МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

за навчальним курсом

"Теорія автоматичного керування"

Донецьк: ДонНТУ, 2004

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДОНЕЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Затверджено
на засіданні учбово-
видавничої ради
ДонНТУ.
Протокол № _____від___________

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

за навчальним курсом

"Теорія автоматичного керування"

(для студентів спеціальності 7.090603)

Затверджено
на засіданні методичної комісії
з спеціальності 7.090603.
Протокол № _____від___________

Донецьк: ДНТУ, 2004

УДК 621.3(07)

Конспект лекцій за навчальним курсом "Теорія автоматичного керування" (для студентів спеціальності 7.090603) / Укл.: А.Д.Коломитцев, Л.В.Чернікова. - Донецьк: ДонНТУ, 2004. - 134 с.

Наведені основні теоретичні положення лекційного курсу, у яких розглянуті питання математичного опису систем автоматичного керування, оцінки стійкості та якості процесу керування цих систем, використання коригуючи засобів та методів їх синтезу

Призначені для студентів спеціальності "Електротехнічні системи електроспоживання".

Укладачі: доц. А.Д. Коломитцев

доц. Л.В. Чернікова

Нормоконтролер: доц. В.І. Ярмоленко

Рецензент: доц. В.М. Шумяцький

ВВЕДЕНИЕ

В русском языке термин «управление» охватывает весьма широкий круг понятий (например, верховное правление государства, отраслью народного хозяйства, предприятием, производственным процессом, вождение самолетов и автомашин и т.д.). Такого обобщающего термина нет в английском языке, а указанные выше разновидности управления обозначаются отдельными словами rule, govern, direct, manage, control и т.д.

Норберт Винер ввел термин "кибернетика", называя им всю теорию управления и связи в машинах и живых организмах. Этот термин происходит от греческого слова кибернао, применявшееся к действиям корабля.

Однако слово "кибернетика" в английском языке не стало синонимом русского "управление" в широком смысле. Обобщающую роль чаще играют два термина – control, если говорят об управлении системами, не включающими социальные и экономические аспекты, и manage, если наличие человека или коллектива в системе управления требует использования не только математических, но и социологических, психологических моделей и т.п.

Все целенаправленные процессы, выполняемые человеком для достижения поставленной цели представляют собой совокупность действий, называемых операциями, которые делятся на рабочие операции и операции управления. К первым относятся действия, требующие затрат физического труда человека (например, подъем и перемещение грузов, заполнение большого количества типовых документов, выполнение большого объема стандартных вычислений и т.п.). Замена человека в рабочих операциях механизмом называется механизацией.

Но для правильного и качественного выполнения рабочих операций необходимо направлять их операциями управления, совокупность которых и образует процесс управления. При этом обеспечивается начало, порядок следования и прекращение отдельных операций, процессу придаются нужные показатели (направление, скорость, температура, величина тока и напряжения и т.д.).

Таким образом управление представляет собой такую совокупность воздействий на какой-либо процесс или объект, которая обеспечивает достижение поставленной цели.

Замена труда человека как в рабочих операциях, так и в операциях управления действиями технических устройств называется автоматизацией, а технические устройства, действующие без участия человека – автоматическими устройствами. Совокупность технических средств (машин, орудий труда, средств механизации) является объектом управления, и совокупность устройств управления и объекта образует систему управления. Система, в которой все рабочие и управленческие операции выполняются техническими устройствами, называется автоматической системой. Если автоматизирована только часть управленческих операций, а другая их часть (обычно наиболее ответственная) выполняется людьми, то такая система называется автоматизированной системой управления (АСУ).

Итак, автоматическое управление или регулирование- это управление техническими устройствами и системами без непосредственного участия человека. Автоматическое регулирование- это частный вид автоматического управления и является более узким понятием.

Теория автоматического управления (ТАУ) - это наука, которая изучает процессы и свойства управления, методы их исследования и основы проектирования, разработки и технической реализации автоматического управления, автоматических систем в любой области техники.

Автоматизация управления производственными процессами, энергетическими системами, научно-исследовательскими процессами и т.п. является одним из самых прогрессивным направлений в общем развитии науки и техники, охватывающая все ее области. Автоматизировать можно и технику инженерных расчетов при проектировании машин, установок, предприятий. Автоматизации подвергаются любые вычисления при проведении научно-исследовательских, а также экономические и другие вычисления при учете и планировании в любом масштабе вплоть до общегосударственного.

Человек, изучивший теорию управления, не станет автоматически руководителем, с успехом выполняющим функции диспетчера энергосистемы, потому что для этого необходимы специальные знания, опыт и талант. Но в современных условиях самый опытный руководитель уже не может обходиться без помощи научных методов управления, автоматики и вычислительной техники.

Целью курса является изучение общих основ ТАУ, которое ориетировано на управление техническими объектами и процессами в электроэнергетике, которые осуществляются с участием или без участия человека.

Историческая справка. Формирование общих основ теории управления началось в технике. С необходимостью построения регуляторов одними из первых столкнулись создатели точных механизмов, в первую очередь часов. Для противодействия влияния помех в 1675 г. Гюйгенс встроил в механизм часов маятниковый регулятор хода. Предшественниками регуляторов для технических процессов можно считать применявшиеся в средние века центробежные маятниковые уравнители хода водяных мельниц.

Бурное развитие техники и теории регулирования началось на рубеже XVIII и XIX веков. Первыми промышленными регуляторами можно считать автоматический поплавковый регулятор питания котла паровой машины, построенный в 1765 г. русским механиком И.И. Ползуновым, центробежный регулятор скорости паровой машины английского механика Джеймса Уатта (1784г.), первое программное устройство управления ткацким станком от перфокарты для воспроизведения узоров на коврах Ж.М. Жаккарда (1808г.).

Одновременно делались попытки теоретических исследований. Английский физик Дж. К. Максвелл в 1868 г. в работе «О регуляторах» впервые поставил и рассмотрел математическую задачу об устойчивости системы регулирования. В 1878 г. в России И.А.Вышнеградский в своих работах исследовал не только устойчивость, но и некоторые показатели качества процесса регулирования. Им было объяснено знаменитое противоречие между точностью и устойчивостью регулирования. Видное место в теории регулирования занимают работы словацкого ученого А. Стодолы. Первый русский учебник по теории регулирования был написан Е.Н. Жуковским.

К началу XX в. теория регулирования выходит из рамок прикладной механики и в первой половине XX в. формируется в общетехническую дисциплину (работы А. Стодолы, Е.Н. Жуковского, М. Толя, Е. Жюильяр и др). Становится ясным, что регулирование в различных отраслях техники базируется на ряде общих законов.

Основателем одной из школ в области регулирования советского периода в 1920-30 гг. являлся И. Н. Вознесенский.

В 1932 г. американец Х. Найквист, а в 1936 г. А.В. Михайлов предлагают частотные методы исследования устойчивости регулирования. В 40-х годах Г. Боде и Л. Маколл (США) и В. В. Солодовников разрабатывают метод логарифмических частотных характеристик, что позволило создать в 1940-50 гг. теорию синтеза параметров и структур регуляторов математическими методами. В области устойчивости следует отметить работы Ю.И. Неймарка, по интегральной оценке качества регулирования-А.А. Красовский, А.А. Фельдбаум, Г. Джеймс и др.

Дальнейшее развитие принципов автономности регулирования получено в работах Г. В. Щипалова. Следует отметить работы А.А. Воронова, Е.П. Попова, В.Е. Бесекерского и др.

1 ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ И ПРИНЦИПЫ УПРАВЛЕНИЯ

1.1 Общие понятия и определения [1,с.10-29; 2,с.7-13; 3,с.10-12; 4, с.5-8]

Для реализации автоматического управления необходимо иметь то, чем управляют, и то что управляет, т.е. управляемую и управляющую части. Управляемая часть называется управляемым объектом (УО), а управляющая - автоматическим управляющим устройством (УУ) (рис. 1.1).

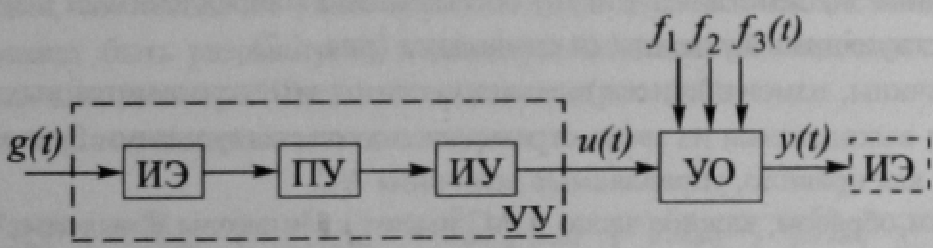


Рисунок 1.1 – Структурная схема АСУ

Совокупность УО и УУ, взаимодействующих между собой, называется автоматической системой (АС) или автоматизированной системой управления (АСУ).

В состав УУ могут входить: измерительный элемент (ИЭ); промежуточные устройства (ПУ), в качестве которых могут быть использованы усилители, преобразователи и др.; исполнительное устройство (ИУ). Физическая величина, подлежащая управлению, называется управляемой величиной $y(t)$. Для правильного и качественного управления $y(t)$ необходимо поддерживать в заданных границах или изменять по определенному закону.

На АС действуют всевозможные воздействия, изменяющиеся во времени *t*. Основными из них являются: управляющие *u(t)*, возмущающие $f_1(t), f_2(t), \ldots$ и задающие *g(t)* (управляющие).

u(t) вырабатывается УУ для оказания целенаправленного воздействия на ОУ.

$f_1(t), f_2(t), \ldots$, наоборот, вызывают нежелательные, а часто непредусмотренные отклонения (возмущения) *y(t)*. В качестве *f(t)* могут быть изменения температуры окружающей среды, электрическая нагрузка системы электроснабжения и т.п. К *f(t)* относятся также и помехи, которые могут быть внешними и внутренними по отношению к АС.

Необходимость в управлении возникает тогда, когда нормальный ход процесса *y(t)* нарушается в результате различного рода возмущений.

g(t) является заранее предусмотренным воздействием, согласно которому УУ осуществляет *u(t)* на УО. Задача АС состоит в том, чтобы возможно точнее воспроизводить на выходе задаваемый закон изменения g(t) и возможно полнее подавлять влияние *f(t)*, а также других внешних и внутренних помех, если они имеются.

Воздействия и их направления на функциональной схеме обозначаются стрелками.

Отдельные устройства, составляющие АС, называют элементами или звеньями, а их последовательное соединение – цепью воздействий. В ТАУ звенья принято обозначать в виде прямоугольников.

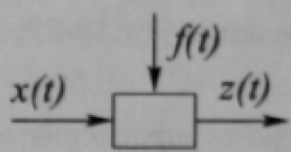


Рисунок 1.2 – Входные и выходные воздействия звена

Входные воздействия *x(t)* и *f(t)* обозначаются направленными к звену стрелками с соответствующими буквенными символами (рис. 1.2).

Величины, изменяющиеся в зависимости от *x(t)*, называются выходными и обозначаются выходящими из звена стрелками с соответствующими буквенными символами. *z(t)*, как правило, управляемые величины АС.

Таким образом, каждое звено и АС имеют свои входы и выходы. Объект, имеющий несколько выходных (управляемых) величин, называется многомерным, и АС с многомерным УО – многомерной (рис. 1.3). Воздействия, поступающие на звено или АС извне, называются внешними. Воздействия одного звена АС на другое или воздействия, возникающие внутри звена (устройства), называются внутренними.

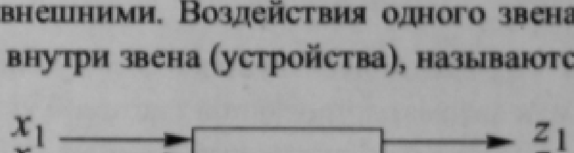


Рисунок 1.3 – Структурная схема многомерной АСУ

Воздействия могут быть регулярными и случайными. Регулярные изменяются по известным, определенным законам. Они определены (детерминированы), т.е. могут быть точно предсказаны для любого момента времени t (рис. 1.4, а, б).

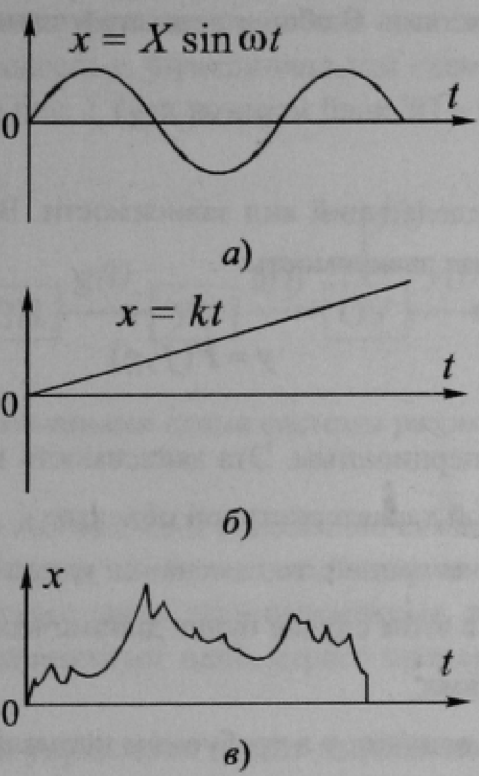


Рисунок 1.4 – Графики изменения регулярных и случайных воздействий

Недетерминированные воздействия называются случайными (рис. 1.4, в).

Если звено пропускает сигнал лишь в одном направлении с входа на выход и *z(t)*, изменяющаяся в зависимости от входной *x(t)*, не оказывает обратного воздействия на *x(t)*, то такое звено называется однонаправленного действия (детектирующим) (рис. 1.5). А цепь, состоящая из таких звеньев однонаправленной (детектирующей) цепью. Цепь может быть разомкнутой и замкнутой. Замкнутой называется однонаправленная цепь, выход которой соединен со входом (рис. 1.6).

Замкнутую цепь принято называть контуром.

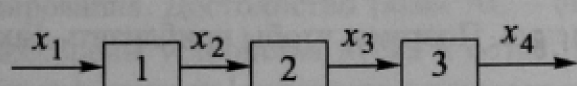


Рисунок 1.5 – Блок-схема однонаправленной цепи

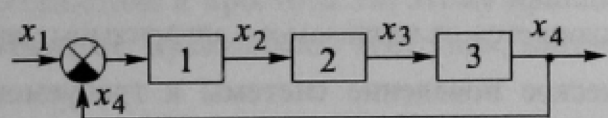


Рисунок 1.6 – Блок-схема замкнутой цепи

Принцип действия всей АС в целом показывается функциональной (структурной) или блок-схемой. Чтобы осуществить практически любую АС, надо в соответствии с полученной функциональной схемой составить принципиальную схему системы, т.е. необходимо выбрать принцип действия каждого из звеньев системы.

Но нашей задачей является не рассмотрение отдельных звеньв, а изучение принципов построения и законов функционирования АСУ в целом.

1.2 Принципы управления и регулирования [3,с.12-18; 4,с.8-20]

Величины *y*, *f*, и *g* в зависимости от природы ОУ могут связываться различными математическими зависимостями. В общем виде это можно записать:

$$y = A(f, g) \ ,$$

где А- оператор, определяющий вид зависимости. В простейшем случае, когда это обычная функциональная зависимость:

$$y = F(f, g)$$

объект является безынерционным. Эта зависимость или ее графическое изображение называют статической характеристикой объекта.

Если объект обладает инерцией, то изменение *y*, под действием *f* или *g* происходит не мгновенно. Объект в этом случае будет динамическим, а *y*, *f* и *g* связаны дифференциальными уравнениями.

Изменения выходных величин *y* в требуемом нормальном ходе процесса определяются совокупностью правил, предписаний или математических зависимостей, называемых алгоритмом функционирования системы, который составляется на основе технологических (или других) требований и в ТАУ считается заданным (например, регулирование напряжения, температуры).

По заданному алгоритму функционирования должен быть построен алгоритм управления, определяющий такое изменение *g*, которым с заданной точностью обеспечивается выполнение алгоритма функционирования. Алгоритм управления зависит как от алгоритма функционирования, так и от динамических свойств системы.

Под влиянием неизвестных заранее возмущений фактическое поведение системы отклоняется от задаваемого алгоритмом управления. Поэтому, чтобы приблизить фактическое поведение системы к требуемому, алгоритм управления увязывается не только со свойствами системы и алгоритмом функционирования, но и с фактическим ее функционированием. Каким образом осуществляется эта увязка алгоритмов управления с заданным и фактическим функционированием, а иногда и с причинами, вызвавшими отклонение, и определяется общими принципами управления. В технике используют три фундаментальных принципа: разомкнутого управления, компенсации и обратной связи.

1.2.1 Принцип разомкнутого управления

Сущность принципа состоит в том, что алгоритм управления строится только на основании заданного алгоритма функционирования и не связан с возмущениями *f* или выходными величинами процесса *y*. Функциональная схема системы, построенной на этом принципе, показана на рис. 1.7, на котором блок ЗП – задатчик программы.

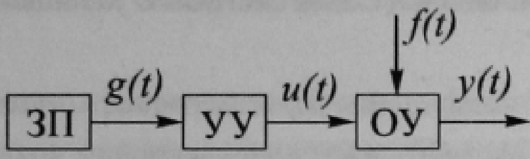


Рисунок 1.7 – Функциональная схема системы разомкнутого управления

Работа всех элементов АС жестко и однозначно связана с задающим воздействием *g(t)*. Разомкнутая АС обладает свойствами однонаправленного действия. Жесткой и однозначной называется такая связь двух переменных, при которой любому значению одной переменной соответствует одно, строго пропорциональное значение другой.

