

УДК 621.3.013.22

Н.П. КОРБАН

Восточноукраинский национальный университет им. В. Даля
npkorban@mail.ru

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МЕТОДА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА МАГНИТНОГО ПОЛЯ НАМАГНИЧЕННОГО ТЕЛА

В статье проанализирован широко применяемый интегральный метод расчета магнитного поля. Предложено совершенствование рассматриваемого метода. Разработанный алгоритм осуществляет оптимизацию численного расчета магнитного поля намагниченного тела.

Введение. При расчете магнитостатического поля намагниченного ферромагнитного тела в различных областях широкое применение получил пространственный метод интегральных уравнений. Этот метод особенно эффективен применимо к расчету магнитного поля рассеяния дефектов намагниченного изделия в нелинейной магнитной среде, так как он точно учитывает магнитные поля рассеяния намагниченных тел в неограниченном пространстве и имеет минимальную расчетную область [1]. В тоже время применение настоящего метода в существующем виде ограничивается его большими требованиями к машинным ресурсам. Это налагает ограничения на точность численного расчета. Повышение точности расчета магнитного поля является приоритетной задачей в области магнитной дефектоскопии. Поэтому возникает актуальная задача в предметном анализе существующего интегрального метода, применяемого в настоящее время для расчета магнитного поля рассеяния дефекта и поиске путей его совершенствования.

Анализ и оценка эффективности расчета магнитостатического поля по интегральному методу, разработанным П.А. Курбатовым. Исходное уравнение, получившее широкое распространение при расчете магнитных полей, вызванных наличием дефектов, имеет следующий вид [2]:

$$\bar{H}_i = -\frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^N \sum_{v=1}^{l_j} (\bar{M}_j \cdot \bar{n}_{vj}) \int_{\Delta S_{vj}} \frac{\bar{R}}{R^3} dS + \bar{H}_{СТ}, \quad (1)$$

где N – общее число элементарных объектов с постоянной намагниченностью, выделенных в ферромагнитной детали;

l_j – число граней j -го элемента;

S_{vj} – поверхность v -ой грани j -го элемента;

\bar{n}_{vj} – единичный вектор нормальный к v -ой поверхности j -го элемента;

\bar{M}_j – намагниченность j -го образца;

R – радиус-вектор, соединяющий точку наблюдения и точку источника;

$\bar{H}_{СТ}$ – вектор напряженности внешнего намагничивающего поля.

Геометрическая модель расчетной области ферромагнитного пространства, разбиваемого на множество элементарных объемов (ЭО), отображена на рис. 1.

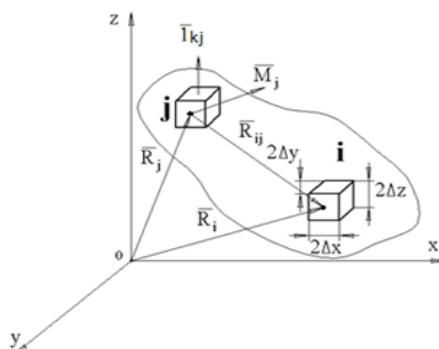


Рисунок 1 - Разбиение области решения на ЭО

Для рассматриваемой модели принимается, что $\bar{M}_j = const$ по всему отдельно взятому ЭО, а намагниченность между ними меняется скачком.

В матричной форме (1) представляется в виде:

$$\bar{H}_i = [C_{ij}] \bar{M}_j + \bar{H}_{CT}, \quad (2)$$

здесь $C_{i,j} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_{vj}} \frac{R_{ij}}{\bar{R}_{ij}^3} dS$ (в дальнейшем – коэффициенты С).

Коэффициенты С относительно двух произвольно расположенных ЭО после интегрирования по поверхностям площадок, ограничивающих параллелепипед, определяются аналитическими выражениями.

Как показали результаты численных расчетов, большую часть машинного времени занимает расчет коэффициентов $C_{i,j}$. Их обработка требует наличия большого объема оперативной памяти компьютера, что существенно ограничивает возможности настоящего метода. Это связано с громоздкостью зависимостей, через которые выражаются коэффициенты С.

Что касается самого численного решения уравнения при известных коэффициентах итерационными методами, то здесь развитие численных методов, входящих в комплекс известных математических программ, существенно упрощает и ускоряет процесс решения. Длительность итерационного процесса зависит в большей степени от его сходимости, а сходимость напрямую зависит от обусловленности расчетной матрицы коэффициентов С.

