МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧЕРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ ИНСТИТУТ

«УТВЕРЖДАЮ»
Директор АДИ ГОУВПО «ДонНТУ»
М.Н. Чальцев
13.12.2016 г.

Кафедра «Высшая математика»

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ. РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ. (ДЛЯ СТУДЕНТОВ ДНЕВНОЙ И ЗАОЧНОЙ ФОРМ ОБУЧЕНИЯ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ 38.03.05 «БИЗНЕС-ИНФОРМАТИКА» И 09.03.02 «ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ И ТЕХНОЛОГИИ»)

ПРАКТИКУМ

2/24-2016-15

«РЕКОМЕНДОВАНО»
Учебно-методическая комиссия
факультета «Экономика и управление»
Протокол № 1 от 21.09.2016 г.

«РЕКОМЕНДОВАНО»
Кафедра «Высшая математика»
Протокол № 1 от 31.08.2016 г.

Горловка – 2016

УДК 517.9(076)

Дифференциальные и разностные уравнения. Расчетные задания (для студентов дневной и заочной форм обучения направлений подготовки 38.03.05 «Бизнес-информатика» и 09.03.02 «Информационные системы и технологии»): практикум [Электронный ресурс]/составители: Л.П. Вовк, Е.С. Кисель. – Электрон. данные.–Горловка: ГОУВПО «ДонНТУ» АДИ, 2016.

Первая часть практикума содержит 35 вариантов заданий по основным видам дифференциальных и разностных уравнений, системам линейных дифференциальных и разностных уравнений и по элементам теории устойчивости решений систем нелинейных дифференциальных и разностных уравнений. Во второй части практикума приведено решение типовых задач с краткими теоретическими пояснениями. Также практикум содержит темы для реферативных исследований студентов дневной и заочной форм обучения.

Составители: Вовк Л.П., д-р техн. наук, проф.
Кисель Е.С.

Ответственный за издание: Королев Е.А., канд. физ.-мат. наук, доц.

Рецензент: Луценко Л.И. канд. физ.-мат. наук, доц.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время математика интенсивно проникает в другие науки. Дифференциальные и разностные уравнения, как и многие другие математические методы, являются мощным средством для решения прикладных задач.

Экономика как наука об объективных причинах функционирования и развития общества пользуется различными количественными характеристиками, поэтому она и вобрала в себя большое число математических методов. В связи с этим математические дисциплины следует рассматривать как одну из важнейших составляющих в системе фундаментальной подготовки экономистов, особенно по специальностям 38.03.05 «Бизнес-информатика» и 09.03.02 «Информационные системы и технологии».

К построению математических моделей, основой которых являются дифференциальные и разностные уравнения, приводит исследование как природных процессов, так и изучение закономерностей развития общества. Например, дифференциальными уравнениями моделируются проблемы инфляции, государственного долга, экономического роста, безработицы, взаимосвязей денежного и реального рынков и др.

В данном пособии изложены необходимые основы математического аппарата теории дифференциальных и разностных уравнений, приведены примеры решения каждого из рассмотренных типов уравнений и их использования в современных экономических задачах.

При подборе типовых задач для самостоятельной работы был использован материал пособия Дифференциальные и разностные уравнения. Сборник расчетных заданий. – Е.В. Захарова, В.А. Калягин, В.В. Тютин.

ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

Целью изучения дисциплины «Дифференциальные и разностные уравнения» является:

- освоение ключевых понятий, вопросов теории дифференциальных и разностных уравнений, постановок задач, формулируемых в виде дифференциальных и разностных уравнений, аналитических методов решения и качественного исследования, используемых для решения теоретических и практических задач в области экономики, финансов и бизнеса;
- развитие навыков в применении методологии и методов количественного анализа с использованием экономико-математического аппарата;
- развитие у студентов логического и аналитического мышления.

Освоение дисциплины, позволит приобрести знания и навыки в самостоятельной постановке экономических задач, их формализации и решении задач микро- и макроэкономического анализа.

Можно сформулировать следующие задачи дисциплины:

1) изучение фундаментальных разделов теории дифференциальных и разностных уравнений для дальнейшего их применения в практической деятельности;
2) обучение построению математической модели практических задач и выбору адекватного математического аппарата;
3) развитие умения составить план решения и реализовать его, используя выбранные математические методы;
4) развитие умения анализа и практической интерпретации полученных математических результатов;
5) выработка умения пользоваться разного рода справочными материалами и пособиями, самостоятельно расширяя математические знания, необходимые для решения практических задач;
6) применение аппарата дифференциальных и разностных уравнений в экономических исследованиях.

ПРАВИЛА ВЫПОЛНЕНИЯ И ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

При выполнении контрольной работы необходимо строго придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не засчитываются и возвращаются студенту для переработки.

1. Контрольную работу следует выполнять в отдельной тетради чернилами любого цвета, кроме красного, оставляя поля для замечаний рецензента. Допускается оформление работы на листах формата А4.
2. На обложке или на титульном листе должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, номер студенческого билета, название дисциплины.
3. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по своему варианту. Контрольные работы, содержащие не все задачи или задачи не своего варианта, не засчитываются.
4. Решения задач необходимо располагать в порядке номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера задач.
5. Перед решением каждой задачи необходимо выписать полностью ее условие. В том случае, если несколько задач, из которых студент выбирает задачу своего варианта, имеют общую формулировку, следует, при переписывании условия задачи, заменить общие данные конкретными из соответствующего номера.
6. Решения задач следует излагать подробно и аккуратно, объясняя и мотивируя все действия по ходу решения и делая необходимые чертежи и рисунки. В конце работы следует указать использованную литературу.
7. После получения прорецензированной работы, как не допущенной, так и допущенной к защите, студент должен исправить все отмеченные рецензентом ошибки и недочеты и выполнить все рекомендации. Если работа не допущена к защите, то после исправления указанных рецензентом ошибок работу следует прислать для повторной проверки в короткий срок. При высылаемых исправлениях должны обязательно находиться прорецензированная работа и <u>рецензия к ней</u>. В связи с этим рекомендуется при выполнении контрольной работы оставлять в конце тетради несколько чистых листов для дополнений и исправлений в соответствии с указаниями рецензента. <u>Вносить исправления в сам текст работы после ее рецензирования категорически запрещено!</u>
8. Вариант контрольной работы выбирается по последней цифре номера зачетной книжки. Например, если это цифра 1, то следует решать 1-ый вариант и т. д. Если последняя цифра в зачетной книжке это цифра 0, то следует решать 10-ый вариант.

Будьте внимательны при выборе варианта. <u>Работа, выполненная не по своему варианту, возвращается без проверки!</u>

ТЕМАТИКА ЗАДАНИЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка. Общее и частное решения дифференциального уравнения 1-го порядка.
2. Начальные условия, задача Коши.
3. Уравнения с разделяющимися переменными.
4. Уравнения с однородной функцией.
5. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Метод вариации произвольной постоянной. Структура общего решения неоднородного линейного уравнения.
6. Уравнение Бернулли.
7. Уравнения в полных дифференциалах.
8. Дифференциальные уравнения 2-го порядка. Общее и частное решения.
9. Уравнения, допускающие понижение степени.
10. Линейные однородные уравнения 2-го порядка. Общее решение. Определитель Вронского.
11. Однородные линейные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Метод характеристического уравнения.
12. Неоднородные линейные уравнения 2-го порядка. Общее решение. Метод вариации произвольных постоянных.
13. Линейные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами и со специальной правой частью. Метод неопределенных коэффициентов.
14. Линейные однородные уравнения высших порядков. Общее решение. Определитель Вронского.
15. Линейные однородные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами. Метод характеристического уравнения.
16. Неоднородные линейные уравнения высших порядков. Общее решение. Метод вариации произвольных постоянных.
17. Нормальные системы дифференциальных уравнений. Эквивалентность дифференциального уравнения и нормальной системы. Метод исключения.
18. Однородные нормальные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Метод характеристического уравнения.
19. Неоднородные нормальные системы дифференциальных уравнений. Общее решение. Метод вариации произвольных постоянных.
20. Устойчивые и неустойчивые решения систем дифференциальных уравнений.
21. Автономные нормальные системы. Состояния равновесия.

22. Типы состояний равновесия автономных систем 2-го порядка.
23. Устойчивость по первому приближению.
24. Разностные уравнения 1-го порядка. Частное и общее решения.
25. Разностные уравнения 2-го порядка. Частное и общее решения.
26. Однородные нормальные системы разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Метод характеристического уравнения.
27. Неоднородные нормальные системы разностных уравнений. Общее решение. Метод вариации произвольных постоянных.
28. Состояния равновесия систем разностных уравнений. Типы состояний равновесия автономных систем 2-го порядка. Устойчивость по первому приближению.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

1. Решить уравнения:

1. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$, $(2xy+y)dx - 2y^2 dy = 0$, $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$,
$xy' + y = y^2 \ln x$.

2. $(e^y + 2xy)dx + (xe^y + x^2)dy = 0$, $(y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0$,
$(y - x^2 y)dy + (xy^2 + x)dx = 0$, $3xy' - 2y = \dfrac{x^3}{y^2}$.

3. $(x^2 + y^2)dy - 2xydy = 0$, $6x^5 ydx + (y^4 \ln y + x^6)dy = 0$, $y - y' = y^2 + xy'$,
$8xy' - y = -\dfrac{1}{y^3\sqrt{x+1}}$.

4. $x^2 y' - 2xy = 3y$, $\dfrac{3x^2 + y^2}{y^2}dx - \dfrac{2x^3 + 5y}{y^3}dy = 0$, $y^2(y - xy') = x^3 y'$,
$(xy + x^2 y^3)y' = 1$.

5. $(\cos x - x\sin x)ydx = (2y - x\cos x)dy$, $y'\sqrt{x} = \sqrt{y-x} + \sqrt{x}$, $2x^2 yy' + y^2 = 2$,
$x^2 y' + 2x^3 y = y^2(1 + 2x^2)$.

6. $(x - y\cos\dfrac{y}{x})dx + x\cos\dfrac{y}{x}dy = 0$, $(1 - x^2)dy + xydx = 0$, $\dfrac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$,
$y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2 - 4}$.

7. $3x^2(1 + \ln y)dx = (2y - \dfrac{x^3}{y})dy$, $y' - xy^2 = 2xy$, $x^2 y' = y(x+y)$,
$2y'\sin x + y\cos x = y^3(x\cos x - \sin x)$.

8. $y' - x^2 y^2 = 2x^2 y$, $(\sin x + y)dy + (y\cos x - x^2)dx = 0$, $x^2(x - y\cdot y') = y^3 y'$,
$(x^2 + y^2 + 1)dy + xydx = 0$.

9. $xy' = y - x \cdot e^{y/x}$, $2xydx + (y^3 + x^2)dy = 0$, $2xyy' + y = 2$,
$y' + y\dfrac{x+1/2}{x^2+x+1} = \dfrac{(1-x^2)y^2}{(x^2+x+1)^{3/2}}$.

10. $xy' - y = x\,\mathrm{tg}\dfrac{y}{x}$, $xyy' + 3 = y$, $(2x + \ln y)dx + (\dfrac{x}{y} + \sin y)dy = 0$,
$3y' + y\dfrac{x^2+1}{x(x^2-1)} = \dfrac{1}{y^2}\dfrac{x(3x^2-1)}{x^2-1}$.

11. $xy + y^2 = (2x^2 + xy)y'$, $3x^2e^y dx + (x^3e^y - 1)dy = 0$, $\ln\cos y dx + x \cdot \mathrm{tg}\, y dy = 0$,
$(1+x^2)y' = xy + x^2y^2$.

12. $2x\sqrt{1-y^2}dx + ydy = 0$, $\dfrac{1+xy}{x^2y}dx + \dfrac{1-xy}{xy^2}dy = 0$, $x\ln\dfrac{y}{x}dy - (x + y\ln\dfrac{y}{x})dy = 0$,
$y' + \dfrac{y}{x+1} = -\dfrac{1}{2}(x+1)^3y^3$.

13. $xy \cdot y' - y^2 = 1 - x^3y \cdot y'$, $xdy - ydx = \sqrt{x^2+y^2}dx$,
$\dfrac{y}{x^2}\cos\dfrac{y}{x}dx - (\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{y}{x} + 2y)dy = 0$, $xyy' - y^2 = x^4$.

14. $(y^3 + \cos x)dx + (3xy^2 + e^y)dy = 0$, $2xydy + (x^2 - y^2)dx = 0$, $\dfrac{y}{x}dy + e^y dx = 0$,
$xy^2y' - y^3 = \dfrac{1}{3}x^4$.

15. $x\sqrt{1+y^2+yy'} \cdot \sqrt{1+x^2} = 0$, $x^2y' = y^2 - xy$,
$x \cdot e^{y^2}dx + (y \cdot x^2e^{y^2} + \mathrm{tg}^2\, y)dy = 0$, $(x^2+y^2)dx - xydy = 0$.

16. $xy^2dx + y(x^2+y^2)dy = 0$, $yy' = e^x(1-y)$, $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$,
$2xyy' = 3y^2 + 4x^2$.

17. $xyy' + 1 = x^2$, $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\right)dx + \left(x + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \ln y\right)dy = 0$,

$xy' = y(\ln y - \ln x)$, $(xy^2 + y)dx - xdy = 0$.

18. $\dfrac{y}{x^2}dx = \dfrac{xy+1}{x}dy$, $y' = \dfrac{2xy}{3x^2 - y^2}$, $y^2 y' = e^x - e^{2x} y^2 y'$, $y' = \dfrac{4}{x}y + x\sqrt{y}$.

19. $x^2 yy' + y = 1 + yy'$, $(x^2 + xy + y^2)dx = x^2 dy$,

$(\cos(x + y^2) + \sin x)dx = -2y\cos(x + y^2)dy$, $2xyy' + x^2 = y^2$.

20. $\left(2x - 1 - \dfrac{y}{x^2}\right)dx = \left(2y - \dfrac{1}{x}\right)dy$, $ydy + \dfrac{2x}{\cos y}dx = 0$, $y - xy' = 2\sqrt{xy} \cdot y'$,

$(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy = 0$.

21. $(3x + 5y)dx - (5x + 2y)dy = 0$, $xy' = \dfrac{y}{2} + y'x\ln x$,

$(3x^2 + 4y^2)dx + \left(8xy + \dfrac{1}{y^2}e^{1/y}\right)dy = 0$, $yy' + y^2 = \cos x$.

22. $\dfrac{dx}{x(y-1)} + \dfrac{dy}{y(x+2)} = 0$, $y' = \dfrac{x+2y}{2x-y}$, $x(1 + xy') = -2xy + y'$,

$xdy + \left(y - \dfrac{1}{2}y^3 x\right)dx = 0$.

23. $xyy' + y^2 = 1$, $\left(10xy - \dfrac{1}{\sin y}\right)dx + \left(5x^2 + \dfrac{x\cos y}{\sin^2 y} - y^2 \sin y^3\right)dy = 0$,

$xy(1 + y') = x^2 y' + y^2$, $xy' = -y + xy^2$.

24. $(4x^2 - xy + y^2) + y'(x^2 - xy + 4y^2) = 0$, $e^y(1 + x^2)dy - 2x(1 + e^y)dx = 0$,

$\left(xy^2 + \dfrac{x}{y^2}\right)dx = \left(\dfrac{x^2}{y^3} - x^2 y - y^2\right)dy$, $y' = \dfrac{3x^2}{x^3 + y + 1}$.

25. $y' + \sin(x+y) = \sin(x-y)$, $\left(xe^x + \dfrac{y}{x^2} \right) dx = \dfrac{1}{x} dy$,

$(x^2 - 6xy)dy = (x^2 + xy - 5y^2)dx$, $xy' + y = xy^2 \ln x$.

26. $\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3y^2}{x^4} + x \ln x \right) dx = \dfrac{2y}{x^3} dy$, $x\left(y' - \sin \dfrac{y}{x} \right) = y$,

$20xdx - 3ydy = 3x^2 ydy - 5xy^2 dx$, $xdx = \left(\dfrac{x^2}{y} - y^3 \right) dy$.

27. $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$, $xy' = xe^{y/x} + y$,

$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2 y + 4y^3)dy = 0$, $(y' - 2xy)\sqrt{y} = x^3$.

28. $3e^x \cdot \operatorname{tg} ydx + \dfrac{2 - e^x}{\cos^2 y} dy = 0$, $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$,

$(y^3 + \cos x)dx + (3xy^2 + ye^{-y^2})dy = 0$, $y' + \dfrac{y}{x} = -xy^2$.

29. $y' = \dfrac{2xy}{3x^2 - y^2}$, $\left(\dfrac{\sin 2x}{y} + x \right) dx + \left(y - \dfrac{\sin^2 x}{y^2} \right) dy = 0$, $e^{-y}(1 + y') = 1$,

$2xyy' + x = y^2$.

30. $(1 + e^x)yy' = e^y$, $2xy'(x^2 + y^2) = y(y^2 + 2x^2)$,

$(3x^2 - 2x - y)dx + (2y - x + 3y^2)dy = 0$, $dy = \dfrac{y - xy^3}{x} dx$.

31. $(1 + y^2)(e^{2x}dx - e^y dy) = (1 + y)dy$, $(y - xy')^2 = x^2 + y^2$,

$\dfrac{y^2}{x} dx + (y^4 + 2y \ln x)dy = 0$, $ydx + \left(x - \dfrac{1}{2} x^3 y \right) dy = 0$.

32. $x(x+5)\ln ydy = ydx$, $4x - 3y + y'(2y - 3x) = 0$, $\dfrac{2xdx}{y^3} = \dfrac{(3x^2 - y^2)dy}{y^4}$,

$xy^3 dx = (x^2 y + 2)dy$.

33. $xy' = \sqrt{y^2 - x^2}$, $\left(x\cos y - \cos x + \dfrac{1}{y}\right)dy + \left(\sin y + y\sin x + \dfrac{1}{x}\right)dx = 0$,

$2xy\ln x \cdot y' = -y^2 + x^3(3\ln x - 1)$, $y' = 2^{x+y}$.

34. $(y^2 + xy^2)y' + x^2 - yx^2 = 0$, $y^3dy + 3y^2xdx + 2x^3dx = 0$,
$\dfrac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \dfrac{xdy - ydx}{x^2} = 0$, $4xyy' - y^2 = 3x^2$.