Задание *y(t)* алгоритма управления может вырабатываться как специальным задатчиком программы (ЗП), так и заранее вкладываться в конструкцию УУ.

АС, в которых работа всех звеньев однонаправленной разомкнутой цепи жестко связана с задающим воздействием и управляемая величина не контролируется, называются разомкнутыми АС управления по задающему воздействию. Связь между *g* и *u* выражается зависимостью:

$$u = k \cdot g(t)\,,$$

где *k* – коэффициент пропорциональности.

Недостаток таких систем – отсутствие контоpя *y(t)*. Поэтому появление значительного *f(t)* может вызвать отклонение *y(t)* от установленных алгоритмом функционирования. Достоинство таких АС – быстродействие и простота. По этому принципу построены устройства пуска и остановки, барабан музыкальной шкатулки, магнитофон и т. п.

1.2.2 Принцип компенсации (управление по возмущению)

Если среди возмущений *f* имеется одно или несколько, оказывающих наибольшее влияние на отклонение, то для повышения точности выполнения алгоритма функционирования, можно измерить это возмущение, ввести по результатам измерения коррективы в алгоритм управления и компенсировать отклонение, вызванное этим возмущением. Сущность принципа компенсации (управления по возмущению) и сотоит в уменьшении влияния возмущающих воздействий на управляемую величину.

Функциональная схема такой системы показана на рис. 1.8.

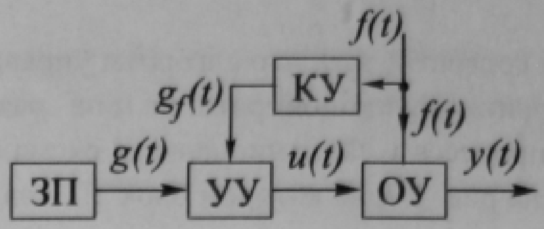


Рисунок 1.8 – Функциональная схема системы с управлением по возмущению

Действующее на ОУ возмущение $f(t)$ измеряется компенсационным устройством (КУ), на выходе которого вырабатывается управляющее воздействие $g_f(t)$.

Системы, в которых осуществляется автоматическая компенсация влияния одного или нескольких возмущающих воздействий на неконтролируемую управляемую величину, называется АС регулирования по возмущению. Связь между g, f и u выражается зависимостью:

$$u = F\left[g(t)\right] + \sum_{k=1}^{m} \varphi_k\left[f_k(t)\right].$$

Недостатки таких систем: низкая точность работы, т.к. невозможно полностью компенсмровать влияние из-за технической сложности точного измерения f_k и полученные зависимости □$_к$; управляемая величина не контролируется.

Достоинства этих АС – быстрота действия; возможность прогнозировать ожидаемый результат.

Пример таких систем – компаундирование генератора постоянного тока, обеспечивающее неизменность напряжения при изменениях нагрузки.

1.2.3 Принцип обратной связи. Регулирование по отклонению

Для того, чтобы добиться эффективного управления, необходимо контролировать выходную управляемую величину, т.е. контролировать выполнение задающей величины (алгоритма функционирования). В случае отклонений необходимо добиться правильного выполнения. Для осуществления этого используют АС, построенные по принципу обратной связи (ОС).

Функциональная схема такой системы имеет вид, показанный на рис. 1.9.

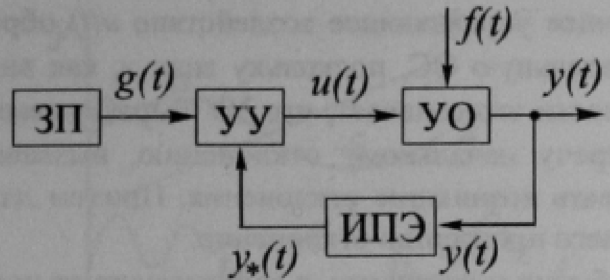


Рисунок 1.9 - Функциональная схема системы с регулированием по отклонению

Коррективы в процессе управления вводятся по фактическому значению y. Для этого вводится дополнительная связь, в которую могут входить элементы для измерения y и выработки воздействия $y_*(t)$ на УУ (ИПЭ – измерительно-преобразовательный элемент на рис. 1.9). Схема имеет вид замкнутой цепи. Так как направление передачи воздействия в дополнительной связи обратно направлению передачи основного воздействия на УО, введенная дополнительная связь называется обратной связью.

В управлении преимущественно распространен частный вид замкнутой системы, в которой алгоритм управления (величина управляющего воздействия u) осуществляется не по значению y, а по их отклонениям от задающего входного воздействия g, определяемого алгоритмом функционирования

$$x(t) = g(t) - y_*(t) = g(t) - k \cdot y(t) \tag{1.1}$$

Поскольку y_* вычитается из g, то обратная связь называется отрицательной ОС. Функциональная схема АС с отрицательной ОС показана на рис. 1.10.

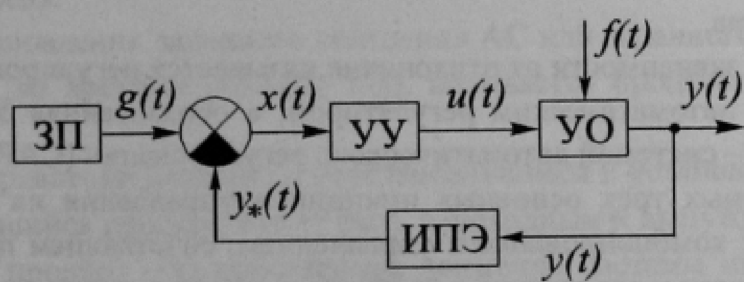


Рисунок 1.10 – Функциональная схема АСУ с отрицательной ОС

В схеме имеется элемент сравнения - сумматор, осуществляющий вычитание $y_*(t)$ из $g(t)$ и вырабатывающий величину x, называемую отклонением или ошибкой управления. Слагаемые g и y_*, обозначенны подходящими стрелками, сумма x – отходящей стрелкой. Вычитаемое $y_*(t)$ обозначается или знаком минус, или зачернением сектора к которому оно подходит.

Управляющее воздействие u вырабатывается часто в зависимости не только от x, но и его производных и (или) интегралов по времени:

$$u = F(x, x', \dots, \int_0^t x dt) .$$

УУ, вырабатывающее управляющее воздействие $u(t)$ образует по отношению к выходу объекта отрицательную ОС, поскольку знак x, как видно из формулы (1.1), обратен знаку y. Физически это означает, что УУ вырабатывает в системе изменение y, направленное навстречу начальному отклонению, вызвавшему работу УУ, т.е. стремится компенсировать возникшие отклонения. Причем для АС совершенно безразлично в результате чего произошло отклонение.

ОС могут быть гибкими и жесткими, в зависимости от исполнения ИПЭ. Гибкие ОС действуют только во время переходных процессов, а жесткие - как при переходных, так и при установившихся.

Системы, в которых используется ОС, называются замкнутыми АСУ (или регулирования) по отклонению.

Преимущество таких систем: универсальность, т.к. автоматическое управление или регулирование ОУ осуществляется как при изменении задающего воздействия $g(t)$, так и при изменении возмущающих воздействий; высокая точность, т.к. принцип действия АСУ основан на уменьшении ошибки x.

Недостаток – склонность к колебаниям из-за наличия замкнутого контура. При резком увеличении $g(t)$ начинающееся увеличение $y(t)$ за счет возросшей ошибки $x=g-y>0$ может продолжаться и после прекращения роста $g(t)$ из-за инерционности отдельных элементов АСУ. И может наступить момент, когда $y(t)$ станет больше $g(t)$, т.е. $x(t)$ поменяет знак и управляющее воздействие $u(t)$ поменяют знак, и $y(t)$ начнет уменьшаться. Затем, $x(t)$ снова станет положительной и т.д. В результате этого и возникают колебания управляемой величины $y(t)$.

Примером АС, построенных на принципе регулирования по отклонению, могут служить системы регулирования уровня воды в котле (Ползунова И.Н.) и угловой скорости паровой машины (Дж. Уатта), схемы автоматического регулирования напряжения генератора.

Управление в зависимости от отклонения называется регулированием. УУ в этом случае называется автоматическим регулятором, а образованная УО и регулятором замкнутая система – системой автоматического регулирования (САР).

Кроме указанных трех основных принципов управления на практике широко применяются АС с комбинированным управлением, сочетающем принципы компенсации и обратной связи и содержащим замкнутую и разомкнутую цепи воздействия.

1.3 Режимы работы АС. Характеристика процесса управления [4,с.20-25]

Различают два режима работы АС: динамический и статический.

Динамическим называется режим, при котором управляемая (выходная) величина непрерывно изменяется, т.е. является функцией времени $y=y(t)$. При этом АС находится в состоянии непрерывного движения, а y принимает любой вид (кривые 1и 2 на рис. 1.11), но чтобы первая производная на рассматриваемом отрезке времени была отлична от нуля, за исключением особых точек (например, точки *а* и *б* на кривой 2).

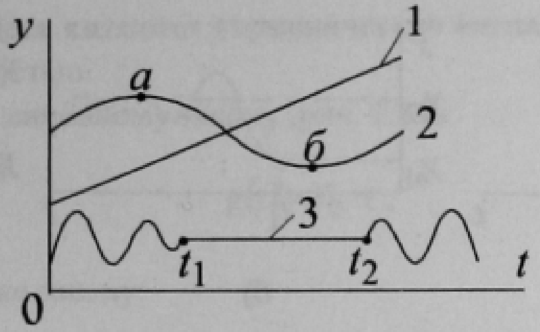


Рисунок 1.11 – Режимы работы АСУ

Т.е. динамический режим характеризуется так,что

$$y = y(t) = \text{var}, \qquad \frac{dy}{dt} \neq 0.$$

Статическим называется режим работыАС (кривая 3 на рис. 1.11), при котором управляемая (выходная) величина во времени постоянна, а первая производная равна нулю :

$$y(t) = y_o = const; \qquad \frac{dy}{dt} = 0 .$$

При статическом режиме входные воздействия во времени постоянны или равны нулю. После того, как y станет постоянной (отрезок t_1 - t_2), в АС устанавливается состояние равновесия.

Процесс установления заданного состояния АС или заданного изменения управляемой величины во времени (кривые 1-3), называется процессом управления или регулирования.

Процессы управления делятся на неустановившиеся и установившиеся.

Неустановившийся процесс может быть переходным и вынужденным.

Переходный процесс есть собственное движение системы или движение выведенной из состояния равновесия вновь к равновестному состоянию. Характеризуется продолжающимся изменением y после прекращения изменений всех входных воздействий. Например, до момента $t=t_1$ (рис. 1.12, *б*) $y(t)=y_{01}$ соответствовала определенному задающему воздействию $g(t)=g_1$ при $f(t)=0$. В момент $t=t1$ g изменилось скачком от g_1 до $g_2>g_1$. y должна измениться от y_{01} до y_{02}, соответствующего значению g_2. Но это новое значение y_{02} установится не сразу, а после того, как в АС прекратится собственное движение – переходный процесс. Переход от одного равновестного состояния к другому может происходить с колебаниями $y(t)$ и без, т.е. переходный процесс может быть колебательным (рис. 1.12, *б*) или апериодическим (рис. 1.12, *в*). Переходный процесс характеризуется динамическими свойствами системы.

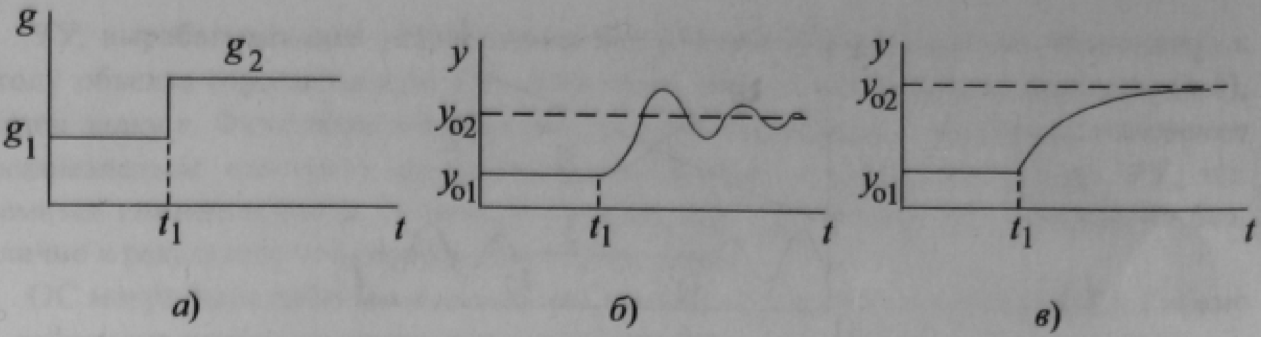


Рисунок 1.12 – Виды переходных процессов на выходе АСУ

Неустановившийся вынужденный процесс управления АС – это движение системы под действием хотя бы одного или нескольких случайных входных воздействий. Неустановившийся вынужденный процесс может быть стационарным и случайным (нестационарным).

При стационарном процессе изменение *y(t)* представляет собой случайный процесс с постоянными во времени вероятностными характеристиками.

При случайном (нестационарном) процессе движение АС происходит под действием случайных входных воздействий, а *y(t)* представляет собой случайный процесс с изменяющимися во времени вероятностными характеристиками.

Установившийся процесс может быть статическим и вынужденным.

Установившийся процесс, характеризующийся некоторым постоянным значением управляемой величины *y*, называется статическим. При этом проявляются статические свойства АС, характеризующие равновесное состояние системы при разных по величине, но постоянных во времени входных воздействиях. Статические свойства определяются статическими характеристиками (рис. 1.13). Это зависимость выходной величины *y* от одной из входных в установившемся статическом процессе при всех других входных величинах, постоянных или равных нулю. Статические характеристики могут быть линейными (*а, б*) и нелинейными (*в, г*), однозначными (*а, б, в*) и двузначными или петлеобразными (*г*), однотактными (*в*) и двухтактными (*а, г*).

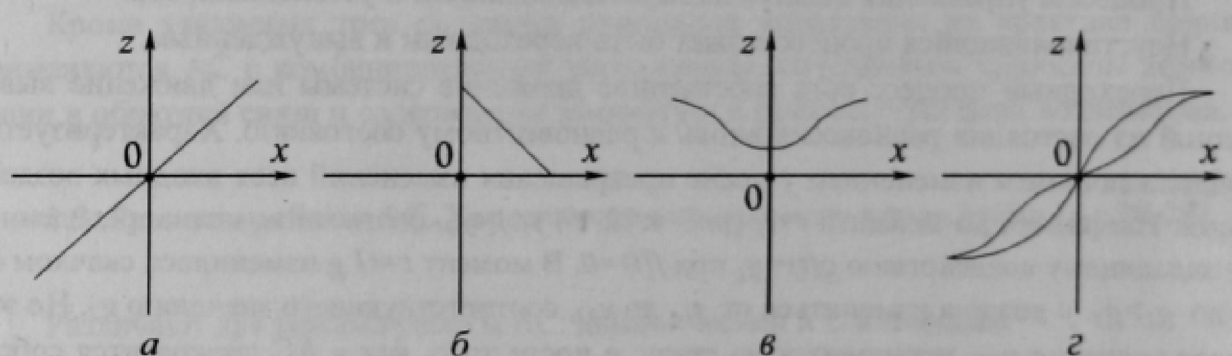


Рисунок 1.13 – Статические характеристики АСУ

Установившийся вынужденный процесс – это такой процесс, при котором на вход АС поступает регулярное воздействие, которое после переходного процесса вынуждает управляемую величину изменяться по такому же регулярному закону. Т.е. это несобственное движение АС под действием регулярных входных воздействий.

Примерами такого процесса являются гармонические сигналы и сигналы, изменяющиеся с постоянной скоростью.

При изменении g по линейному закону (рис. 1.14)

$$g(t)=V_0 \cdot t,$$

y меняется по тому же закону:

$$y(t)=V_0(t-\Delta t)$$

с некоторым отставанием по t.

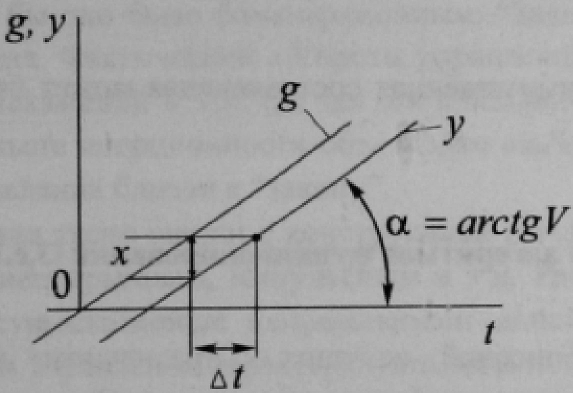


Рисунок 1.14 – Установившийся вынужденный процесс, изменяющийся с постоянной скоростью

Если g изменяется по гармоническому закону (рис. 1.15)

$$g(t)=B_1\sin(\omega t+\varphi_1)$$

то и y после переходного процесса будет менятся по тому же закону:

$$y(t)=B_2\sin(\omega t+\varphi_2)$$

с той же частотой ω, но другими амплитудой $B_2 \neq B_1$ и фазой $\varphi_2 \neq \varphi_1$ $(\varphi=\varphi_2-\varphi_1)$.

