную форму

$$a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2$$

И дать классификацию типов уравнений по знаку дискриминанта

$$D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$$

3 типа уравнений:

- 1) гиперболического D>0
- 2) параболического D=0
- 3) эллиптического   D<0

- Объекты с распределенными параметрами могут быть различной физической природы: механические, гидравлические, тепловые, электрические, магнитные и т.д.

- При анализе гидравлических и пневматических систем определяют режимы течения сплошных потоков жидкостей и газов, которые характеризуются скоростями и давлениями.

Общая формулировка закона сохранения:

- *Изменение во времени некоторой субстанции в элементарном объеме равно сумме притока-стока этой субстанции через его поверхность с учетом скорости генерации или уничтожения субстанции в этом объеме.*

Соответствующее уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -div\overrightarrow{J} + G$$

- φ - фазовая переменная (координата), выражающая субстанцию

- $\overrightarrow{J}$ - вектор плотности потока фазовой переменной

- $div\vec{J}$ - дивергенция вектора плотности;

$G -$ скорость генерации или уничтожения субстанции.

- Дивергенция вектора - скалярная величина, определяемая выражением

$$div\ \vec{J} = \partial J_x / \partial x + \partial\ J_y / \partial y + \partial J_z / \partial z.$$

- Дивергенция вектора плотности потока характеризует сумму потока-стока субстанции через поверхность элементарного объема. В качестве субстанции в различных физических законах выступают: масса, энергия, количество движения и др.

Уравнение закона сохранения массы

$$\partial\rho / \partial t = -div\, \vec{J}_{\rho}$$

- ρ - плотность массы
- $\vec{J}_{\rho}$ - вектор плотности потока массы
- $\vec{\mathrm{v}}$ $\vec{J}_{\rho} = \rho \vec{\mathrm{v}}$

$\mathbf{v}$ вектор скорости переноса массы

Уравнение закона сохранения энергии

$$\partial(\rho E)/\partial t = -div\, \vec{J}_E + G_E$$

- ***E*** – полная энергия единицы массы;
- ρE - энергия единицы объема;

- $\vec{J}_E$ - вектор плотности потока энергии
- G_E - скорость генерации или поглощения энергии в единице объема

Уравнение закона сохранения количества движения

- Используют при моделировании движения потока жидкости.
- Для потока идеальной жидкости уравнение имеет вид

$$\partial(\rho \vec{\mathrm{v}}) / \partial t = -\vec{\mathrm{v}}\, div(\rho \vec{\mathrm{v}}) - grad(p)$$

- $\rho \vec{v}$ - вектор количества движения единицы объема жидкости;
- P – давление жидкости

- Для одномерного потока жидкости получаем

$$\partial(\rho v)/\partial t = -v\partial(\rho v)/\partial x - \partial p / \partial x$$

- При учете массовых сил и сил трения вязкого трения получаем

$$\partial \overrightarrow{\mathbf{V}} / dt = G_M - (grad\_p - \eta \nabla^2 \overrightarrow{\mathbf{V}} - \eta\_grad\_div \overrightarrow{\mathbf{V}} / 3) / \rho$$

- уравнение Навье-Стокса

- Для описания движения жидкости используют закон сохранения массы и закон сохранения количества движения.
- В одномерном случае- закон сохранения массы

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho \mathrm{v}}{\partial x}$$

- Уравнение Навье –Стокса в одномерном случае (закон сохранения количества движения элементарной массы) имеет вид:

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{t}} = G_M - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{4}{3}\eta\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x^2}$$

- При анализе движения жидкости в трубопроводе обычно массовыми силами пренебрегают. Тогда

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4}{3}\eta\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x^2}$$

- Используется также приближенная формула уравнения Навье –Стокса

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{t}} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} - 2\frac{\zeta}{\rho}\mathrm{v}$$

ζ - коэффициент линеаризованного вязкого трения в трубопроводе

- Иногда при проведении исследований пренебрегают вязкостью жидкости, в результате получаем уравнение Эйлера для одномерного потока в трубопроводе постоянного сечения

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x}$$

- Уравнение Эйлера учитывает лишь инерционные свойства потока, а уравнение Навье-Стокса – инерционные и диссипативные свойства.
- Сведем уравнения в единую систему

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t};$$

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4}{3}\eta \frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x^2}$$

- Уравнения представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с тремя неизвестными функциями: скорости, давления и плотности. Чтобы сделать систему определенной необходимо добавить уравнение связи ρ и p.