35. $(x^4 - y^4)dx + xy^3dy = 0$, $xdx + ydy = \dfrac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, $xy^2e^y y' - 2x^2 y\sin x = 0$,

$xy' + y - e^x\sqrt{y} = 0$.

2. Решить задачу Коши:

1. $y' + \dfrac{y}{3} = 3x$, $y(0) = -1$.

2. $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y = 1$, $y(1) = 0$.

3. $y' + xy = -x^3$, $y(1) = 1$.

4. $y' - \dfrac{2y}{x+1} = e^x(x+1)^2$, $y(0) = 0$.

5. $y' + \dfrac{3y}{x} = \dfrac{2}{x^3}$, $y(1) = -1$.

6. $y' + \dfrac{2y}{x} = x^3$, $y(1) = 2$.

7. $y' - 4xy = -4x^3$, $y(0) = -2$.

8. $y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{2}{x^3}$, $y(-1) = 1$.

9. $y' + 2xy = x \cdot e^{-x^2}$, $y(0) = -1$.

10. $xy' + y = 3x$, $y(1) = -2$.

11. $xy' = x + 1 - y$, $y(-1) = 2$.

12. $y' - y = e^{3x}$, $y(0) = -2$.

13. $y' + \dfrac{y}{x+1} = e^x(x+1)$, $y(0) = 0$.

14. $y' - y \cdot \mathrm{ctg}\, x = 2x \cdot \sin x$,
$y(\pi/4) = 1$.

15. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$,
$y(0) = 1$.

16. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{\sin x}{x}$, $y(\pi/2) = 1$.

17. $y' - y = \dfrac{e^x}{x}$, $y(1) = 0$.

18. $2xy' + y = \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$, $y(4) = 1$.

19. $y' + \dfrac{y}{x} = 2\ln x + 1$, $y(1) = 0$.

20. $y' + 4y = e^{2x} + 2e^x + 1$, $y(0) = 1$.

21. $x(x+1)(y'-1) = y$, $y(1) = -2$.

22. $xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}$, $y(1) = 2$.

23. $y' - \dfrac{y}{\sin x} = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$,
$y(\pi/2) = \pi/2$.

24. $y = x(y' - x\cos x)$, $y(0) = 1$.

25. $y' - \dfrac{xy}{x^2+1} = x$, $y(0) = 0$.

26. $y' - y \cdot \mathrm{ctg}\, x = \sin^2 x$, $y(\pi/2) = 2$.

27. $y' - \dfrac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2$, $y(1) = 4$.

28. $y' + y\cos x = \sin x \cos x$, $y(0) = 1$.

29. $(xy' - 1)\ln x = 2y$, $y(2) = 1$.

30. $y' - 2y = e^x - 1$, $y(0) = 1$.

31. $y' - \dfrac{y}{3} = 3x$, $y(0) = 1$.

32. $y' - \dfrac{3y}{x} = \dfrac{2}{x^3}$, $y(-1) = 1$.

33. $y' - y\,\mathrm{tg}\, x = \dfrac{1}{\cos x}$, $y(0) = 0$.

34. $\dfrac{y'}{3} + \dfrac{y}{x} = x^3$, $y(1) = 3$.

35. $(2x+1)y' = 4x + 2y$, $y(0) = -2$.

3. Решить уравнение, понижая его порядок:

1. $y'' + \dfrac{2}{3}y' = x^2$.

2. $(1+e^x)y'' + y' = 0$.

3. $xy'' + y' + x = 0$.

4. $y'' + 2x \cdot (y')^2 = 0$.

5. $x^3 y'' + x^2 y' - 1 = 0$.

6. $y'' = \dfrac{1}{4\sqrt{y'}}$.

7. $y'' + y' = x$.

8. $xy'' + y' = \ln x$.

9. $y'' = y' + (y')^2$.

10. $(1 - x^2)y'' + xy' = 2$.

11. $2xy'y'' = (y')^2 + 1$.

12. $y'' = 1 - (y')^2$.

13. $y''x \ln x = y'$.

14. $y'' = \dfrac{2xy'}{x^2 + 4}$.

15. $y'' - 2y' = x + 2$.

16. $xy'' - y' - x\sin\dfrac{y'}{x} = 0$.

17. $y'' - 2\operatorname{ctg} x \cdot y' = \sin^3 x$.

18. $(1 - x^2)y'' + 2xy' = x^3$.

19. $xy'' = y' \ln\dfrac{y'}{x}$.

20. $y'' = (y')^2$.

21. $y'' + \dfrac{2}{3}y' = x^2$.

22. $y'' + \dfrac{2y'}{x} = x^3 e^{-x}$.

23. $y'' - \dfrac{2y'}{x} = x^3$.

24. $y'' + 2y' = x - 2$.

25. $(1 + x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$.

26. $xy'' = y'$.

27. $x^2 y'' - 2xy' = x^3 + 4$.

28. $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 2$.

29. $(1 + x)y'' + x(y')^2 = y'$.

30. $(y')^2 - yy'' = y^2 y'$.

31. $y'(1 + (y')^2) = y''$.

32. $y''\operatorname{tg} x = y' + 1$.

33. $1 + (y')^2 + yy'' = 0$.

34. $y'' = \dfrac{y'}{x} + \dfrac{x^2}{y'}$.

35. $xy'' = \sqrt{1 + (y')^2}$.

4. Найти решение задачи Коши:

1. $4y^3 y'' = y^4 - 1$,
$y(0) = \sqrt{2}$, $y'(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

2. $y''y^3 + 64 = 0$,
$y(0) = 4$, $y'(0) = 2$.

3. $y'' + 2\sin y \cos^3 y = 0$,
$y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

4. $y'' = 98y^3$,
$y(1) = 1$, $y'(1) = 7$.

5. $y''y^3 + 49 = 0$,
$y(3) = -7$, $y'(3) = -1$.

6. $y'' = 32\sin^3 y \cos y$,
$y(1) = \pi/2$, $y'(1) = 4$.

7. $4y^3 y'' = 16y^4 - 1$,
$y(0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

8. $y'' = 72y^3$,
$y(2) = 1$, $y'(2) = 6$.

9. $y''y^3 + 36 = 0$,
$y(0) = 3$, $y'(0) = 2$.

10. $y'' + 8\sin y \cos^3 y = 0$,
$y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

11. $y'' = 18\sin^3 y \cos y$,
$y(1) = \pi/2$, $y'(1) = 3$.

12. $4y^3 y'' = y^4 - 16$,
$y(0) = 2\sqrt{2}$, $y'(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

13. $y'' = 50y^3$,
$y(3) = 1$, $y'(3) = 5$.

14. $y''y^3 + 25 = 0$,
$y(2) = -5$, $y'(2) = -1$.

15. $(y+1)y'' = (y')^2$,
$y(1) = 1$, $y'(1) = 2$.

16. $y'' = 2yy'$,
$y(\pi/4) = 1$, $y'(\pi/4) = 2$.

17. $y'' = (y+1)y'$,
$y(1) = 1$, $y'(1) = 2$.

18. $yy'' = (y')^2$,
$y(1/2) = 1$, $y'(1/2) = 2$.

19. $2(y+2)y'' + (y')^2 = 0$,
$y(2/3) = 0$, $y'(2/3) = 1/4$.

20. $(y^2 + 1)y'' = 2y(y')^2$,
$y(\pi/4) = 0$, $y'(\pi/4) = 1$.

21. $(y+1)y'' = (y')^2$,
$y(-1) = 0$, $y'(-1) = 2$.

22. $(y-3)y'' + (y')^2 = 0$,
$y(-3) = 4$, $y'(-3) = 2$.

23. $y^3 y'' = 4(y^4 - 1)$,
$y(0) = \sqrt{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$

24. $y'' = 2y^3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

25. $4yy'' = (y')^2$,
$y(-1) = 1$, $y'(-1) = 1/3$.

26. $y'' - (y+2)y' = 0$,
$y(-1/2) = 2$, $y'(-1/2) = 9/2$.

27. $(y^2+4)y''-2y(y')^2=0$,
$y(-1)=0$, $y'(-1)=4$.

28. $yy''-(-y')^2=0$,
$y(-1)=1$, $y'(-1)=2$.

29. $y''=50\sin^3 y\cos y$,
$y(1)=\pi/2$, $y'(1)=5$.

30. $y''=\dfrac{y'}{x}-\dfrac{x^2}{y'}$,
$y(2)=0$, $y'(2)=4$.

31. $y^3y''=-1$,
$y(1)=1$, $y'(1)=0$.

32. $y''=e^{2y}$,
$y(0)=0$, $y'(0)=1$.

33. $y^3y''=1$,
$y\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$, $y'\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$.

34. $yy''-(y')^2-1=0$,
$y(1)=1$, $y'(1)=0$.

35. $(1+x^2)y''+(y')^2+1=0$,
$y(0)=1$, $y'(0)=1$.

5. Не находя общего решения дифференциального уравнения, построить поле направлений и семейство интегральных кривых.

1. $y'=y-x^2$.
2. $yy'=-2x$.
3. $y'=2+y^2$.
4. $yy'+x=0$.
5. $y'=(y-1)x$.
6. $y'=\dfrac{2x}{3y}$.
7. $xy'=2y$.
8. $y'=y-x$.
9. $y'=y+x^2$.
10. $y'(x^2+2)=y$.
11. $y'=x^2-y$.
12. $y'=yx$.
13. $yy'=-\dfrac{x}{2}$.
14. $y'=y+2x$.
15. $y'=x+2y$.
16. $xy'=2y$.
17. $3yy'=x$.
18. $y'=3y^{2/3}$.
19. $y'=\dfrac{y-2}{x}$.
20. $y'=(y-x)(y+x)$.
21. $y'=x^2+2x-y$.
22. $2(y+y')=x+3$.
23. $y'=(1-y)(1-x)$.
24. $y'=x(y+x)$.
25. $y'=y-x^2+2x$.
26. $y'=\sin(y-2x)$.
27. $y'+x=xy$.
28. $y'=x(y-1)$.
29. $1+y'=x-y$.
30. $y'=y(x+y)$.
31. $2x-yy'=0$.

32. $y' = \dfrac{y+1}{x-1}$.

33. $y' = (y-1)^2$.

34. $y' = \dfrac{x-1}{y}$.

35. $y' = y - 3x$.

6. Проверить линейную независимость функций. Составить дифференциальное уравнение, для которого данная система функций образует фундаментальную систему решений.

1. $1, x, e^{-2x}$.
2. $1, e^{x}, e^{-x}$.
3. $x, x+1, e^{2x}$.
4. $x, x-1, e^{2x}$.
5. $1, e^{2x}, e^{-x}$.
6. e^{x}, e^{2x}, e^{3x}.
7. $x, x-1, e^{-2x}$.
8. $1, e^{x}, e^{-2x}$.
9. $x, x+2, e^{2x}$.
10. $-x, x+1, e^{-x}$.
11. $2x, -x+1, e^{2x}$.
12. $3x, x+2, e^{-x}$.
13. $x+1, x-1, e^{-x}$.
14. $e^{x}, \cos x, \sin x$.
15. $e^{-x}, 2e^{x}, e^{-2x}$.
16. $x+2, x+3, e^{x}$.
17. $2x, x+2, e^{-2x}$.
18. $2x, x+3, e^{2x}$.
19. $-x, x+2, e^{2x}$.
20. $1, e^{-x}, e^{-2x}$.
21. $2, e^{2x}, e^{-2x}$.
22. $e^{x}, 1, x+3$.
23. $x, 2x+1, e^{-x}$.
24. $2x, x-1, e^{2x}$.
25. $3, x, e^{2x}$.
26. $x, 2x-1, e^{x}$.
27. $x, x+1, e^{-x}$.
28. $2, -x+3, e^{3x}$.
29. $2, \sin x, \cos x$.
30. $e^{2x}, x-2, 2x$.
31. $1, x+2, x^2-1$.
32. $\sin 2x, \cos 2x, e^{3x}$.
33. $2, -xe^{3x}, e^{3x}$.
34. $2e^{x}, (x+3)e^{x}, 1$.
35. $1, \sin x, 1-\cos x$.

7. Решить уравнение методом вариации произвольных постоянных:

1. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^{x}}{\sqrt{4-x^2}}$.
2. $y'' + y = \cos x \cdot \cos x 2x$.
3. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$.
4. $y'' + 4y = \sin x \cdot \sin 2x$.
5. $y'' + y' \cdot \operatorname{tg} x = \dfrac{\cos^2 x}{\sin x}$.

6. $y''+y=\dfrac{2}{(\cos 2x)^{3/2}}$.

7. $y''+6y'+9y=\dfrac{e^{-3x}}{x^2}$.

8. $y''+y=\dfrac{1}{\cos^3 x}$.

9. $y''+y=\sin x\cdot\cos x$.

10. $y''+2y'+y=\dfrac{e^{-x}}{x}$.

11. $y''+y=\dfrac{1}{\sin x\cdot\cos^2 x}$.

12. $y''+y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

13. $y''+y=2\operatorname{ctg} x$.

14. $y''+y=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

15. $y''+y=\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

16. $y''+y=\operatorname{tg}^2 x$.

17. $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}$.

18. $y''+2y'+y=\dfrac{e^{-x}}{x^2}$.

19. $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x^2}$.

20. $y''+y=2\operatorname{tg} x$.

21. $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$.

22. $y''+y=\sin^2 x$.

23. $y''-y'=x^2e^{-x}$.

24. $y''+y=\cos^2 x$.

25. $y''-y'=\dfrac{1}{e^x+1}$.

26. $y''-y'=x^2e^{2x}$.

27. $y''+y=2\cos^2 x$.

28. $y''-2y'+y=\dfrac{e^x\ln x}{x}$.

29. $y''+y=\dfrac{1}{\sin^3 x}$.

30. $y''+16y=\operatorname{tg} 4x$.

31. $y''-7y'=\sin 3x$.

32. $y''-4y'+4y=e^{2x}\ln x$.

33. $y''-2\operatorname{tg} x\cdot y'=1$.

34. $y''-4y=\cos 3x$.

35. $y''+y=\dfrac{1}{\cos x}$.

8. Решить уравнение:

1. $y''+6y'+10y=-e^{2x}+2\cos 2x$.

2. $y''-4y'+5y=3e^{-x}+2\sin 2x$.

3. $y''+4y'+5y=-2e^{2x}+3\cos x$.

4. $y''-6y'+10y=2e^{3x}+2\cos x$.

5. $y''+2y'+5y=2e^{-x}+3\cos 2x$.

6. $y''-2y'+5y=-e^{x}+2\sin 2x$.

7. $y''+4y'+8y=3e^{2x}-3\sin 2x$.

8. $y''-4y'+8y=-e^{2x}+3\sin x$.

9. $y''+6y'+13y=2e^{-3x}+2\cos 2x$.

10. $y''-6y'+13y=-e^{3x}+3\sin 2x$.

11. $y''+4y'+5y=3e^{-2x}-2\sin x$.

12. $y''-4y'+5y=-e^{2x}+3\cos 2x$.

13. $y''+6y'+10y=2e^{-x}+3\sin 2x$.

14. $y''-6y'+10y=-e^{-3x}+3\sin x$.

15. $y'' + 2y' + 5y = 3e^{x} - 2\sin 2x$.
16. $y'' - 2y' + 5y = -e^{-2x} + 2\cos x$.
17. $y'' + 4y' + 8y = 3e^{-2x} - 2\cos 2x$.
18. $y'' - 4y' + 8y = 3e^{-2x} + 3\cos 2x$.
19. $y'' + 6y' + 13y = -2e^{3x} + 3\sin 2x$.
20. $y'' - 6y' + 13y = 3e^{-3x} + 3\cos 2x$.
21. $y'' + 4y' + 5y = 2e^{-3x} + 3\cos x$.
22. $y'' - 4y' + 5y = -2e^{-2x} + 2\sin x$.
23. $y'' + 6y' + 10y = 3e^{2x} - 2\cos x$.
24. $y'' - 6y' + 10y = 3e^{x} - 2\cos 2x$.
25. $y'' + 2y' + 5y = 3e^{-2x} - 2\cos x$.
26. $y'' - 2y' + 5y = 4e^{2x} - 3\sin x$.
27. $y'' + 6y' + 13y = -2e^{-2x} + 4\cos 3x$.
28. $y'' + 4y' + 5y = 3e^{-x} + 2\sin 2x$.
29. $y'' - 2y' + 10y = e^{3x} + \cos x$.
30. $y'' - 4y' + 8y = 2e^{2x} - 2\sin 2x$.
31. $y'' - 6y' + 18y = -3e^{-3x} + 3\cos 3x$.
32. $y'' + 2y' + 10y = 9e^{-x} - \sin 3x$.
33. $y'' + 2y' + 5y = -e^{x} + 2\sin x$.
34. $y'' + 6y' + 10y = e^{x} + \cos 3x$.
35. $y'' - 6y' + 10y = 3e^{x} + \sin 3x$.

9. Решить задачу Коши $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$:

1. $y'' + 6y' + 5y = 2e^{-5x} + 3x - 1$.
2. $y'' + 4y' + 3y = e^{-x} + 1 - x$.
3. $y'' - 4y' + 3y = 2e^{x} + x + 3$.
4. $y'' - 6y' + 5y = 3e^{5x} + 1 - 2x$.
5. $y'' - 5y' + 4y = 2e^{4x} - 2x + 1$.
6. $y'' + 5y' + 4y = -e^{-x} + 1 - x$.
7. $y'' - 6y' + 5y = 2e^{5x} + x - 2$.
8. $y'' + 6y' + 5y = 3e^{-x} + 2x - 3$.
9. $y'' + 3y' - 4y = 3e^{-4x} + x + 2$.
10. $y'' + 4y' - 5y = 2e^{-5x} + x - 4$.
11. $y'' + 4y' + 3y = 2e^{-3x} + x - 3$.
12. $y'' - 4y' + 3y = 3e^{x} - x + 1$.
13. $y'' + 4y' - 5y = 2e^{-5x} + 2x - 3$.
14. $y'' + 3y' - 4y = 3e^{-4x} + 1 - 4x$.
15. $y'' - 5y' + 4y = 3e^{x} - 2x + 2$.
16. $y'' + 5y' + 4y = 3e^{-4x} + 2x - 1$.
17. $y'' + 6y' + 5y = 3e^{-5x} + x - 4$.
18. $y'' - 6y' + 5y = 3e^{x} + x + 3$
19. $y'' + 3y' - 4y = 2e^{-4x} - x + 2$.
20. $y'' + 4y' - 5y = 2e^{x} + x + 2$.
21. $y'' - 4y' + 3y = 2e^{3x} + x$.
22. $y'' + 6y' + 5y = 3e^{-5x} - 3 + 2x$.
23. $y'' + 4y' + 3y = -3e^{-x} + x + 1$.
24. $y'' + 5y' + 4y = 3e^{-x} - x + 3$.
25. $y'' + 4y' - 5y = 3e^{-5x} - x + 2$.
26. $y'' + 4y' + 3y = 2e^{-3x} + 2x - 3$.
27. $y'' - 6y' + 5y = -2e^{5x} - 3x + 2$.
28. $y'' + 3y' - 4y = -2e^{-4x} + 3x + 2$.
29. $y'' + y' - 2y = e^{-2x} + 1 + x$.
30. $y'' - 3y' + 4y = 3e^{x} + x - 3$.
31. $y'' - 6y' + 5y = 3e^{x} + 2x - 5$.
32. $y'' - 4y' + 3y = 2e^{x} - 4x + 2$.

