УДК 621.313.333

О.Ю. КОЛЛАРОВ
Донецький національний технічний університет
kollarov@ukr.net

ІНІЦІАЛІЗАЦІЯ НЕЙРОННИХ ОДНОШАРОВИХ СІТОК ПРЯМОГО ПОШИРЕННЯ

У статті розглянуто штучні нейронні одношарові сітки прямого поширення. Розроблено теоретичну базу для початкового визначення вагових коефіцієнтів нейронних сіток за умов наявності еталонної моделі об'єкта у якості джерела цільового сигналу.

Постановка задачі: Використання штучних нейронних сіток в системах автоматичного управління є перспективним з точки зору їх адаптивності, відмовостійкості, здатності до навчання, нелінійності. І хоча існує велика кількість методів навчання, питання початкового визначення вагових коефіцієнтів залишається відкритим. Випадкове ж визначення цих коефіцієнтів впливає на подальший процес тренування і іноді унеможливлює отримання бажаного результату, викликає «параліч сітки». Все це обумовлює необхідність розрахунку вагових коефіцієнтів штучної нейронної сітки перед або замість процесу тренування «з вчителем» тобто за наявності еталонної моделі.

Аналіз останніх досліджень: Теорія нейронних сіток розвивається в напрямку методик їх тренування [1], при цьому не приділяється увага питанням ініціалізації вагових коефіцієнтів за умов наявності еталонної моделі, чи то у вигляді математичної моделі, чи то і у вигляді фізичного об'єкту. На даному етапі практикується експериментальне визначення як структури сітки, так і початкових значень вагових коефіцієнтів, причому останні вибираються випадково [2].

Задача досліджень: Розробка теоретичної бази для розрахунку початкових значень вагових коефіцієнтів штучних одношарових нейронних сіток прямого поширення заздалегідь визначеної структури.

Виклад основного матеріалу: Формула розрахунку вихідного сигналу одношарової нейронної сітки (рис. 1) має наступний вигляд [3]:

$$f(X) = B + \sum_{j=1}^{n} \omega_j^{II} F_a\left(\sum_{i=1}^{m} \omega_{i,j}^{I} \cdot x_i\right) \qquad (1)$$

де $X = x_1, x_2, \ldots, x_m$ - вектор змінних;

n - кількість нейронів;

m - кількість вхідних змінних;

B - біас;

ω - вагові коефіцієнти;

F_a - функція активації нейрона.

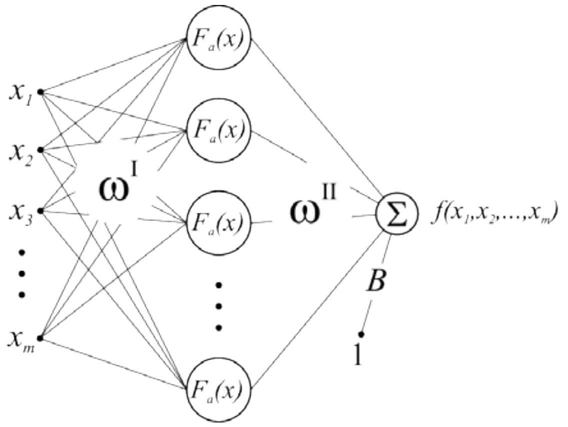

Рисунок 1 - Одношарова нейронна сітка

Найпоширенішою функцією активації одношарових нейронних сіток є функція Гауса [4]:

$$F_a(x) = \alpha \cdot e^{-\frac{(x-\beta)^2}{2\cdot\sigma^2}}$$

де α - висота піку кривої; β - позиція центру; σ - ширина «дзвону».

Створимо на базі функції Гауса наступні функції у вигляді нескінченних рядів:

$$G_1(x,\sigma) = \sum_{i=-n}^{n} (-1)^i e^{-\frac{(x+iT)^2}{2\sigma^2}}, n \to \infty, \; G_2(x,\sigma) = \sum_{i=-n}^{n} (-1)^i e^{-\frac{\left(x+\left(i+\frac{1}{2}\right)T\right)^2}{2\sigma^2}}, n \to \infty \qquad (2)$$

де n - показник кількості членів ряду.