Размерность матрицы коэффициентов С напрямую зависит от числа ЭО, на которые разбивается весь объем ферромагнитного тела.

Как показали численные эксперименты, при относительно малом количестве ЭО основное время непродолжительного численного расчета идет на итерационный процесс. При увеличении количества ЭО путем более мелкого разбиения объема ферромагнетика наблюдалось резкое увеличение времени на реализацию расчета коэффициентов С и незначительно увеличение времени итерационного процесса решения системы уравнений (2).

В виду полученных результатов исследований расчета магнитного поля возникает актуальная задача в поиске способов оптимизации численного расчета, которые в первую очередь должны быть направлены на повышение скорости вычисления характеристических коэффициентов С без потери в точности численного расчета параметров магнитостатического поля в нелинейной магнитной среде.

Разработка теоретических методов оптимизации численного расчета магнитного поля в нелинейной магнитной среде. По сути, коэффициенты $C_{i,j}$ определяют поверхностный интеграл по площадкам, ограничивающих параллелепипед с учетом геометрического взаиморасположения в пространстве двух ЭО одинаковых размеров с центрами в точках i и j (рис. 1).

В частности составляющие коэффициентов $C_{xxi,j}$ отображают интегрирование по площадкам параллелепипеда с центром в точке j лежащих в плоскости yz декартовой системы координат (рис. 2а). При этом учитывается расположение площадок ЭО с центром в точке j относительно ЭО с центром в точке i .

Если представить несколько другую картину расположения в пространстве двух ЭО с центрами в точках i и j (рис. 2б), то в этом случае два граничащих между собой параллелепипеда будут иметь общую грань. Естественно, что зазора между двумя ЭО нет, так как ферромагнитное тело (ФТ) разбивается на множество подобных ЭО.

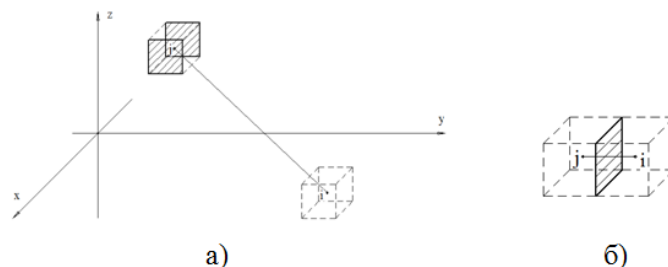


Рисунок 2- Представление элементов расчетной области
а) грани параллелепипеда относительно ЭО с центром в т. i
б) два соприкасающихся гранями ЭО

Если рассматривать рис. 2б как два ЭО, определяющих весь объем ФТ, а ЭО в свою очередь как шесть граней прямоугольной формы, то можно отметить следующие. С одной стороны представленный на рис. 2б объект, состоящий из двух ЭО, имеет 12 граней. Но в виду того, что два ЭО имеют в данном случае одну

общую грань, где они прилегают друг к другу, общее количество элементарных площадок (ЭП) заключенных во всем теле составляет 11. То есть при увеличении числа ЭО, на которые разбивается исследуемый объект определенной формы, суммарное количество соприкасающихся граней будет увеличиваться.

Для наглядности в табл. 1 приводится количество ЭО; полное число всех ЭП ограничивающих заданные ЭО и число соприкасающихся ЭП при различном разбиении расчетной области ферромагнитного пространства на элементарные объемы.

Таблица 1- Количественные данные разбиваемой на множество ЭО расчетной области

Разбиение ФТ по осям	Количество ЭО	Полное количество ЭП	Количество соприкасающихся ЭП	Процент соприкасающихся ЭП от их полного количества
3x3x3	27	162	54	33.3%
5x5x5	125	750	300	40%
7x7x7	343	2058	882	42.8%
10x10x10	1000	6000	2700	45%
20x5x10	1000	6000	3350	44.1%
20x20x20	8000	48000	22800	47.5%

Из результатов табл. 1 видно, что при увеличении количества ЭО объемной расчетной области, соотношение соприкасающихся ЭП к общему их количеству растет. При неограниченном увеличении количества ЭО в заданном локальном пространстве, предел количества ЭП равен 50%. В случае неравномерного разбиения это соотношение несколько уменьшается.