33. $y'' - 6y' + 8y = 3e^{2x} - 3 + 2x$.

34. $y'' + 3y' - 4y = 2e^{-4x} - x - 2$.

35. $y'' - 5y' + 6y = 5e^{2x} - x + 3$.

10. Решить уравнение:

1. $y''' + 4y'' + 4y' = 3e^{-2x} - 3x + 1$.
2. $y''' - 4y'' + 4y' = 2e^{2x} - x + 3$.
3. $y''' - 2y'' + y' = 3e^{x} - x + 4$.
4. $y''' + 2y'' + y' = -2e^{-x} - 3x + 1$.
5. $y''' + 6y'' + 9y' = -e^{-3x} - 2x + 1$.
6. $y''' - 6y'' + 9y' = 2e^{3x} - 2x + 5$.
7. $y''' - 4y'' + 4y' = -3e^{2x} - 2x + 5$.
8. $y''' + 4y'' + 4y' = 4e^{-2x} + 2x - 1$.
9. $y''' - 8y'' + 16y' = -e^{4x} - 2x + 5$.
10. $y''' + 8y'' + 16y' = 2e^{-4x} - x + 2$.
11. $y''' - 2y'' + y' = -2e^{x} - 3x + 2$.
12. $y''' + 2y'' + y' = 3e^{-x} + 4x - 1$.
13. $y''' + 6y'' + 9y' = 2e^{-3x} + 2x - 1$.
14. $y''' - 6y'' + 9y' = -3e^{3x} - 3x + 1$.
15. $y''' - 4y'' + 4y' = -3e^{2x} + 2x - 3$.
16. $y''' + 4y'' + 4y' = -2e^{-2x} + 3x - 1$.
17. $y''' - 8y'' + 16y' = 3e^{4x} + 2x - 1$.
18. $y''' + 8y'' + 16y' = -3e^{-4x} - 2x + 3$.
19. $y''' - 2y'' + y' = -4e^{x} + 3x - 4$.
20. $y''' + 2y'' + y' = 4e^{-x} - 2x + 5$.
21. $y''' + 6y'' + 9y' = -3e^{3x} - 3x + 1$.
22. $y''' - 6y'' + 9y' = -3e^{3x} - 3x + 1$.
23. $y''' - 4y'' + 4y' = -3e^{2x} + 4x - 3$.
24. $y''' + 4y'' + 4y' = -2e^{-2x} + 4x - 1$.
25. $y''' - 8y'' + 16y' = -3e^{4x} + 3x - 1$.
26. $y''' + 8y'' + 16y' = -2e^{-4x} + 3x - 2$.
27. $y''' + 2y'' + y' = 4e^{-x} + x - 1$.
28. $y''' + 8y'' + 16y' = 2e^{-4x} - 4x - 4$.
29. $y''' + 6y'' + 9y' = 4e^{-3x} + 3x - 1$.
30. $y''' - 6y'' + 9y' = -4e^{3x} - 3x + 4$.
31. $y''' - 4y'' + 4y' = -4e^{2x} - 4x + 2$.
32. $y''' - 6y'' + 9y' = 9e^{3x} - 6x + 1$.
33. $y''' - 2y'' + 4y' = e^{x} - 2x + 1$.
34. $y''' - 8y'' + 16y' = -e^{4x} + 3x - 4$.
35. $y''' + 4y'' + 4y' = 4e^{-2x} + x - 4$.

11. Найти структуру общего решения неоднородного уравнения:

1. $y'' - 2y' + 5y = xe^{x}\cos 2x + e^{2x}\sin x$.
2. $y'' + 9y = x(e^{3x} + x^2 \sin 3x)$.
3. $y'' - 4y = 2xe^{-2x} + x^2 \cos 2x$.
4. $y'' + 2y' - 3y = 2x^2 e^{-3x} + e^{-3x}\sin x$.
5. $y'' - y = xe^{x} + 3x^2 \sin x$.
6. $y'' - 9y = xe^{-3x} + 3x^3 \cos 3x$.
7. $y'' - y = 2xe^{x}(\cos x + x)$.
8. $y'' - 2y' + 2y = xe^{x}(2x - \cos x)$.
9. $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x}(x + 2\sin x)$.
10. $y'' - 4y' + 3y = x^2 e^{x}(1 + x\cos x)$.

11. $y'' + 3y' + 2y = x^2e^{-2x} - 2x\sin x$.

12. $y'' + y = x(x\cos x + 2)e^x$.

13. $y'' - y' + y/4 = 4xe^{x/2} - x^2\cos(x/2)$

14. $y'' - 4y' + 4y = x^2e^{2x}\sin 2x + e^{-2x}$.

15. $y'' + y = x^3\cos x + e^x\sin x$.

16. $y'' + 2y' + y = xe^{-x} - x^2e^{-x}\cos x$.

17. $y'' + y = x\cos x - 2x^3e^x\sin x$.

18. $y'' + y' - 6y = x^2e^{-3x}(2 - 3x\sin 2x)$.

19. $y'' - 7y' + 12y = 3xe^{4x} + x^2e^{3x}\sin 4x$.

20. $y'' - 2y' + y = 2x^2e^x(1 + x\cos x)$.

21. $y'' - 4y' + 4y = 2xe^{2x}(2 + x\sin 2x)$.

22. $y'' - y = (2x\sin x - 1)e^x x^2$.

23. $y'' - 4y = x^3e^{2x} + 2xe^{-2x}\cos 2x$.

24. $y'' + 4y = x\sin 2x = 2x^2e^{2x}\cos 2x$.

25. $y'' + 4y' + 3y = 3x^3e^{-x} - x\sin 3x$.

26. $y'' + 2y' + 5y = e^{-x}x^2(2x + \sin 2x)$.

27. $y'' + 2y' + 2y = x^2e^{-x}\cos x + xe^{-x}$.

28. $y'' + 4y = x^2e^{-2x} - 2x\cos 2x$.

29. $y'' + y' = 4x^2e^x + 3 - 2x^3$.

30. $y'' - y' - 2y = x^2e^{-x} - x\cos 2x$.

31. $y'' + 2y' - 3y = xe^{-x}\sin 3x + x^3e^{3x}$.

32. $y'' + y = x^2e^x(2 - \sin x) + \sin x$.

33. $y'' - 4y'/3 + y/3 = (4 + 3x\sin x)xe^{x/3}$

34. $y'' - 2y' - 3y = x^2e^{3x} + xe^{-x}\sin 3x$.

35. $y'' - 6y' + 9y = x^3e^{3x}\cos 3x + 3xe^{3x}$.

12. Решить задачу Коши $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = -1$:

1. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 3\cdot x_2 \\ \dot{x}_2 = 3\cdot x_1 + x_2 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 3\cdot x_1 - 2\cdot x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$.

4. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 3\cdot x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 3\cdot x_2 \end{cases}$.

5. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2\cdot x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2\cdot x_2 \end{cases}$.

6. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2\cdot x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2\cdot x_2 \end{cases}$.

7. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 4\cdot x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 4\cdot x_2 \end{cases}$.

8. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 4\cdot x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 4\cdot x_2 \end{cases}$.

9. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2\cdot x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -2\cdot x_1 + 4\cdot x_2 \end{cases}$.

10. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 4\cdot x_1 - 2\cdot x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2\cdot x_2 \end{cases}$.

11. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 3\cdot x_2 \\ \dot{x}_2 = -3\cdot x_1 - x_2 \end{cases}$.

12. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 3\cdot x_2 \\ \dot{x}_2 = -3\cdot x_1 - x_2 \end{cases}$.

13. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases}$.

14. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -3\cdot x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 3\cdot x_2 \end{cases}$.

15. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2\cdot x_2 \end{cases}$.

16. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -2\cdot x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2\cdot x_2 \end{cases}$.

17. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -4\cdot x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 4\cdot x_2 \end{cases}$.

18. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -4\cdot x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 4\cdot x_2 \end{cases}$.

19. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -2\cdot x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = 2\cdot x_1 - 4\cdot x_2 \end{cases}$.

20. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -4\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2\cdot x_2 \end{cases}$.

21. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 3\cdot x_1 - 2\cdot x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 5\cdot x_2 \end{cases}$.

22. $\begin{cases}\dot{x}_1 = 5\cdot x_1 + x_2\\ \dot{x}_2 = -2\cdot x_1 + 3\cdot x_2\end{cases}.$

23. $\begin{cases}\dot{x}_1 = -3\cdot x_1 + 2\cdot x_2\\ \dot{x}_2 = -x_1 - 5\cdot x_2\end{cases}.$

24. $\begin{cases}\dot{x}_1 = -5\cdot x_1 - x_2\\ \dot{x}_2 = 2\cdot x_1 - 3\cdot x_2\end{cases}.$

25. $\begin{cases}\dot{x}_1 = 3\cdot x_1 - 5\cdot x_2\\ \dot{x}_2 = x_1 + 5\cdot x_2\end{cases}.$

26. $\begin{cases}\dot{x}_1 = 5\cdot x_1 + x_2\\ \dot{x}_2 = -5\cdot x_1 + 3\cdot x_2\end{cases}.$

27. $\begin{cases}\dot{x}_1 = -3\cdot x_1 + 5\cdot x_2\\ \dot{x}_2 = -x_1 - 5\cdot x_2\end{cases}.$

28. $\begin{cases}\dot{x}_1 = -5\cdot x_1 - x_2\\ \dot{x}_2 = 5\cdot x_1 - 3\cdot x_2\end{cases}.$

29. $\begin{cases}\dot{x}_1 = 2\cdot x_1 + x_2\\ \dot{x}_2 = -5\cdot x_1 - 2\cdot x_2\end{cases}.$

30. $\begin{cases}\dot{x}_1 = -5\cdot x_1 - x_2\\ \dot{x}_2 = 5\cdot x_1 - 3\cdot x_2\end{cases}.$

31. $\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_1 + 2\cdot x_2\\ \dot{x}_2 = -x_1 - 3\cdot x_2\end{cases}.$

32. $\begin{cases}\dot{x}_1 = -4\cdot x_1 + x_2\\ \dot{x}_2 = -5\cdot x_1 - 2\cdot x_2\end{cases}.$

33. $\begin{cases}\dot{x}_1 = 2\cdot x_1 - 2\cdot x_2\\ \dot{x}_2 = 2\cdot x_1 + 2\cdot x_2\end{cases}.$

34. $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1 - 4\cdot x_2\\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2\end{cases}.$

35. $\begin{cases}\dot{x}_1 = 4\cdot x_1 - 2\cdot x_2\\ \dot{x}_2 = x_1 + 2\cdot x_2\end{cases}.$

13. Решить систему дифференциальных уравнений:

1. $\begin{cases}\dot{x}_1 = 8\cdot x_1 - 6\cdot x_2 + t\\ \dot{x}_2 = 7\cdot x_1 - 5\cdot x_2 + 3\cdot e^{-t}\end{cases}.$

2. $\begin{cases}\dot{x}_1 = -7\cdot x_1 + x_2 + 2\cdot e^{2t}\\ \dot{x}_2 = -x_1 - 5\cdot x_2 + t\end{cases}.$

3. $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_2 + 2\cdot t\\ \dot{x}_2 = 3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 2\cdot e^{-t}\end{cases}.$

4. $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1 + x_2 + 4\cdot e^{3t}\\ \dot{x}_2 = 3\cdot x_1 - x_2 - t\end{cases}.$

5. $\begin{cases}\dot{x}_1 = 4\cdot x_1 + 4\cdot x_2 - 2\cdot t + 1\\ \dot{x}_2 = 6\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + e^{-t}\end{cases}.$

6. $\begin{cases}\dot{x}_1 = 3\cdot x_1 + 8\cdot x_2 + 3\cdot t - 1\\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + 2\cdot e^{2t}\end{cases}.$

7. $\begin{cases}\dot{x}_1 = -5\cdot x_1 - 2\cdot x_2 - t + 2\\ \dot{x}_2 = -4\cdot x_1 - 3\cdot x_2 - e^{2t}\end{cases}.$

8. $\begin{cases}\dot{x}_1 = 6\cdot x_1 - 8\cdot x_2 + 3\cdot e^{-t}\\ \dot{x}_2 = 3\cdot x_1 - 5\cdot x_2 + 2\cdot t\end{cases}.$

9. $\begin{cases}\dot{x}_1 = 3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 2\cdot t + 1\\ \dot{x}_2 = -2\cdot x_1 + 8\cdot x_2 + e^{-t}\end{cases}.$

10. $\begin{cases}\dot{x}_1 = -4\cdot x_1 - 4\cdot x_2 - 2\cdot e^{-2t}\\ \dot{x}_2 = -6\cdot x_1 - 2\cdot x_2 + t\end{cases}.$

11. $\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_1 - 7\cdot x_2 + t - 1\\ \dot{x}_2 = -5\cdot x_1 - 3\cdot x_2 + e^{2t}\end{cases}.$

12. $\begin{cases}\dot{x}_1 = -5\cdot x_1 - 3\cdot x_2 + t\\ \dot{x}_2 = -8\cdot x_1 - 3\cdot x_2 + 2\cdot e^{-t}\end{cases}.$

13. $\begin{cases}\dot{x}_1 = -7\cdot x_1 + 4\cdot x_2 + 2\cdot t\\ \dot{x}_2 = 5\cdot x_1 - 8\cdot x_2 + 3\cdot e^{2t}\end{cases}.$

14. $\begin{cases}\dot{x}_1 = 2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 - 2\cdot e^{-t}\\ \dot{x}_2 = x_1 + 4\cdot x_2 - 3\cdot t\end{cases}.$

15. $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1 + x_2 + 2\cdot t - 3\\ \dot{x}_2 = 8\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + e^{-t}\end{cases}.$

16. $\begin{cases}\dot{x}_1 = 3\cdot x_1 + 5\cdot x_2 - t + 2\\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + e^{2t}\end{cases}.$

17. $\begin{cases}\dot{x}_1 = -3\cdot x_1 - 4\cdot x_2 + 3\cdot e^{2t}\\ \dot{x}_2 = -2\cdot x_1 - 5\cdot x_2 + 3\cdot t\end{cases}.$

18. $\begin{cases}\dot{x}_1 = -5\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 3\cdot t - 2\\ \dot{x}_2 = -8\cdot x_1 + 6\cdot x_2 + e^{-t}\end{cases}.$

19. $\begin{cases}\dot{x}_1 = 8\cdot x_1 - 2\cdot x_2 - e^{2t}\\ \dot{x}_2 = 2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 - t\end{cases}.$

20. $\begin{cases}\dot{x}_1 = -2\cdot x_1 - 6\cdot x_2 + e^{2t}\\ \dot{x}_2 = -4\cdot x_1 - 4\cdot x_2 + 3\cdot t\end{cases}.$

21. $\begin{cases}\dot{x}_1 = -3\cdot x_1 - 5\cdot x_2 - 3\cdot e^{-2t}\\ \dot{x}_2 = -7\cdot x_1 - x_2 + t\end{cases}.$

22. $\begin{cases}\dot{x}_1 = -3\cdot x_1 - 8\cdot x_2 + t - 3\\ \dot{x}_2 = -3\cdot x_1 - 5\cdot x_2 + e^{-t}\end{cases}.$

23. $\begin{cases}\dot{x}_1 = -5\cdot x_1 + 6\cdot x_2 - 3\cdot e^{-t}\\ \dot{x}_2 = 4\cdot x_1 - 7\cdot x_2 + 2\cdot t\end{cases}.$

24. $\begin{cases}\dot{x}_1 = 4\cdot x_1 + 4\cdot x_2 + 3\cdot t - 3\\ \dot{x}_2 = -6\cdot x_1 - 7\cdot x_2 + e^{-2t}\end{cases}.$

25. $\begin{cases}\dot{x}_1 = -7\cdot x_1 + 4\cdot x_2 + t\\ \dot{x}_2 = -6\cdot x_1 + 4\cdot x_2 + 3\cdot e^{2t}\end{cases}.$

26. $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1 - 2\cdot x_2 + 2\cdot t + t^2\\ \dot{x}_2 = -6\cdot x_1 + 4\cdot x_2 + 3\cdot e^{2t}\end{cases}.$

27. $\begin{cases}\dot{x}_1 = -2\cdot x_1 + x_2 + e^{t}\\ \dot{x}_2 = x_1 - 2\cdot x_2 + 2\cdot t + 1\end{cases}.$

28. $\begin{cases}\dot{x}_1 = 2\cdot x_1 + 6\cdot x_2 + e^{2t} + 1\\ \dot{x}_2 = 2\cdot x_1 + x_2 + t\end{cases}.$

29. $\begin{cases}\dot{x}_1 = 5\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + t\\ \dot{x}_2 = 8\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 2\cdot e^{t}\end{cases}.$

30. $\begin{cases}\dot{x}_1 = 4\cdot x_1 + 3\cdot x_2 - 2\cdot e^{-2t}\\ \dot{x}_2 = 9\cdot x_1 - 2\cdot x_2 + t\end{cases}.$

31. $\begin{cases}\dot{x}_1 = 3\cdot x_1 - x_2 + t\\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + e^{3t} + 2\end{cases}.$

32. $\begin{cases}\dot{x}_1 = -2\cdot x_1 + x_2 + 3\cdot e^{2t}\\ \dot{x}_2 = -2\cdot x_1 - 5\cdot x_2 + 4\cdot t\end{cases}.$

33. $\begin{cases}\dot{x}_1 = 3\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 2\cdot t - 3\\ \dot{x}_2 = 2\cdot x_1 + 6\cdot x_2 + e^{3t}\end{cases}.$

34. $\begin{cases}\dot{x}_1 = 8\cdot x_1 + 2\cdot x_2 - e^{3t}\\ \dot{x}_2 = 3\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 2\cdot t\end{cases}.$

35. $\begin{cases}\dot{x}_1 = 2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + e^{4t}\\ \dot{x}_2 = 2\cdot x_1 - 3\cdot x_2 - 3\cdot t\end{cases}.$

14. Исследовать устойчивость решений системы дифференциальных уравнений в окрестности точки покоя по первому приближению. Точку покоя найти подбором. Нарисовать качественную картину решения в окрестности точки покоя.

