ПОЛУПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Скорикова А.О., Потана Ю.Р. *(кафедра НГиИГ, ДонНТУ, г. Донецк)*

Аннотация. *В статье дается определение полуправильных многогранников и рассматриваются способы их построения.*

Ключевые слова: *полуправильные многогранники, антипризма, изоэдр, изогон.*

Многогранник называется *равноугольно-полуправильным* или ар*химедовым,* если все его многогранные углы равны между собой (но не обязательно правильные), а все его грани — правильные многоугольники нескольких типов. Этим они отличаются от платоновых тел, грани которых правильные многоугогльники одного типа. Такие многогранники были впервые рассмотрены Архимедом в III в. до н. э. в недошедшем до нас сочинении, а затем описаны известным немецким астрономом и математиком Иоганном Кеплером (1571 —1630) в книге «Гармония мира».

Простейшим примером архимедова многогранника может служить *архимедова призма*, т.е. правильная n-угольная призма с квадратными боковыми гранями (рис.1). Другой пример - так называемая n -угольная *архимедова антипризма* (рис. 2). Она может быть получена, если одно из оснований правильной n-угольной призмы $(n \geq 4)$ повернуть вокруг оси призмы на угол $\dfrac{180^0}{n}$

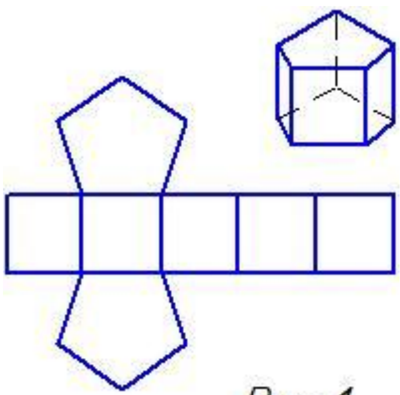

Рис. 1.

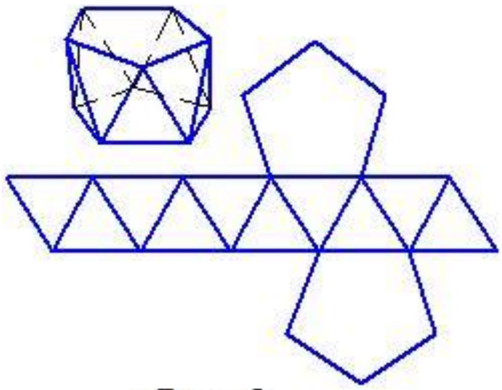

Рис. 2.

и затем соединить отрезками каждую вершину этого основания с ближайшими вершинами другого основания; при этом высота призмы должна быть подобрана так, чтобы эти отрезки оказались равными стороне основания (т. е, боковые грани антипризмы должны быть правильными треугольниками). Меняя *n*, мы получим две бесконечные серии архимедовых многогранников — призм и антипризм.

Будем относить к одному и тому же типу два полуправильных многогранника нулевого рода, если:

1) при любом n у них одно и то же число n-угольных граней (одинаковое число треугольников, четырехугольников и т. д.);

2) при любом s у них одно и то же число s-гранных углов (одинаковое число трехгранных углов, одинаковое число четырехгранных углов и т. п.).

У таких многогранников также совпадают характеристики *Г*, *В*, *Р*. Как показал Иоганн Кеплер, существуют (кроме рассмотренных выше серий призм и антипризм) еще 13 различных типов простых архимедовых многогранников.

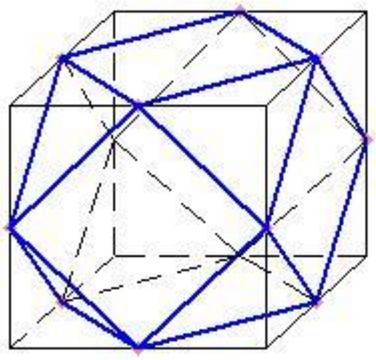

Рис. 3

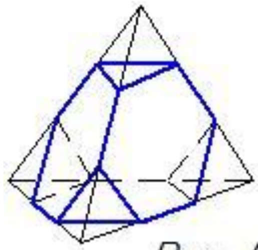

Рис. 4.

Многие архимедовы многогранники можно получить, если отсечь у всех вершин правильного многогранника равные правильные пирамиды (размеры этих пирамид не могут, разумеется, быть произвольными). На рисунке 3 изображен один такой многогранник, которому Кеплер дал название *кубооктаэдр.* Он может быть получен из куба, если отсечь у каждой его вершины треугольную пирамиду, проводя плоскость через середины трех ребер, исходящих из этой вершины. У кубооктаэдра 6 квадратных граней, остальные 8 граней — правильные треугольники. В каждой вершине сходятся два квадрата и два треугольника. Форму кубооктаэдра имеет кристалл аргентита (Ag_2S). Другой простой пример архимедова многогранника получим, если у каждой вершины правильного тетраэдра с ребром a отсечем правильный тетраэдр с ребром $\frac{1}{3}a$ (см. рис. 4).