Ці функції є періодичними з періодом 2T [5], адже:

$$\int_{-T}^{T} G_1(x,\sigma)dx = \int_{-T}^{T} \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i e^{-\frac{(x+iT)^2}{2\sigma^2}} dx = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i \int_{-T}^{T} e^{-\frac{(x+iT)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i \left[\Phi\left(\frac{T}{\sqrt{2}\sigma}(i+1)\right) - \right.$$

$$\left. -\Phi\left(\frac{T}{\sqrt{2}\sigma}(i-1)\right)\right] = a\left(\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i \left[\Phi(b(i+1)) - \Phi(b(i-1)) + \Phi(b(-i+1)) - \Phi(b(-i-1))\right] + \Phi(b) - \Phi(-b)\right)$$

де $\Phi(\cdot)$ - функція похибок Гауса [6];

$$a = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}};$$

$$b = \frac{T}{\sqrt{2}\sigma}.$$

Приймаючи до уваги непарність функції $\Phi(\cdot)$ маємо:

$$a\left(\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\left[\Phi\left(b(i+1)\right)-\Phi\left(b(i-1)\right)+\Phi\left(b(-i+1)\right)-\Phi\left(b(-i-1)\right)\right]+2\Phi(b)\right)=a\left(\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\left[\Phi\left(b(i+1)\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\Phi\left(b(i-1)\right)-\Phi\left(b(i-1)\right)+\Phi\left(b(i+1)\right)\right]+2\Phi(b)\right)=2a\left(\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\left[\Phi\left(b(i+1)\right)-\Phi\left(b(i-1)\right)\right]+\Phi(b)\right)$$

Якщо функція періодична, то:

$$S=\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}(-1)^i\left[\Phi\left(b(i+1)\right)-\Phi\left(b(i-1)\right)\right]+\Phi(b)=0$$

або

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}(-1)^i\left[\Phi\left(b(i+1)\right)-\Phi\left(b(i-1)\right)\right]=-\Phi(b)$$

Розгорнемо граничну суму:

$$\sum_{i=1}^{m}(-1)^i\left[\Phi\left(b(i+1)\right)-\Phi\left(b(i-1)\right)\right]=-\Phi\left(b(1+1)\right)+\Phi\left(b(1-1)\right)+\Phi\left(b(2+1)\right)-\Phi\left(b(2-1)\right)-$$

$$-\Phi\left(b(3+1)\right)+\Phi\left(b(3-1)\right)+\Phi\left(b(4+1)\right)-\Phi\left(b(4-1)\right)+\ldots+(-1)^m\left[\Phi\left(b(m+1)\right)-\Phi\left(b(m-1)\right)\right]$$

і побачимо, що скорочуються всі складові цієї суми окрім додатку $\left(-\Phi\left(b(2-1)\right)\right)$. Таким чином вище наведена сума дорівнює $\left(-\Phi(b)\right)$, що й вимагалось довести. Не важко перевірити, що функція $G_2(x,\sigma)$ теж періодична.

Система функцій: $1, G_1(x,\sigma), G_2(x,\sigma), G_1(2x,\sigma), G_2(2x,\sigma),\ldots, G_1(\omega x,\sigma), G_2(\omega x,\sigma),\ldots$ є ортогональною на інтервалі [–T, T], адже добуток періодичних функцій з кратними найменшими періодами - є функція періодична з найбільшим з них [7].