1. $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1^2 - 2\cdot x_1\cdot x_2 + 3\cdot x_2^2 - 3\\ \dot{x}_2 = x_1^2\cdot x_2 - 4\end{cases}.$

2. $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1\cdot x_2^2 - 2\\ \dot{x}_2 = x_1^2 + 3\cdot x_1\cdot x_2 - 10\end{cases}.$

3. $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1\cdot x_2^3 + x_1 - 4\\ \dot{x}_2 = x_1^2\cdot x_2 + x_2 - 5\end{cases}.$

4. $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1\cdot x_2 + x_2^2 - 3\\ \dot{x}_2 = x_1^2\cdot x_2 - 4\end{cases}.$

5. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \cdot x_2 + x_1^3 - 6 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 \cdot x_2^2 - 4 \end{cases}.$

6. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 - x_1 \cdot x_2^3 - 1 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 + x_2^2 - 3 \cdot x_1 \cdot x_2 + 1 \end{cases}.$

7. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 \cdot x_2 + x_2^2 - 5 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2 \cdot x_2^2 - 4 \end{cases}.$

8. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \cdot x_2 + x_1^2 - 6 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 + x_1 \cdot x_2^2 - 6 \end{cases}.$

9. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^3 \cdot x_2 - 8 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - 3 \end{cases}.$

10. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^2 - 2 \cdot x_2^2 + 6 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 \cdot x_2^2 - 4 \end{cases}.$

11. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 - 6 \\ \dot{x}_2 = x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1 - 4 \end{cases}.$

12. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_1 \cdot x_2 + 6 \\ \dot{x}_2 = x_2^2 - x_1^2 + 3 \end{cases}.$

13. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 \cdot x_2 - x_2^2 - 3 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 + x_2^2 - 5 \end{cases}.$

14. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_1^2 - 9 \\ \dot{x}_2 = x_2^2 \cdot x_1 - 2 \end{cases}.$

15. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \cdot x_1^2 - 2 \\ \dot{x}_2 = x_2^2 + 3 \cdot x_1 \cdot x_2 - 10 \end{cases}.$

16. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \cdot x_1^3 + x_2 - 9 \\ \dot{x}_2 = x_2^2 \cdot x_1 + x_1 - 4 \end{cases}.$

17. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \cdot x_2 + x_1^2 - 6 \\ \dot{x}_2 = x_2^2 \cdot x_1 - 2 \end{cases}.$

18. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \cdot x_2 + x_2^3 + 1 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 \cdot x_2^2 - 4 \end{cases}.$

19. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + x_2 \cdot x_1^2 - 7 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 + 2 \cdot x_2^2 - 6 \end{cases}.$

20. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^2 \cdot x_1 + x_1^2 - 6 \\ \dot{x}_2 = 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_1^2 - 10 \end{cases}.$

21. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \cdot x_2 + x_2^2 - 3 \\ \dot{x}_2 = x_2^2 + x_2 \cdot x_1^2 - 5 \end{cases}.$

22. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 \cdot x_1 - 2 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 + x_2 - 5 \end{cases}.$

23. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2^2 - 2 \cdot x_1^2 + 9 \\ \dot{x}_2 = x_1^3 \cdot x_2^2 - 8 \end{cases}.$

24. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_1^2 + 6 \\ \dot{x}_2 = x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot x_2 + 4 \end{cases}.$

25. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^3 \cdot x_1 + x_1^2 - 6 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 - x_2^2 - 3 \end{cases}.$

26. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^2 - 2 \cdot x_2 + 6 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 \cdot x_2 - 4 \end{cases}.$

27. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 \cdot x_2 + x_1^2 - 2 \\ \dot{x}_2 = x_2^2 \cdot x_1 - 1 \end{cases}.$

28. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_1 \cdot x_2 + 10 \\ \dot{x}_2 = x_2^2 - x_1^2 + 3 \end{cases}.$

29. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 - x_1 \cdot x_2^3 + 5 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 + x_2^2 - 3 \cdot x_1 \cdot x_2 + 1 \end{cases}.$

30. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 \cdot x_2 + x_1^2 - 10 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 \cdot x_2^2 - 4 \end{cases}.$

31. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2\cdot x_1\cdot x_2 + x_2^2 - 5 \\ \dot{x}_2 = 2\cdot x_1\cdot x_2^2 - 4 \end{cases}$.

32. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^2\cdot x_2 + x_1 + 6 \\ \dot{x}_2 = x_1^3\cdot x_2^2 - 27 \end{cases}$.

33. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 - x_1\cdot x_2^2 - 1 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 + x_2^3 - 2\cdot x_1\cdot x_2 - 9 \end{cases}$.

34. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2\cdot x_2 + x_2^2 - 6 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2\cdot x_2^2 - 19 \end{cases}$.

35. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1\cdot x_2^2 + x_1^2 + 3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_1\cdot x_2^2 + 5 \end{cases}$.

15. Найти состояния равновесия и исследовать их на устойчивость:

1. $\begin{cases} \dot{x} = xy - 2 \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$.

2. $\begin{cases} \dot{x} = 2e^x - e^{2x} - y \\ \dot{y} = x + 1 \end{cases}$.

3. $\begin{cases} \dot{x} = 1 - e^y \\ \dot{y} = 5x - y \end{cases}$.

4. $\begin{cases} \dot{x} = 3x^2 + y \\ \dot{y} = x(1 + y^2) \end{cases}$.

5. $\begin{cases} \dot{x} = e^x - 1 \\ \dot{y} = ye^x \end{cases}$.

6. $\begin{cases} \dot{x} = 6e^x - e^{2x} - y \\ \dot{y} = 5 - y \end{cases}$.

7. $\begin{cases} \dot{x} = \ln(y - 2x) \\ \dot{y} = x^2 - y^2 \end{cases}$.

8. $\begin{cases} \dot{x} = 4x^2 - y \\ \dot{y} = x(1 - y^2) \end{cases}$.

9. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y \\ \dot{y} = x(x + y^2) \end{cases}$.

10. $\begin{cases} \dot{x} = 3 - x^2 - y \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$.

11. $\begin{cases} \dot{x} = y - x(2 - 3x^2) \\ \dot{y} = x^2 - 4 \end{cases}$.

12. $\begin{cases} \dot{x} = 4 - x^2 + y \\ \dot{y} = y + 3 \end{cases}$.

13. $\begin{cases} \dot{x} = y^2 + x - 4 \\ \dot{y} = x - 3 \end{cases}$.

14. $\begin{cases} \dot{x} = 3y - x \\ \dot{y} = y\left[1 - y^2 - (x - y)^2\right] \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dot{x} = x^3 - y \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$.

16. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$.

17. $\begin{cases} \dot{x} = y^3 - y \\ \dot{y} = x + 4 \end{cases}$.

18. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 \\ \dot{y} = x - 1 \end{cases}$.

19. $\begin{cases} \dot{x} = y(y - x) \\ \dot{y} = x - 1 \end{cases}$.

20. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y \\ \dot{y} = y - 2 \end{cases}$.

21. $\begin{cases} \dot{x} = e - e^y \\ \dot{y} = x^2 - y \end{cases}$.

22. $\begin{cases} \dot{x} = e^2 - e^y \\ \dot{y} = x^2 - 2y \end{cases}$.

23. $\begin{cases} \dot{x} = e^{x-1} - 1 \\ \dot{y} = 2ye^x \end{cases}$.

24. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y \\ \dot{y} = x^2 - 1 \end{cases}$.

25. $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 3x + y - ye^y \end{cases}$.

26. $\begin{cases} \dot{x} = (e^x - 1)9y \\ \dot{y} = x - 1 + y \end{cases}$.

27. $\begin{cases} \dot{x} = 7x + 9 - y^2 \\ \dot{y} = e^x - 1 \end{cases}$.

28. $\begin{cases} \dot{x} = 7y(1 - y) \\ \dot{y} = x^3 - x \end{cases}$.

29. $\begin{cases} \dot{x} = x(e^x - e)y \\ \dot{y} = y - x + 1 \end{cases}$.

30. $\begin{cases} \dot{x} = 1 + y^2 - x \\ \dot{y} = x^2 - 4y^2 \end{cases}$.

31. $\begin{cases} \dot{x} = x + ye^x \\ \dot{y} = yx - y \end{cases}.$

32. $\begin{cases} \dot{x} = 4yx \\ \dot{y} = e^x(y^2 - 1) \end{cases}.$

33. $\begin{cases} \dot{x} = e^y - 1 \\ \dot{y} = x^2 - 1 \end{cases}.$

34. $\begin{cases} \dot{x} = y(y - 2x) \\ \dot{y} = (x-1)(y-x) \end{cases}.$

35. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - 4 \\ \dot{y} = \ln(y^2 - x) \end{cases}.$

16. Решить задачу Коши с начальными условиями $x(1) = 0$, $x(2) = 1$:

1. $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = 2 \cdot (-1)^n + n + 3$.
2. $x_{n+2} + 6x_{n+1} + 5x_n = 3 \cdot (-1)^n + 2n - 3$.
3. $x_{n+2} + 6x_{n+1} + 5x_n = 3 \cdot (-5)^n + 3n - 1$.
4. $x_{n+2} + 5x_{n+1} + 4x_n = -(-1)^n - n + 1$.
5. $x_{n+2} + 4x_{n+1} - 5x_n = 2 \cdot (-5)^n + n - 4$.
6. $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 5x_n = 4 \cdot 5^n + 1 - 2n$.
7. $x_{n+2} + 4x_{n+1} - 5x_n = (-5)^{n+1} + n + 1$.
8. $x_{n+2} + 3x_{n+1} - 4x_n = (-4)^{n+2} - 4 + n$.
9. $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 5x_n = -2 \cdot 5^n - 4n + 2$.
10. $x_{n+2} + 3x_{n+1} - 4x_n = 3 \cdot (-4)^n - n + 2$.
11. $x_{n+2} + 3x_{n+1} - 4x_n = -2 \cdot (-4)^n + 3n + 2$.
12. $x_{n+2} + 4x_{n+1} + 3x_n = 2 \cdot (-3)^n + n - 3$.
13. $x_{n+2} + 3x_{n+1} - 4x_n = 3 \cdot 4^n + 1 - 4n$.
14. $x_{n+2} + 4x_{n+1} - 5x_n = 2 \cdot (-5)^n + 2n - 3$.
15. $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 4x_n = 3 \cdot (-1)^n - 2n + 2$.
16. $x_{n+2} + 5x_{n+1} + 4x_n = 3 \cdot (-4)^n + 2n - 1$.
17. $x_{n+2} + 4x_{n+1} - 5x_n = 4 \cdot 5^n - n + 2$.
18. $x_{n+2} + 6x_{n+1} + 5x_n = 4 \cdot (-1)^{n-1} + 5n - 5$.
19. $x_{n+2} + 4x_{n+1} - 5x_n = 2 \cdot (-1)^n + n + 2$.
20. $x_{n+2} + 3x_{n+1} - 4x_n = 2 \cdot (-4)^n - n + 2$.
21. $x_{n+2} + 4x_{n+1} + 3x_n = 2 \cdot (-3)^n + 2n - 3$.
22. $x_{n+2} + 4x_{n+1} + 3x_n = -3 \cdot (-1)^n + 2n + 1$.
23. $x_{n+2} + 6x_{n+1} + 5x_n = 4 \cdot (-5)^n - 3 + 2n$.
24. $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = 3^{n+1} - n + 1$.
25. $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 5x_n = 5^{n+1} + n + 3$.
26. $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = 2 \cdot (-1)^n + n$.
27. $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 4x_n = 2 \cdot 4^n - 2n + 1$.
28. $x_{n+2} + 5x_{n+1} + 4x_n = 3 \cdot (-1)^n - n + 3$.
29. $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 4x_n = (-4)^{n+2} - n + 4$.
30. $x_{n+2} + 6x_{n+1} + 5x_n = (-5)^{n+1} + n - 4$.
31. $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = 3 \cdot (-3)^n + 3n$.
32. $x_{n+2} + 5x_{n+1} + 4x_n = 3 \cdot 2^{2n} - n + 2$.
33. $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 5x_n = 3 \cdot 5^n - 2n + 3$.
34. $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 5x_n = 2 \cdot (-5)^n + n - 2$.
35. $x_{n+2} + 4x_{n+1} + 3x_n = (-1)^n + 1 - n$.

17. Решить разностное уравнение:

1. $x_{n+3}+2x_{n+2}+x_{n+1}=-2\cdot(-1)^n-3n+1$.
2. $x_{n+3}+4x_{n+2}+4x_{n+1}=3\cdot(-2)^n-3n+1$.
3. $x_{n+3}+6x_{n+2}+9x_{n+1}=-(-3)^n-2n+1$.
4. $x_{n+3}-6x_{n+2}+9x_{n+1}=2\cdot 3^n-2n+5$.
5. $x_{n+3}-4x_{n+2}+4x_{n+1}=3\cdot(-1)^n-n+4$.
6. $x_{n+3}-4x_{n+2}+4x_{n+1}=2\cdot 2^n-n+3$.
7. $x_{n+3}+2x_{n+2}+x_{n+1}=4\cdot(-1)^n-2n+5$.
8. $x_{n+3}+8x_{n+2}+16x_{n+1}=2\cdot(-4)^n-n+2$.
9. $x_{n+3}-4x_{n+2}+4x_{n+1}=-3\cdot 2^n-2n+5$.
10. $x_{n+3}+4x_{n+2}+4x_{n+1}=4\cdot(-2)^n+2n-1$.
11. $x_{n+3}+6x_{n+2}+9x_{n+1}=2\cdot(-3)^n+2n-1$.
12. $x_{n+3}-6x_{n+2}+9x_{n+1}=-3\cdot 3^n-3n+1$.
13. $x_{n+3}-2x_{n+2}+x_{n+1}=-2^{n+1}-3n+2$.
14. $x_{n+3}+2x_{n+2}+x_{n+1}=3\cdot(-1)^n+4n-1$.
15. $x_{n+3}-8x_{n+2}+16x_{n+1}=3\cdot 4^n+2n-1$.
16. $x_{n+3}+8x_{n+2}+16x_{n+1}=(-4)^n-2n+3$.
17. $x_{n+3}-4x_{n+2}+4x_{n+1}=-3\cdot 2^n+2n-3$.
18. $x_{n+3}+4x_{n+2}+4x_{n+1}=2\cdot(-2)^n+3n-1$.
19. $x_{n+3}+6x_{n+2}+9x_{n+1}=4\cdot(-3)^n-3n-2$.
20. $x_{n+3}-6x_{n+2}+9x_{n+1}=-3\cdot 3^n-3n+1$.
21. $x_{n+3}-2x_{n+2}+x_{n+1}=-(-1)^n+3n-4$.
22. $x_{n+3}-8x_{n+2}+16x_{n+1}=1-2n-4^n$.
23. $x_{n+3}-8x_{n+2}+16x_{n+1}=3n-1-4^n$.
24. $x_{n+3}+8x_{n+2}+16x_{n+1}=3n-(-4)^n$.
25. $x_{n+3}-4x_{n+2}+4x_{n+1}=4n-3-2^n$.
26. $x_{n+1}+4x_n+4x_{n-1}=(-2)^n+4n-1$.
27. $x_{n+1}+6x_n+9x_{n-1}=(-3)^n+3n-1$.

28. $x_{n+1}-6x_n+9x_{n-1}=4-3n-4\cdot 3^n$.

29. $x_{n+1}-8x_n+16x_{n-1}=4^{n+2}+n-3$.

30. $x_{n+1}+2x_n+x_{n-1}=5(-1)^n+5n-4$.

31. $x_{n+1}-2x_n+x_{n-1}=4(-1)^n+2n-3$.

32. $x_{n+1}+8x_n+16x_{n-1}=(-4)^n-n-3$.

33. $x_{n+1}-4x_n+4x_{n-1}=5\cdot 2^n+2n-2$.

34. $x_{n+1}+4x_n+4x_{n-1}=(-2)^n+2n+2$.

35. $x_{n+1}+6x_n+9x_{n-1}=(-3)^n-3n+3$.

18. Решить разностное уравнение:

1. $x_{n+2}+2x_{n+1}+5x_n=(-1)^n+3\cos\frac{2\pi n}{3}$.

2. $x_{n+2}-4x_{n+1}+5x_n=3(-1)^n+2\sin\frac{2\pi n}{3}$.

3. $x_{n+2}+6x_{n+1}+10x_n=-2^n+2\cos\frac{2\pi n}{3}$.

4. $x_{n+2}-6x_{n+1}+10x_n=3^n+\cos\frac{\pi n}{3}$.

5. $x_{n+2}+4x_{n+1}+5x_n=2^n+3\cos\frac{\pi n}{3}6$.

6. $x_{n+2}-2x_{n+1}+5x_n=-1+2\sin\frac{2\pi n}{3}$.

7. $x_{n+2}+4x_{n+1}+8x_n=3\cdot 2^n-3\sin\frac{2\pi n}{3}$.

8. $x_{n+2}-4x_{n+1}+8x_n=-2^n+3\sin\frac{\pi n}{3}$.

9. $x_{n+2}+6x_{n+1}+13x_n=(-3)^n+\cos\frac{2\pi n}{3}$.

10. $x_{n+2}-6x_{n+1}+13x_n=3^n+3\sin\frac{2\pi n}{3}$.

11. $x_{n+2}+4x_{n+1}+5x_n=(-2)^n-\sin\frac{\pi n}{3}$.

12. $x_{n+2}-4x_{n+1}+5x_n=2^n+3\cos\frac{2\pi n}{3}$.

13. $x_{n+2}+6x_{n+1}+10x_n=3+\sin\frac{2\pi n}{3}$.

14. $x_{n+2}-6x_{n+1}+10x_n=-3^n+3\sin\frac{\pi n}{3}$.