Процесс управления складывается из двух составляющих: естественной, или переходной y_n, и вынужденной $y_в$:

$$y=y_n(g,f_i,t)+y_в(g,f_i,t), \qquad i=1,2,3,...$$

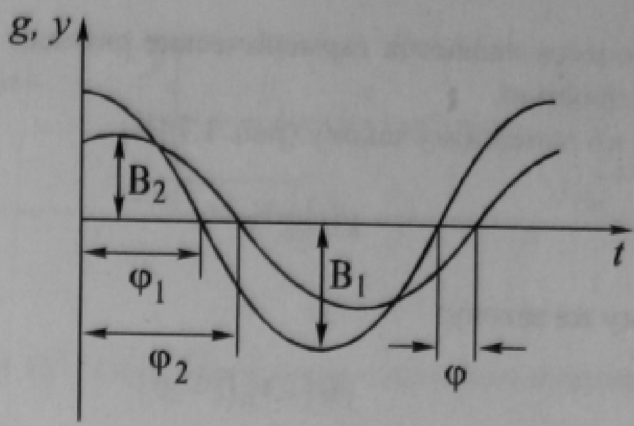


Рисунок 1.15 – Установившийся вынужденный процесс, изменяющийся по гармоническому закону

В частном случае вынужденная составляющая может быть установившейся величиной $y_в(g_o, f_{io}, t_o) = y_{во}$.

1.4 Основные виды алгоритмов функционирования [3,с.18-22; 4,с.28-30]

Совокупность предписаний, ведущих к правильному выполнению УО своих функций, называется алгоритмом функционирования. Основными видами алгоритмов функционирования являются: стабилизация, программное управление и следящие системы.

Стабилизация. Алгоритм функционирования при стабилизации имеет вид:

$$y = g = const ,$$

т.е. поддерживается заданное постоянное значение регулируемой величины. Осуществляется в системах с замкнутым контуром.

Программное управление. В программном управлении алгоритм функционирования задан и можно построить специальный задатчик программы, вырабатывающий нужное изменение *g(t)*. Это управление может выполняться по разомкнутому или замкнутому контуру или с помощью их комбинации.

Следящие системы. В следящих системах алгоритм функционирования заранее не известен. Обычно управляемая величина должна в этих системах воспроизводить изменение некоторого внешнего фактора, "следить" за ним. Следящую систему можно осуществить по любому принципу управления. От системы программного управления она отличается тем, что вместо задатчика программы устанавливается устройство слежения за изменяющимся внешним фактором.

Кроме указанных алгоритмов функционирования можно выделить ряд таких, как:

- поиска экстремумов некоторых параметров, или функций от параметров процесса, характеризующих качество процессов;
- оптимизации;
- адаптации (приспособления).

1.5 Алгоритмы управления. Основные законы управления [3,с.23-24; 4,с.30-33, 113-118]

Алгоритмом управления называется совокупность предписаний, определяющих характер воздействия на УО с целью выполнения им заданного алгоритма функционирования. Предписаниями для функционирования алгоритма управления могут быть, например, требования к качеству переходного процесса (отсутствия колебаний, длительность переходного процесса, величина ошибки), т.е. заложенный в автоматическое УУ алгоритм управления обеспечивает выполнение алгоритма функционирования с заданным качеством работы АС.

Под законом понимают математическую зависимость, по которой УУ воздействовало бы на УО, если бы оно было безынерционным. "Закон" – это идеализированный алгоритм управления. Фактический алгоритм управления отличается от "закона" за счет динамических искажений в УУ. Но так как в большинстве регуляторов инерционность намного меньше инерционности объекта, то ею можно принебречь и считать, что алгоритм управления близок к "закону".

Закон регулирования тесно связан с конструкцией регулятора и может быть линейным, нелинейным, непрерывным, импульсным и т.д. Рассмотрим самые распространенные законы, осуществляемые непрерывными линейными регуляторами по отклонению. Эти законы управления характеризуют связь положения ИУ (регулятора) с отклонениями регулируемой величины y.

1.5.1 Пропорциональный закон (П-регулирование)

При пропорциональном регулировании положение регулирующего органа пропорционально выходной величине или ее отклонению:

$$u = k_p \cdot x \, .$$

Регулятор, осуществляющий этот закон, называется пропорциональным. Регулирование будет статическим. Постоянная k_p называется коэффициентом передачи регулятора.

Преимущество такого регулирования – быстрота.

Недостаток – принципиальная неточность регулирования, так как невозможно поддерживать желаемую y при изменении f. Ошибка, возникающая при регулировании называется статизмом системы. Статизм регулятора определяется величиной k_p и равен:

$$\delta_p = 1/k_p \, .$$

При регулировании астатического объекта по принципу обратной связи (регулирование по отклонению) статизм системы регулирования $\delta_c = \delta_p$. При регулировании статического объекта:

$$\delta_c = \frac{\delta_p}{1+\delta_o \delta_p} \quad ,$$

где $\delta_o = k_o$ – статизм объекта, где k_o – коэффициент передачи объекта по управляющему воздействию.

1.5.2 Интегральный закон (И-регулирование)

Характеризуется тем, что алгоритм управления описывается уравнением:

$$u = k_p \int_0^t x dt \qquad \text{или} \qquad \frac{du}{dt} = k_p x$$

и в этом случае нет жесткой функциональной связи между g и y_o АС с УУ И-регулирования всегда является астатической системой по заданному воздействию, т.е. при таком регулировании установившаяся ошибка при постоянном возмущении равна нулю. Следовательно И-регулирование применяется в основном для повышения точности работы АС.

Недостаток – меньшее быстродействие, чем у П-регулирования.

1.5.3 Пропорционально-интегральный закон (ПИ-регулирование)

При комбинированном ПИ регулировании осуществляется позиционная и интегральная связь между $u(t)$ и $x(t)$:

$$u = k_p \left(x + \int_0^t x dt \right).$$

Иногда этот закон называют пропорциональным законом с интегральной коррекцией. При этом П-регулирование быстро компенсирует большие по величине возмущения, а И-регулирование осуществляет точную настройку выходной управляемой величины y.

ПИ регуляторы являются астатическими.

Кроме перечисленных законов регулирования можно отметить еще некоторые, наиболее часто встречающиеся законы.

1.5.4 Пропорционально-дифференциальный закон (ПД-регулирование)

Алгоритм управления описывается уравнением:

$$u = k_p\left(x + \frac{dx}{dt}\right).$$

При управлении по производной от ошибки вносится опережение в процесс управления, благодаря которому происходит предварение отклонений y от заданного значения.

1.5.5 Пропорционально-интегрально-дифференциальный закон (ПИД-регулирование)

$$u = k_p\left(x + \int\limits_0^t x dt + \frac{dx}{dt}\right),$$

при котором регулирование будет астатическим, а производная dx/dt вводится в закон регулирования с целью повышения качества процесса регулирования.

1.5.6 Позиционное регулирование (релейное)

при котором задается верхний и нижний пределы изменения y. Примером такой системы регулирования может служить электронагревательные аппараты с терморегулятором.

1.6 Виды систем автоматического регулирования [1,с.29-39; 2,с.13-14; 4,с.34-59]

АС с замкнутой цепью (с ОС), в которой $u(t)$ вырабатывается в результате сравнения действительного значения $y(t)$ с $g(t)$ называется САР. Автоматическое УУ САР называется автоматическим регулятором.

Сложные АСУ, как правило, состоят из многочисленных замкнутых цепей, т.е. САР, выполняющих отдельные функции регулирования по отдельным параметрам. Например, ракета или самолет имеют несколько САР различных физических величин (скорости, высоты, угловых движений и т.д.), составляющих в целом САР.

Все системы автоматического управления и регулирования делятся по различным признакам на следующие классы:

По основным видам уравнений динамики процессов управления:

- линейные системы;
- нелинейные системы.

Каждый из этих основных классов делится на:

- системы с постоянными параметрами (уравнения с постоянными коэффициентами);
- системы с переменными параметрами (уравнения с переменными коэффициентами);
- системы с распределенными параметрами (уравнения в частных производных);
- системы с запаздыванием (уравнения с запаздывающим аргументом).

По характеру передачи сигнала:

- непрерывные;
- дискретные (импульсные и цифровые);
- релейные.

По характеру процессов управления:

- детерминированные (определенные параметры и процессы);
- стохастические (случайные параметры и процессы).

По характеру функционирования:

- обычные;
- адаптивные (самонастраивающиеся, саморегулирующиеся, экстремальные);
- терминальные.

Каждый из этих основных классов систем в свою очередь делится по ряду признаков на различные типы и разновидности.

1.6.1 Стабилизирующие, программные, следящие АС

Стабилизирующая – это АС, алгоритм функционирования которой содержит предписание поддерживать управляемую величину постоянной при произвольно изменяющихся возмущениях. Задающее воздействие является величиной постоянной:

$$g(t) = g_o = const\ .$$

Поэтому для этих систем статический режим является наиболее вероятным.

В технике широко используются САР физических величин различных объектов: стабилизация направления, частоты электрической сети, температуры, давления, скорости и т.п.

Программные – АС, алгоритм функционирования которых содержит предписание изменять управляемую величину в соответствии с заранее заданной функцией. Задающее воздействие изменяется по заранее известному закону (программе)

$$g(t) = g_n(t).$$

Один из примеров систем с программным управлением – система встречного регулирования напряжения в системе электроснабжения, регулирование мощности компенсирующих устройств по времени суток.

Следящая – АС, алгоритм функционирования которой содержит предписание изменять $y(t)$ в зависимости от неизвестной заранее случайной функции. Задающее воздействие $g(t)$ изменяется по заранее неизвестному случайному закону:

$$g(t) = g_c(t).$$

Следящие системы применяют для дистанционного управления различными объектами, для телеуправления. При телеуправлении пульт управления отстоит на большое расстояние от УО. В этом случае между задатчиком величины $g(t)$ и УО вводится радиолиния или другая линия связи. По этому же принципу работают радиолокационные системы сопровождения самолетов, радиокомпас и т.п.

Очевидно, что деление САР на системы стабилизации, программные и следящие условно и зависит в основном от закона изменения задающего воздействия.

1.6.2 Автоматические системы прямого и непрямого регулирования

В АС прямого регулирования отсутствуют устройства, усиливающие по мощности сигналы измерительных или чувствительных элементов. Система прямого регулирования – система, у которой измерительный элемент непосредственно связан с регулирующим органом (ОР).

Мощность ИЭ в такой системе должна быть достаточной для перемещения РО.

Для этого обычно увеличивают вес и габариты ИУ, снижая этим их чувствительность и точность работы. Поэтому для улучшения качества работы ИЭ делают миниатюрными, а слабую мощность их выходных сигналов увеличивают за счет ввода дополнительных устройств в цепь регулирования (например, усилители, двигатели, генераторы и т.п.). Эти устройства или звенья, содержащие источники энергии или использующие для своей работы энергию посторонних источников, называются активными. Мощность выходного сигнала активных звеньев всегда больше мощности входного.

Звенья, не содержащие источников энергии и не использующие для своей работы энергию посторонних источников, называются пассивными (например, системы рычагов, электрические цепи, редукторы и др.). Мощность выходного сигнала пассивных звеньев не больше мощности входного.

Системами непрямого регулирования называются системы, у которых ИЭ воздействует на РО (заслонку, руль и др.) не непосредственно, а через активное устройство.

1.6.3 Статические и астатические системы регулирования

Если объект и регулятор линейные, то в установившемся процессе значения переменных можно связать уравнениями статики:

$$\begin{cases} y = k_o \cdot u - k_f \cdot f \\ u = k_p x = k_p (g - y), \end{cases}$$

где k_o, k_p, k_f – постоянные коэффициенты, называемые соответственно коэффициентами передачи объекта (по управляющему сигналу и возмущению) и регулятора.

Подставив из второго уравнения выражение для u в первое, получим:

$$y = \frac{k_o k_p}{1 + k_o k_p} \cdot g - \frac{k_f}{1 + k_o k_p} \cdot f,$$

т.е. y (регулируемая величина) убывает с ростом возмущения f. Статическая ошибка регулирования:

$$\varepsilon_{уст} = y - g = -\frac{1}{1 + k_o k_p} \cdot g - \frac{k_f}{1 + k_o k_p} \cdot f.$$

Относительную крутизну характеристики:

$$\delta = \frac{H_{\max} - H_{\min}}{H_{\max}}$$

называют статизмом регулирования. Т.е. наибольшая статическая ошибка статического регулятора.

Объекты с жесткой статической характеристикой не нуждаются в автоматическом регулировании. Автоматическое регулирование и сводится к тому, чтобы сделать статическую характеристику объекта жесткой.

Почти все системы прямого регулирования являются статическими.

Когда статическая ошибка недопустима, то переходят к регулированию, в котором установившаяся ошибка при постоянном возмущении равна нулю в силу структуры системы, т.е. астатическому регулированию. АС, в которых отсутствует составляющая статической ошибки по одному из воздействий, называются астатическими.

Для получения астатического регулирования в регуляторе устраняют жесткую связь между положением РО и отклонением регулируемой величины с тем, чтобы можно было поддерживать одно и то же значение y при любом возмущении. Это условие выполняется, если алгоритм управления будет иметь вид:

$$u = k_p \int\limits_0^t x dt \ , \text{ или } \ \frac{du}{dt} = k_p x \, .$$

Регулятор будет в равновесии лишь при $du/dt = 0 = x$, т.е. когда $y = g$. Элементы, реализующие интегральную связь, называются астатическими.

В астатических системах нет позиционной связи между ИЭ и РО.

Позиционная связь сохраняется между значениями выходной величины ИЭ или ошибки *x(t)* и скоростью изменения управляющего воздействия регулятора $du(t)/dt$.

Эта связь линейна, то

$$du/dt = k_p x \, ,$$

откуда

$$u = k_p \int\limits_0^t x dt \, .$$

Статические характеристики астатических систем абсолютно жесткие, т.е. являются горизонтальными линиями (рис. 1.16).

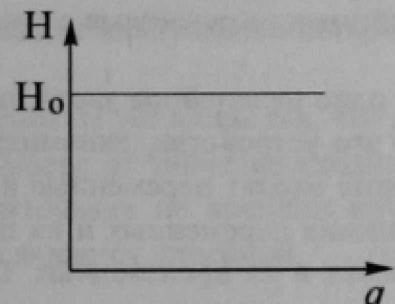


Рисунок 1.16 – Жесткая статическая характеристика астатической АСУ

Однако при высокой статической точности астатических систем качество их динамических свойств низкое. За счет интегральной связи между ИЭ и РО возрастают колебательность и длительность переходного процесса. Поэтому для улучшения статических свойств и неухудшения динамических свойств систем прямого регулирования между ИЭ и РО ставят активное устройство, но с сохранением позиционной связи между ними.

1.6.4 Линейные и нелинейные системы

Процессы управления математически описываются различными уравнениями, отражающими характер связей переменных и описывающих динамичекие процессы отдельных звеньев и всей системы. По виду уравнений принято классифицировать АС.

Все существующие типы уравнений, а значит и АС, можно разделить на линейные и нелинейные.

Линейными называются системы, динамика всех звеньев которых описывается линейными уравнениями (алгебраическими, дифференциальными и др.). Линейные системы делятся на обыкновенные и особые.

Обыкновенными линейными системами называются такие, динамика всех звеньев которых описывается линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Параметры обыкновенных АС постоянны во времени и сосредоточены в пространстве (индуктивность катушки, сопротивление резистора и др.).

К особым относятся такие линейные системы, как:

- АС с переменными параметрами (нестационарные системы), в которых хотя бы одно звено имеет переменные параметры (переменная масса ракеты и др). Описываются они линейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами;
- АС с распределенными параметрами, в которых хотя бы одно звено имеет распределенные в пространстве параметры (распределенные индуктивность и емкость линий электропередач). Описываются линейными уравнениями в частных производных;
- АС с запаздыванием, в которых имеется хотя бы одно звено с временной задержкой (трубопроводы, транспортеры, длинные линии передач информации и др.). Описываются линейными уравнениями с запаздывающим аргументом.

АС, содержащие хотя бы одно нелинейное звено, называются нелинейными системами. Нелинейные звенья – это устройства, динамика которых описывается нелинейными уравнениями, в которые входят переменные и их производные не в первой степени, или имеются произведения переменных и их производных, или любые другие нелинейные связи переменных и их производных. Пример – звено с нелинейной статической характеристикой, отражающей связь переменных.

1.6.5 Непрерывные и дискретные АС

Значительным фактором, влияющим на процессы управления или регулирования АС, является характер протекания сигналов во времени. Он может быть непрерывным и дискретным (прерывным).

Сигналы в АС могут быть дискретными из-за того, что задающее или возмущающее воздействие дискретно само по себе или в цепи АС имеется хотя бы одно звено, преобразующее непрерывные сигналы в дискретные. Устройство, осуществляющее такое преобразование, называется звеном прерывистого действия, а процесс преобразования величины в дискретную – квантованием.

Различают квантование по уровню (*б*) и по времени (*в*) (рис. 1.17).