За аналогією із рядом Фур'є [7], знайдемо розвинення цільової функції у вигляді:

$$f(x)=A+\sum_{\omega=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2}A_{k,\omega}G_k(\omega x,\sigma_{k,\omega}) \quad (3)$$

Коефіцієнти A та σ можна розрахувати скориставшись середньою квадратичною похибкою по Гаусу [7]:

$$M=\frac{1}{2}\int_{-T}^{T}\left(f(x)-A-\sum_{\omega=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2}A_{k,\omega}G_k(\omega x,\sigma_{k,\omega})\right)^2dx$$

Частинні похідні середньої квадратичної похибки по коефіцієнтам $A_{k,\omega}$ мають вигляд:

$$-\frac{\partial M}{\partial A_{k,\omega}}=\int_{-T}^{T}\left(f(x)-A-A_{k,\omega}G_k(\omega x,\sigma_{k,\omega})\right)G_k(\omega x,\sigma_{k,\omega})dx$$

Частинна похідна середньої квадратичної похибки по коефіцієнту A має вигляд:

$$-\frac{dM}{dA}=\int_{-T}^{T}\left(f(x)-A-\sum_{\omega=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2}A_{k,\omega}G_k(\omega x,\sigma_{k,\omega})\right)dx$$

Частинні похідні середньої квадратичної похибки по коефіцієнтам $\sigma_{k,\omega}$ мають вигляд:

$$\frac{\partial M}{\partial\sigma_{k,\omega}}=\int_{-T}^{T}\left(f(x)-A-A_{k,\omega}G_k(\omega x,\sigma_{k,\omega})\right)A_{k,\omega}\frac{\partial G_k(\omega x,\sigma_{k,\omega})}{\partial\sigma_{k,\omega}}dx$$

Прирівнявши частинні похідні до нуля отримаємо значення коефіцієнтів:

$$A=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}f(x)dx, \quad (4)$$

$$A_{k,\omega}=\frac{\int\limits_{-T}^{T} f(x)G_k(\omega x,\sigma_{k,\omega})dx}{\int\limits_{-T}^{T} G_k(\omega x,\sigma_{k,\omega})^2\,dx} \tag{5}$$

Коефіцієнти $\sigma_{k,\omega}$ знаходяться шляхом розв'язання наступного рівняння чисельним методом:

$$\begin{aligned}&\int\limits_{-T}^{T} f(x)\frac{\partial G_k(\omega x,\sigma_{k,\omega})}{\partial\sigma_{k,\omega}}dx\cdot\int\limits_{-T}^{T} G_k(\omega x,\sigma_{k,\omega})^2\,dx=\\&=\int\limits_{-T}^{T} f(x)G_k(\omega x,\sigma_{k,\omega})dx\cdot\int\limits_{-T}^{T} G_k(\omega x,\sigma_{k,\omega})\frac{\partial G_k(\omega x,\sigma_{k,\omega})}{\partial\sigma_{k,\omega}}dx\end{aligned} \tag{6}$$

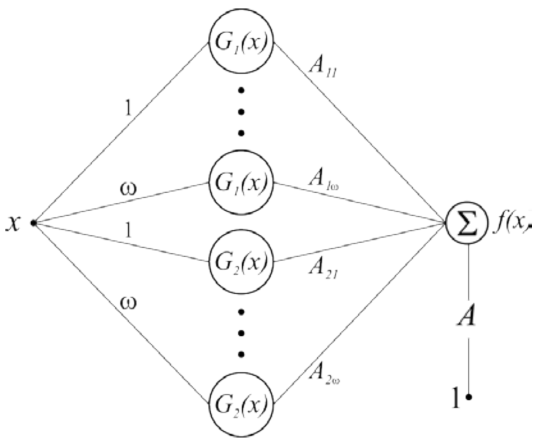

Рисунок 2 - Одношарова нейронна сітка

Графічне відображення рівняння (4) для функції однієї змінної (рис. 2) є штучною одношаровою нейронною сіткою прямого поширення, причому параметр «n» формул (2) можна вибрати досить малим без суттєвого погіршення результатів розрахунку, в наслідок чого отримаємо нейронну сітку з кінцевою кількістю нейронів, що дорівнює 2ω(2n+1).