15. $x_{n+2}+2x_{n+1}+5x_n=3-\sin\frac{2\pi n}{3}$.

16. $x_{n+2}-2x_{n+1}+5x_n=(-2)^n+\cos\frac{\pi n}{3}$.

17. $x_{n+2}+4x_{n+1}+8x_n=-2^n-\cos\frac{2\pi n}{3}$.

18. $x_{n+2}-4x_{n+1}+8x_n=2^n+\cos\frac{2\pi n}{3}$.

19. $x_{n+2}+6x_{n+1}+13x_n=3^n+3\sin\frac{2\pi n}{3}$.

20. $x_{n+2}-6x_{n+1}+13x_n=3^n+\cos\frac{2\pi n}{3}$.

21. $x_{n+2}+4x_{n+1}+5x_n=(-2)^n+\cos\frac{\pi n}{3}$.

22. $x_{n+2}-4x_{n+1}+5x_n=(-1)^n+\sin\frac{2\pi n}{3}$.

23. $x_{n+2}+6x_{n+1}+10x_n=3\cdot 2^n-\cos\frac{\pi n}{3}$.

24. $x_{n+2}-6x_{n+1}+10x_n=3^n-2\cos\frac{2\pi n}{3}$.

25. $x_{n+2}+2x_{n+1}+5x_n=(-1)^n-\cos\frac{\pi n}{3}$.

26. $x_{n+2}-2x_{n+1}+5x_n=4-3\sin\frac{2\pi n}{3}$.

27. $x_{n+2}+6x_{n+1}+13x_n=3^n+\cos\frac{2\pi n}{3}$.

28. $x_{n+2}+4x_{n+1}+5x_n=(-2)^n+\sin\frac{\pi n}{3}$.

29. $x_{n+2}+4x_{n+1}+8x_n=(-2)^n+\cos\frac{\pi n}{2}$.

30. $x_{n+2}-4x_{n+1}+5x_n=-2^n+\cos\frac{\pi n}{3}$.

31. $x_{n+2}+6x_{n+1}+10x_n=3^n+2\cos\frac{2\pi n}{3}$.

32. $x_{n+2}-6x_{n+1}+10x_n=3^n+3\cos\frac{\pi n}{3}$.

33. $x_{n+2}+2x_{n+1}+5x_n=3\cdot 2^n-3\sin\frac{\pi n}{3}$.

34. $x_{n+2}-2x_{n+1}+5x_n=2\cdot 1^n+6\sin\dfrac{\pi n}{3}$.

35. $x_{n+2}+6x_{n+1}+13x_n=-2^n+\sin\dfrac{2\pi n}{3}$.

19. Найти структуру общего решения неоднородного уравнения:

1. $\Delta^2 x_n+2\Delta x_n-8x_n=n^3(-3)^{2n}-3+n^2 3^n$.
2. $\Delta^2 x_n+2\Delta x_n+2x_n=2n^2+2^n-n\cdot(-1)^n$.
3. $\Delta^2 x_n+3\Delta x_n-4x_n=n^3(-3)^n+n^2+(-2)^n$.
4. $\Delta^2 x_n-5\Delta x_n+6x_n=n^2 2^{2n}-2n+3+2^n$.
5. $\Delta^2 x_n+2\Delta x_n+10x_n=(-3)^n n+3n^3+3^n n$.
6. $\Delta^2 x_n+2\Delta x_n+5x_n=2^n n-4n^3+n^2(-2)^n$.
7. $\Delta^2 x_n+2\Delta x_n-3x_n=(-2)^{2n}-2n^2+n^2 2^n$.
8. $\Delta^2 x_n+2\Delta x_n-3x_n=n^3(-2)^n-2^{2n}n+2n^2$.
9. $\Delta^2 x_n-2\Delta x_n+x_n=(-1)^n n+n^2+2^n n$.
10. $\Delta^2 x_n+4\Delta x_n=3^{-n}-3n^2 3^n+n^3$.
11. $\Delta^2 x_n+2\Delta x_n/3=3n^2 3^n-n^3+3^{-n}$.
12. $\Delta^2 x_n-4\Delta x_n=3^{n-1}n-n^3(-3)^n-1$.
13. $\Delta^2 x_n-2\Delta x_n=(-1)^{2n}n^3+3^{-n}n^2$.
14. $\Delta^2 x_n-x_n=(-2)^n n+n^3+2^{3n}$.
15. $\Delta^2 x_n+\Delta x_n-2x_n=n^2(-2)^n-1+2^n n$.
16. $\Delta^2 x_n+4x_n=2n^2 2^n-n^3+5^n$.
17. $\Delta^2 x_n=n^2(-2)^n-n+2+2^{2n}$.
18. $\Delta^2 x_n+2\Delta x_n=n^2 3^{2n}+3n+(-1)^{2n-1}$.
19. $\Delta^2 x_n+4\Delta x_n=3^n n^2-3n^3-2^n n$.
20. $\Delta^2 x_n+2\Delta x_n=(-2)^n n-2n^3+2^{2n}n^2$.
21. $\Delta^2 x_n+2\Delta x_n=(-2)^n n-3n^2+n^3 3^{3n}$.
22. $\Delta^2 x_n+4\Delta x_n+4x_n=n^2(-1)^n-n^3+3^n$.
23. $\Delta^2 x_n+x_n=2n^2+2^n n^3+3^n$.

24. $\Delta^2 x_n - 2\Delta x_n + x_n = 2n^2 4^n - 2 + 2^{n-1} n$.

25. $\Delta^2 x_n + 2\Delta x_n + x_n = n^3 - n^2 3^n + (-1)^n$.

26. $\Delta^2 x_n + 5\Delta x_n + 6x_n = n^2(-1)^n - 2n + 2^n$.

27. $\Delta^2 x_n + 2\Delta x_n + 5x_n = (-2)^n n - 2n^2 - 4^n n^2$.

28. $\Delta^2 x_n + \Delta x_n + x_n / 4 = (-2)^n - n^2 - 3^{-n} n$.

29. $\Delta^2 x_n + 2\Delta x_n + 2x_n = n^3(-1)^n - n + n^2 3^{2n}$.

30. $\Delta^2 x_n + 2\Delta x_n + 2x_n = (-2)^n n + n + 2^n n^2$.

31. $\Delta^2 x_n + 4\Delta x_n + 5x_n = (-1)^{1-n} - 3n^2 - 5^n$.

32. $\Delta^2 x_n + 4\Delta x_n + 8x_n = (-1)^n n^2 + 3 - 2^n n$.

33. $\Delta^2 x_n + 6\Delta x_n + 8x_n = (-1)^{3n} n - 3n^3 + 3^n$.

34. $\Delta^2 x_n - 4\Delta x_n + 4x_n = 3(-3)^n - n^2 + n^3 3^n$.

35. $\Delta^2 x_n + 2\Delta x_n + 2x_n = n - 2^n n^3 - (-1)^n n^2$.

20. Решить задачу с начальными условиями $x_1(1) = 1$, $x_2(1) = -1$:

1. $\begin{cases} x_1(n+1) = -x_1(n) - x_2(n) \\ x_2(n+1) = 2x_1(n) - 3x_2(n) \end{cases}$.

2. $\begin{cases} x_1(n+1) = -x_1(n) + 3x_2(n) \\ x_2(n+1) = -3x_1(n) - x_2(n) \end{cases}$.

3. $\begin{cases} x_1(n+1) = -3x_1(n) + 2x_2(n) \\ x_2(n+1) = -x_1(n) - x_2(n) \end{cases}$.

4. $\begin{cases} x_1(n+1) = -3x_1(n) + x_2(n) \\ x_2(n+1) = -x_1(n) - 3x_2(n) \end{cases}$.

5. $\begin{cases} x_1(n+1) = -2x_1(n) - x_2(n) \\ x_2(n+1) = x_1(n) - 2x_2(n) \end{cases}$.

6. $\begin{cases} x_1(n+1) = -2x_1(n) + x_2(n) \\ x_2(n+1) = -x_1(n) - 2x_2(n) \end{cases}$.

7. $\begin{cases} x_1(n+1) = -4x_1(n) + x_2(n) \\ x_2(n+1) = -x_1(n) - 4x_2(n) \end{cases}$.

8. $\begin{cases} x_1(n+1) = -4x_1(n) - x_2(n) \\ x_2(n+1) = x_1(n) - 4x_2(n) \end{cases}$.

9. $\begin{cases} x_1(n+1) = -2x_1(n) - x_2(n) \\ x_2(n+1) = 2x_1(n) - 4x_2(n) \end{cases}$.

10. $\begin{cases} x_1(n+1) = 3x_1(n) - 2x_2(n) \\ x_2(n+1) = x_1(n) + 5x_2(n) \end{cases}$.

11. $\begin{cases} x_1(n+1) = x_1(n) + x_2(n) \\ x_2(n+1) = -2x_1(n) + 3x_2(n) \end{cases}$.

12. $\begin{cases} x_1(n+1) = x_1(n) - 3x_2(n) \\ x_2(n+1) = 3x_1(n) + x_2(n) \end{cases}$.

13. $\begin{cases} x_1(n+1) = 3x_1(n) - 2x_2(n) \\ x_2(n+1) = x_1(n) + x_2(n) \end{cases}$.

14. $\begin{cases} x_1(n+1) = 3x_1(n) - x_2(n) \\ x_2(n+1) = x_1(n) + 3x_2(n) \end{cases}$.

15. $\begin{cases} x_1(n+1) = 2x_1(n) + x_2(n) \\ x_2(n+1) = -x_1(n) + 2x_2(n) \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1(n+1) = 2x_1(n) - x_2(n) \\ x_2(n+1) = x_1(n) + 2x_2(n) \end{cases}$.

17. $\begin{cases} x_1(n+1) = 4x_1(n) - x_2(n) \\ x_2(n+1) = x_1(n) + 4x_2(n) \end{cases}$.

18. $\begin{cases} x_1(n+1) = 4x_1(n) + x_2(n) \\ x_2(n+1) = -x_1(n) + 4x_2(n) \end{cases}$.

19. $\begin{cases} x_1(n+1) = 2x_1(n) + x_2(n) \\ x_2(n+1) = -2x_1(n) + 4x_2(n) \end{cases}$.

20. $\begin{cases} x_1(n+1) = 4x_1(n) - 2x_2(n) \\ x_2(n+1) = x_1(n) + 2x_2(n) \end{cases}$.

21. $\begin{cases} x_1(n+1) = -4x_1(n) - x_2(n) \\ x_2(n+1) = 5x_1(n) - 2x_2(n) \end{cases}$.

22. $\begin{cases} x_1(n+1) = -x_1(n) + 2x_2(n) \\ x_2(n+1) = -x_1(n) - 3x_2(n) \end{cases}$.

23. $\begin{cases} x_1(n+1) = -3x_1(n) + 5x_2(n) \\ x_2(n+1) = -x_1(n) - 5x_2(n) \end{cases}$.

24. $\begin{cases} x_1(n+1) = x_1(n) - 4x_2(n) \\ x_2(n+1) = x_1(n) + x_2(n) \end{cases}$.

25. $\begin{cases} x_1(n+1) = 5x_1(n) + x_2(n) \\ x_2(n+1) = -2x_1(n) + 3x_2(n) \end{cases}$.

26. $\begin{cases} x_1(n+1) = -3x_1(n) + 2x_2(n) \\ x_2(n+1) = -x_1(n) - 5x_2(n) \end{cases}$.

27. $\begin{cases} x_1(n+1) = -5x_1(n) - x_2(n) \\ x_2(n+1) = 2x_1(n) - 3x_2(n) \end{cases}.$

28. $\begin{cases} x_1(n+1) = 3x_1(n) - 5x_2(n) \\ x_2(n+1) = x_1(n) + 5x_2(n) \end{cases}.$

29. $\begin{cases} x_1(n+1) = 5x_1(n) + x_2(n) \\ x_2(n+1) = -5x_1(n) + 3x_2(n) \end{cases}.$

30. $\begin{cases} x_1(n+1) = -3x_1(n) - x_2(n) \\ x_2(n+1) = 5x_1(n) - 5x_2(n) \end{cases}.$

31. $\begin{cases} x_1(n+1) = -5x_1(n) - x_2(n) \\ x_2(n+1) = 5x_1(n) - 3x_2(n) \end{cases}.$

32. $\begin{cases} x_1(n+1) = -4x_1(n) + 2x_2(n) \\ x_2(n+1) = -x_1(n) - 2x_2(n) \end{cases}.$

33. $\begin{cases} x_1(n+1) = 4x_1(n) - x_2(n) \\ x_2(n+1) = 2x_1(n) + 2x_2(n) \end{cases}.$

34. $\begin{cases} x_1(n+1) = 2x_1(n) - 2x_2(n) \\ x_2(n+1) = 2x_1(n) + 2x_2(n) \end{cases}.$

35. $\begin{cases} x_1(n+1) = 2x_1(n) + x_2(n) \\ x_2(n+1) = -5x_1(n) - 2x_2(n) \end{cases}.$

21. Решить систему разностных уравнений:

1. $\begin{cases} x_1(n+1) = 2x_1(n) + 3x_2(n) - 2\cdot(-1)^n \\ x_2(n+1) = x_1(n) + 4x_2(n) - 3n \end{cases}.$

2. $\begin{cases} x_1(n+1) = 8x_1(n) - 6x_2(n) + n, \\ x_2(n+1) = 7x_1(n) - 5x_2(n) + 3\cdot(-1)^n \end{cases}.$

3. $\begin{cases} x_1(n+1) = -4x_1(n) - 4x_2(n) - 2\cdot(-2)^n \\ x_2(n+1) = -6x_1(n) - 2x_2(n) + n \end{cases}.$

4. $\begin{cases} x_1(n+1) = 2x_2(n) + 2n, \\ x_2(n+1) = 3x_1(n) + 2x_2(n) + 2\cdot(-1)^n \end{cases}.$

5. $\begin{cases} x_1(n+1) = 6x_1(n) - 8x_2(n) + 3\cdot(-1)^n \\ x_2(n+1) = 3x_1(n) - 5x_2(n) + 2n \end{cases}.$

6. $\begin{cases} x_1(n+1) = -5x_1(n) - 3x_2(n) + n, \\ x_2(n+1) = -8x_1(n) - 3x_2(n) + 2\cdot(-1)^n \end{cases}.$

7. $\begin{cases} x_1(n+1) = 3x_1(n) + 2x_2(n) + 2n + 1, \\ x_2(n+1) = -2x_1(n) + 8x_2(n) + (-1)^n \end{cases}.$

8. $\begin{cases} x_1(n+1) = 4x_1(n) + 4x_2(n) - 2n + 1, \\ x_2(n+1) = 6x_1(n) + 2x_2(n) + (-1)^n \end{cases}.$

9. $\begin{cases} x_1(n+1) = -5x_1(n) - 2x_2(n) - n + 2 \\ x_2(n+1) = -4x_1(n) - 3x_2(n) - 2^n \end{cases}.$

10. $\begin{cases} x_1(n+1) = -x_1(n) - 7x_2(n) + n - 1 \\ x_2(n+1) = -5x_1(n) - 3x_2(n) + 2^n \end{cases}.$

11. $\begin{cases} x_1(n+1) = x_1(n) + x_2(n) + 4 \cdot 3^n \\ x_2(n+1) = 3x_1(n) - x_2(n) - n \end{cases}.$

12. $\begin{cases} x_1(n+1) = -7x_1(n) + 4x_2(n) + 2n \\ x_2(n+1) = 5x_1(n) - 8x_2(n) + 3 \cdot 2^n \end{cases}.$

13. $\begin{cases} x_1(n+1) = 3x_1(n) + 8x_2(n) + 3n - 1 \\ x_2(n+1) = x_1(n) + x_2(n) + 2 \cdot 2^n \end{cases}.$

14. $\begin{cases} x_1(n+1) = -7x_1(n) + x_2(n) + 2^n \\ x_2(n+1) = -x_1(n) - 5x_2(n) + n \end{cases}.$

15. $\begin{cases} x_1(n+1) = x_1(n) - 2x_2(n) + 2n + n^2 \\ x_2(n+1) = x_1(n) + 4x_2(n) + 3 + (-1)^n \end{cases}.$

16. $\begin{cases} x_1(n+1) = -5x_1(n) + 3x_2(n) + 3n - 2 \\ x_2(n+1) = -8x_1(n) + 6x_2(n) + (-1)^n \end{cases}.$

17. $\begin{cases} x_1(n+1) = -3x_1(n) - x_2(n) - 3 \cdot (-2)^n \\ x_2(n+1) = -x_1(n) - 3x_2(n) + n \end{cases}.$

18. $\begin{cases} x_1(n+1) = -3x_1(n) - 4x_2(n) + 3 \cdot 2^n \\ x_2(n+1) = -2x_1(n) - 5x_2(n) + 3n \end{cases}.$

19. $\begin{cases} x_1(n+1) = -3x_1(n) - 5x_2(n) - 3(-2)^n \\ x_2(n+1) = -7x_1(n) - x_2(n) + n \end{cases}.$

20. $\begin{cases} x_1(n+1) = -3x_1(n) - 8x_2(n) - 3 \cdot (-1)^n \\ x_2(n+1) = -3x_1(n) - 5x_2(n) + 2n \end{cases}.$

21. $\begin{cases} x_1(n+1) = 2x_1(n) + 6x_2(n) + (-2)^n + 1 \\ x_2(n+1) = 2x_1(n) + x_2(n) + n \end{cases}.$

22. $\begin{cases} x_1(n+1) = -7x_1(n) + 4x_2(n) + n \\ x_2(n+1) = -6x_1(n) + 4x_2(n) + 3 \cdot 2^n \end{cases}.$

23. $\begin{cases} x_1(n+1) = 5x_1(n) + x_2(n) + 3n - 3 \\ x_2(n+1) = -7x_1(n) - 3x_2(n) + (-2)^n \end{cases}.$

24. $\begin{cases} x_1(n+1) = -5x_1(n) + 6x_2(n) - 3(-1)^n \\ x_2(n+1) = 4x_1(n) - 7x_2(n) + 2n \end{cases}.$

25. $\begin{cases} x_1(n+1) = 4x_1(n) + 4x_2(n) + 3n - 3, \\ x_2(n+1) = -6x_1(n) - 7x_2(n) + (-2)^n \end{cases}.$

26. $\begin{cases} x_1(n+1) = -2x_1(n) + x_2(n) + 1 \\ x_2(n+1) = x_1(n) - 2x_2(n) + 2n + 1 \end{cases}.$

27. $\begin{cases} x_1(n+1) = x_1(n) + x_2(n) + (-1)^n, \\ x_2(n+1) = 8x_1(n) + 3x_2(n) + n - 3 \end{cases}.$

28. $\begin{cases} x_1(n+1) = 8x_1(n) - 2x_2(n) - 2^n \\ x_2(n+1) = 2x_1(n) + 3x_2(n) - n \end{cases}.$

29. $\begin{cases} x_1(n+1) = 7x_1(n) + x_2(n) - 2^n \\ x_2(n+1) = 5x_1(n) + 3x_2(n) - n \end{cases}.$

30. $\begin{cases} x_1(n+1) = 8x_1(n) + 2x_2(n) + 2^n \\ x_2(n+1) = 3x_1(n) + 3x_2(n) + 3n \end{cases}.$

31. $\begin{cases} x_1(n+1) = 3x_1(n) + 5x_2(n) - n + 2 \\ x_2(n+1) = x_1(n) - x_2(n) + 2^n \end{cases}.$

32. $\begin{cases} x_1(n+1) = -2x_1(n) + x_2(n) + n - 3 \\ x_2(n+1) = x_1(n) - 4x_2(n) + (-1)^n \end{cases}.$

33. $\begin{cases} x_1(n+1) = -2x_1(n) - 6x_2(n) + 2^n \\ x_2(n+1) = -4x_1(n) - 4x_2(n) + 3n \end{cases}.$

34. $\begin{cases} x_1(n+1) = 3x_1(n) + 8x_2(n) - n + 3 \\ x_2(n+1) = 3x_1(n) + 5x_2(n) - (-1)^n \end{cases}.$

35. $\begin{cases} x_1(n+1) = x_1(n) + 3x_2(n) + n \\ x_2(n+1) = -x_1(n) + 5x_2(n) + 3 \cdot 2^n \end{cases}.$

22. Исследовать устойчивость решений системы разностных уравнений в окрестности точки покоя по первому приближению. Точку покоя найти подбором.