- В машиностроении часто принимают линейную аппроксимацию зависимости изменения давления от относительного изменения объема жидкости при ее сжатии. Эта зависимость устанавливается законом Гука и имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -E\,\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}$$

- Учитывая слабую сжимаемость рабочих жидкостей гидроприводов, для анализа полей скоростей и давлений в трубопроводе используют систему уравнений

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4}{3}\eta \frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -E\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}$$

- Для решения системы уравнений необходимо знать краевые условия. В подобных задачах принимаются граничные условия 1-ого рода и задают функции давлений и скоростей на левой и правой границах трубопровода.
- Начальными условиями являются значения этих же функций в начальный момент времени.

Математические модели на макроуровне

Лекция 6

- На макроуровне осуществляется проектирование различных машин и механизмов. Объекты проектирования рассматриваются как сложные технические системы, состоящие из совокупности взаимодействующих элементов.

- В отличие от микроуровня, где объектами проектирования были детали машин (валы, корпуса,трубопроводы и т.д.), на макроуровне объект имеет сложную неоднородную структуру, состоящую из элементов.

- Путем дискретизации в пространстве материальных объектов, выделенных из сплошной среды, получают динамическую систему с сосредоточенными параметрами.

- Дискретный элемент в общем случае обладает

  - инерционными

  - упругими

  - диссипативными свойствами.

  Различают простые и сложные элементы.

- Простой элемент наделен только одним из указанных физических свойств,
- Сложный – более, чем одним.

- Математическая модель динамической системы с сосредоточенными параметрами – система обыкновенных дифференциальных уравнений.
- Для построения модели наиболее часто используют метод сосредоточенных масс.

- При построении динамической модели выделяют некоторые абстрактные элементы, наделяя их определенными физическими свойствами.
- Такими абстрактными элементами являются сосредоточенные массы, эквивалентные массам соответствующих частей ТО, и элементы, лишенные массы,отображающие характер взаимодействия сосредоточенных масс.

- Сосредоточенные массы обладают инерционными свойствами и способностью накапливать кинетическую энергию. Их называют **инерционными элементами**.

- Взаимодействие сосредоточенных масс осуществляется посредством упругих, диссипативных, фрикционных и трансформаторных элементов.
- Упругие элементы отображают упругие свойства динамической системы. Эти элементы обладают способностью накапливать потенциальную энергию.

- Диссипативные элементы отображают свойства рассеивания энергии, обусловленные силами внутреннего трения.
- Фрикционные элементы отображают физические свойства фрикционных механизмов технического объекта.

- Трансформаторные элементы отображают безынерционные преобразования параметров потока энергии, осуществляемые устройствами - трансформаторами.

- Рассмотрим модель процесса, модель которого представляет дифференциальное уравнение вида
- для линейного движения

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = F(t)$$

- для вращательного движения

$$J\ddot{\gamma} + \beta_\kappa\dot{\gamma} + c_\kappa\gamma = M(t)$$

- Здесь

$m,\ J$ инерционный параметр системы – масса, момент инерции

β, β_κ величины, характеризующие изменение силы(момента), обусловленные изменением скорости(частоты)

c, c_κ величины, характеризующие жесткость системы

$F(t),\ M(t)$ внешняя нагрузка – сила,момент, как функция времени

- *такими моделями описывается довольно широкий круг практических инженерных задач и задач исследовательского характера.*

- В дальнейшем, примем для анализа второе дифференциальное уравнение, т.е. математическую модель, описывающую процесс формирования момента в элементе рассматриваемой системы

- В этой системе первый член представляет собой момент, обусловленный ускорением, второй – момент, обусловленный скоростью, и третий – момент, обусловленный деформацией динамической системы или ее отдельного элемента. Правая часть математической модели – это внешнее возмущение, точнее, момент внешнего возмущения.

- Таким образом, все три параметра, которыми характеризуется движение тела, имеют место в уравнении. Это ускорение, скорость (здесь частота или, говорят, угловая скорость) и координата (угол закручивания или деформация).

- Иногда указанные составляющие математической модели называют первую – инерционной, вторую – скоростной, третью – восстанавливающей составляющей или восстанавливающим моментом.