Изложенное положение открывает возможности для проведения совершенствования применяемого ранее численного метода расчета магнитостатического поля.

На основе модели (2), уравнение относительно напряженности магнитного поля в точке наблюдения над поверхностью источника магнитного поля (рис. 3), состоящего из двух ЭО для x-вой составляющей, запишется следующим образом:

$$M_{x1}C_{xx1,1} + M_{x2}C_{xx1,2} + M_{y1}C_{xy1,1} + M_{y2}C_{xy1,2} + M_{z1}C_{xz1,1} + M_{z2}C_{xz1,2} = -4\pi H_{x1}. \quad (3)$$

Или относительно ЭП (рис. 3) уравнение (3) можно переписать так:

$$M_{x1}(-C_{xx1,1} + C_{xx1,2}) + M_{x2}(-C_{xx1,7} + C_{xx1,8}) + M_{y1}(-C_{xy1,3} + C_{xy1,4}) + \\ + M_{y2}(-C_{xy1,9} + C_{xy1,10}) + M_{z1}(-C_{xz1,5} + C_{xz1,6}) + M_{z2}(-C_{xz1,11} + C_{xz1,12}) = -4\pi H_{x1}, \quad (4)$$

после раскрытия скобок:

$$-M_{x1}C_{xx1,1} + M_{x1}C_{xx1,2} - M_{x2}C_{xx1,7} + M_{x2}C_{xx1,8} - M_{y1}C_{xy1,3} + M_{y1}C_{xy1,4} - \\ - M_{y2}C_{xy1,9} + M_{y2}C_{xy1,10} - M_{z1}C_{xz1,5} + M_{z1}C_{xz1,6} - M_{z2}C_{xz1,11} + M_{z2}C_{xz1,12} = -4\pi H_{x1}. \quad (5)$$

При этом, как видно, размерность сумм относительно источников магнитного поля, которыми служат ЭО, увеличивается в два раза.

Но для представленной геометрической модели (рис. 3) справедливо, что $C_{xx2,1} = C_{xx7,1}$. Тогда (5) можно переписать следующим образом:

$$-M_{x1}C_{xx1,1} + (M_{x1} - M_{x2})C_{xx1,2} + M_{x2}C_{xx1,8} + M_{y1}(C_{xy1,4} - C_{xy1,3}) + \\ + M_{y2}(C_{xy1,10} - C_{xy1,9}) + M_{z1}(C_{xz1,6} - C_{xz1,5}) + M_{z2}(C_{xz1,12} - C_{xz1,11}) = -4\pi H_{x1}. \quad (6)$$

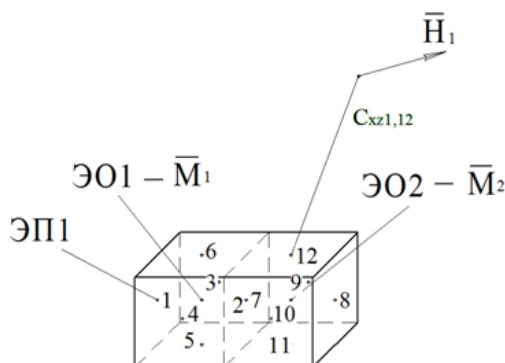


Рисунок 3 – Модель источника магнитного поля

В общем виде запись уравнение (6) может быть описано следующим выражением [2]

$$\bar{H}_j = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^m (\bar{M}_k^e - \bar{M}_k^i) \bar{n}_{vj} \int_{\Delta S_k} \frac{\bar{R}_{ij}}{R_{ij}^3} dS \quad (7)$$

где: m – полное количество ЭП расчетной области за вычетом количества соприкасающихся граней;

\bar{M}_k^e, \bar{M}_k^i – вектора намагниченности прилегающие к k -й ЭП.

Как видно, при подобной записи размерность уравнения (5) уменьшается. Выражение величины намагниченности через разность намагниченностей прилегающих друг к другу ЭО справедливо для соприкасающихся ЭП. Другими словами, размерность уравнения вида (5) можно уменьшить на столько членов, сколько имеется соприкасающихся ЭП в разбиваемом на множество ЭО ферромагнитном пространстве.