1. $\begin{cases} \Delta x_1(n) = -x_1^3(n) + x_1(n)x_2(n) + 6 \\ \Delta x_2(n) = -x_1^2(n) + x_2^2(n) + 3 \end{cases}.$

2. $\begin{cases} \Delta x_1(n) = -x_1(n) + x_2^2(n) - 2 \\ \Delta x_2(n) = -x_1^2(n) + 3x_1(n)x_2(n) - 10 \end{cases}.$

3. $\begin{cases} \Delta x_1(n) = x_1(n)x_2(n) + x_2(n)x_1^2(n) - 6 \\ \Delta x_2(n) = x_1(n)x_2(n) + 2x_2(n) - 4 \end{cases}.$

4. $\begin{cases} \Delta x_1(n) = -x_1(n)x_2(n) + x_1^3(n) - 6 \\ \Delta x_2(n) = x_1^2(n)x_2^2(n) - 4 \end{cases}.$

5. $\begin{cases} \Delta x_1(n) = x_1^2(n) - 2x_1(n)x_2(n) + 3x_2^2 - 3 \\ \Delta x_2(n) = x_1^2(n)x_2(n) - 4 \end{cases}.$

6. $\begin{cases} \Delta x_1(n) = -x_1(n)x_2(n) + x_2^3(n) + 1 \\ \Delta x_2(n) = x_1^2(n)x_2^2(n) - 4 \end{cases}.$

7. $\begin{cases} \Delta x_1(n) = x_1(n) + x_2(n) - x_1(n)x_2^3(n) + 5 \\ \Delta x_2(n) = x_1^2(n) + x_2^2(n) - 3x_1(n)x_2(n) + 1 \end{cases}.$

8. $\begin{cases} \Delta x_1(n) = -x_1(n) + x_2(n) + x_2(n)x_1^2(n) - 7 \\ \Delta x_2(n) = x_1^2(n) + 2x_2^2(n) - 6 \end{cases}.$

9. $\begin{cases} \Delta x_1(n) = x_1(n)x_2(n) + x_1^2(n) - 6 \\ \Delta x_2(n) = x_1^2(n) + x_1(n)x_2^2(n) - 6 \end{cases}.$

10. $\begin{cases} \Delta x_1(n) = x_1(n)x_2(n) + x_1(n)x_2^2(n) - 4 \\ \Delta x_2(n) = x_1(n)x_2(n) + 2x_1 - 6 \end{cases}.$

11. $\begin{cases} \Delta x_1(n) = x_1(n)x_2(n) + x_2^2(n) - 3 \\ \Delta x_2(n) = x_2^2(n) + x_2(n)x_1^2(n) - 5 \end{cases}.$

12. $\begin{cases} \Delta x_1(n) = x_1^2(n)x_2(n) - x_2^2(n) - 3 \\ \Delta x_2(n) = x_1^2(n)x_2^2(n) - 5 \end{cases}.$

13. $\begin{cases} \Delta x_1(n) = x_1(n)x_2(n) + x_2^2(n) - 3 \\ \Delta x_2(n) = x_1^2(n)x_2(n) - 4 \end{cases}.$

14. $\begin{cases} \Delta x_1(n) = x_1^2(n)x_2(n) - 4 \\ \Delta x_2(n) = x_2^2(n) + 3x_1(n)x_2(n) - 7 \end{cases}.$

15. $\begin{cases} \Delta x_1(n) = x_1(n)x_2^3(n) + x_1(n) - 4 \\ \Delta x_2(n) = x_1^2(n)x_2(n) + x_2(n) - 5 \end{cases}.$

16. $\begin{cases} \Delta x_1(n) = x_1(n)x_2(n) + x_1^2(n) - 6 \\ \Delta x_2(n) = x_1(n)x_2^2(n) - 2 \end{cases}.$

17. $\begin{cases} \Delta x_1(n) = x_1^3(n)x_2(n) + x_2(n) - 9 \\ \Delta x_2(n) = x_1(n)x_2^2(n) + x_1(n) - 4 \end{cases}.$

18. $\begin{cases} \Delta x_1(n) = x_1^2(n)x_2(n) + x_2^2(n) - 5 \\ \Delta x_2(n) = x_1(n) + 2x_2^2(n) - 4 \end{cases}.$

19. $\begin{cases} \Delta x_1(n) = x_1(n)x_2^2(n) + x_1^2(n) - 6 \\ \Delta x_2(n) = 2x_1^2(n) + 2x_2(n) - 10 \end{cases}.$

20. $\begin{cases} \Delta x_1(n) = x_1^3(n)x_2(n) - 8 \\ \Delta x_2(n) = x_1(n) + x_2(n) - 3 \end{cases}.$

21. $\begin{cases} \Delta x_1(n) = x_2^3(n)x_1(n) - 2 \\ \Delta x_2(n) = x_1^2(n)x_2(n) - 5 \end{cases}.$

22. $\begin{cases} \Delta x_1(n) = x_1^2(n) - 2x_2^2(n) + 6 \\ \Delta x_2(n) = x_1^2(n)x_2^2(n) - 4 \end{cases}.$

23. $\begin{cases} \Delta x_1(n) = x_1(n)x_2(n) + x_1(n)x_2^2(n) - 4 \\ \Delta x_2(n) = x_2(n)x_1^2(n) + 2x_2(n) - 6 \end{cases}.$

24. $\begin{cases} \Delta x_1(n) = 2x_1(n)x_2(n) + 4x_2^2(n) - 8, \\ \Delta x_2(n) = x_1(n)x_2^2(n) - 2. \end{cases}.$

25. $\begin{cases} \Delta x_1(n) = x_1(n)x_2(n) + x_1^2(n) - 12 \\ \Delta x_2(n) = 2x_1(n) + 2x_2^2(n) - 8 \end{cases}.$

26. $\begin{cases} \Delta x_1(n) = -x_2(n) + x_1(n)x_2^3(n) + 10 \\ \Delta x_2(n) = x_1^2(n) - 3x_1(n)x_2(n) - 7 \end{cases}.$

27. $\begin{cases} \Delta x_1(n) = x_1(n)x_2(n) + x_1^2(n) - 4 \\ \Delta x_2(n) = x_1(n)x_2^2(n) - x_2(n) \end{cases}.$

28. $\begin{cases} \Delta x_1(n) = x_1(n)x_2(n) + 2x_2^2(n) - 4 \\ \Delta x_2(n) = x_1^2(n)x_2(n) - 4 \end{cases}.$

29. $\begin{cases} \Delta x_1(n) = x_1(n) - x_2(n)x_1^2(n) + 3 \\ \Delta x_2(n) = 2x_1^2(n) - x_2^2(n) - 7 \end{cases}.$

30. $\begin{cases} \Delta x_1(n) = x_1(n)x_2^3(n) + x_1^2(n) - 6 \\ \Delta x_2(n) = x_1^2(n) - x_2^2(n) - 3 \end{cases}.$

31. $\begin{cases} \Delta x_1(n) = x_1^2(n)x_2(n) + x_2^2(n) - 6 \\ \Delta x_2(n) = x_2(n)x_1(n) + x_1^2(n) + 1 \end{cases}.$

32. $\begin{cases} \Delta x_1(n) = x_2^2(n)x_1(n) - 4 \\ \Delta x_2(n) = x_1^2(n) + x_2(n) - 3 \end{cases}.$

33. $\begin{cases} \Delta x_1(n) = x_2(n) - 2x_1^2(n) + 1 \\ \Delta x_2(n) = x_1^3(n)x_2^2(n) - 1 \end{cases}.$

34. $\begin{cases} \Delta x_1(n) = x_2^2(n) - 2x_1^2(n) + 7 \\ \Delta x_2(n) = x_1^3(n)x_2^2(n) - 8 \end{cases}.$

35. $\begin{cases} \Delta x_1(n) = x_1(n)x_2^2(n) + x_1^2(n) - 5 \\ \Delta x_2(n) = x_1^2(n) - x_1(n)x_2^2(n) + 3 \end{cases}.$

РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

Пример 1. Не находя общего решения дифференциального уравнения $y' = x$ построить поле направлений и семейство интегральных кривых. Для построения поля направлений воспользуемся изоклинами. Изоклиной называется геометрическое место точек плоскости xOy, в которых касательные к искомым интегральным кривым имеют одно и то же направление $y' = \text{const}$. Семейство изоклин данного уравнения определяется уравнениями $x = k$. Полагая $k = 0, \pm 1, ...,$ получаем изоклины данного уравнения $x = 0, \pm 1, ...,$ по которым строим интегральные кривые уравнения в области $y > 0$ (рисунок 1). Для области $y < 0$ кривые симметричны.

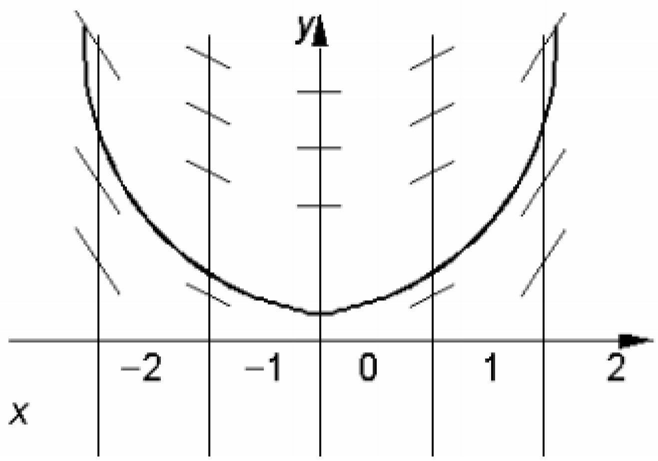

Рисунок 1 – Интегральные кривые уравнения в области $y > 0$

Пример 2. Решить уравнение $y' = 2xy$.

Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, т. к. имеет вид $y' = f(x) \cdot g(y)$. Выразим производную через дифференциалы, разделим переменные $\frac{dy}{y} 2xdx$ и от полученного выражения возьмем интегралы: $\ln|y| = x^2 + \ln|C|$. Окончательно имеем $y(x) = Ce^{x^2}$.

Пример 3. Решить уравнение $y' = \frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y}$.

Данное уравнение является однородным (с однородной функцией), $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$. Сделаем замену $u = y/x$ и преобразуем уравнение к виду $y' = \frac{udu}{1 + u^2 - \sqrt{1 + u^2}} = \frac{dx}{x}$, откуда интегрированием находим:

$$-\ln|x| + \ln|C| = \int \frac{udu}{1 + u^2 - \sqrt{1 + u^2}} = \int \frac{d\left(\sqrt{1 + u^2 - 1}\right)}{\sqrt{1 + u^2 - 1}} = \ln\left(\sqrt{1 + u^2 - 1}\right).$$

Потенцируя последнее соотношение и возвращаясь к исходной переменной, после несложных преобразований имеем $y^2 = 2C(x + C/2)$.

Пример 4. Решить задачу Коши $\frac{dy}{dx} + y\cos x = 2\cos x, y(0) = 3$.

Уравнение является линейным, т. к. имеет вид $y' + p(x)\cdot y = q(x)$. Однородное уравнение, соответствующее данному $\frac{dy}{dx} + y\cos x = 0$, интегрируется разделением переменных: $y = Ce^{-\sin x}$. Частное решение исходного уравнения будем искать в виде $y = C(x)e^{-\sin x}$, где $C(x)$ – неизвестная функция (метод вариации произвольной постоянной). Подстановкой в исходное уравнение получаем:

$$\frac{dC}{dx}e^{-\sin x} - C(x)e^{-\sin x}\cos x + C(x)e^{-\sin x}\cos x = 2\cos x,$$

$$\frac{dC}{dx} = 2e^{\sin x}\cos x, C(x) = 2e^{\sin x}.$$

Окончательно общее решение уравнения записываем в виде: $y(x) = Ce^{-\sin x} + 2$.

Решаем задачу Коши: $3 = C + 2, C = 1$. Получим $y(x) = e^{-\sin x} + 2$.

Пример 5. Решить уравнение $\frac{dy}{dx} + 2yx = e^{x^2}y^2$.

Уравнение является уравнением Бернулли, т. к. имеет вид $y' + p(x)\cdot y = q(x)\cdot y^{\alpha}$. Разделим это уравнение на $y^2: \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} + \frac{2}{y}x = e^{x^2}$, и произведем замену переменных $\frac{1}{y} = z(x)$. Полученное уравнение $\frac{dz}{dx} - 2zx = -e^{x^2}$ является линейным неоднородным. Методом вариации произвольной постоянной находим его решение: $z(x) = (C + x)e^{x^2}$. Проведя обратную замену переменных $\left(y(x) = \frac{1}{z}\right)$, окончательно получаем решение исходного уравнения $y(x) = \frac{1}{C + x}e^{-x^2}$.

Пример 6. Решить уравнение $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$.

В данном случае $M = e^{-y}$, $N = -(2y + xe^{-y})$, $\frac{\partial M}{\partial y} = -e^{-y}$, $\frac{\partial N}{\partial x} = -e^{-y}$, откуда

$\dfrac{\partial M}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial N}{\partial x}$, следовательно, уравнение является уравнением в полных дифференциалах. Находим функцию $u(x)$ по формуле

$$u = \int M(x,y)dx + \varphi(y) = \int e^{-y} dx + \varphi(y) = xe^{-y} + \varphi(y).$$

Находя $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, приравниваем его к функции $N(x,y)$, получаем:

$$-xe^{-y} + \varphi'(y) = -2y - xe^{-y},$$

откуда $\varphi'(y) = -2y$ и, следовательно, $\varphi(y) = -y^2 + C, C = \text{const}$. Окончательно общий интеграл исходного уравнения имеет вид $u(x,y) = xe^{-y} - y^2 = C$.

Пример 7. Найти общее решение уравнения $y'' = 2x$.

Последовательно интегрируя дважды, получаем искомое общее решение

$$y' = \int 2x dx = x^2 + C_1,, \; y = \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2.$$

Пример 8. Найти общее решение уравнения $y''' - \dfrac{y''}{x} = 0$.

Полагая $y'' = p(x)$, тогда $y''' = p'(x)$ и данное уравнение примет вид $\dfrac{dp}{dx} - \dfrac{p}{x} = 0$. Разделяя переменные в последнем уравнении, найдем $p = C_1 x = y''$, откуда легко получаем общее решение исходного уравнения:

$$y(x) = \frac{C_1}{6} x^3 + C_2 x + C_3.$$

Пример 9. Решить уравнение $yy'' + (y')^2 = 0$.

Полагая $y' = p(y)$, тогда $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$, и данное уравнение принимает вид $yp\dfrac{dp}{dy} + p^2 = 0$. Сокращая на $p, (p \neq 0)$, и разделяя переменные, найдем $p(y) = \dfrac{\tilde{C}_1}{y}$ или $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\tilde{C}_1}{y}$, откуда $y^2 = \tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2$ или $y = \sqrt{\tilde{C}_1 x + \tilde{C}_2}$. Случай $p = 0$ дает решение $y = C$, содержащееся в предыдущем решении.

Пример 10. Решить задачу Коши: $y'' = 2y^3, y(0) = 1, y'(0) = 1$.

Полагая $y' = p(y)$, получаем $p\dfrac{dp}{dy} = 2y^3$, откуда $p^2 = y^4 + C_1$ или $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{y^4 + C_1}$. Разделяя переменные, найдем $x + C_2 = \int \left(y^4 + C_1\right)^{-1/2} dy$. В правой части последнего равенства имеем интеграл от дифференциального бинома, который в данном случае не выражается в виде конечной комбинации элементарных функций. Однако если использовать начальные условия, то $C_1 = 0$. Это сразу дает $\frac{dy}{dx} = y^2$, откуда, учитывая начальные условия, находим $y = \frac{1}{1-x}$.

Пример 11. Найти общее решение уравнения $y^{(VI)} - y'' = 0$. Составляем характеристическое уравнение: $\lambda^6 - \lambda^2 = 0$ или $\lambda^2(\lambda^4 - 1) = 0$. Находим корни характеристического уравнения: $\lambda_{1,2} = 0, \lambda_{3,4} = \pm 1, \lambda_{5,6} = \pm i.$ По характеру корней выписываем частные линейно независимые решения дифференциального уравнения:

$$y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = e^x, y_4 = e^{-x}, y_5 = \cos x, y_6 = \sin x.$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + C_4 e^{-x} + C_5 \cos + C_6 \sin x.$$

Пример 12. Найти общее решение уравнения $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$.

Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее данному неоднородному: $y'' + y = 0$ – является линейным уравнением с постоянными коэффициентами. Функции $y_1 = \sin x$ и $y_2 = \cos x$ образуют его фундаментальную систему решений. Будем искать решение исходного уравнения в виде $y(x) = C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x$ (метод вариации произвольных постоянных). Для определения $C_1'(x), C_2'(x)$ составим систему:

$$\begin{cases} C_1'(x)\sin x + C_1'(x)\cos x = 0 \\ C_1'(x)\cos x - C_1'(x)\sin x = \dfrac{1}{\sin x} \end{cases}.$$

Решая эту систему относительно $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, получаем:

$$C_1'(x) = \frac{\cos x}{\sin x},\ C_2'(x) = -1;\ C_1(x) = \ln|\sin x| + C_1,\ C_2(x) = -x + C_2.$$

Подставляя найденные выражения для $C_1(x)$, $C_2(x)$ в функцию общего решения исходного уравнения, найдем его:

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \sin x \ln|\sin x| - x\cos.$$

Пример 13. Найти частное решение уравнения $y'' + y' = 2e^x$.

Характеристическое уравнение $\lambda^2+\lambda=0$ имеет корни $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$, поэтому $\lambda=0$ является простым корнем $(r=1)$ этого уравнения. Правая часть уравнения представляет собой произведение $e^x(a=1)$ на многочлен нулевой степени $(m=0)$.Так как число a, равное единице, не является корнем характеристического уравнения, частное решение уравнения надо искать в виде $\tilde{y}(x)=Be^x$. Подставляя $\tilde{y}(x)$ в уравнение, найдем $B=1$, откуда $\tilde{y}(x)=e^x$.

Пример 14. Найти решение уравнения $y''-2y'+y=xe^x$.

Характеристическое уравнение $\lambda^2-2\lambda+1=0$ имеет корни $\lambda_{1,2}=1$. В данном случае $P_m(x)=x$, т. е. $m=1$ и число a, равное единице, является двукратным корнем $(r=2)$ характеристического уравнения. Поэтому частное решение следует искать в виде $\tilde{y}(x)=x^2e^x(B_0x+B_1)$. Подставляем его в исходное уравнение и после преобразований получим: $6B_0x+2B_1=x$. Откуда $B_0=1/6, B_1=0$, $B_1=0$.
Окончательно общее решение уравнения имеет вид:

$$y(x)=C_1e^x+C_2x\cdot e^x+\frac{1}{6}x^3e^x.$$

Пример 15. Найти частное решение уравнения $y''+2y'+y=\cos x.$

Характеристическое уравнение $\lambda^2+2\lambda+1=0$ имеем корни $\lambda_1=\lambda_2=-1$. В данном случае $\alpha=0$, $\beta=-1$, поэтому числа $\alpha\pm i\beta=\pm i$ не являются корнями характеристического уравнения; $P_m(x)=1, Q_s(x)=0$, значит, частное решение уравнения следует искать в виде $\tilde{y}(x)=A\cos x+B\sin x,\ A,B=\text{const}.$. Подставляя частное решение в уравнение, получаем $A=0$, $B=1/2$ и, следовательно $\tilde{y}(x)=\dfrac{\sin x}{2}.$

Пример 16. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=-x_1+2x_2\\ \dfrac{dx_2}{dt}=2x_1-x_2.\end{cases}.$$

Характеристический многочлен $P(\lambda)=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 2\\ 2 & -1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+2\lambda-3$ имеем корни $\lambda_1=1, \lambda_2=-3$. Тогда собственные векторы имеют вид:

$$B_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}.$$

Общее решение в матричной форме имеет вид:

$$x(t)=C_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}e^t+C_2\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}e^{-3t}$$

или по координатам:

$$\begin{cases}x_1(t)=C_1e^t+C_2e^{-3t}\\x_2(t)=C_1e^t-C_2e^{-3t}\end{cases}.$$

Пример 17. Найти частное решение системы

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=-x_1+2x_2\\\dfrac{dx_2}{dt}=x_1-5\cos t\end{cases}.$$

В матричной форме система имеет вид:

$$(d\,/\,dt)X=AX+F,$$

где $A=\begin{bmatrix}1&2\\1&0\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},\ F=\begin{bmatrix}0\\-5\end{bmatrix}\cos t.$

Характеристический многочлен $P(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda&2\\2&-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda-2$ имеет корни $\lambda_1=-1,\lambda_2=2$. Частное решение по методу неопределенных коэффициентов будем искать в виде

$$x_ч(t)=\begin{bmatrix}r_1\\r_2\end{bmatrix}\sin t+\begin{bmatrix}h_1\\h_2\end{bmatrix}\cos t.$$

Подставляя эту векторную функцию в матричное уравнение, получаем систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов: $r_2-h_1=-5,\quad h_2+r_1=0,\quad r_1-2h_2-h_1=0,\quad 2r_2+h_1+r_1=0$. Решение этой системы дает $r_1=1,\ r_2=-2,\ h_1=3,\ h_2=-1$. Частным решением является, следовательно, вектор-функция

$$x_ч(t)=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}\sin t+\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}\cos t.$$

Или в координатах $\begin{cases}x_1(t)=\sin t+3\cos t\\x_2(t)=2\sin t-\cos t\end{cases}.$

Пример 18. Найти частное решение системы $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 - 3e^{2t} \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 2x_1 + x_2 \end{cases}$.

В матричной форме система имеет вид:

$$(d/dt)X = AX + F,$$

где $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$; $F = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} e^{2t}$.

Характеристический многочлен $P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2$ имеет корни $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$. Вектор F имеет резонанс со вторым корнем. Кратность резонанса равна 1. В таком случае частное решение следует искать в виде

$$X_ч(t) = \left(\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \right) e^{2t}.$$

Подставляя эту векторную функцию в матричное уравнение, получаем систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов: $2h_1 - h_2 = 0,\ -r_1 + 2r_2 = 0,\ 2r_1 + h_1 - r_2 = -3,\ r_2 + h_2 - 2r_1 = 0$. Решение этой системы дает $r_1 = -1,\ r_2 = 0,\ h_1 = -1,\ h_2 = -2$. Частным решением является, следовательно, вектор-функция

$$X_ч(t) = \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} \right) e^{2t}$$

или в координатах

$$\begin{cases} x_1(t) = -(1+t)e^{2t} \\ x_2(t) = -2te^{2t} \end{cases}.$$

Пример 19. Исследовать на устойчивость по первому приближению точку покоя $x = 0,\ y = 0$ системы

$$\frac{dx}{dt} = -x + 2y - 5y^2,\ \frac{dy}{dt} = 2x - y + x^3/2\ (*).$$

Система первого приближения имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = -x + 2y,\ \frac{dy}{dt} = 2x - y\ (**)$$

Нелинейные члены удовлетворяют нужным условиям: их порядок не меньше 2. Составляем характеристическое уравнение для системы (**):

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$. Корни характеристического уравнения $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -3$. Поскольку $\lambda_1 > 0$ нулевое решение $x = y \equiv 0$ системы (*) неустойчиво.

Пример 20. Найти общее решение разностного уравнения

$$\Delta^2 x(n) - 3\Delta x(n) + 2x(n) = 3 \cdot 4^n.$$

Фундаментальную систему решений соответствующего однородного разностного уравнения образуют последовательности $x_1(n) = 2^n$ и $x_2(n) = 3^n$. Частное решение ищем в виде $x_ч(n) = C_1(n)2^n + C_2(n)3^n$. Для определения $C_1(n),\ C_2(n)$ имеем уравнения

$$2^{n+1}\Delta C_1(n) + 3^{n+1}\Delta C_2(n) = 0,\ \ 2^{n+2}\Delta C_1(n) + 3^{n+2}\Delta C_2(n) = 3 \cdot 4^n.$$

Отсюда $\Delta C_1(n) = -(3/2)2^n$, $\Delta C_2(n) = (4/3)^n$. Тогда по формуле суммирования

$$C_1(n) - C_1(1) = -(3/2)(2 + 2^2 + ... + 2^{n-1}) = -(3/2)(2^n - 2)/(2-1),$$

$$C_2(n) - C_2(1) = (4/3) + (4/3)^2 + ... + (4/3)^{n-1} = ((4/3)^n - (4/3))/(4/3 - 1).$$

Выбирая $C_1(1) = -3,\ \ C_2(1) = 4$ находим частное решение $x_ч(n) = (3/2)4^n$, $n = 1, 2, ...$ Общее решение разностного уравнения имеет вид $x(n) = (3/2)4^n + C_1 2^n + C_2 3^n$.

Пример 21. Решить уравнение $x_{n+3} - 2x_{n+1} - 4x_n = 0$.

Характеристическим многочленом этого уравнения будет многочлен $P(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda - 4 = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 2)$. Этот многочлен имеет один действительный корень $\lambda_1 = 2$ и два комплексно сопряженных $\lambda_2 = -1 + i, \lambda_3 = -1 - i$.

Имеем $\lambda_1 = 2^{1/2}\exp(3\pi i/4)$. Фундаментальную систему решений образуют последовательности: $2^n, 2^{n/2}\cos(3\pi n/4), 2^{n/2}\sin(3\pi n/4)$. Общее решение уравнения имеет вид

$$x(n) = C_1 2^n + C_2 2^{n/2}\cos(3\pi n/4) + C_3 2^{n/2}\sin(3\pi n/4).$$

Пример 22. Решить уравнение

$$\Delta^4 x(n) + 8\Delta^3 x(n) + 26\Delta^2 x(n) + 40\Delta x(n) + 25I = 0.$$

Характеристическим многочленом этого уравнения будет многочлен $P(\lambda) = (\lambda-1)^4 + 8(\lambda-1)^3 + 26(\lambda-1)^2 + 40(\lambda-1) + 25 = (\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2$. Этот многочлен имеет два комплексно сопряженных корня $\lambda_1 = -1 + i$ и $\lambda_2 = -1 - i$ кратности 2 каждый. Фундаментальную систему решений образуют последовательности:

$$2^{n/2}\cos(3\pi n/4), 2^{n/2}\sin(3\pi n/4), n2^{n/2}\cos(3\pi n/4), n2^{n/2}\sin(3\pi n/4).$$

Общее решение уравнения имеет вид:

$$x(n) = C_1 2^{n/2}\cos(3\pi n/4) + C_2 2^{n/2}\sin(3\pi n/4) + C_3 n2^{n/2}\cos(3\pi n/4) + C_4 n2^{n/2}\sin(3\pi n/4).$$

Пример 23. Решить уравнение $x_{n+3} - 6x_{n+2} + 11x_{n+1} - 6x_n = 5\cdot 4^n$.
Характеристическим многочленом соответствующего линейного однородного уравнения будет многочлен $P(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$. Этот многочлен имеет три действительных корня $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Общее решение линейного однородного уравнения имеет вид

$$x(n) = C_1 + C_2 2^n + C_3 3^n.$$

Частное решение будем искать в виде $x_ч(n) = A4^n$, где A – неизвестный пока коэффициент. Подставляя $x_ч(n) = A4^n$ в уравнение, получаем

$$A4^n(64 - 96 + 44 - 6) = 5\cdot 4^n \Leftrightarrow 6A = 5 \Leftrightarrow A = 5/6.$$

Частное решение имеет вид $x_ч(n) = (5/6)4^n$. Для общего решения имеем формулу: $x_{общ}(n) = (5/6)4^n + C_1 + C_2 2^n + C_3 3^n$.

Пример 24. Решить уравнение $\Delta^3 x(n) - \Delta^2 x(n) = (2n-1)3^n$.
Характеристическим многочленом соответствующего линейного однородного уравнения будет многочлен $P(\lambda) = (\lambda-1)^3 - (\lambda-1)^2 = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$. Этот многочлен имеет два действительных корня $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ с кратностями $m_1 = 2$, $m_2 = 1$. Фундаментальную систему решений образуют последовательности: $1, n, 2^n$. Общее решение линейного однородного уравнения имеет вид

$$x(n) = C_1 + C_2 n + C_3 2^n.$$

Частное решение будем искать в виде $x_ч(n)=(An+B)3^n$, где A, B – неизвестные коэффициенты. Подставляя $x_ч(n)=(An+B)3^n$ в уравнение и используя равенства

$$\Delta^2(An+B)3^n=[4An+12A+4B]3^n;\ \Delta^3(An+B)3^n=[8An+36A+8B]3^n,$$

получаем систему уравнений для определения A и B

$$4A=2;\ 24A+4B=-1 \Leftrightarrow A=1/2,\ B=-13/4.$$

Частное решение имеет вид $x_ч(n)=(1/4)(2n-13)3^n$. Для общего решения имеем

$$x_{общ}(n)=(1/4)(2n-13)3^n+C_1+C_2n+C_3 2^n.$$

Пример 25. Решить уравнение $x_{n+2}-4x_{n+1}+4x_n=3\cdot 2^n+4n-3$.
Характеристическим многочленом соответствующего линейного однородного уравнения будет многочлен $P(\lambda)=\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2$.Этот многочлен имеет один действительный корень $\lambda_1=2$, кратности $m_1=2$. Фундаментальную систему решений образуют последовательности: $2^n, n\cdot 2^n$. Общее решение линейного однородного уравнения имеет вид

$$x(n)=C_1 2^n+C_2 n 2^n.$$

Правая часть уравнения имеет вид $f(n)=3\cdot 2^n+4n-3=f_1(n)+f_2(n)$, где обозначено $f_1(n)=3\cdot 2^n$, $f_2(n)=4n-3$. Для правой части $f_1(n)=3\cdot 2^n$ имеет место резонанс, так как число $2+0i=2$ является корнем характеристического уравнения. Порядок резонанса определяется кратностью корня $\lambda_1=2$ характеристического уравнения. Следовательно, частное решение соответствующее правой части $f_1(n)=3\cdot 2^n$ следует искать в виде $x_{ч,1}(n)=An^2 2^n$. После подстановки в уравнение получаем

$$A(n+2)^2 2^{n+2}-4A(n+1)^2 2^{n+1}+4An^2 2^n=3\cdot 2^n.$$

Отсюда, после упрощений, получаем $8A=3$ или $A=3/8$. Окончательно, $x_{ч,1}(n)=(3/8)n^2 2^n$. Для правой части $f_2(n)=4n-3$ резонанса нет. Частное решение ищем в виде $x_{ч,2}(n)=Bn+C$. После подстановки в уравнение имеем

$$Bn+C-2B=4n-3 \Leftrightarrow B=4,\ C=5.$$

Частное решение имеет вид $x_{ч,2}(n) = 4n + 5$. Для общего решения имеем формулу:

$$x_{общ}(n) = (3/8)n^2 2^n + 4n + 5 + C_1 2^n + C_2 n 2^n.$$

Пример 26. Найти решение уравнения $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 1 + 5^n$ с начальными условиями $x(1) = 3$, $x(2) = 6$.

Характеристическим многочленом соответствующего линейного однородного уравнения будет многочлен $P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$. Этот многочлен имеет два действительных корня $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ кратности $m_1 = m_2 = 1$. Фундаментальную систему решений образуют последовательности: $1, 2^n$. Общее решение линейного однородного уравнения имеет вид

$$x(n) = C_1 + C_2 2^n.$$

Правая часть уравнения имеет вид $f(n) = 1 + 5^n = f_1(n) + f_2(n)$, где обозначено $f_1(n) = 1$, $f_2(n) = 5^n$. Для правой части $f_1(n) = 1$ имеет место резонанс, т. к. число 1 является корнем характеристического уравнения кратности 1. Следовательно, частное решение соответствующее правой части $f_1(n) = 1$ следует искать в виде $x_{ч,1}(n) = An$. После подстановки в уравнение получаем

$$A(n+2) - 3A(n+1) + 2An = 1 \Rightarrow A = -1.$$

Окончательно, $x_{ч,1}(n) = -n$. Для правой части $f_2(n) = 5^n$ резонанса нет. Частное решение ищем в виде $x_{ч,2}(n) = B5^n$. После подстановки в уравнение имеем

$$B5^{n+2} - 3B5^{n+1} + 2B5^n = 5^n \Rightarrow B = 1/12.$$

Частное решение имеет вид $x_{ч,2}(n) = (1/12)5^n$. Для общего решения имеем формулу: $x_{общ}(n) = -n + (1/12)5^n + C_1 + C_2 2^n$. Начальные условия дают систему уравнений для определения констант C_1, C_2:

$$-1 + 5/12 + C_1 + 2C_2 = 3, -2 + 25/12 + C_1 + 4C_2 = 6,$$

отсюда: $C_1 = 15/12$, $C_2 = 7/6$. Искомое решение имеет вид

$$x(n) = -n + (1/12)5^n + 15/12 + (7/6)2^n.$$

Пример 27. Решить систему

$$\begin{cases} x_1(n+1) = 2x_1(n) + x_2(n) + 2^n \\ x_2(n+1) = x_1(n) + 2x_2(n) - 2^n \end{cases}.$$

В матричной форме система имеет вид: $X(n+1) = AX(n) + B$, где $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$;

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} 2^n.$$

Последовательности

$$X^1(n) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ X^2(n) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} 3^n,$$

образуют фундаментальную систему решений соответствующей линейной однородной системы. Частное решение неоднородной системы по методу Лагранжа ищем в виде

$$X_ч(n) = C_1(n) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2(n) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} 3^n.$$

Для определения последовательностей $C_1(n), C_2(n)$ имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \Delta C_1 + 3^{n+1} \Delta C_2 = 2^n \\ -\Delta C_1 + 3^{n+1} \Delta C_2 = -2^n \end{cases}.$$

Отсюда находим $\Delta C_1 = 2^n$, $\Delta C_2 = 0$. Тогда $C_2(n) = 0$, $C_1(n) = 2^n$. Частное решение имеет вид

$$X_ч(n) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} 2^n.$$

Общее решение запишется в виде

$$X_{общ}(n) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} 2^n + C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} 3^n$$

или по координатам

$$\begin{cases} x_1(n) = 2^n + C_1 + C_2 3^n \\ x_2(n) = -2^n - C_1 + C_2 3^n \end{cases}.$$

Пример 28. Решить систему

$$\begin{cases} x_1(n+1) = 3x_1(n) + x_2(n) \\ x_2(n+1) = x_1(n) + x_2(n) \end{cases}.$$

В матричной форме система имеет вид: $X(n+1) = AX(n)$, где $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$; $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