- При этом, следует отметить, ***при постоянном коэффициенте при втором слагаемом в левой части уравнения***, что свидетельствует о линейной связи между моментом и скоростью (частотой), ***динамические системы называют системами с вязким сопротивлением.***

- В зависимости от характера коэффициентов и внешнего возмущения математические модели и соответствующие им динамические системы могут быть:
- 1)Линейными второго (или более высокого) порядка, если все коэффициенты – величины постоянные, а соответствующие им динамические системы – линейными динамическими системами второго (или более высокого) порядка.

- 2) При переменном моменте инерции (массе) имеем дифференциальное уравнение второго (или более) порядка с переменными коэффициентами, а соответствующая этой модели динамическая система – система второго или более высокого порядка с переменными параметрами.

- 3) Если коэффициент $\beta_к = \beta(\dot{\gamma})$ зависит от скорости, математическая модель будет нелинейной, а соответствующая ей динамическая система также нелинейна. Такие системы хорошо изучены голландским механиком и математиком Ван дер Полем и носят в его честь название «вандерполевских» или автоколебательных систем.

- 4) Если восстанавливающий момент – величина не линейная, т.е. $c_к = c(\gamma)$ или другого параметра, такие модели тоже являются не линейными и соответствующие им динамические системы называются нелинейными динамическими системами с нелинейным восстанавливающим моментом или не линейной восстанавливающей силой. Эти системы обычно называют по имени тех математиков, которые нашли их решение, например, уравнение Матье, Дуффинга и т.д.

- 5) Если правая часть математической модели – величина случайная или является случайной функцией, а в случае, когда случайная функция есть временная, т.е. случайная во времени, случайным процессом, динамическая система называется **системой** (линейной или нелинейной) **со случайным возмущением** или, иногда, со случайной правой частью.

- 6) Если коэффициенты математической модели или хотя бы один из них является величиной случайной, а правая часть – случайным процессом, такие математические модели носят название *стохастических* дифференциальных уравнений, а соответствующие им динамические системы – **стохастическими**, т.е. случайными во времени.

- 7) Кроме указанных математических моделей, могут быть модели с запаздывающим аргументом. В качестве аргумента, скажем, в правой части уравнения выступает не время , а $t-\tau$ - аргумент со смещением или с «запаздыванием».

- Приведем исходное уравнение к *ст андарт ному* виду

- . Поскольку $J \neq 0$, разделим все члены уравнения и его правую часть на эту величину, и обозначив

$$\beta_к / J \ \textit{через} \ 2n, \qquad c_к / J \ \textit{через} \ \omega^2$$

$$M(t) / J \ \textit{через} \ m(t)$$

уравнение примет вид

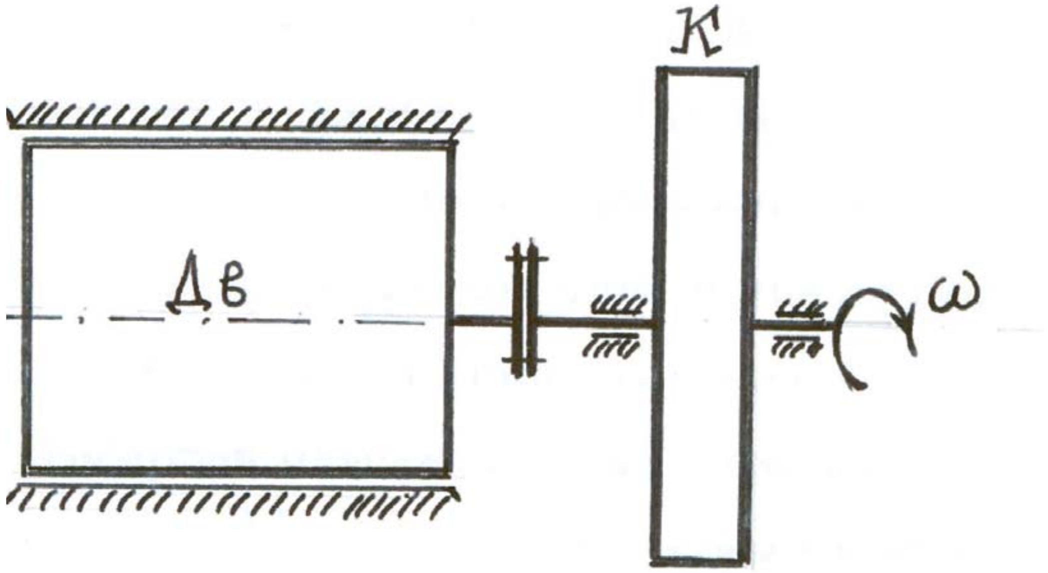
$$\ddot{\gamma} + 2n\dot{\gamma} + \omega^2\gamma = m(t)$$