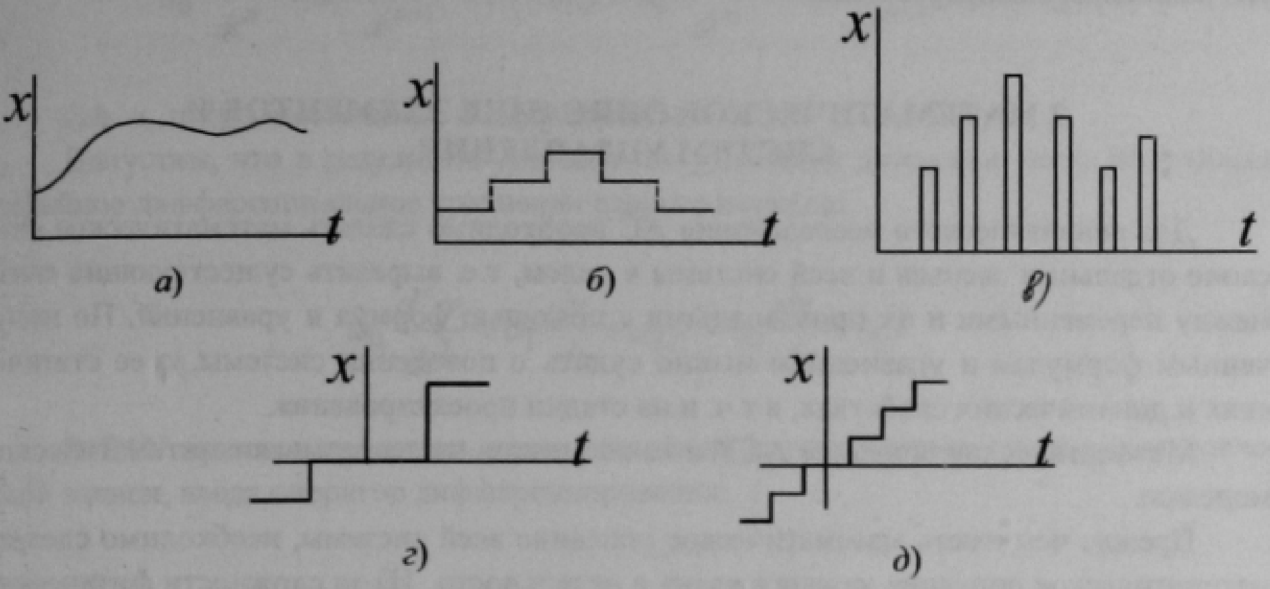


Рисунок 1.17 – Квантование сигнала

Устройство квантования по уровню имеют релейные с зоной нечувствительности (*г*) или многоступенчатые (*д*) статичесике характеристики. Все они являются нелинейными.

Устройства, осуществляющие квантование по времени, называются импульсными (рис. 1.18).

Обычно импульсные элементы устроены так, что один из параметров импульсов (h, $t_и$, T) изменяется в зависимости от значения входной величины. Такое изменение называется модуляцией. Квантование по времени вместе с модуляцией называется импульсной модуляцией. Она является линейной.

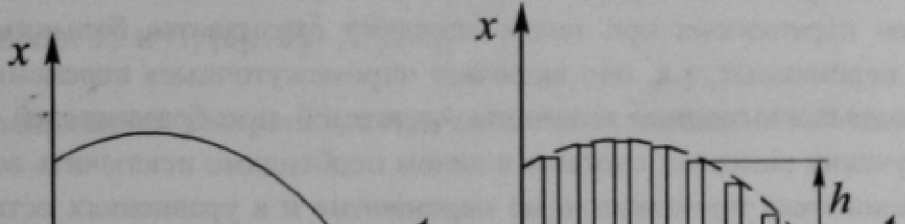


Рисунок 1.18 – Модуляция сигнала

Одновременное квантование сигнала по уровню и по времени осуществляется в цифровых вычислительных машинах. Квантование по уровню связано с тем, что цифровое устройство выдает результат вычисления дискретно, т.е. в виде импульсов через промежутки времени, необходимые для производства вычисления.

В соответствии с реализованным видом квантования сигналов АС делятся на импульсные, релейные и цифровые. Так как сигналы импульсных, релейных и цифровых систем прерывистые, то они называются дискретными системами. Все остальные АС называются непрерывными.

2 МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Для аналитического исследования АС необходимо сделать математическое описание отдельных звеньев и всей системы в целом, т.е. выразить существующие связи между переменными и их производными с помощью формул и уравнений. По полученным формулам и уравнениям можно судить о поведении системы, о ее статических и динамических свойствах, в т.ч. и на стадии проектирования.

Математическое описание АСУ и ее элементов часто называют математической моделью.

Прежде чем иметь математическое описание всей системы, необходимо сделать математическое описание каждого звена в отдельности. Из-за сложности физических связей переменных в реальных устройствах (звеньях) обычно прибегают к упрощенному описанию всех звеньев АС. При этом, в зависимости от условий работы устройства, конкретных целей исследования, выбираются необходимые переменные, учитываются наиболее характерные связи между выбранными переменными и их производными и отбрасываются второстепенные.

В большинстве случаев математическим описанием отдельных устройств являются дифференциальные или алгебраические уравнения. Поэтому сделать описание звена означает составить его дифференциальное уравнение.

При поэлементарном описании АС получают уравнения для отдельных входящих в систему элементов и связей, объединяющих эти элементы в систему. В левые части уравнений включают выходные переменные элементов и их производные по времени, в правые части – входные переменные – воздействия на элементы.

Некоторые переменные будут входными для одного элемента и выходными для другого. Число переменных при таком описании оказывается большим, чем число управляемых переменных, т.к. оно включает «промежуточные» переменные (перемещение РО, входные и выходные величины усилителей, преобразователей и т.п.).

Для получения описания системы в целом необходимо исключить все не интересующие исследователя промежуточные переменные и в уравнениях оставить только регулируемые величины и их производные, записываемые в левых частях уравнения, и возмущающие и управляющие воздействия на систему в правых частях.

В общем виде статические линейные системы могут быть описаны алгебраическими уравнениями вида:

$$y = ax + b ,$$

которому соответствует прямолинейная статическая характеристика.

Динамические линейные системы описываются линейными дифференциальными уравнениями, например с постоянными коэффициентами :

$$a_0\frac{dy^{(n)}}{dt^n}+a_1\frac{dy^{(n-1)}}{dt^{n-1}}+\ldots+a_n y=b_0\frac{d^{(m)}x}{dt^m}+b_1\frac{d^{(m-1)}x}{dy^{m-1}}+\ldots+b_m x,$$

где a_n и b_m – постоянные коэффициенты.

Допустим, что в результате составления уравнения динамики звена получилось линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$a_0\frac{d^2y}{dt^2}+a_1\frac{dy}{dt}+a_2 y=b_0\frac{dx}{dt}+b_1 x\ .$$

В ТАУ принято приводить уравнения звена к стандартному виду в символической записи, введя оператор дифференцирования:

$$a_0p^2y+a_1py+a_2y=b_0px+b_1x\quad ,$$

$$a_2\left(\frac{a_0}{a_2}p^2y+\frac{a_1}{a_2}py+y\right)=b_1\left(\frac{b_0}{b_1}px+x\right),$$

$$\left(T_2^2p^2+T_1p+1\right)y=k_1\left(\tau_1p+1\right)x\quad ,\qquad (2.1)$$

где $p=\dfrac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования;

$T_2^2=\dfrac{a_0}{a_2},\quad T_1=\dfrac{a_1}{a_2},\quad \tau_1=\dfrac{b_0}{b_1}$ - постоянные времени;

$k_1=\dfrac{b_1}{a_2}$ - коэффициент усиления звена.

Размерности T_1 и □$_1$ [с], T_2^2 [с^2], $k_1\left[\dfrac{y}{x}\right]$.

В установившемся состоянии, когда $x=const$ и $y=const$ из (2.1) получим уравнение:

$$y=k_1x\ ,$$

соответствующее линейной статической характеристике звена в виде прямой (рис. 2.1), крутизну которой определяет k_1 $\left(k_1=tg\alpha\right)$.

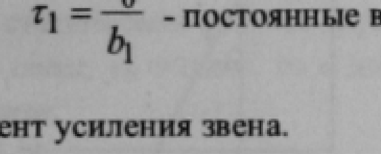


Рисунок 2.1 – Линейные статические характеристики звеньев

В зависимости от конкретных условий задачи одно и тоже звено может описываться по разному. Например, звено в виде идеальной индуктивности L или емкости C. Входной величиной будем считать подаваемое напряжение U, а выходной –ток, протекающий через звено i. В случае, если напряжение является регулярным воздействием , изменяющимся по синусоиде с постоянной угловой частотой и действующим значением U. Тогда звено можно рассматривать как статическую систему, а выходная величина I связана с входной U функциональной зависимостью

$$I = \frac{U}{\omega L}; \qquad I = U \cdot \omega \cdot C \quad ,$$

имеющей прямолинейную статическую характеристику.

Если рассматривать то же звено при динамическом процессе, при изменении входной величины U, то уравнения будут другими:

$$L = \frac{di}{dt} = U \quad ; \qquad C\frac{dU}{dt} = i_C \; .$$

На участке $t_и$ входная величина U меняется, а выходная *i* остается постоянной, т.е. нет однозначной функциональной связи и зная U нельзя определить значение *i* (рис. 2.2).

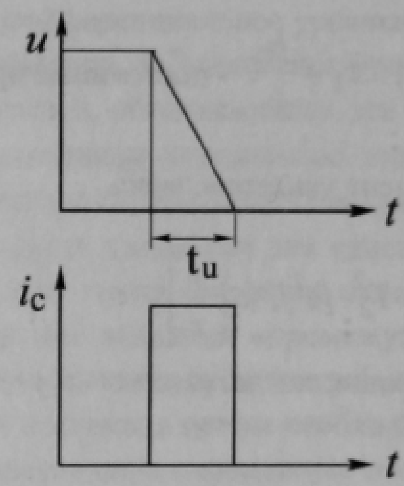


Рисунок 2.2 – Динамические характеристики звена в виде идеальной емкости

В общем случае при составлении уравнения динамики звена или системы они оказываются нелинейными, описывающимися нелинейным дифференциальным уравнением. Например, дифференциальное уравнение второго порядка в общем виде:

$$F\left(y, \dot{y}, \ddot{y}; x, \dot{x}; f, \dot{f}\right) = 0 \quad ,$$

где *F* – нелинейная функция с нелинейными связями переменных.

Одним из примеров нелинейного звена может быть электролампа, если рассматривать подаваемое на нее напряжение U как входную, а световой поток Ф- выходную величину, которые будут связаны нелинейным статическим уравнением:

$\Phi = U^{\gamma}$ при медленных изменениях U. Величина показателя □ зависит от типа лампы.

Если уравнения звеньев нелинейные, то их исследование, решение и даже исключение промежуточных переменных, сильно затрудняется. Поэтому при исследовании нелинейных систем их заменяют приближенной линейной моделью, т.е. линеаризируют исходные уравнения, если это возможно.

2.1 Линеаризация уравнений звена [1,с.85; 2,с.16-18; 3,с.29-33; 4,с.61-75]

При линеаризации звена нелинейные связи заменяют приближенными линейными, чтобы облегчить процесс исследования регулирования. Естественно, что всякое упрощение в составлении уравнений и их линеаризацией приводит к описанию, отражающему неполные связи переменных, но оказывающихся практически достаточными.

Линеаризация нелинейного дифференциального уравнения основывается на предположении о достаточной малости отклонений всех переменных звена от их установившихся состояний. Это объясняется тем, что замкнутая АС, работающая на принципе отклонений, стремится уменьшить всякие отклонения переменных от требуемых значений.

Если переменные x, f, y в статическом режиме характеризуются установившимися значениями: $x_0 = const; f_0 = const; y_0 = const$, то в динамическом режиме эти переменные можно представить в виде

$$x(t) = x_0 + \Delta x(t); \; f(t) = f_0 + \Delta f(t); \; y(t) = y_0 + \Delta y(t);$$

где $\Delta x(t), \Delta f(t), \Delta y(t)$, обозначены отклонения в процессе регулирования, которые малы (рис. 2.3).

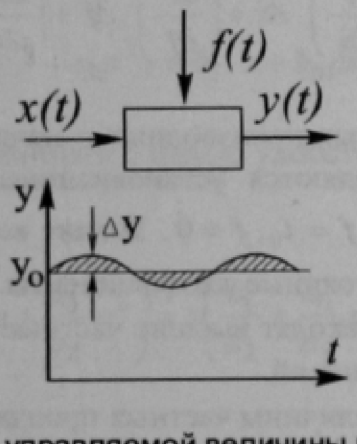


Рисунок 2.3 – Отклонения управляемой величины в процессе регулирования

Пусть звено, имеющее входную величину x, выходную – y и возмущающее воздействие – f, описывается нелинейным дифференциальным уравнением 2-го порядка, которое в общем виде записывается:

$$F\left(y, \dot{y}, \ddot{y}; x, \dot{x}; f, \dot{f}\right) = 0 . \qquad (2.2)$$

Символом F обозначена нелинейная функция с нелинейными связями переменных:

$$x(t) = x_0 + \Delta x(t); \quad \dot{x}(t) = \Delta\dot{x}(t);$$
$$f(t) = f_0 + \Delta f(t) \quad \dot{f}(t) = \Delta\dot{f}(t);$$
$$y(t) = y_0 + \Delta y(t); \quad \dot{y}(t) = \Delta\dot{y}(t); \quad \ddot{y}(t) = \Delta\ddot{y}(t).$$

Уравнение установившегося статического состояния звена:

$$F\left(y_0, 0, 0; x_0, 0; f_0, 0\right) = 0 . \qquad (2.3)$$

Разложим нелинейную функцию F в ряд Тейлора относительно точки с координатами $\left(y_0, 0, 0; x_0, 0; f_0, 0\right)$. Формула разложения функции $y = \varphi(x)$ в ряд Тейлора в общем виде выглядит:

$$y(x_0) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ...$$

Тогда

$$F\left(y_0, 0, 0; x_0, 0; f_0, 0\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^0 \Delta y + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)^0 \Delta\dot{y} + \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\right)^0 \Delta\ddot{y} +$$

$$+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^0 \Delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)^0 \Delta\dot{x} + \left(\frac{\partial F}{\partial f}\right)^0 \Delta f + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{f}}\right)^0 \Delta\dot{f} + ... = 0 , \qquad (2.4)$$

где индекс «0» при частных производных означает, что после взятия производной в ее выражение подставляются установившиеся значения всех переменных: $y = y_0, \dot{y} = 0, \ddot{y} = 0, x = x_0, \dot{x} = 0, f = f_0, \dot{f} = 0$. Значит все частные производные в ряде (2.4) представляют собой постоянные коэффициенты. В состав членов высшего порядка малости уравнения (2.4) входят высшие частные производные и квадраты, кубы и более высокие степени отклонений.

Обозначим постоянные величины частных производных через:

$$a_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\right)^0; \quad a_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)^0; \quad a_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^0;$$

$$b_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right)^0; \quad b_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^0; \quad c_0 = \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{f}}\right)^0; \quad c_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial f}\right)^0.$$

Учтя выражение (2.3), отбросив члены высшего порядка, получим:

$$a_2 \Delta y + a_1 \Delta \dot{y} + a_0 \Delta \ddot{y} = b_1 \Delta x + b_0 \Delta \dot{x} + c_1 \Delta f + c_0 \Delta \dot{f}. \tag{2.5}$$

В полученном уравнении (2.5) все переменные и их производные первой степени и произведения переменных. Поэтому оно является линейным (личеаризованным) дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. А это и было целью линеаризации.

Если дифференциальное уравнение (2.4) равносильно исходному (2.2), но записано в другой форме, то дифференциальное уравнение (2.5) отличается от исходного следующим:

- является приближенным, так как не учтены малые величины высшего порядка;
- описывает динамический процесс лишь в малой окрестности установившихся значений переменных (x_0, y_0, f_0), а не во всей области их изменения;
- является линейным лишь относительно отклонений переменных ($\Delta y, \Delta x, \Delta f$).

Для представления уравнения (2.5) в символическом виде, принятом в ТАУ , введем оператор дифференцирования $p = \frac{d}{dt}$. Тогда уравнение (2.5)

$$a_2 \cdot \Delta y + a_1 \frac{d\Delta y}{dt} + a_0 \frac{d\Delta y}{dt^2} = b_1 \cdot \Delta x + b_0 \frac{d\Delta x}{dt} + c_1 \cdot \Delta f + c_0 \frac{d\Delta t}{dt}$$

примет вид:

$$a_2 \cdot y + a_1 py + a_0 p^2 y = b_1 \cdot x + b_0 px + c_1 \cdot f + c_0 pf.$$

Здесь знак □ перед переменными с целью удобства опущен. Разделим обе части уравнения на a_2:

$$y\left(1 + \frac{a_1}{a_2} p + \frac{a_0}{a_2} p^2\right) = x\left(\frac{b_1}{a_2} + \frac{b_0}{a_2} p\right) + f\left(\frac{c_1}{a_2} + \frac{c_0}{a_2} p\right).$$

Обозначим через

$$T_1 = \frac{a_1}{a_2};\quad T_2^2 = \frac{a_0}{a_2};\quad k_1 = \frac{b_1}{a_2};\quad k_2 = \frac{b_0}{a_2};\quad k_3 = \frac{c_1}{a_2};\quad k_4 = \frac{c_0}{a_2}.$$

Подставив принятые обозначения и выполнив небольшие преобразования, получим символическую запись уравнения:

$$\left(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1\right) y = k_1 x\left(1 + \tau_1 p\right) + k_3\left(1 + \tau_2 p\right) f\ , \tag{2.6}$$

где $\tau_1 = \dfrac{k_2}{k_1};\quad \tau_2 = \dfrac{k_4}{k_3}.$

Определим размерность и физический смысл входящих в уравнение величин.

$$T_1 = \frac{a_1}{a_2} = \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)^0 \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial F}\right)^0 = \left(\frac{\partial y}{\partial \dot{y}}\right)^0 = \frac{y dt}{dy} = [t] = сек\ .$$

Аналогично величины T_2, $\square_1$ и $\square_2$ имеют размерность сек. T_1 и T_2 называются постоянными времени звена и характеризуют его динамические свойства, т.к. проявляются лишь в динамических процессах.

$\square_1$ и $\square_2$ проявляют себя когда входные воздействия x и f изменяются во времени, а значит они также характеризуют динамические свойства звена.

В установившемся процессе, когда все производные равны нулю (в уравнении (2.6) p=0), получим уравнение статического режима:

$$y = k_1 \cdot x + k_3 \cdot f\quad ,$$

являющееся линеаризированной статической характеристикой звена в малых отклонениях.