За аналогією для функції двох змінних [8], розвинення цільової функції «m» змінних має наступний вигляд:

$$f(X)=A+\sum_{i=1}^{m}\sum_{\substack{\omega_1=1\\ \omega_2=1\\ \cdots\\ \omega_i=1}}^{\infty}\sum_{\substack{k_1=1\\ k_2=1\\ \cdots\\ k_i=1}}^{2}A_{\substack{k_1,\omega_1\\ k_2,\omega_2\\ \cdots\\ k_i,\omega_i}}\prod_{j=1}^{i}G_{k_j}\left(\omega_j x_j\right) \tag{7}$$

де $X=x_1,x_2,\ldots,x_m$ - вектор змінних.

Значення відповідних коефіцієнтів розраховуються за наступними формулами:

$$A=\frac{1}{2^m\prod\limits_{i=1}^{m}T_i}\int\limits_{-T_m}^{T_m}\ldots\int\limits_{-T_2}^{T_2}\int\limits_{-T_1}^{T_1} f(X)\;dx_1dx_2\ldots dx_m \tag{8}$$

$$A_{\substack{k_1,\omega_1\\ k_2,\omega_2\\ \cdots\\ k_i,\omega_i}}=\frac{\int\limits_{-T_m}^{T_m}\ldots\int\limits_{-T_2}^{T_2}\int\limits_{-T_1}^{T_1} f(X)\prod\limits_{j=1}^{i}G_{k_j}\left(\omega_j x_j,\sigma_{k_j,\omega_j}\right)dx_1dx_2\ldots dx_m}{\int\limits_{-T_m}^{T_m}\ldots\int\limits_{-T_2}^{T_2}\int\limits_{-T_1}^{T_1}\left(\prod\limits_{j=1}^{i}G_{k_j}\left(\omega_j x_j,\sigma_{k_j,\omega_j}\right)\right)^2 dx_1dx_2\ldots dx_m} \tag{9}$$

Коефіцієнти σ знаходяться шляхом розв'язання наступного рівняння чисельним методом:

$$\begin{aligned}&\int\limits_{-T_m}^{T_m}\ldots\int\limits_{-T_2}^{T_2}\int\limits_{-T_1}^{T_1} f(X)\prod_{j=1}^{i}\frac{\partial G_{k_j}\left(\omega_j x_j,\sigma_{k_j,\omega_j}\right)}{\partial\sigma_{k_j,\omega_j}}\,dx_1dx_2\ldots dx_m\times\\&\times\int\limits_{-T_m}^{T_m}\ldots\int\limits_{-T_2}^{T_2}\int\limits_{-T_1}^{T_1}\left(\prod_{j=1}^{i}G_{k_j}\left(\omega_j x_j,\sigma_{k_j,\omega_j}\right)\right)^2 dx_1dx_2\ldots dx_m=\\&=\int\limits_{-T_m}^{T_m}\ldots\int\limits_{-T_2}^{T_2}\int\limits_{-T_1}^{T_1} f(X)\prod_{j=1}^{i}G_{k_j}\left(\omega_j x_j,\sigma_{k_j,\omega_j}\right)dx_1dx_2\ldots dx_m\times\\&\times\int\limits_{-T_m}^{T_m}\ldots\int\limits_{-T_2}^{T_2}\int\limits_{-T_1}^{T_1}\prod_{j=1}^{i}G_{k_j}\left(\omega_j x_j,\sigma_{k_j,\omega_j}\right)\prod_{j=1}^{i}\frac{\partial G_{k_j}\left(\omega_j x_j,\sigma_{k_j,\omega_j}\right)}{\partial\sigma_{k_j,\omega_j}}\,dx_1dx_2\ldots dx_m\end{aligned} \tag{10}$$

Результати математичного моделювання (рис.3) демонструють збіжність функціонального ряду декількох змінних (7)до цільової функції. Отже одношарова нейронна сітка із структурою, обумовленою рівнянням (7), гарантовано збігається до цільової функції за умов виконання теореми Боянича для рядів Фур'є двох змінних [9] та теореми Теляковського про збіжність рядів Фур'є функції декількох змінних обмеженої варіації, які можна поширити і на функціональний ряд (7), беручи до уваги періодичність і тотожність тригонометричним функціям функцій (2).