Характеристический многочлен

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4$$

имеет кратный корень $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Собственный вектор и соответствующее ему решение системы имеют вид

$$D^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad X^1(n) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} 2^n.$$

Второе линейно независимое решение будем искать в виде

$$X^2(n) = \left(\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \right) 2^n.$$

После подстановки этой векторной последовательности в уравнение получаем систему уравнений для вычисления неизвестных: a_1, a_2, b_1, b_2: $a_1 + a_2 = 2b_1$, $a_1 + a_2 - 2b_2$, $b_1 + b_2 = 0$. Выбрав значение $b_1 = 1$, $a_1 = 1$, найдем $b_2 = -1$, $a_2 = 1$. Фундаментальную систему решений образуют тогда последовательности

$$X^1(n) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} 2^n, \; X^2(n) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) 2^n.$$

Общее решение системы дается, следовательно, формулой

$$X(n) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} 2^n + C_2 \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right) 2^n$$

или в координатах

$$\begin{cases} x_1(n) = (C_1 + C_2 + C_2 n)2^n \\ x_2(n) = (-C_1 + C_2 - C_2 n)2^n \end{cases}.$$

Пример 29. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x_1(n+1) = 2x_1(n) + x_2(n) \\ x_2(n+1) = -x_1(n) + 2x_2(n) \end{cases}.$$

В матричной рекуррентной форме система имеет вид: $X(n+1) = AX(n)$, где

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Характеристический многочлен

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (\lambda - 2)^2 + 1$$

имеет комплексно-сопряженные корни $\lambda_1 = 2+i$, $\lambda_2 = 2-i$. Комплексные собственные векторы и соответствующие им решения системы имеют вид

$$D^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix},\ Y^1(n) = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}(2+i)^n;\ D^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix},\ Y^2(n) = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}(2-i)^n.$$

Общее решение системы в комплексной форме дается формулой

$$X(n) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}(2+i)^n + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}(2-i)^n.$$

В качестве действительной фундаментальной системы решений возьмем последовательности

$$X^1(n) = (Y^1 + Y^2)/2, X^2(n) = (Y^1 - Y^2)/2i.$$

Полагая $\lambda_1 = r\cos(i\varphi)$, где $r = \sqrt{5}$; $\varphi = \arcsin\left(1/\sqrt{5}\right)$. Тогда

$$X^1(n) = \begin{bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{bmatrix} r^n; X^2(n) = \begin{bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{bmatrix} r^n.$$

Общее решение в действительной форме приобретает вид

$$X(n) = C_1 \begin{bmatrix} \cos n\varphi \\ -\sin n\varphi \end{bmatrix} r^n + C_2 \begin{bmatrix} \sin n\varphi \\ \cos n\varphi \end{bmatrix} r^n$$

или в координатах

$$\begin{cases} x_1(n) = (C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi) r^n \\ x_2(n) = (-C_1 \sin n\varphi + C_2 \cos n\varphi) r^n \end{cases}.$$

Пример 30. Решить систему

$$\begin{cases} \Delta x_1(n) = x_1(n) + x_2(n) + 3^n \\ \Delta x_2(n) = x_1(n) - x_2(n) - 2 \cdot 3^n \end{cases}.$$

В матричной рекуррентной форме система преобразуется к виду

$$X(n+1) - AX(n) = B3^n,$$

где $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Частное решение неоднородной системы по методу неопределенных коэффициентов ищем в той же форме, что и правую часть:

$$X_ч(n) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} 3^n.$$

Подставляя эту последовательность в матричное уравнение, получаем систему уравнений $3c_1 - c_2 = 1$, $-c_1 + 3c_2 = -2$. Отсюда $c_1 = 1/8$, $c_2 = -5/8$. Частным решением системы является векторная последовательность

$$X_ч(n) = \begin{bmatrix} 1/8 \\ -5/8 \end{bmatrix} 3^n.$$

Окончательно, с учетом общего решения линейной однородной системы $X(n+1) - AX(n) = 0$, получаем общее решение неоднородной системы:

$$X_{общ}(n) = \begin{bmatrix} 1/8 \\ -5/8 \end{bmatrix} 3^n + C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} (-1)^n.$$

Пример 31. Решить систему

$$\begin{cases} x_1(n+1) = 3x_1(n) + x_2(n) + 2n + 1 \\ x_2(n+1) = -x_1(n) + x_2(n) + 3 \cdot 4^n + 5 \end{cases}.$$

В матричной рекуррентной форме система преобразуется к виду
$X(n+1) - AX(n) = B^1(n) + B^2(n)$,

где $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$; $X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$; $B^1=\begin{bmatrix}1\\ 5\end{bmatrix}+n\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix}$; $B^2=\begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix}4^n$.

Частное решение неоднородной системы с учетом принципа суперпозиции ищем в виде: $X_ч = X_{ч,1}+X_{ч,2}$, где в соответствии с методом неопределенных коэффициентов:

$$X_{ч,1}(n)=\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}+n\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix},\ X_{ч,2}(n)=\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}4^n.$$

Подставляя эти последовательности в соответствующие матричные уравнения, получаем систему уравнений

$c_1-c_2=0$, $c_1+3c_2=3$, $2b_1+b_2=-2$, $b_1=0$, $2a_1+a_2=b_1-1$, $a_1=5-b_2$.

Отсюда $c_1=3/4$, $c_2=3/4$, $b_1=0$, $b_2=-2$, $a_1=7$, $a_2=-15$. Таким образом, частным решением системы является векторная последовательность

$$X_ч(n)=\begin{bmatrix}7\\ -15\end{bmatrix}+n\begin{bmatrix}0\\ -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3/4\\ 3/4\end{bmatrix}4^n.$$

Окончательно, с учетом общего решения линейной однородной системы $X(n+1)-AX(n)=0$ получаем общее решение неоднородной системы:

$$X_{общ}(n)=\begin{bmatrix}7\\ -15\end{bmatrix}+n\begin{bmatrix}0\\ -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3/4\\ 3/4\end{bmatrix}4^n+C_1\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}2^n+C_2\left(\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}+n\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}\right)2^n.$$

Пример 32. Решить систему разностных уравнений

$$\begin{cases}x_1(n+1)=5x_1(n)+2x_2(n)+2n\\ x_2(n+1)=-4x_1(n)-x_2(n)-n+1\end{cases}.$$

В матричной рекуррентной форме система преобразуется к виду

$$X(n+1)-AX(n)=B(n),$$

где $A=\begin{bmatrix}5 & 2\\ -4 & 1\end{bmatrix}$; $X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$; $B(n)=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}+n\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}$.

Матрица системы имеет собственные значения $\lambda_1=1$, $\lambda_2=3$. Правая часть имеет резонанс первого порядка с первым собственным значением. Частное решение неоднородной системы с учетом резонанса ищем в виде:

$$X_ч(n)=\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\end{bmatrix}+n\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\end{bmatrix}+n^2\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix}.$$

Подставляя эту последовательность в матричное уравнение, и отождествляя коэффициенты при подобных членах, получаем систему уравнений $4c_1+2c_2=0$, $4b_1+2b_2=2c_1-2$, $4b_1+2b_2=-2c_2-1$, $4a_1+2a_2=b_1+c_1$, $4a_1+2a_2=1-b_2-c_2$. Отсюда $c_1=-1/2$, $c_2=1$, $b_1=-2$, $b_2=5/2$, полагая $a_1=0$, тогда $a_2=-5/4$. Таким образом, частным решением системы является векторная последовательность

$$X_{ч}(n)=\begin{bmatrix}0\\-5/4\end{bmatrix}+n\begin{bmatrix}-2\\5/2\end{bmatrix}+n^2\begin{bmatrix}-1/2\\1\end{bmatrix}.$$

Окончательно, с учетом общего решения линейной однородной системы $X(n+1)-AX(n)=0$, получаем общее решение исходной линейной неоднородной системы:

$$X_{общ}(n)=\begin{bmatrix}0\\-5/4\end{bmatrix}+n\begin{bmatrix}-2\\5/2\end{bmatrix}+n^2\begin{bmatrix}-1/2\\1\end{bmatrix}+C_1\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}+C_2\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}3^n.$$

Пример 33. Исследовать устойчивость точек покоя системы

$$\begin{cases}x_1(n+1)=\dfrac{1}{2}x_1(n)-\dfrac{1}{2}x_2(n)\\[2mm] x_2(n+1)=\dfrac{1}{2}x_1(n)+\dfrac{1}{2}x_2(n)\end{cases}.$$

Единственной неподвижной точкой этой линейной динамической системы является точка (0, 0). Характеристический многочлен матрицы системы имеет вид:

$$P(\lambda)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{2}-\lambda & -\dfrac{1}{2}\\[2mm] \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}-\lambda\end{bmatrix}=\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}.$$

Собственными значениями матрицы системы будут комплексно-сопряженные числа $\lambda_1=(1+i)/2$, $\lambda_2=(1-i)/2$. Имеем $\left|\lambda_{1,2}\right|=1/\sqrt{2}<1$. Точка покоя асимптотически устойчива. Этот факт можно проверить непосредственно. Действительно, любое решение системы имеет вид

$$X(n)=C_1D^1\lambda_1{}^n+C_2D^2\lambda_2{}^n,$$

где D^1, D^2 – собственные векторы, соответствующие собственным значениям λ_1, λ_2. Очевидно $X(n)\to 0,\ n\to\infty$.

Пример 34. Исследовать устойчивость точки покоя (1, 2) нелинейной системы разностных уравнений

$$\begin{cases} \Delta x_1(n) = x_1^2(n) x_2^2(n) - 3x_1(n) - 1 \\ \Delta x_2(n) = 3x_1^3(n) x_2(n) - 2x_1(n) x_2(n) - 2 \end{cases}.$$

После линеаризации системы в окрестности неподвижной точки получим линейную систему

$$\begin{cases} \Delta x_1(n) = 5x_1(n) + 4x_2(n) - 13 \\ \Delta x_2(n) = 14x_1(n) - x_2(n) - 12 \end{cases},$$

с той же самой неподвижной точкой. В рекуррентной форме система запишется в виде

$$\begin{cases} x_1(n+1) = 6x_1(n) + 4x_2(n) - 13 \\ x_2(n+1) = 14x_1(n) - 12 \end{cases}.$$

Характеристический многочлен матрицы системы имеет вид:

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} 6-\lambda & 4 \\ 14 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda - 56.$$

Собственными значениями матрицы системы будут действительные числа $\lambda_1 = 3 + \sqrt{65}$, $\lambda_2 = 3 - \sqrt{65}$. Имеем $|\lambda_{1,2}| > 1$.Точка покоя (1, 2) исходной нелинейной системы разностных уравнений неустойчива.

ТЕМЫ РЕФЕРАТОВ, ДОКЛАДОВ, ПРЕЗЕНТАЦИЙ

1. Примеры математических моделей в экономике, описываемых дифференциальными уравнениями. Примеры моделей и виды дифференциальных уравнений описывающих их.
2. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Общие понятия для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка (решение уравнения, интегральная кривая, задача Коши для уравнения в нормальной форме).
3. Уравнение первого порядка в дифференциалах и методы его решения. Уравнение с разделяющимися переменными: метод решения, пример. Однородное уравнение: метод решения, пример. Уравнение в полных дифференциалах: метод решения, пример.
4. Линейное уравнение первого порядка. Методы решения. Метод вариации постоянной. Примеры.
5. Уравнение Бернулли. Метод решения. Примеры.
6. Комплексные числа. Арифметические действия над комплексными числами. Модуль и аргумент числа. Тригонометрическая и экспоненциальная записи комплексного числа. Решение уравнений в комплексных числах.
7. Системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Общие понятия и свойства (матрица системы, решение системы, задание начальных значений).
8. Линейная однородная система (принцип суперпозиции и фундаментальная матрица решений, общее решение).
9. Структура общего решения линейной неоднородной системы. Вариация постоянных.
10. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.
11. Принцип суперпозиции и алгоритм построения общего решения линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами. Критерии устойчивости нулевого решения линейного однородного уравнения.
12. Структура общего решения линейного неоднородного уравнения. Методы нахождения частных решений неоднородного уравнения.
13. Обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка. Общие понятия (решение уравнения, начальные значения для уравнения в нормальной форме).
14. Методы понижения порядка дифференциальных уравнений. Понятие о дифференциальных уравнениях высших порядков.
15. Методы решения систем линейных обыкновенных дифференциальных

уравнений с постоянными коэффициентами.

16. Количественный и качественный анализ автономных (стационарных) систем обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальной форме. Общие понятия и свойства (решение системы, фазовая траектория, положения равновесия, циклы).
17. Устойчивые и неустойчивые положения равновесия. Полный анализ однородной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами для случая двух неизвестных.
18. Исследование нелинейных автономных систем вблизи положений равновесия по линейному приближению. Приложения к исследованию экономических моделей.
19. Примеры математических моделей в экономике, описываемых разностными уравнениями. Разностные (рекуррентные) уравнения первого порядка. Общие понятия для рекуррентного уравнения первого порядка в нормальной форме (решение уравнения, начальные условия, задача Коши, решение рекуррентного уравнения подстановкой).
20. Линейное уравнение первого порядка (арифметическая и геометрическая прогрессии, частичные суммы и произведения, метод вариации постоянной).
21. Разностные (рекуррентные) уравнения второго порядка. Общие понятия (решение уравнения, начальные значения для уравнения в нормальной форме). Решение уравнения подстановкой.
22. Линейные разностные (рекуррентные) уравнения. Принцип суперпозиции и алгоритм построения общего решения линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами. Структура общего решения линейного неоднородного уравнения. Методы нахождения частного решения линейного неоднородного уравнения. Уравнения с постоянными коэффициентами.
23. Системы линейных разностных (рекуррентных) уравнений. Общие понятия и свойства (матрица системы, решение системы, начальные условия). Решение подстановкой. Линейная однородная система (принцип суперпозиции и фундаментальная матрица решений, общее решение). Методы решения систем линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами.
24. Критерии устойчивости нулевого решения линейной однородной системы. Структура общего решения линейной неоднородной системы. Частные решения. Элементы количественного и качественного анализа нелинейных разностных (рекуррентных) уравнений.
25. Приложения систем линейных разностных (рекуррентных) уравнений к исследованию экономических моделей.

Темы рефератов для студентов заочной формы обучения

1. Примеры математических моделей в экономике, описываемых дифференциальными уравнениями.
2. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Общие понятия для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка (решение уравнения, интегральная кривая, задача Коши для уравнения в нормальной форме).
3. Уравнение с разделяющимися переменными.
4. Однородное уравнение.
5. Уравнение в полных дифференциалах.
6. Линейное уравнение первого порядка. Метод вариации постоянной.
7. Уравнение Бернулли.
8. Комплексные числа. Арифметические действия над комплексными числами. Модуль и аргумент числа. Тригонометрическая и экспоненциальная записи комплексного числа. Решение уравнений в комплексных числах.
9. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами.
10. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами (случай простых корней характеристического уравнения).
11. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами (случай кратных корней характеристического уравнения).
12. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка. Метод вариации постоянных.
13. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами. Метод неопределенных коэффициентов.
14. Примеры математических моделей в экономике, описываемых разностными уравнениями.
15. Разностные (рекуррентные) уравнения первого порядка. Общие понятия для рекуррентного уравнения первого порядка в нормальной форме (решение уравнения, начальные условия, задача Коши, решение рекуррентного уравнения подстановкой).
16. Линейное уравнение первого порядка (арифметическая и геометрическая прогрессии, частичные суммы и произведения, метод вариации постоянной).
17. Разностные (рекуррентные) уравнения второго порядка. Общие понятия (решение уравнения, начальные значения для уравнения в нормальной форме).

Список рекомендованных литературных источников

а) основная литература:
1. Высшая математика для экономистов: учеб. / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман. – М.: Юнити-Дана, 2012. – 482 с.
2. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям: учеб. пособ. / А.Ф. Филиппов. – 4-е изд. – М.: Либроком, 2011. – 240 с.

б) дополнительная литература:
1. Арнольд В.И. Обыкновенные дифференциальные уравнения / В.И. Арнольд. – 4-е изд. – Ижевск: Ижевская республиканская типография: Изд-во УГУ, 2000. – 368 с.
2. Красс М.С. Математика для экономических специальностей: учеб. / М.С. Красс. – М.: ИНФРА-М, 1998. – 464 с.
3. Высшая математика для экономистов: учеб. для студентов высших учебных заведений, обучающихся по экономическим специальностям / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред. Н.Ш. Кремера. – 3-е изд. – М.: ЮНИТИ, 2007. – 479 с.
4. Практикум по высшей математике для экономистов: учеб. пособ. для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под ред. Н.Ш.Кремера. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 423 с.
5. Мартынюк Д.И. Лекции по качественной теории разностных уравнений / Д.И. Мартынюк; под ред. Ю.А. Митропольского. – К.: Наукова Думка, 1972. – 246 с.
6. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений / И.Г. Петровский. – М.: Физматлит, 2009. – 208 с.
7. Самарский А.А. Введение в численные методы: учеб. пособ. для вузов / А.А. Самарский. – 5-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2009. – 800 с.
8. Тарасевич Л.С. Макроэкономика: учеб. / Л.С. Тарасевич, П. И. Гребенников, А.И. Леусский. – М.: Юрайт-Издат, 2011. – 686 с.
9. Тихонов А.Н. Дифференциальные уравнения: учеб. для вузов / А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников. – 3-е изд. – М.: Наука, 1998. – 232 с.
10. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учеб. пособ. для вузов / М.В. Федорюк. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Наука, 1985. – 447 с.
11. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление учеб. для вузов / Л.Э. Эльсгольц. – 5-е изд. – М.: Едиториал УРСС, 2002. – 320 с.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ

Вовк Леонид Петрович
Кисель Екатерина Сергеевна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ. РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ (ДЛЯ СТУДЕНТОВ ДНЕВНОЙ И ЗАОЧНОЙ ФОРМ ОБУЧЕНИЯ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ 38.03.05 «БИЗНЕС-ИНФОРМАТИКА» И 09.03.02 «ИНФОРМАЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ И ТЕХНОЛОГИИ»)

ПРАКТИКУМ

Подписано к выпуску 13.12.20 г. Гарнитура Times New.
Усл. печ. л. 3,88 Зак. № 697.

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Донецкий национальный технический университет»
Автомобильно-дорожный институт
84646, г. Горловка, ул. Кирова, 51
E-mail: print-adi@adidonntu.ru

Редакционно-издательский отдел