Коэффициент $k_1 = \dfrac{b_1}{a_2} = \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^0 \cdot \left(\dfrac{\partial y}{\partial F}\right)^0 = \left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^0$, т.е. равен углу наклона $\square$ касательной к кривой $y = \varphi(x)$ при $f=f_0$ и в точке (x_0, y_0) (рис. 2.4).

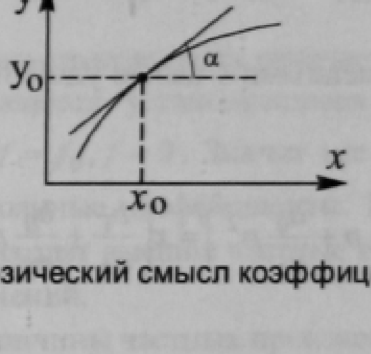
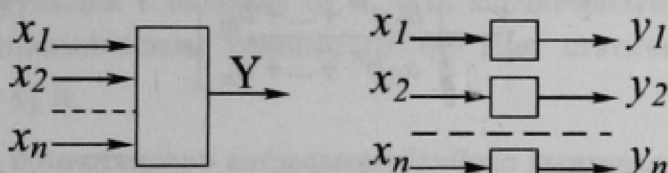


Рисунок 2.4 – Физический смысл коэффициента передачи

Размерности коэффициентов κ_1 и κ_3 равны отклонению размерностей выходной величины к входной (κ_1) и к возмущающему воздействию(κ_3).Они характеризуют статические свойства звена и называются коэффициентами передачи.

2.2 Принцип суперпозиции

Существенное упрощение при изучении линейных систем состоит в том, что к ним применим принцип суперпозиции (принцип наложения). В соответствии с этим принципом общая реакция (изменение выходной величины) звена (системы) на несколько входных воздействий равна сумме реакций на каждое из этих воздействий. Т.е. можно определить сначала реакцию на каждое воздействие отдельно (рис. 2.5). При этом математическое описание звена будет одно и то же для всех воздействий.



$$Y = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot$$

Рисунок 2.5 – Принцип суперпозиции

Это особенно важно при решении вопросов управления и регулирования в системах электроснабжения.

Кроме того, принцип суперпозиции позволяет ограничиться изучением реакции звена только на простые возмущения, а реакцию на сложные возмущения изучать как сумму реакций на простые. Чаще всего в качестве простых возмущений используют два вида воздействий: гармоническое колебание и скачок. В принципе, любой сложный по форме процесс изменения входной величины $x(t)$ или $f(t)$ можно представить как сумму простых.

2.3 Передаточная функция звена [2,с.18-19; 3,с.42-43; 4,с.68-71] 15.02

Для статических звеньев или систем в целом выходная величина y может быть выражена через входную x в виде функциональной зависимости $y = \varphi(x)$, например, алгебраическим выражением $y = ax + b$. Формально y можно выразить через x и для динамических звена или системы. Наиболее полное математическое описание динамической системы осуществляется дифференциальным уравнением. Например, дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами (при $f=0$):

$$a_0 y^{(n)} + ... + a_n y = b_0 x^{(m)} + ... + b_m x \, .$$

Введя оператор дифференцирования, получим символическую запись уравнения:

$$a_0 p^n y + ... + a_n y = b_0 p^m x + ... + b_m x \, .$$

Условно выносим y и x за скобки:

$$y(a_0 p^n + ... + a_n) = x(b_0 p^m + ... + b_m) \, .$$

Откуда

$$y = x\left[\frac{b_0 p^m + ... + b_m}{a_0 p^n + ... + a_n}\right].$$

Выражение в квадратных скобках называется передаточной функцией $W(p)$ звена (системы). С помощью передаточной функции получается самая простая форма записи дифференциального уравнения:

$$y = W(p)x \, .$$

$W(p)$ не имеет физического смысла. Это "функция" от оператора p. Но эта функция позволяет очень просто решать практические задачи и характеризует динамические и статические звенья (системы).

Для нахождения $W(p)$ необходимо составить дифференциальное уравнение звена (системы) в операторной форме и выразить выходную величину через входную. Потом

$$W(p) = \frac{y}{x} \, .$$

Рассмотрим уравнение вида (2.6):

$$y(t)(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) = k_1(1 + \tau_1 p)x(t) + k_3(1 + \tau_3 p) f(t) \, .$$

Поделив уравнение на трехчлен от p левой части получим дифференциальное уравнение относительно выходной величины:

$$y(t) = \frac{k_1(1 + \tau_1 p)}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1} x(t) + \frac{k_3(1 + \tau_3 p)}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1} f(t) \, .$$

Выражения:

$$W_x(p) = \frac{k_1(1+\tau_1 p)}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1},$$

$$W_f(t) = \frac{k_3(1+\tau_3 p)}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}$$

будут являться передаточными функциями звена по входной величине $W_x(p)$ и по возмущению $W_f(p)$. Тогда форма записи дифференциального уравнения будет иметь вид:

$$y(t) = W_x(p)x(t) + W_f(p)f(t). \tag{2.7}$$

Передаточные функции в отличии от k_1 и k_3 характеризуют свойства передачи сигнала звеном в динамическом режиме (p□0). При статическом режиме (p=0) $W_x(0) = k_1$, $W_f(0) = k_3$ и

$$y(t) = k_1 x(t) + k_3 f(t).$$

Передаточную функцию $W_x(p)$, характеризующую статические и динамические свойства звена по входному сигналу, считают основной или главной.

Более строго передаточную функцию определяют через изображение Лапласа. Если найти изображение по Лапласу переменных величин звена

$$X(S) = L[x(t)] = \int_0^\infty x(t)e^{-St}dt,$$

$$Y(S) = L[y(t)] = \int_0^\infty y(t)e^{-St}dt,$$

$$F(S) = L[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-St}dt,$$

где S – комплексное число $S = c+j$□, то выражение

$$W_x(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{k_1(1+\tau_1 S)}{T_2^2 S^2 + T_1 S + 1}$$

будет основной передаточной функцией звена, которое справедливо при нулевых начальных условиях.

Передаточной функцией по выбранному входному воздействию называется отношение изображения выходной величины к изображению выбранного входного воздействия при нулевых начальных условиях и при других воздействиях, равных нулю.

Уравнение примет вид:

$$Y(S) = W_x(S)X(S) + W_f(S)F(S),$$

которое похоже по форме на (2.7), но оно уже алгебраическое, а не дифференциальное и описывает звено не во временной, а в комплексной области.

Пользуясь передаточными функциями, дифференциальное уравнение можно представить структурной схемой (рис. 2.6) и наоборот, по структурной схеме записать дифференциальное уравнение.

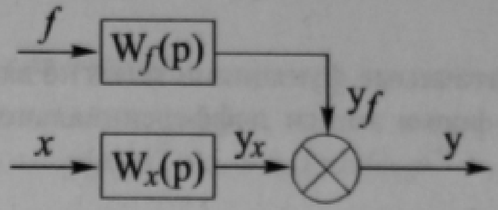


Рисунок 2.6 – Структурная схема

$$y_f = fW_f(p)$$
$$y_x = xW_x(p)$$
$$y = y_x + y_f = fW_f(p) + xW_x(p).$$

2.4 Передаточные функции типовых (элементарных) звеньев [1,с.67-80; 2,с.25-40; 3,с.86-103]

Сложные АСУ и САР можно представить в виде соединения элементарных (типовых) звеньев, которые описываются простейшими передаточными функциями. По виду передаточных функций (или дифференциальных уравнений) и различают типы звеньев АСУ и САР. Основные типы звеньев делятся на позиционные, дифференцирующие и интегрирующие.

Знание характеристик (в т.ч. и $W(p)$) типовых звеньев столь же необходимо для расчетов систем управления, как знание таблицы умножения в арифметике.

2.4.1 Позиционные звенья

Безынерционное звено. Описывается уравнением и передаточной функцией:

$$y = kx; \qquad W(p) = k \ ,$$

где k – коэффициент передачи (усиления).

Электрическим аналогом может служить потенциометр (рис. 2.7) с передаточной функцией $W(p) = \dfrac{1}{R} \quad \left[\dfrac{1}{Ом}\right]$, которая не зависит от p и имеет размерность электрической проводимости.

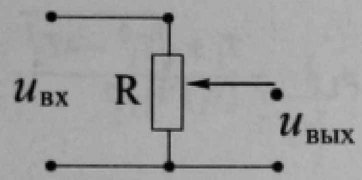


Рисунок 2.7 – Электрический аналог позиционного звена

В этом звене нет переходных процессов. Выходная величина полностью повторяет процесс изменения входной с коэффициентом k. Безынерционность звена – это идеализация, т.к. практически невозможно получить полную безынерционность. Поэтому это звено называют еще идеальным.

Инерционное (апериодическое звено первого порядка).

Описывается дифференциальным уравнением первого порядка:

$$T\frac{dy}{dt}+y=kx;$$

где T – постоянная времени (инерции), k – коэффициент передачи.

В символической записи:

$$y(Tp+1)=kx, \qquad W(p)=\frac{k}{Tp+1}\,.$$

Примером апериодического звена можно считать электродвигатель, если x – управляющее напряжение, y – угловая скорость вращения вала. Это звено моделирует инерцию объектов, т.е. сглаживающее действие звена. Применяется для моделирования нагрева, изменения частоты напряжения в сети и т.д.

Звенья второго порядка. Описываются дифференциальными уравнениями второго порядка:

$$T_2^2\frac{d^2y}{dt^2}+T_1\frac{dy}{dt}+y=kx;$$

$$y\left(T_2^2p^2+T_1p+1\right)=kx.\,.$$

Передаточная функция:

$$W(p)=\frac{k}{T_2^2p^2+T_1p+1}$$

Корни характеристического уравнения:

$$p_{1,2} = -\frac{T_1 \pm \sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}}{2T_2^2}.$$

Разложив знаменатель в выражение для W(p) на сомножители можно записать:

$$W(p) = \frac{k}{(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)},$$

где

$$T_{3,4} = \frac{T_1}{2} \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2^2}.$$

Постоянная времени T_1, как и в звене первого порядка, моделирует инерцию. Чем больше T_1, тем больше демпфирующее (сглаживающее) действие звена на выходную величину. Постоянная T_2 характеризует раскачивающее действие звена. От их соотношения зависит вид переходного процесса на выходе.

Если $T_1 \geq 2T_2$, то корни $p_{1,2}$ будут вещественными. В этом случае на выходе звена колебаний выходной величины не будет даже при изменении входной величины скачком. Такое звено называется апериодическим звеном второго порядка.

Если $T_1 < 2T_2$, то корни $p_{1,2}$ будут комплексные.В этом случае получается колебательное звено, на выходе которого будет протекать колебательный процесс.

Примером таких звеньев могут быть измерительные приборы и датчики.

2.4.2 Интегрирующие звенья

Идеальное интегрирующее звено описывается дифференциальным уравнением:

$$y = k\int x dt \quad или \quad y = \frac{k}{p}x,$$

откуда

$$W(p) = \frac{k}{p}.$$

Электрическим аналогом является индуктивность с выходом по току (рис. 2.10).

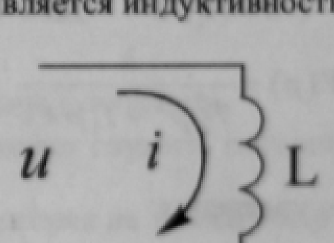


Рисунок 2.10 – Электрический аналог интегрирующего звена

$$i \cdot pL = u\ ; \qquad W(p) = \frac{1}{pL}\ ; \qquad i = \frac{u}{pL}\ .$$

Если на индуктивность подать напряжение u скачком, то ток будет интегрироваться (нарастать) от 0 до ∞.

Примером может служить электродвигатель постоянного тока, выходной величиной корого которого является угол поворота, при условии безынерционности двигателя.

Инерционное интегрирующее звено описывается уравнением и передаточной функцией вида:

$$T\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = kx$$

или

$$py(Tp+1) = kx\ ;$$

$$W(p) = \frac{k}{p(Tp+1)}\ .$$

2.4.3 Дифференцирующие звенья

Идеальное дифференцирующее звено описывается:

$$y = k\frac{dx}{dt}$$

или

$$y = kpx\ ;$$

$$W(p) = kp\ .$$

Электрический аналог – идеальный конденсатор с выходом по току (рис. 2.11).

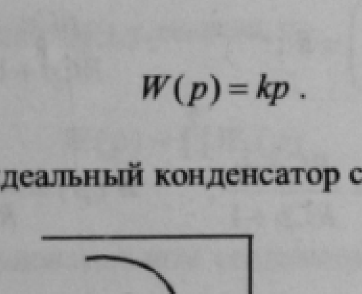


Рисунок 2.11 – Электрический аналог дифференцирующего звена

$$i\cdot\frac{1}{pC}=u\ ;\qquad i=pCu\ ;\qquad W(p)=pC\ .$$

Идеальный конденсатор производит дифференцирование. Примером такого звена может служить тахогенератор, преобразующий входную величину – угол поворота вала в выходную – напряжение.

Инерционное (реальное) дифференцирующее звено.

Поскольку идеальной емкости практически не бывает, т.к. она обладает инерцией, то реальная емкость (конденсатор) описывается дифференциальным уравнением

$$T\frac{dy}{dt}+y=k\frac{dx}{dt}$$

или

$$(Tp+1)y=kpx\ .$$

Откуда

$$W(p)=\frac{kp}{Tp+1}\ .$$

Электрическим аналогом является RC – цепь с выходом u_R (рис. 2.12).

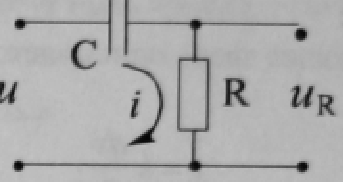


Рисунок 2.12 – Электрический аналог реального дифференцирующего звена

$$i\left(R+\frac{1}{pC}\right)=u\ ;\qquad i=\frac{pCu}{RCp+1}\ ;$$

$$u_R=i\cdot R=\frac{RCp\cdot u}{RCp+1}\ ;\qquad W(p)=\frac{RCp}{RCp+1}=\frac{Tp}{Tp+1}\ ,$$

где $T=RC$.

Примерами такого звена могут служить трансформатор, механический демпфер с пружиной. Можно моделировать адаптацию объектов к изменяющимся условиям.

2.5 Соединения звеньев и передаточные функции этих соединений [2,с.44-47; 4,с.76-78]

Из элементарных (типовых) звеньев можно составить любую сложную систему и наоборот, зная *W(p)* типовых звеньев, можно найти *W(p)* сложной системы, а значит и записать дифференциальное уравнение системы.

Существует три основных типа соединения звеньев: последовательное, параллельное, с обратной связью и смешанное соединение.

2.5.1 Последовательное соединение

Рассмотрим вначале два звена (рис. 2.13):

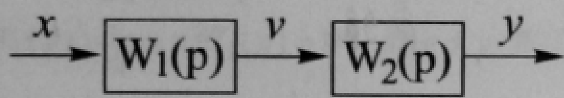


Рисунок 2.13 – Последовательное соединение звеньев

Даны $W_1(p)$ и $W_2(p)$.

v – выходной процесс для первого звена

$$v = x \cdot W_1(p)$$

является одновременно входным для второго:

$$y = v \cdot W_2(p) = x \cdot W_1(p) \cdot W_2(p).$$

Отсюда:

$$W(p) = \frac{y}{x} = W_1(p) \cdot W_2(p).$$

Если последовательно соединены *n* звеньев, то

$$W(p) = \prod_{i=1}^{n} W_1(p). \qquad (2.8)$$

Таким образом, при последовательном соединении звеньев передаточные функции перемножаются.

Для цепи из последовательно соединенных звеньев общий коэффициент усиления (передачи):

$$K = k_1 k_2 k_3 ... k_n.$$

2.5.2 Параллельное соединение

Рассмотрим два звена (рис. 2.14). *а* и *б* – узлы (точки разветвления).

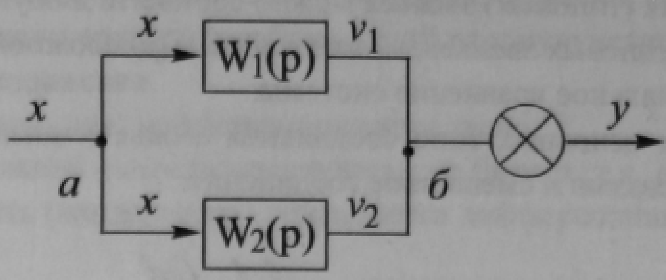


Рисунок 2.14 – Параллельное соединение звезьев

$$v_1 = x \cdot W_1(p);$$

$$v_2 = x \cdot W_2(p);$$

$$y = v_1 + v_2 = x\left[W_1(p) + W_2(p)\right].$$

Откуда:

$$W(p) = W_1(p) + W_2(p).$$

При параллельном соединении звеньев их передаточные функции складываются:

$$W(p) = \sum_{i=1}^{n} W_i(p). \tag{2.9}$$

Общий коэффициент передачи (усиления):

$$K = k_1 + k_2 + ... + k_n.$$

2.5.3 Звенья с обратными связями

Схема такого соединения показана на рис. 2.15.

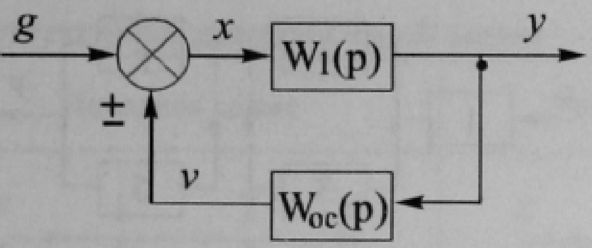


Рисунок 2.15 – Звено с обратной связью

О.С. называется отрицательной, если $x = q - v$ и положительной, если $x = q + v$. Для звена ОС входной величиной является y. Тогда выходная $v = y \cdot W_{oc}(p)$. На вход звена прямой цепи с $W_1(p)$ поступает процесс $x = q \pm v$.