Висновки: Запропоноване визначення початкових значень вагових коефіцієнтів нейронних одношарових сіток прямого поширення зі структурою обумовленою рядом (7) та наявністю математичної або фізичної моделі, як джерела цільового сигналу, дозволяє скоротити час на тренування та задати напрям в якому нейронна сітка гарантовано збігається до цільової функції. В окремих випадках, подібний розрахунок взагалі заміщує собою процес тренування, що продемонстровано на рис. 3.

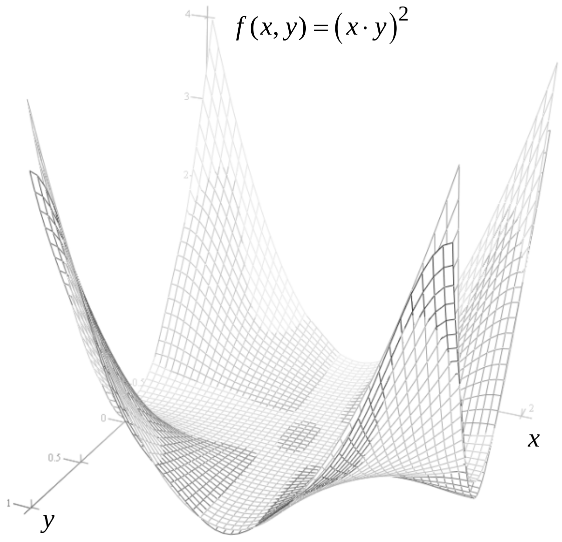

Рисунок 3 - Математичне моделювання нейронної сітки із двома входами

ЛІТЕРАТУРА

1. Рассел С. Искусственный интеллект. Современный подход: 2-е изд.: пер. с англ. / С. Рассел, П. Норвиг. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2006. - 1408 с.
2. Руденко О.Г. Штучні нейронні мережі: навчальний посібник / О.Г. Руденко, Є.В. Бодянський. – Х.: ТОВ «Компанія СМІТ», 2006. - 404 с.
3. Круглов В.В. Искусственные нейронные сети. Теория и практика: 2-е изд. / В.В. Круглов, В.В. Борисов. – М.: Горячая линия - Телеком, 2002. – 382 с.
4. Хайкин С. Нейронные сети: полный курс: 2-е изд.: пер. с англ. / Саймон Хайкин. - М.: Издательский дом «Вильямс», 2008. - 1104 с.
5. Пак В.В. Вища математика: навчальний посібник / В.В. Пак, Ю.Л. Носенко. - Донецьк: Сталкер, 2003. - 496 с.
6. Прудников А.П. Интегралы и ряды. Элементарные функции / А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Марычев. - М.: «Наука», 1981. - 800 с.
7. Толстов Г.П. Ряды Фурье / Георгий Павлович Толстов. – М.: «ФИЗМАТГИЗ», 1960. - 392 с.
8. Hardy G. H. On double Fourier series / Godfrey Harold Hardy // Quart. J. Math., 1906. - №37. - С. 53-79.
9. Bojanic R. An estimate of the rate of convergence for Fourier series of functions of bounded variation / R. Bojanic // Publ. Inst. Math., 1979. - 26(40). - С. 57-60.
10. Теляковский С. А. О сходимости рядов Фурье функций многих переменных ограниченной вариации / С. А. Теляковский, В. Н. Темляков // Матем. заметки. – 1997. - 61(4). - С. 583-595.

Надійшла до редколегії 19.10.2010 *Рецензент: І.П.Заболотний*

О.Ю. КОЛЛАРОВ
Донецкий национальный технический университет

Инициализация нейронных однослойных сетей прямого распространения. В статье рассмотрена искусственная нейронная сеть прямого распространения. Создана теоретическая база для начального определения весовых коэффициентов нейронных сетей при условии наличия эталонной модели объекта в качестве источника целевого сигнала.

O. KOLLAROV
Donetsk National Technical University

Initialization of Neural Single-Layer Networks of Direct Extending. In the article the theoretical basis of calculating the initial values of weight factors of artificial single-layered neural networks of direct distribution of the predetermined structure is provided.