- Получено линейное дифференциальное второго порядка с правой частью. Поэтому, говорят, физическая модель и соответствующая ей ***система есть линейная второго порядка динамическая система с возмущением.***

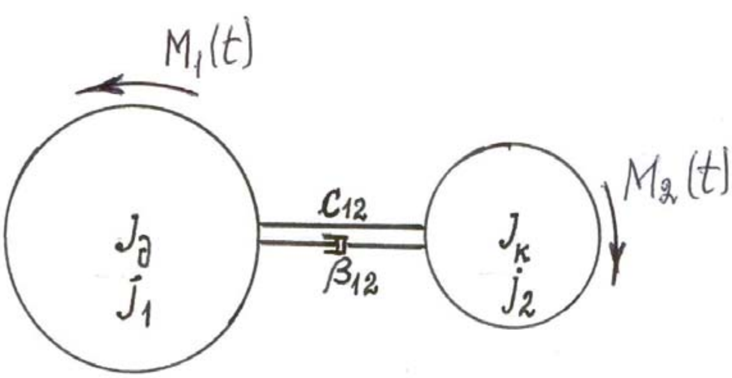
Решение и анализ линейных математических моделей

- Линейные математические модели и соответствующие им динамические системы с детерминированным или случайным возмущением наиболее часто встречаются в инженерной практике и в исследованиях. Примером таких динамических систем могут служить колесо центробежного вентилятора,колесо насоса посаженного на вал, соединенного с валом двигателя

Схема системы

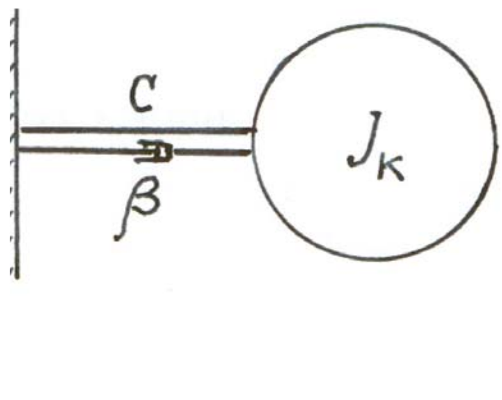


Физическая модель 2-х массовой линейной динамической системы



- **1.** В случае, когда **момент инерции двигателя значительно (на порядок и более) выше момента инерции колеса,** такая система может быть представлена одно массовой физической моделью

$$\ddot{\gamma} + 2n\dot{\gamma} + \omega^2\gamma = m(t)$$



- Решение такого дифференциального уравнения, как известно, представляется в виде ***суммы решений однородного уравнения, соответствующего данному неоднородному уравнению, и частного решения.***

- ***Однородное дифференциальное уравнение,*** соответствующее данному неоднородному уравнению, имеет вид

$$\ddot{\gamma}_o + 2n\dot{\gamma}_o + \omega^2\gamma_o = 0$$

- Решение уравнения методом Эйлера будет

$$\gamma_o = Ce^{zt}$$

- где *C* – постоянная интегрирования, *z*-корень характеристического уравнения

$$z^2 + 2nz + \omega^2 = 0$$

$$z_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - \omega^2}$$

- Тогда решение примет вид

$$\gamma_o = Ce^{(-n \pm \sqrt{n^2 - \omega^2})t} \equiv Ce^{-nt} e^{\pm\sqrt{n^2 - \omega^2}t}$$

- Из решения уравнения следует: при положительном показателе степени *n*, γ_o, как функция времени, – затухающая. Это всегда имеет место для рассматриваемых динамических систем (всегда имеет место рассеяние энергии системой), каков бы ни был дискриминант (положительный или отрицательный).

- С увеличением времени выражение

$$e^{-nt} \to 0$$

- Однако, в зависимости от того, какого вида функция

$$e^{\pm\sqrt{n^2-\omega^2}t}$$

- затухание, т.е. стремление к нулю решения однородного уравнения будет происходить быстрее или медленнее, или в режиме колебания.