Следует отметить, что имеющиеся преимущество записи уравнения вида (7) нет смысла использовать при не очень большом количестве источников магнитного поля (ЭО). Здесь необоснованным является увеличение размерности системы уравнений по сравнению с моделью, описываемой выражением (1), так как $M = \text{const}$ по всему ЭО.

По сравнению с (3) размерность уравнения (6) в данном случае стала больше. Как показали исследования, при относительно небольшом количестве ЭО (около 200) локальной области расчетного пространства применение модели (7) не является целесообразным, так как в этом случае происходит увеличение размерности матрицы коэффициентов C .

Исходя из отмеченных свойств, для рассматриваемой модели (1) предлагается несколько совершенствовать существующий метод расчета магнитного поля намагниченного ферромагнитного тела, который рекомендуется применять при относительно небольшом количестве ЭО. При расчете коэффициентов C предлагается производить интегрирование по соприкасающимся ЭП только один раз, запоминать полученные результаты в выделенном массиве и в дальнейшем использовать рассчитанные значения, а не производить повторный расчет коэффициентов. При этом для каждой ЭП рассчитанные коэффициенты записываются в массив данных в заданном порядке, чтобы по индексу коэффициента однозначно определялось расположение площадки в пространстве. Это позволяет идентифицировать конкретную ЭП каждого ЭО. Две соприкасающиеся грани рядом расположенных ЭО имеют одинаковые координаты. Соответственно это принимается как одна, имеющая определенные координаты ЭП.

Для практической реализации предложенного метода был разработан алгоритм, при котором интегрирование по всем соприкасающимся площадкам не производится дважды.

Все ЭП расчетной области имеют различное расположение в пространстве относительно системы координат. Привязкой к конкретной точке пространства граней ЭО принимается геометрический центр ЭП (рис. 4).

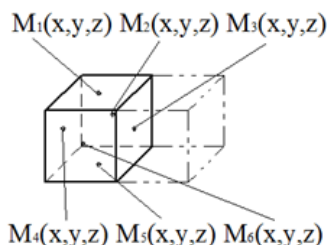


Рисунок 4 – Центры ЭП относительно системы координат

Ниже приводится блок-схема алгоритма, реализующего оптимизацию расчета коэффициентов C на основе изложенного подхода по формуле (1) (рис. 5).

После разбиения всего объема ФТ на ЭО начинается расчет коэффициентов $C_{i,j}$. Результаты расчетов записываются в массив M и, кроме того, туда же записываются координаты текущей ЭП, по которой производилось интегрирование. Далее производится переход к следующей ЭП. При этом осуществляется проверка координат центра текущей ЭП на предмет существования идентичных координат в массиве M . Если таких координат в массиве не было найдено, то осуществляется расчет коэффициентов C для текущей ЭП относительно точки наблюдения. В противном случае используются ранее вычисленные коэффициенты C для соприкасающийся ЭП. Цикл продолжается до тех пор, пока не будет произведен расчет коэффициентов для всех ЭП (m), заключенных в расчетной области.

Когда количество ЭО намагниченного объема, имеющего форму параллелепипеда, превышает 200, рекомендуется для расчета внутреннего магнитного поля применять модель, основанную на выражении (7). Применение модели вида (7) в этом случае обладает большим преимуществом при численном расчете магнитостатического поля. Дело в том, что коэффициенты C представляют собой два интеграла по противоположным граням ЭО для модели (1) (рис. 2 а). В то время как согласно модели (рис. 2 б)

интегрирование по одной общей грани для двух соприкасающихся ЭО производится один раз, что собственно заложено в самой модели. Размерность же матрицы коэффициентов C вида (2) относительно моделей (1) и (7) в этом случае приблизительно одинаковая.