Тогда на входе:

$$y = x \cdot W_1(p) = (q \pm v)W_1(p) = W_1(p)[g \pm y \cdot W_{oc}(p)].$$

Перенесем y в левую часть:

$$y[1 \mp W_1(p) \cdot W_{oc}(p)] = g \cdot W_1(p).$$

Откуда передаточная функция звена, охваченного ОС будет:

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 \mp W_1(p)W_{oc}(p)}. \qquad (2.10)$$

Знак " – " относится к положительной ОС, а " + " – к отрицательной ОС. Общий коэффициент усиления в этом случае:

$$K = \frac{k_1}{1 \mp k_1 \cdot k_{oc}}.$$

2.5.4 Смешанное соединение звеньев

В смешанном соединении могут встречаться все типы соединений звеньев (рис. 2.16). С помощью формул (2.8 - 2.10) можно найти *W(p)* смешанного соединения звеньев, но без перекрестных связей. Перекрестными называются связи, когда в отдельных цепях смешанного соединения звеньев присутствуют узлы и сумматоры, без переноса которых невозможно выделить обособленные типы соединений.

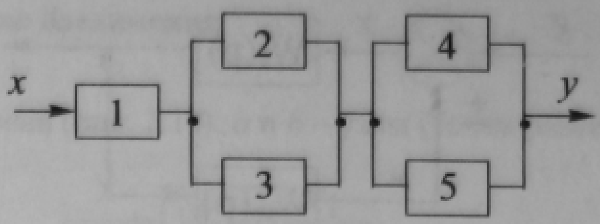


Рисунок 2.16 – Смешанное соединение звеньев

$$W(p) = W_1(p)[W_2(p) + W_3(p)][W_4(p) + W_5(p)].$$

2.6 Структурные преобразования систем [2,с.50-54; 4,с.78-85]

Для удобства расчетов АС бывает необходимо преобразовать структурную схему системы к какому-либо желаемому виду. Существуют правила структурных преобразований, позволяющие формально видоизменить структурные схемы, что позволяет облегчить и упростить задачи анализа линейных АС. Формальное преобразование структурных схем заключается в их замене другими, равноценными или эквивалентными.

Любое преобразование структурной схемы сводится к перемещению или перестановке различных соседних элементов (узлов, сумматоров и звеньев). Используется при преобразовании инвертор – звено с $W(p) = -1$, которое изменяет знак переменной величины на противоположный и обозначается на схемах :

$$\boxed{-1}$$

В основу правил преобразования схем положено требование сохранения неизменными входных и выходных величин преобразуемого участка схемы. Это обеспечивает эквивалентность исходной и преобразованной структурных схем в том смысле, что они соответствуют одному и тому же дифференциальному уравнению.

Приведем некоторые правила преобразования структуры разомкнутой цепи АСУ (табл. 2.1).

Пользуясь приведенными правилами, можно освободиться от перекрестных связей в составляемых структурных схемах с помощью переноса узлов и сумматоров.

2.7 Передаточные функции и дифференциальные уравнения замкнутых АС [2,с.54-59, 4,с.85-99]

Рассмотрим функциональную схему одномерной АС, которая может состоять из цепи звеньев любой сложности (рис. 2.17).

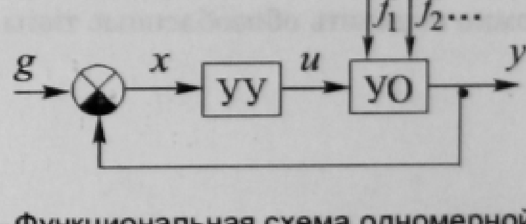
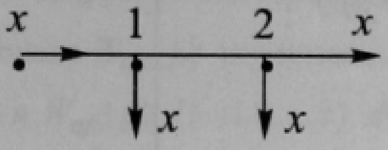
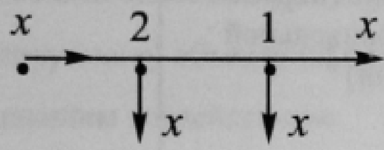
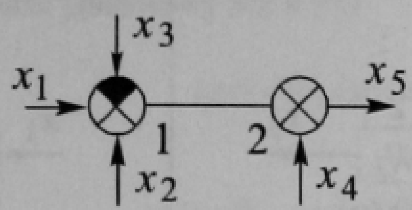
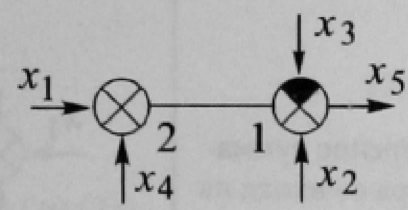
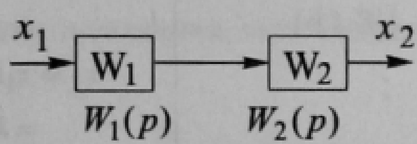
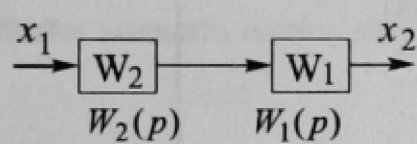
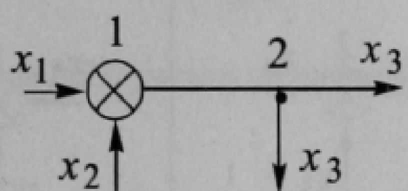


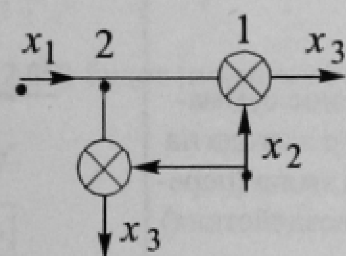
Рисунок 2.17 – Функциональная схема одномерной замкнутой АС

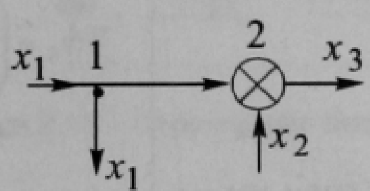
Таблица 2.1 – Правила структурных преобразований систем

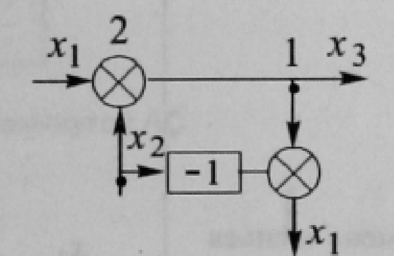
<table>
<tr><th>Назначение преобразования</th><th>Исходная схема</th><th>Эквивалентная схема</th></tr>
<tr><td>Перестановка узлов</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Перестановка сумматоров</td><td>

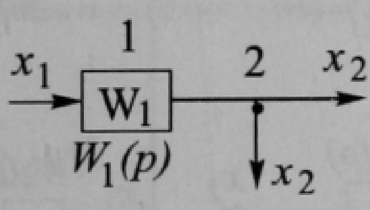
$x_5 = x_1 + x_2 - x_3 + x_4$</td><td>

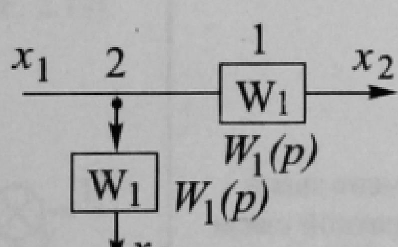
$x_5 = x_1 + x_2 + x_4 - x_3$</td></tr>
<tr><td>Перестановка звеньев</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Перенос узла с выхода на вход сумматора</td><td>

$x_3 = x_1 + x_2$</td><td>

$x_3 = x_1 + x_2$</td></tr>
<tr><td>Перенос узла со входа на выход сумматора</td><td>

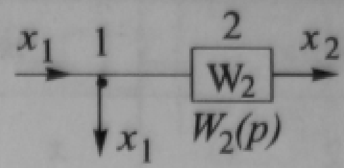
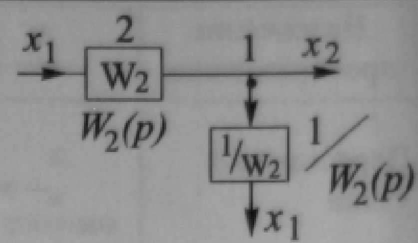
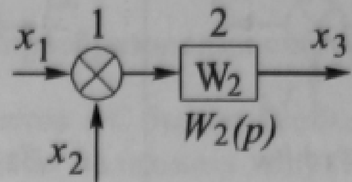
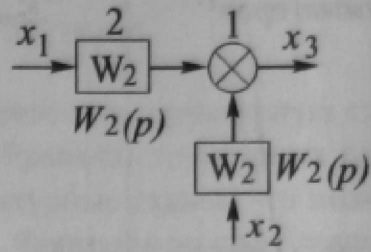
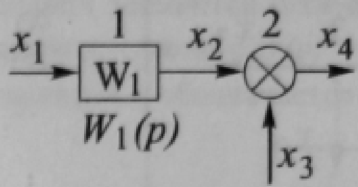
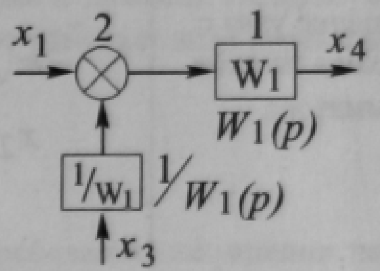
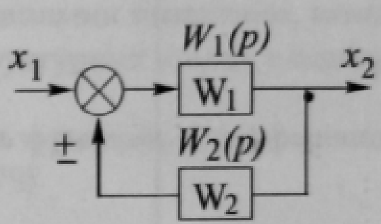
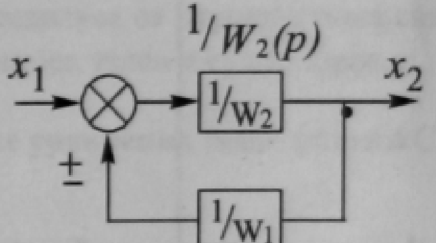
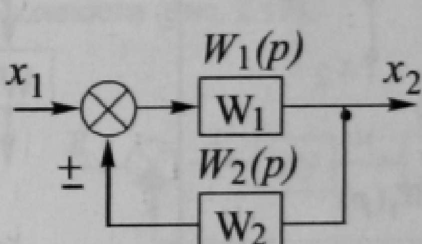
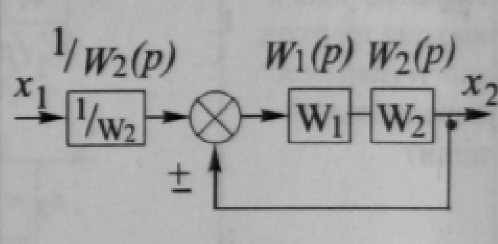
$x_1 = x_1$</td><td>

$x_1 = x_1 + x_2 + x_2(-1) = x_1$</td></tr>
<tr><td>Перенос узла с выхода на вход звена (перенос параллельной цепи)</td><td>

$x_2 = x_1 \cdot W_1(p)$</td><td>

$x_2 = x_1 \cdot W_1(p)$</td></tr>
</table>

Продолжение таблицы 2.1

Перенос узла со входа на выход звена (перенос параллельной цепи)	 $x_1 = x_1$	 $x_1 = x_1 \cdot W_2(p) \cdot \dfrac{1}{W_2(p)} = x_1$
Перенос сумматора со входа на выход звена (перенос воздействия)	 $x_3 = (x_1 + x_2) W_2(p)$	 $x_3 = x_1 W_2(p) + x_2 W_2(p) =$ $= W_2(p)(x_1 + x_2)$
Перенос сумматора с выхода на вход звена (перенос воздействия)	 $x_4 = x_1 \cdot W_1(p) + x_3$	 $x_4 = \left(x_1 + \dfrac{x_3}{W_1(p)}\right) W_1(p) =$ $= x_1 \cdot W_1(p) + x_3$
Замена звеньев прямой и обратной цепей		
Замена звена обратной связи на единичную обратную связь		

Получается замкнутая система с одиночной ОС, которую называют главной в отличие от местных ОС, которые могут быть внутри в составе разомкнутой цепи звеньев.

После составления дифференциальных уравнений звеньев можно найти $W_p(p)$ УУ или регулятора, а также $W_{ou}(p)$ управляемого (регулируемого) объекта по управляющему воздействию и $W_{ofi}(p)$ $(i = 1,2,...,k)$ по возмущающим воздействиям.

Дифференциальные уравнения УУ и УО

$$u(t) = W_p(p) \cdot x(t) \;, \tag{2.11}$$

$$y(t) = W_{ou}(p) \cdot u(t) + \sum_{i=1}^{k} W_{ofi}(p) f_i(t) \;,$$

где $x = g - y$.

Учитывая принцип наложения, можно все возмущения заменить одним результирующим *f(t)*.

$$W_{ou}(p) \cdot u(t) + W_{of}(p) \cdot f(t) \tag{2.12}$$

Структурная схема АС с учетом уравнений (2.11) и (2.12) будет иметь вид, показанный на рис. 2.18.

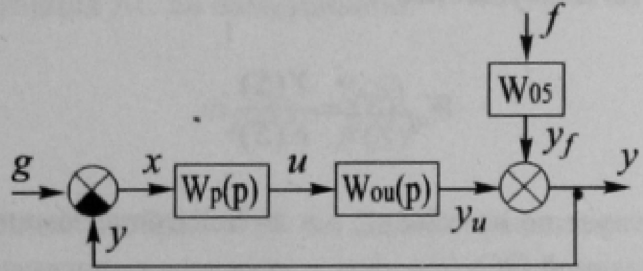


Рисунок 2.18 – Структурная блок-схема замкнутой АС

Заменив передаточные функции УУ и УО одной

$$W(p) = W_p(p) \cdot W_{ou}(p) \;, \tag{2.13}$$

получим более компактную структурную схему (рис. 2.19).

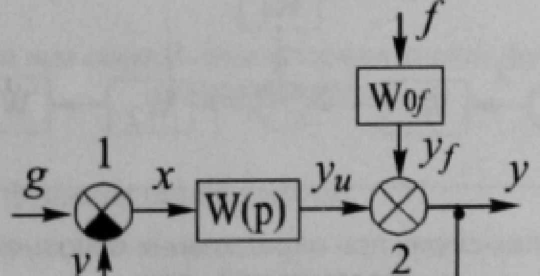


Рисунок 2.19 – Упрощенная блок-схема замкнутой АС

Если положить $f(t) = 0$ и разорвать цепь главной ОС ($y = 0$ на входе АС) (рис. 2.20), то можно определить $W(p)$ (2.13) как отношение изображений по Лапласу управляемой величины к ошибке или к задающему воздействию (так как $x = g - y = g$) при нулевых начальных условиях

$$W(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{Y(S)}{G(S)}. \tag{2.14}$$

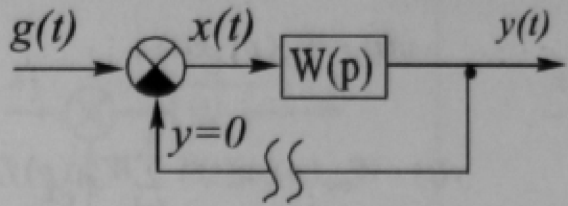


Рисунок 2.20 – Блок-схема при определении основной передаточной фунции

Выражение (2.14) называют основной передаточной функцией разомкнутой системы. Она характеризует динамические свойства передачи сигнала с основного входа на выход АС при разорванной ОС, хотя разомкнутая АС – это уже не АС, а нерегулируемая цепь (УУ-УО).

Если положить $g(t) = 0$ и разорвать цепь ОС, то получим передаточную функцию разомкнутой системы по возмущению:

$$W_{of}(S) = \frac{Y(S)}{F(S)}. \tag{2.15}$$

Иногда $f(t)$ действует не на объект, а в любой точке замкнутой цепи (рис. 2.21). Тогда после разрыва главной ОС:

$$W_f(p) = W_4(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p),$$

$$W(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) \cdot W_3(p).$$

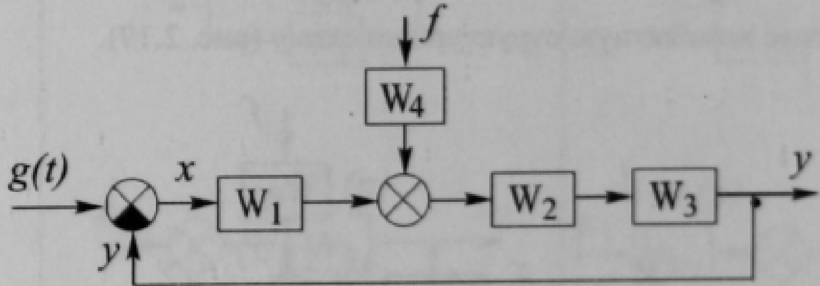


Рисунок 2.21 – Блок-схема при определении основной передаточной функции разомкнутой цепи

$W_f(p)$ определяет динамические свойства передачи сигнала с возмущающего (не основного) входа на выход АС при разорванной главной ОС.

Кроме передаточных функций разомкнутой системы есть передаточные функции замкнутой АС.