- Рассмотрим более подробно случай, когда выражение под радикалом отрицательное, т.е. когда имеет место случай

отрицательное. Это может быть только в случае, когда $n^2 - \omega^2 < 0 -$

$$\omega > n$$

- Запишем

$$\sqrt{n^2 - \omega^2}$$

В виде

Где $$\sqrt{n^2 - \omega^2} = i\sqrt{\omega^2 - n^2} = ip$$

$$i = \sqrt{-1}, \quad p^2 = \omega^2 - n^2$$

- Тогда решение примет вид

$$\gamma_o = Ce^{(-n \pm ip)t}$$

- Функция $e^{\pm ipt}$ - это полная гармоническая функция или функция Эйлера:

$$e^{\pm ipt} = \sin pt + \cos pt$$

- И решение уравнения примет вид

$$\gamma_o = Ce^{-nt}(\sin pt + \cos pt)$$

Которое может быть представлено в виде

$$\gamma_o = e^{-nt}(C_1 \sin pt + C_2 \cos pt)$$

- Из полученного решения уравнения следует: поскольку выражение в скобках есть периодическая функция и больше быть не может, т.е. не стремится к бесконечности с течением времени, $\sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ решение уравнения – затухающая функция времени.

- *Физически это означает – динамическая система, выведенная из равновесного состояния или из состояния покоя и предоставленная самая себе, колеблясь вокруг равновесного (исходного) состояния, с течением времени приходит к этому равновесному состоянию или состоянию покоя.*

- Рассмотрим, с какими же параметрами происходит это колебания системы? Для дальнейшего удобно решение уравнения свернуть и представить в виде

$$\gamma_o = Ae^{-nt}\cos(pt - \varepsilon)$$

- $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ амплитуда

  $p^2 = \omega^2 - n^2$частота

  ε фаза

- Рассмотрим более подробно, что представляет собой частота.
- Для этого отбросим величину *n,* как малую, и вспомним, что $\omega^2 = c / J$
- где *c* – коэффициент жесткости, а *J* - момент инерции динамической системы. Параметр это параметр, обусловлен двумя параметрами динамической ω^2 системы: ее жесткостью и инерцией, а их отношение называется квадратом частоты собственных колебаний.

- Частота собственных колебаний системы

$$\omega = \sqrt{c / J}$$

- Таким образом, возвращение рассматриваемой динамической системы в исходное положение происходит, колеблясь вокруг исходного положения с частотой собственных колебаний и уменьшающейся за полный период амплитудой по логарифмической кривой .

$$e^{-n(T+t)}$$

- Откуда следует, что скорость (интенсивность) убывания амплитуды обусловливается параметром *n,* представляющим собой отношение $0{,}5\beta_к / J$
- и характеризующим рассеивающую (демпфирующую) способность системы. Поэтому параметр *n* динамических систем называют *логарифмическим декрементом колебания.*

- ***линейная динамическая система второго порядка, выведенная из равновесного состояния (равномерного движения или покоя) и предоставленная сама себе с течением времени, колеблясь, возвращается в исходное состояние.***

- ***При этом скорость ее возвращения и колебания вокруг этого состояния обусловливаются параметрами самой системы – рассеивающей способностью, жесткостью и инерционными свойствами системы.***

Частное решение

- дифференциального уравнения обычно ищут в том же виде, что и его правая часть, но на степень выше, если это линейная или криволинейная зависимость или в виде полной гармонической функции, если она задана не полной гармонической функцией.

- Пусть правая часть уравнения (внешнее возмущение) задано периодической функцией вида

$$m(t) = a\cos\lambda t$$

- где a – амплитуда, λ - частота внешнего возмущения.

- Тогда уравнение примет вид

$$\ddot{\gamma} + 2n\dot{\gamma} + \omega^2\gamma = a\cos\lambda t$$

- И частное решение уравнения ищем в виде

$$\gamma_ч = A\sin\lambda t + B\cos\lambda t$$

- Далее поступают следующим образом. Это решение подставляют в исходное уравнение и определяют неизвестные *A* и *B* таким образом, чтобы они удовлетворяли решению.

$$\dot{\gamma}_ч = A\lambda\cos\lambda t - B\lambda\sin\lambda t,$$

$$\ddot{\gamma}_ч = -A\lambda^2\sin\lambda t - B\lambda^2\cos\lambda t$$

- После подстановки полученных производных в исходное уравнение, будем иметь

$$-A\lambda^2\sin\lambda t - B\lambda^2\cos\lambda t +$$
$$+2n(A\lambda\cos\lambda t - B\lambda\sin\lambda t) +$$
$$+\omega^2(A\sin\lambda t + B\cos\lambda t) = a\cos\lambda t.$$