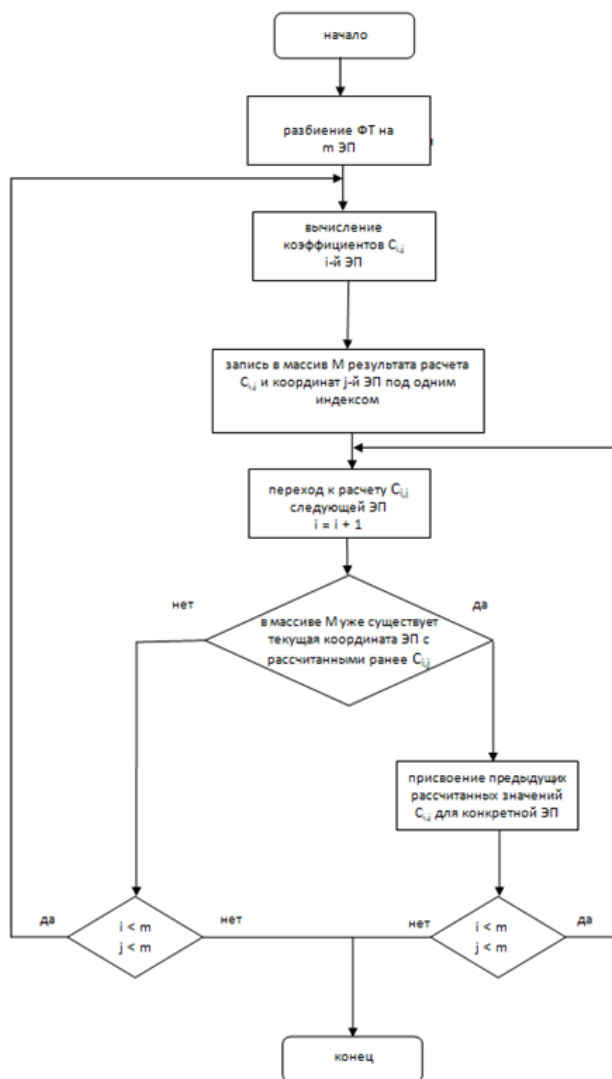


Рисунок 5 – Блок-схема алгоритма, реализующего оптимизацию расчета коэффициентов C

При таких обстоятельствах уже нет необходимости в использовании алгоритма по оптимизации расчета коэффициентов C (рис. 2.11), программная реализация которого при большом количестве ЭО дополнительно увеличивает время численных расчетов внутреннего магнитного поля намагниченного ферромагнитного тела.

В силу изложенных особенностей, рекомендуется для расчета магнитостатического поля намагниченного тела применять различные подходы к численному моделированию расчетной области. При относительно небольшом количестве ЭО наиболее рациональным является использование модели (1) совместно с разработанным алгоритмом (рис. 5). Если же на первый план выступает высокая точность численного расчета магнитного, что требует значительного увеличения машинного времени, то целесообразно использовать модель (7). И в первом и во втором случае достигается существенная экономия машинного времени компьютера по сравнению с использовавшимся ранее известным методом.

Выводы. В настоящей работе были представлены результаты исследований, направленных на оптимизацию численного расчета магнитостатического поля широко известным интегральным методом. Разработанные методы обеспечивают весомую экономию машинного времени при численном расчете магнитного поля намагниченного тела по методу пространственных интегральных уравнений. При реализации расчетов коэффициентов C , экономия машинного времени составляет до 50% по сравнению с исходным методом.

Практическим результатом предлагаемого метода является значительное высвобождение машинных ресурсов (оперативной памяти и загрузки процессора), которые рационально направить на повышение точности численного расчета магнитного поля намагниченного тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальченко В.Я. Компьютерный анализ конфигурации магнитных полей поверхностных дефектов сплошности конечных размеров в ферромагнитной пластине ограниченной протяженности методом пространственных интегральных уравнений / В.Я. Гальченко, Д.Л. Остапушенко, М.А. Воробьев // Дефектоскопия. – 2009. – № 3. – С. 56 – 66.

2. Курбатов П.А. Численный расчет электромагнитных полей / П.А. Курбатов, А.С. Аринчин. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 164 с.

Надійшла до редколегії 13.10.2010

Рецензент: Є.Б.Ковальов

М.П. КОРБАН

Східноукраїнський національний університет ім.
В. Даля

N. KORBAN

East Ukrainian National University named after V.Dal

Удосконалення методу інтегральних рівнянь чисельного розрахунку магнітного поля намагніченого тіла. В статті проаналізовано широко використовуваний інтегральний метод розрахунку магнітного поля. Запропоновано вдосконалення метода, який розглядається. Розроблений алгоритм здійснює оптимізацію чисельного розрахунку магнітного поля намагніченого тіла.

Improvement of the Method of Integral Equations of Numeric Calculation of the Magnetic Field of a Magnetized Body. In the article we analyzed the commonly used integral method of calculating the magnetic field and offered the improvement of the considered method. The developed algorithm allows optimizing the numerical calculation of the magnetic field of a magnetized body.