Основная передаточная функция АС (главный оператор) определяется отношением изображений по Лапласу управляемой величины к задающему воздействию при нулевых начальных условиях и $f(t) = 0$:

$$\Phi(S) = \frac{Y(S)}{G(S)}. \tag{2.16}$$

Замкнув главную ОС в схеме (рис. 2.20) получим выражение $\Phi(S)$ через $W(S)$:

$$\Phi(S) = \frac{W(S)}{1+W(S)}. \tag{2.17}$$

Выражения (2.14) и (2.16) одинаковы по форме, но совершенно различны по содержанию. В (2.14) $Y(S)$ является изображением не управляемой величины, а переменной, снимаемой с того же выхода, что и управляемая $y(t)$. $\Phi(S)$ определяет динамические свойства не разомкнутой цепи (как $W(S)$), а АС в передаче или обработке основного, задающего сигнала $g(t)$.

Передаточная функция АС по возмущению:

$$\Phi_f(S) = \frac{Y(S)}{F(S)} \tag{2.18}$$

определяется отношением изображений по Лапласу управляемой величины к возмущению при нулевых начальных условиях и при $g(t) = 0$.

Выразим $\Phi_f(S)$ через $W(S)$ и $W_{of}(S)$. Для этого в структурной схеме (рис. 2.19) сумматор *1* можно убрать (так как $g = 0$ и $x = -y$), а сумматор *2* перенести с выхода на вход звена $W(p)$. Получим структурную схему, показанную на рис. 2.22.

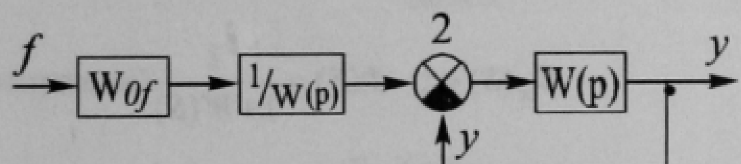


Рисунок 2.22 – Блок-схема при определении передаточной функции замкнутой системы по возмущению

Тогда передаточная функция определяется:

$$\Phi_f(S) = W_{of}(S) \cdot \frac{1}{W(S)} \cdot \frac{W(S)}{1+W(S)} = \frac{W_{of}(S)}{1+W(S)}. \tag{2.19}$$

Если $f(t)$ приложено в любой точке АС, то:

$$\Phi_f(S) = \frac{W_f(S)}{1+W(S)}. \qquad (2.20)$$

$\Phi_f(S)$ характеризует динамику проникновения возмущений на выход замкнутой АС, или влияние $f(t)$ на $y(t)$ в статическом и динамическом режимах работы АС. Внешнее сходство выражений (2.18) и (2.15) не говорит о сходстве их содержания.

Передаточная функция АС относительно ошибки по задающему воздействию:

$$\Phi_x(S) = \frac{X(S)}{G(S)}. \qquad (2.21)$$

определяется отношением изображений по Лапласу ошибка к задающему воздействию при нулевых начальных условиях и при $f(t) = 0$.

Замкнув ОС в схеме (рис. 2.20) и перенеся узел с выхода на вход звена $W(p)$, получим структурную схему (рис. 2.23), из которой:

$$\Phi_x(S) = \frac{1}{1+W(S)}. \qquad (2.22)$$

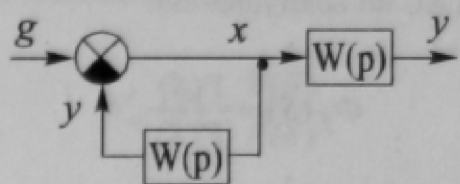


Рисунок 2.23 – Блок-схема при определении передаточной функции замкнутой системы по ошибке

Это выражение можно получить из выражения (2.16), подставив $Y(S) = G(S) - X(S)$. Тогда $\Phi(S) = 1 - \Phi_x(S)$, откуда:

$$\Phi_x(S) = 1 - \Phi(S) = \frac{1}{1+W(S)}.$$

$\Phi_x(S)$ характеризует точность АС в отработке $g(t)$ в статическом и динамическом режимах.

Аналогично можно определить передаточную функцию АС относительно ошибки по возмущению при $g(t) = 0$:

$$\Phi_f^x(S) = \frac{X(S)}{F(S)}.$$

Если $g=0$, то $X(S)=-Y(S)$, а

$$\Phi_f^x(S)=-\frac{Y(S)}{F(S)}=-\Phi_f(S).$$

$\Phi_f^x(S)$ характеризует влияние $f(t)$ на $y(t)$ или точность работы АС при действии на нее возмущения.

У передаточных функций (2.17), (2.19), (2.20) и (2.22) знаменатели одинаковы, что является хорошей проверкой правильности вывода этих формул.

Обычно передаточные функции представляют собой рациональную дробь, выраженную отношением двух многочленов от комплексной переменной p. Так передаточная функция УУ (2.11) после ее отыскания примет вид:

$$W_p(p)=\frac{R_p(p)}{Q_p(p)},$$

где $R_p(p)$ и $Q_p(p)$ – многочлены (полиномы) относительно p.

Так например, если $W_p(p)$ имеет вид:

$$W_p(p)=\frac{k_1(1+\tau_1 p)}{T_2 p^2+pT_1+1},$$

то

$$R_p(p)=k_1(1+\tau_1 p),\ \text{а}\ Q_p(p)=T_2^2 p^2+T_1 p+1.$$

Передаточные функции УО, выраженные через полиномы от p, примут вид:
по управляющему воздействию

$$W_{ou}(p)=\frac{R_o(p)}{Q_o(p)}$$

и по любому из возмущений

$$W_{ofi}=\frac{R_{ofi}(p)}{Q_o(p)}. \tag{2.23}$$

Дифференциальное уравнение объекта (2.12), выраженное через полиномы от p, примет вид:

$$Q_o(p)y(t)=R_o(p)u(t)+\sum_{i=1}^{k}R_{ofi}(p)\cdot f_i(t).$$

Если возмущение приложено в любой точке АС, то:

$$W_f(p) = \frac{R_f(p)}{Q_f(p)}.$$

Передаточная функция разомкнутой системы (2.13) примет вид:

$$W(p) = \frac{R_p(p)\,R_o(p)}{Q_p(p)Q_o(p)} = \frac{B(p)}{C(p)}, \tag{2.24}$$

где $B(p) = R_p(p)\cdot R_o(p) = b_o p^m + b_1 p^{m-1} + \ldots + b_{m-1}p + b_m$;

$$C(p) = Q_p(p)\cdot Q_o(p) = c_o p^n + c_1 p^{n-1} + \ldots + c_{n-1}p + c_n.$$

Коэффициенты полиномов $B(p)$ и $C(p)$ определяются параметрами звеньев АС. Для реальных систем $n > m$ и $b_m \neq 0$. Если $b_m = 0$, то:

$$y(t) = \frac{b_o p^{m-1} + \ldots + b_{m-1}}{c_o p^n + \ldots + c_n}\,px(t),$$

т.е. прямая цепь АС реагирует не на ошибку $x(t)$, а на скорость изменения ошибки $px(t)$. Значит в установившемся статическом процессе $x = g - y$ может принимать любые значения, а АС неработоспособна. Условие $b_m = 0$ соответствует включению в прямую цепь дифференцирующего звена.

Многочлен $C(p)$ называется характеристическим полиномом, а уравнение

$$C(p) = 0$$

характеристическим уравнением разомкнутой системы.

Если свободный член $C_n = 0$, что соответствует включению в прямую цепь интегрирующего звена, то АС обладает первым порядком астатизма. При двух последовательно включенных в прямую цепь интегрирующих звеньях $C_n = 0$ и $C_{n-1} = 0$, и АС обладает вторым порядком астатизма. Если $C_n \neq 0$, то АС обладает нулевым порядком астатизма.

Зная передаточную функцию (2.24), найдем главный оператор системы (2.17):

$$\Phi(p) = \frac{B(p)}{C(p) + B(p)} = \frac{B(p)}{D(p)}, \tag{2.25}$$

$$\Phi(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{B(p)/C(p)}{1 + B(p)/C(p)} = \frac{B(p)}{C(p) + B(p)} = \frac{B(p)}{D(p)},$$

где $D(p) = C(p) + B(p) = a_o p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_{n-1} p + a_n$.

Многочлен $D(p)$ называется характеристическим полиномом, а

$$D(p) = 0$$

или

$$1 + W(p) = 0$$

характеристическим уравнением АС.

Так как степень полинома $B(p)$ меньше степени полинома $D(p)$, т.е. $m < n$, то $\Phi(p)$ – это правильная рациональная дробь, выраженная полиномами.

По (2.23) и (2.24) найдем передаточную функцию АС по возмущению (2.20):

$$\Phi_f(p) = \frac{W_{of}(p)}{1 + W(p)} = \frac{M_{of}(p)}{D(p)}, \tag{2.26}$$

где $M_{of}(p) = R_{of}(p) \cdot Q_p(p)$.

Чаще всего $\Phi_f(p)$ представляет собой правильную рациональную дробь, выраженную полиномами.

Передаточная функция АС по ошибке (2.22), выраженная через полиномы от p:

$$\Phi_x(p) = \frac{1}{1 + W(p)} = \frac{C(p)}{D(p)}.$$

В $\Phi_x(p)$ степени полиномов числителя и знаменателя равны, значит $\Phi_x(p)$ является неправильной рациональной дробью, выраженной полиномами.

Зная все передаточные функции АС, можно записать ее дифференциальные уравнения.

На основании (2.16) и (2.25) дифференциальные уравнения АС относительно управляемой величины без учета возмущений:

$$y(t) = \Phi(S) \cdot g(t) \tag{2.27}$$

или

$$D(p) y(t) = B(p) g(t).$$

В соответствии с (2.18) и (2.26) дифференциальное уравнение АС относительно управляемой величины без учета задающего воздействия:

$$y(t) = \Phi_f(S) \cdot f(t) \tag{2.28}$$

или

$$D(p)y(t) = M_{of}(p)f(t).$$

На основании принципа наложения и выражений (2.27) и (2.28) дифференциальное уравнение АС:

$$y(t) = \Phi(S)g(t) + \Phi_f(S)f(t)$$

или

$$D(p)y(t) = B(p)g(t) + M_{of}(p)f(t). \tag{2.29}$$

Дифференциальное уравнение (2.29) является уравнением движения АС при действии на нее задающего и возмущающего воздействий.

Уравнение движения АС относительно ошибки $x(t)$:

$$x(t) = \Phi_x(p)g(t) - \Phi_f(p)f(t) \tag{2.30}$$

или

$$D(p)x(t) = C(p)g(t) - M_{fo}(p)f(t).$$

Ошибка состоит из двух составляющих, вызванных $g(t)$ и $f(t)$:

$$x(t) = x_g(t) + x_f(t)$$

или

$$x(t) = \frac{C(p)}{D(p)}g(t) - \frac{M_{fo}(p)}{D(p)}f(t).$$

Уравнение замкнутой системы может быть записано в виде системы уравнений типа:

$$a_o\frac{d^2y}{dt^2} + a_1\frac{dy}{dt} + a_2y = b_o\frac{dx}{dt} + b_1x \tag{2.31}$$

или в стандартном виде символической записи:

$$T_2^2p^2 + T_1p + 1)y = k(\tau_1p + 1)x.$$

Эти уравнения обычно второго и первого порядка (но возможно и более высокого порядка). Но уравнение второго порядка всегда можно привести к двум уравнениям первого порядка. Например, положив в (2.31) для простоты $b_o = 0$ и обозначив

$$\frac{dy}{dt} = y_1 ,$$

получим

$$a_o \frac{dy_1}{dt} = b_1 x - a_2 y - a_1 y_1 .$$

Представив в аналогичном виде уравнения всех звеньев системы, получим систему уравнений первого порядка, описывающих динамику замкнутой АС:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n , \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n , \end{cases} \tag{2.32}$$

где $x_1, x_2, \ldots x_n$ - переменные АС, которыми могут быть управляемая величина y и ее производные, ошибка x и ее производные, переменные отдельных звеньев и т.д.

В правых частях необязательно входят все n переменных, поэтому многие коэффициенты будут равны нулю. В некоторые уравнения справа добавятся задающие $g(t)$ и возмущающие воздействия $f(t)$.

Запись дифференциальных уравнений вида (2.32) называется нормальной формой или формой Коши.

Характеристическое уравнение этой системы будет иметь вид (λ - корни характеристического уравнения):

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{2.33}$$

или в развернутом виде:

$$a_o \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 .$$

Система уравнений (2.32) может быть записана в матричной форме:

$$\frac{dx}{dt} = Ax\,, \tag{2.34}$$

а характеристическое уравнение (2.33):

$$\det\left[A - \lambda E\right] = 0\,, \tag{2.35}$$

где x – вектор столбец всех переменных (координат состояний системы);

A – матрица коэффициентов;

E – единичная матрица, т.е.:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Краткая запись (2.34) подробно расшифровывается в виде (2.32), а запись (2.35) – в виде (2.33), что соответствует другой краткой записи $D(p) = 0$.

2.8 Частотные характеристики [1,с.46-53; 2,с.21-25; с.75-82; 4, с.141-143]

Как отмечалось ранее, к линейным системам применим принцип суперпозиции. Входной процесс *x(t)* можно представить в виде суммы процессов различными способами, одним из которых является представление *x(t)* (если это периодический процесс), в виде суммы синусоид (разложение в ряд или интеграл Фурье).

$$x(t) = x_c + \sum_{n=1}^{\infty} x_{mn} \sin(n\omega t + \varphi_n)\,,$$

где x_c – среднее значение;

x_{mn} и □$_n$ – амплитуда и фаза соответственно *n*-ой гармонической составляющей.

Для оценки воздействия входного процесса *x(t)* на звено достаточно изучить воздействия от каждой синусоиды (гармоники), а потом эти воздействия сложить, используя принцип суперпозиции. Для оценки воздействия установившегося входного процесса в виде гармонического сигнала (синусоиды) на звено используются частотные характеристики звена.

Частотными характеристиками называются зависимости между *x(t)* и *y(t)* в виде формул или графиков, характеризующие реакцию звена на синусоидальное входное воздействие в установившемся режиме, т.е. вынужденные синусоидальные колебания звена.

Допустим на вход звена подается процесс в виде синусоиды :

$$x(t) = x_m \sin \omega t \ ,$$

где x_m, ω – амплитуда и частота синусоиды.

По окончании переходного процесса на выходе звена наступает стационарное (установившееся) состояние. Для линейных систем в стационарном состоянии на выходе устанавливается вынужденный выходной процесс *y(t)*, имеющий ту же частоту □, но другую амплитуду Y_m и фазу □ (рис. 2.24):

$$y(t) = Y_m \sin(\omega t + \varphi) \ .$$

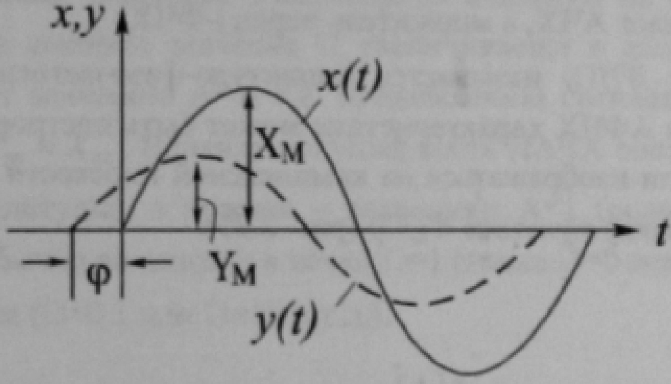


Рисунок 2.24 – Синусоидальный вынужденный выходной процесс

Обозначим через $A = \dfrac{Y_m}{X_m}$.

Если на вход звена подавать синусоиды одинаковой амплитуды x_m , но разной частоты $\omega = 2\pi f$, то величины A и □ будут на выходе звена разными, т.е. они зависят от частоты входного процесса.

Зависимость $A(\omega) = \dfrac{Y_m(\omega)}{X_m}$ и является амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ), которая показывает, как изменяется амплитуда выходного процесса в зависимости от частоты входного.

Фазочастотной характеристикой (ФЧХ) является зависимость фазы выходного процесса от частоты входного т.е. □(□).

АЧХ И ФЧХ можно определить экспериментальным путем (что не всегда возможно, особенно на стадии проектирования АС), или используя дифференциальные или алгебраические уравнения, связывающие входные и выходные величины звена (например, $X_L = \omega L \quad X_C = \dfrac{1}{\omega C}$). Но все эти методы определения АЧХ и ФЧХ громоздки, особенно если система состоит из множества звеньев.

Оказывается, что, не решая дифференциального уравнения системы, по ее передаточной функции можно найти частотные характеристики. Для этого необходимо в выражении для W(p) звена или системы заменить p на j□, где $j = \sqrt{-1}$. В результате получается комплексное выражение $W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$ *,где* $U(\omega)$ - называют вещественной частотной характеристикой , $V(\omega)$ - мнимой. Это же комплексное выражение можно записать в показательной форме:

$$W(j\omega) = A(\omega) \cdot \ell^{j\varphi(\omega)}$$

множитель перед ℓ дает АЧХ, а множитель перед j-ФЧХ.

Все выражение *W(j□)* называется амплитудо-фазочастотной характеристикой (АФЧХ). Графически АФЧХ характеристика может быть построена в прямоугольных координатах (*U,V*) или изображаться на комплексной плоскости в полярных координатах (*A,*□), как годограф функции *W(j□)* (рис. 2.25).