- Собрав члены при $\sin\lambda t \;\; и \;\; \cos\lambda t$

получим систему двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными *A* и *B* вида

$$\begin{cases} -A(\lambda^2-\omega^2)-2nB\lambda=0 \\ -B(\lambda^2-\omega^2)-2nA\lambda=a \end{cases}$$

которое однозначно решается относительно неизвестных.

$$A=\Delta_A/\Delta, \quad B=\Delta_B/\Delta$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} -(\lambda^2-\omega^2) & -2n\lambda \\ -2n\lambda & -(\lambda^2-\omega^2) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_A = \begin{vmatrix} 0 & -2n\lambda \\ a & -(\lambda^2 = \omega^2) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_B = \begin{vmatrix} -(\lambda^2 - \omega^2) & 0 \\ -2n\lambda & a \end{vmatrix}$$

- После решения приведенных зависимостей, определения неизвестных

$$\gamma_ч = \frac{a\sin(\lambda t - \theta)}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^2\right]^2 + \frac{4n^2\lambda^2}{\omega^4}}}$$

- Величину

$$k_{\partial} = \frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)^2\right]^2 + \frac{4n^2\lambda^2}{\omega^4}}}$$

- называют **коэффициентом динамичности системы**

- Тогда частное решение уравнения примет вид

$$\gamma_{ч} = k_{\partial} a \sin(\lambda t - \theta)$$

- Полное решение уравнения (математической модели) примет вид

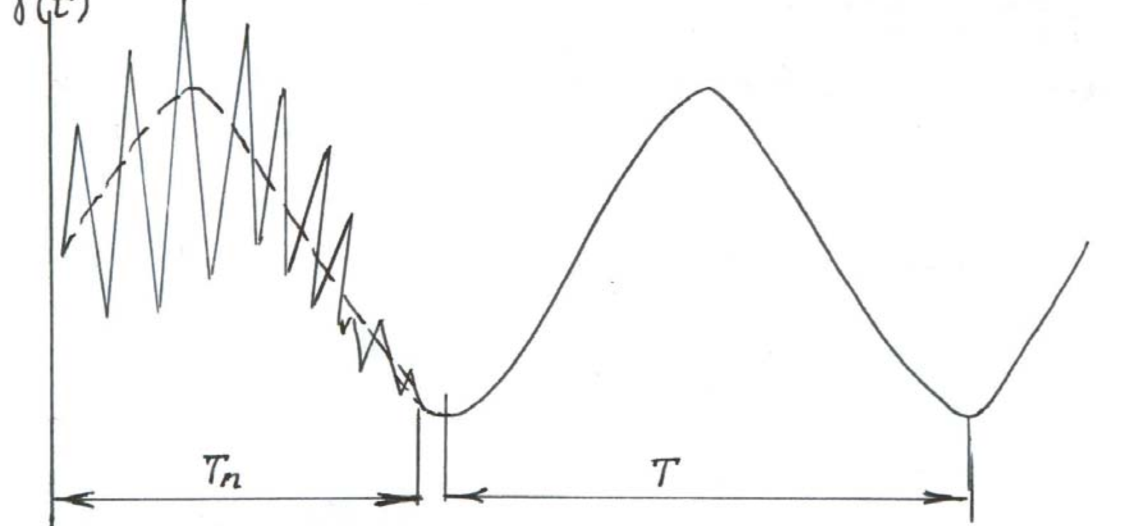
$$\gamma = Ae^{-nt}\cos(pt-\varepsilon)+k_{\partial}a\sin(\lambda t-\theta)$$

- Откуда следует: при *t* = *T*$_п$ и таком, что $e^{-nT_п} \approx 0$
- первое слагаемое становится равным нулю (после окончания так называемого *переходного процесса*) и для установившегося режима работы решение математической модели примет вид

$$\gamma = k_{\partial}a\sin(\lambda t-\theta)$$

- Другими словами, в установившемся режиме работы колебания являются постоянными и проходят с частотой внешнего возмущения.

Графическое представление полного решения



- видно, что после окончания переходного процесса – по истечении времени $T_п$, в интервале которого процесс протекает на двух частотах – на частоте собственных колебаний, наложенных на процесс, протекающий на частоте внешнего возмущения.