Установлено, что архимедов многогранник может иметь грани не более чем трех различных наименований. Самое большое число граней у архимедова многогранника, отличного от призмы и антипризмы, равно 92: у него 80 треугольных и 12 пятиугольных граней.

Может показаться, что если два архимедова многогранника принадлежат к одному и тому же типу, а ребра у многогранников равны, то сами многогранники равны; это представляется очевидным. Однако советский геометр В. Г. Ашкинузе показал, что для одного типа полуправильных многогранников это не так: два многогранника, приведенные на рисунках 5 и 6, принадлежат к одному и тому же типу (у каждого из них по 18 квадратных и по 8 треугольных граней, по 24 вершины и по 48 ребер); но из равенства их ребер не следует равенство многогранников (т. е. не следует возможность их совмещения).

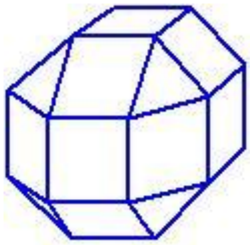

Рис. 5.

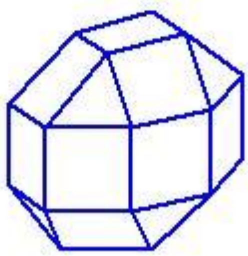

Рис. 6.

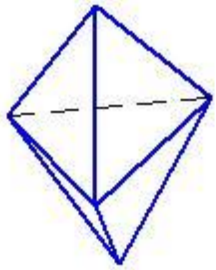

Рис. 7.

Многогранник называется *равногранно-полуправильным,* если у него все грани — равные многоугольники (но не обязательно правильные), а все многогранные углы правильные (но не все равны между собой).

Чтобы получить простейший пример такого многогранника, сложим основаниями две равные правильные пирамиды (рис. 7). Возможно так подобрать высоты этих пирамид, чтобы четырехгранные углы при вершинах общих оснований были правильными (т. е. чтобы все двугранные углы такого четырехгранного угла были равны между собой).

В кристаллографии приходится встречаться с классом многогранников, более широким, чем равногранно-полуправильные, это класс *равногранных* многогранников, или *изоэдров.*

Форму изоэдра имеет, например, кристалл куприта (Cu_2O); это выпуклый многогранник, ограниченный 24 равными неправильными пятиугольниками (рис. 8).

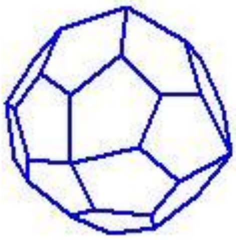

Рис. 8.

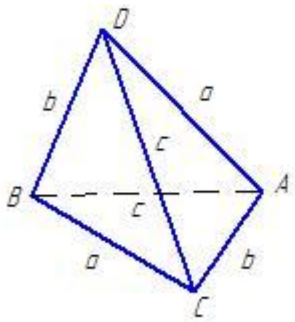

Рис. 9.

Простейшим примером изоэдра, не являющегося правильным или полуправильным многогранником, может служить неправильный равногранный тетраэдр (рис. 9), т. е. неправильный тетраэдр, у которого равны между собой противоположные ребра: $AB = CD = c$, $BC = AD = a$, $CA = BD = b$, причем отрезки *a*, *b*, *c* не все равны между собой. Для получения такого многогранника достаточно в произвольном прямоугольном параллелепипеде (рис. 10), отличном от куба, выбрать произвольную вершину *D* и в трех гранях, примыкающих к этой вершине, провести диагонали *OA, OB, OC*. Четыре точки *A*, *B*, *C*, *D* и будут вершинами равногранного тетраэдра.

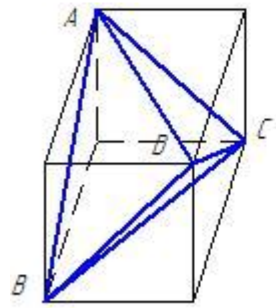

Рис. 10.

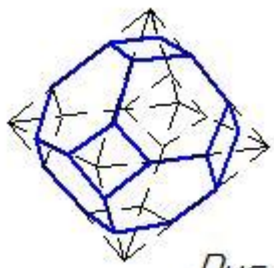

Рис. 11.

Обобщением понятия архимедова многогранника является понятие равноугольного многогранника, или *изогона* (у него все многогранные углы равны, а грани могут быть произвольными). Простой пример изогона мы получим, если у всех вершин правильного октаэдра с ребром a отсечь от этого октаэдра правильную четырехугольную пирамиду с ребром, меньшим чем $\frac{1}{2}a$. Такую форму имеет, в частности, кристалл флюорита CaF_2 (рис. 11). Изоэдр, изображенный на рисунке 9, является одновременно и изогоном.

Список литературы: 1. Александров А.Д. Выпуклые многогранники. – М.-Л.; ОГИЗ, 1950, 429с. **2.** Смирнова И.М. В мире многогранников. – М.: Просвещение, 1995, 136с.