- После окончания переходного процесса (после затухания процесса на частоте собственных колебаний) процесс протекает на частоте внешнего возмущения.
- Рассмотрим, далее, более подробно *коэффициент динамичности системы.*
- Не трудно видеть, что при совпадении частоты нагрузки λ с частотой собственных колебаний системы ω:

- *для идеальной системы (n=0)*

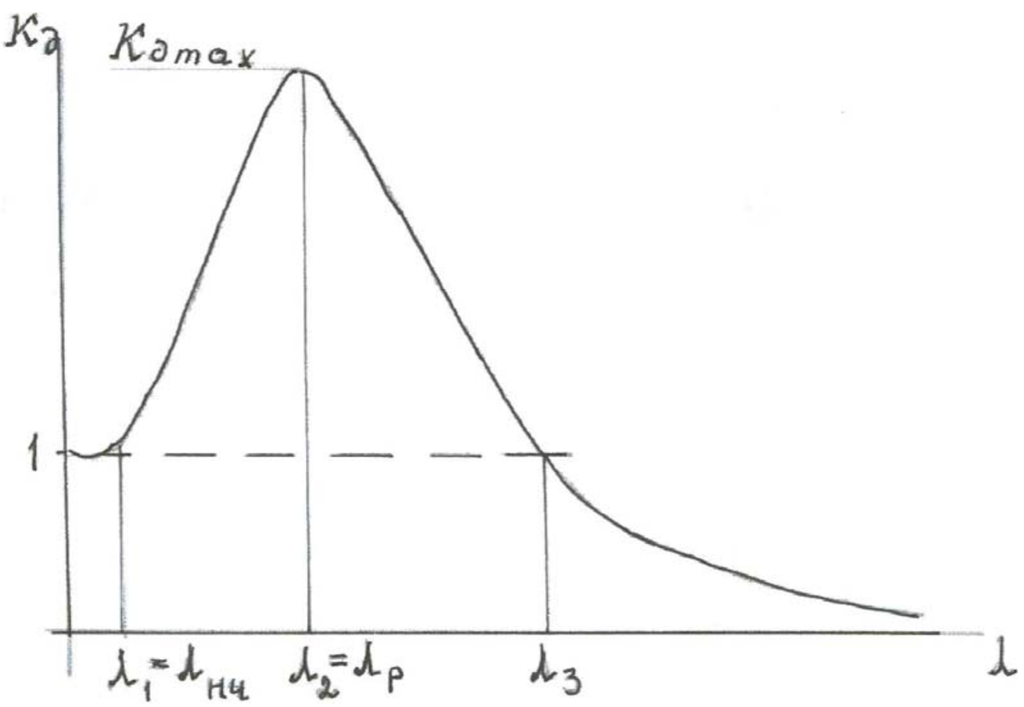
$k_д = \infty$,

для реальной системы ($n \neq 0$)

$$k_\partial = \frac{\lambda}{2n}$$

- Поскольку n мало, величина k_∂ достигает большой величины – 5-10. Физически это означает, амплитуда деформации, а следовательно, и мгновенное значение упругого момента во столько раз превышает амплитудное значение внешнего возмущения, какова величина коэффициента динамичности, т. е. в эти 5-10 раз.

Графическое представление коэффициента динамичости



3 зоны

- ***Зона 1*** – $k_{д} \cong 1$.

$$0 \le \lambda \le \lambda_1 \equiv \lambda_{нч}$$

- Это означает, что при внешнем возмущении с этой частотой нагрузка в системе не изменяется – не уменьшается и не усиливается. Эти частоты иногда называют *прошивными,* нагрузка *прошивает* динамическую систему без изменения. Это так называемая низкочастотная составляющая нагрузки.

Зона 2 $k_д > 1$

$$\lambda_1 < \lambda \le \lambda_2 \equiv \lambda_p$$

- При внешнем возмущении с частотой в этом интервале нагрузка, т.е. упругий момент в системе увеличивается в $k_д$ раз и достигает для реальных систем тех 5-10 значений.

Зона 3 $k_д$ уменьшается

$$\lambda > \lambda_2$$

- $k_д$ уменьшается, достигая величины, равной 1, при $\lambda = \lambda_3$
- и при дальнейшем увеличении частоты продолжает уменьшаться, достигая величин, близких к нулю.

- Из приведенного анализа следует, что наиболее выгодными частотами внешнего возмущения являются частоты, при которых коэффициент динамичности меньше 1 и чем меньше, тем выгоднее.