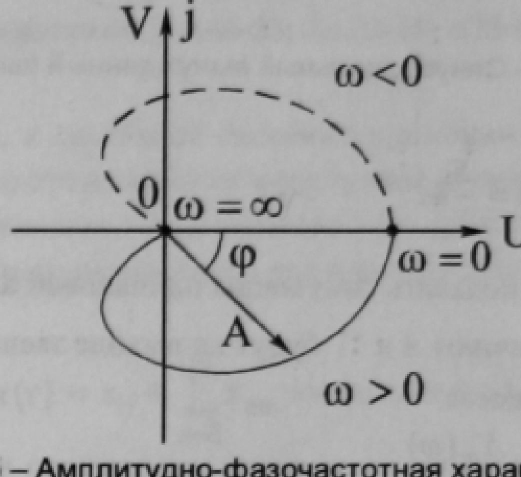


Рисунок 2.25 – Амплитудно-фазочастотная характеристика

Для определения величины вектора A необходимо определить модуль выражения *W(j□)*:

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} \quad ,$$

а фаза определяется из выражения :

$$\varphi(\omega) = arctg\frac{V(\omega)}{U(\omega)} \quad .$$

При определении АЧХ можно пользоваться тем условием, что модуль дроби равен отношению модулей числителя и знаменателя. При определении ФЧХ необходимо избавляться от j (мнимых частей) в знаменателе выражения $W(j□)$.

Графики АЧХ и ФЧХ тоже изображаются отдельно графически, причем АЧХ является четной функцией, т.е. $A(-\omega) = A(\omega)$, а ФЧХ – нечетной , т.е. $\varphi(-\omega) = -\varphi(\omega)$.

На практике, в инженерных расчетах чаще применяют логарифмические частотные характеристики. Для построения логарифмической АЧХ (ЛАЧХ) по оси ординат откладывают величину:

$$L_m(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg\left|W(j\omega)\right| \quad ,$$

измеряющейся в децибелах (рис. 2.26, а). По оси абсцисс откладывается частота □ [1/с] в логарифмическом масштабе. Равномерной единицей на оси абсцисс является декада – отрезок, на котором значение □ увеличивается в десять раз. Ось абсцисс (L_m=0) соответствует значению A=1, т.е. прохождению сигнала через звено в натуральную величину $Y_m = X_m$. Верхняя полуплоскость ЛАЧХ соответствует значениям A>1 (усилению амплитуды), а нижняя – значениям A<1 (ослаблению амплитуды). Начало координат обычно помещают в точке □=1 (точка □=0 лежит в -□), хотя может быть и в другой точке (□=0.1 или □=10 и т.д.).

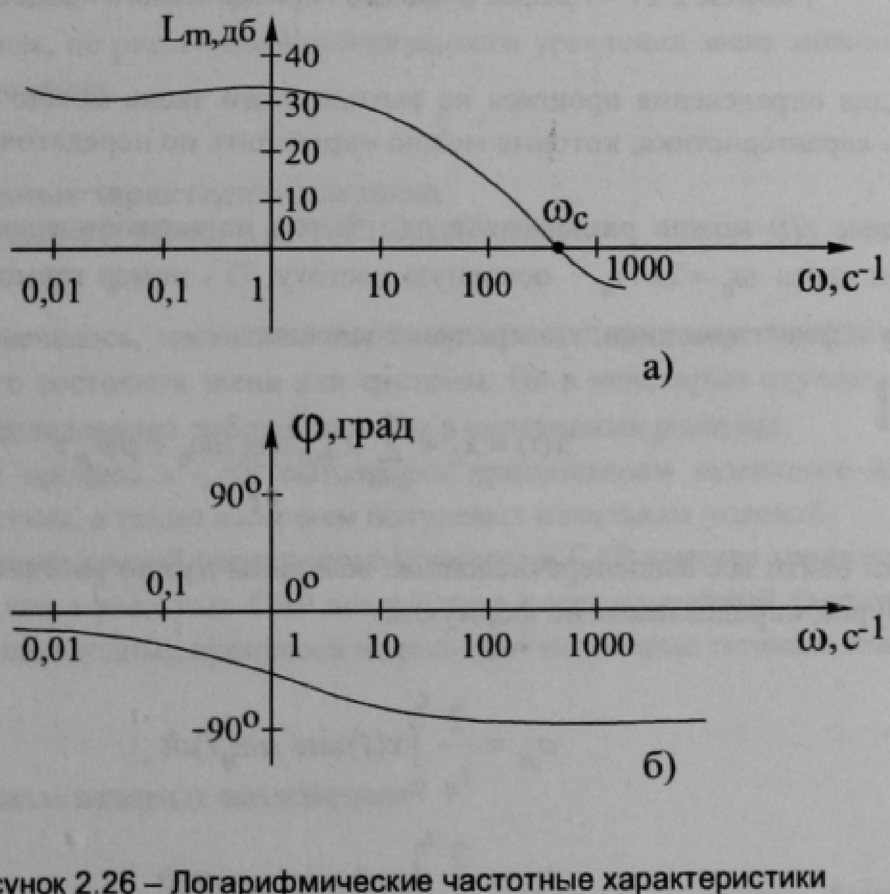


Рисунок 2.26 – Логарифмические частотные характеристики

Логарифмическая ФЧХ (ЛФЧХ) имеет ось абсцисс ту же, что и у ЛАЧХ, а по оси ординат отсчет □ идет в угловых градусах (рис. 2.26, *б*).

Частотные характеристики удобны для описания установившихся процессов.

При последовательном соединении звеньев их АЧХ перемножаются (аналогично передаточным функциям), а фазы суммируются.

Частотные характеристики широко используются в электроснабжении при расчете уровней высших гармоник напряжения и тока.

2.9 Воздействие периодических процессов на звено

Предположим, задан периодический входной процесс *x(t)*, поступающий на линейное звено (рис. 2.27).

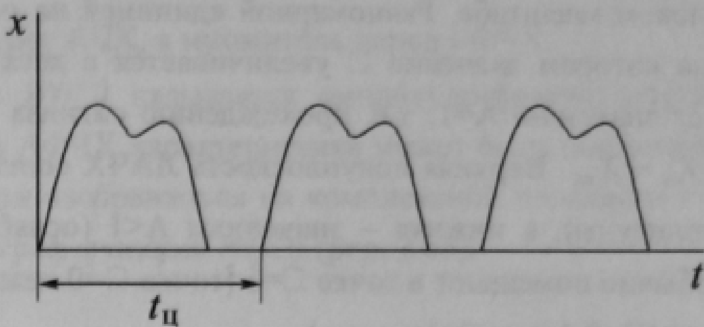


Рисунок 2.27 – График входного периодического процесса

Т.е. для определения процесса на выходе этого звена можно использовать его частотные характеристики, которые можно определить по передаточной функции (см. п. 2.9).

Процесс *x(t)* можно разложить в ряд Фурье на гармонические составляющие. Обозначим через $\omega_ц = 2\pi / t_ц$ основную частоту; □ - номер гармоники; $X_{m□}$ и □$_□$ - амплитуду и фазу гармоники; x_c – среднее значение:

$$x(t) = x_c + \sum_{\mu=1}^{\infty} X_{m\mu} \sin(\mu\omega_ц + \varphi\psi_\mu) .$$

Чтобы найти все вышеперечисленные величины нужно рассчитать коэффициенты ряда Фурье, определяемые по формулам:

$$a_\mu = \frac{2}{t_ц} \int_0^{t_ц} x(t) \sin(\mu\omega_ц t) dt ,$$

$$b_\mu = \frac{2}{t_ц} \int_0^{t_ц} x(t) \cos(\mu\omega_ц t) dt .$$

Тогда:

$$X_{m\mu} = \sqrt{a_\mu^2 + b_\mu^2} \quad ; \qquad \Psi_\mu = arctg\frac{b_\mu}{a_\mu} \quad ; \qquad X_c = \frac{b_0}{2} \quad .$$

Амплитудное значение □-ой гармоники на выходе звена определяется как :

$$Y_{m\mu} = X_{m\mu} \cdot A(\mu\omega_ц)\ ,$$

а среднее

$$y_c = x_c \cdot A(0)\ .$$

Используя принцип суперпозиции, процесс на выходе звена определяется как:

$$y(t) = y_c + \sum Y_{m\mu} \cdot \sin(\mu\omega_ц t + \Psi_\mu + \varphi_\mu) =$$

$$= x_c \cdot A(0) + \sum X_{m\mu} \cdot A(\mu\omega_ц) \cdot \sin(\mu\omega_ц t + \Psi_\mu + \varphi_\mu)\ ,$$

где φ_μ – значение ФЧХ для □-ой гармоники.

Таким образом, не решая дифференциального уравнения звена можно получить процесс на выходе звена.

2.10 Переходные характеристики звена [1,с.65-80; 2,с.20-21; 25-40; 3,с.39-42; 4,с.159-162]

Как уже отмечалось, частотные характеристики позволяют находить решения для стационарного состояния звена или системы. Но в некоторых случаях возникает необходимость исследования работы системы в переходных режимах.

Переходный процесс в САР вызывается приложением задающего или возмущающего воздействия, а также наличием ненулевых начальных условий.

При нахождении кривой переходного процесса в САР имеется трудность, заключающаяся в том, что в реальных САР воздействия носят случайный характер. Поэтому для описания переходных процессов используют некоторые типовые входные воздействия.

2.10.1. Типовые входные воздействия

Обычно используют входные воздействия в виде ступенчатых функций. Для приближенного описания быстро изменяющихся воздействий на входе звена в момент

$t = t_0$ и в установившемся режиме имеющих постоянное значение удобна единичная ступенчатая функция:

$$x(t-t_0) = 1(t-t_0) = \begin{cases} 1, & t > t_0 \\ 0, & t \le t_0 \end{cases}.$$

Она определяет собой единичный скачок (единичная функция Хэвисайда) (рис. 2.28).

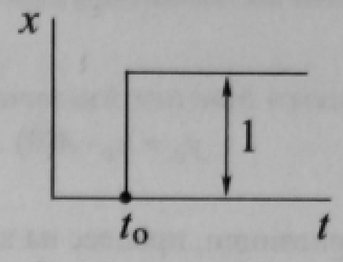


Рисунок 2.28 – График единичной функции Хэвисайда

Если уровень скачка имеет амплитуду B, то он может быть записан через единичную функцию:

$$x(t-t_0) = B \cdot 1(t-t_0).$$

Воздействие такого типа встречается в САР в виде внезапного скачка задающего или возмущающего воздействия на некоторую постоянную величину (например, внезапное включение или отключение электрической нагрузки в электрических сетях).

С помощью ступенчатой функции можно любой процесс представить как сумму скачков (рис. 2.29):

$$x(t) = \sum_i \Delta_i \cdot 1(t-t_i), \tag{2.36}$$

$$x_1(t) = B_1 \cdot 1(t-t_1),$$

$$x_2(t) = (B_2 - B_1) \cdot 1(t-t_2),$$

$$x_3(t) = -B_2 \cdot 1(t-t_3).$$

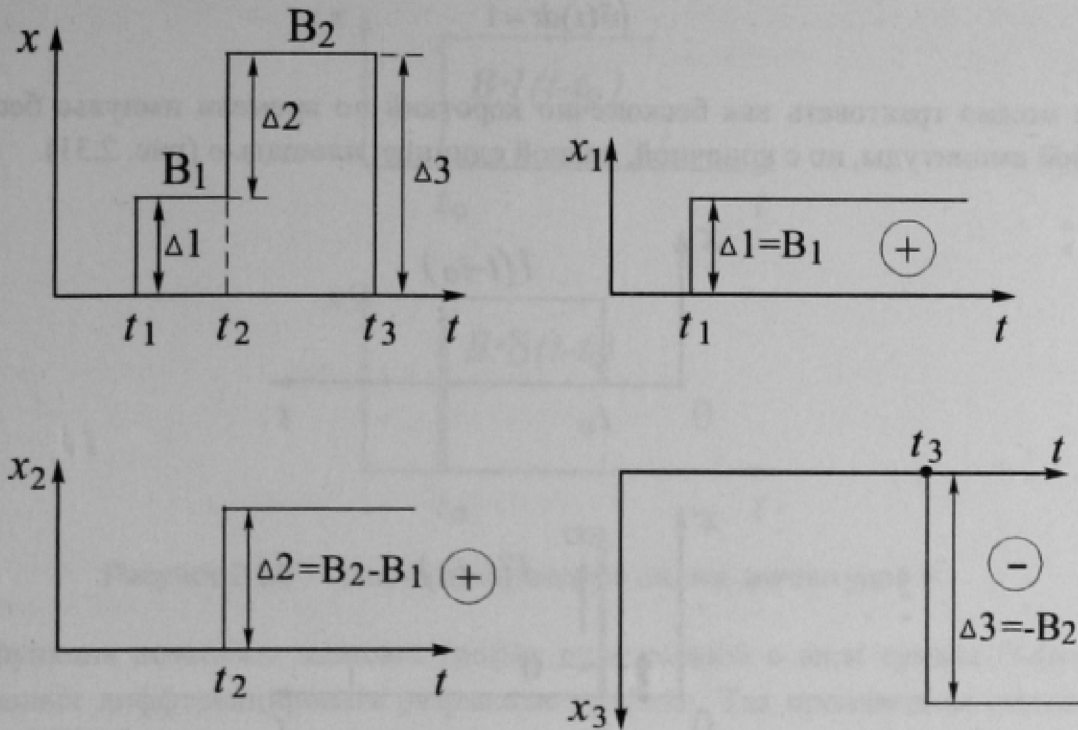


Рисунок 2.29 – Представление входного процесса в виде суммы скачков

Сумма $x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)$ дает искомый процесс

$$x(t)=B_1\cdot 1(t-t_1)+(B_2-B_1)\cdot 1(t-t_2)-B_2\cdot 1(t-t_3)\ .$$

Если функция *x(t)* непрерывна, то ее разбивают на элементарные участки (так называемая решетчатая функция) с шагом $\Delta t\to 0$ (рис. 2.30).

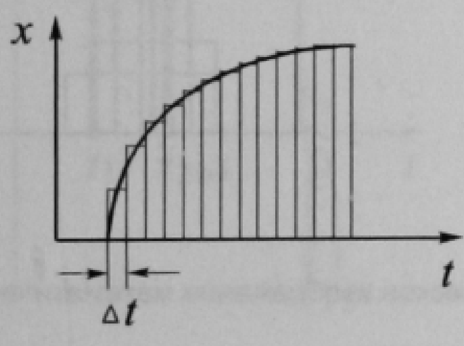


Рисунок 2.30 – График решетчатой функции

Кроме единичной ступенчатой функции используют ее производную:

$$\delta(t-t_0)=1'(t-t_0)\quad ,$$

называемую единичной импульсной функцией или дельта-функцией Дирака. Ее определяют равенством:

$$\int \delta(t)dt = 1$$

т.е. ее можно трактовать как бесконечно короткий по времени импульс бесконечно большой амплитуды, но с конечной, равной единице, площадью (рис. 2.31).

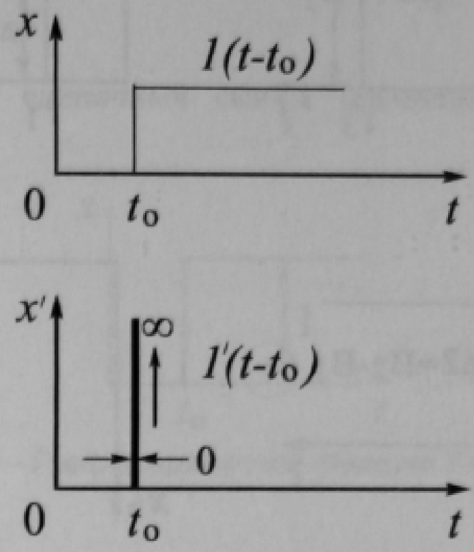


Рисунок 2.31 – График дельта-функции Дирака

Иными словами, если взять прямоугольник площадью 1 и сжать его по оси t, то прямую бесконечной длины (рис. 2.32).

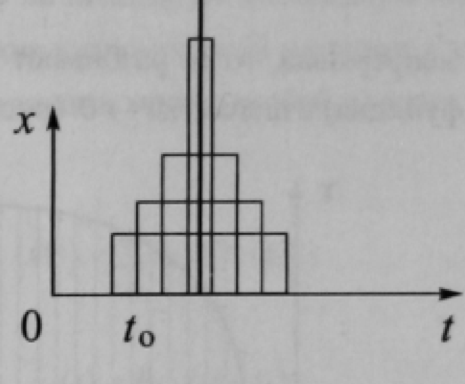


Рисунок 2.32 – Графическое изображение математического понятия дельта-функции

Если имеется скачок с амплитудой B, то его производная может быть выражена (рис. 2.33):

$$B \cdot 1'(t - t_0) = \delta(t - t_0) \cdot B \ .$$

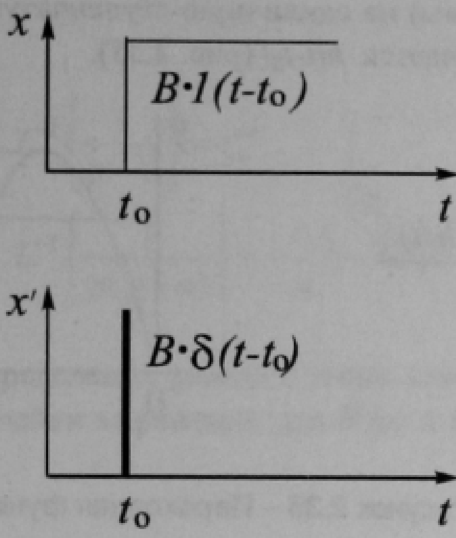


Рисунок 2.33 – График производной скачка амплитудой В

□-функция позволяет записать график производной в виде суммы □-функций, что позволяет дифференцировать разрывные графики. Так производная ступенчатой функции (2.29) будет описана выражением:

$$x'(t) = \sum_i \Delta_i \cdot 1'(t - t_i) =$$

$$= B_1\delta(t - t_1) + (B_2 - B_1)\delta(t - t_2) - B_2\delta(t - t_3)\,,$$

а ее график изображен на рис. 2.34.

Воздействия такого типа встречаются в САР в виде кратковременного удара нагрузки (например, при коротком замыкании в электрической сети).

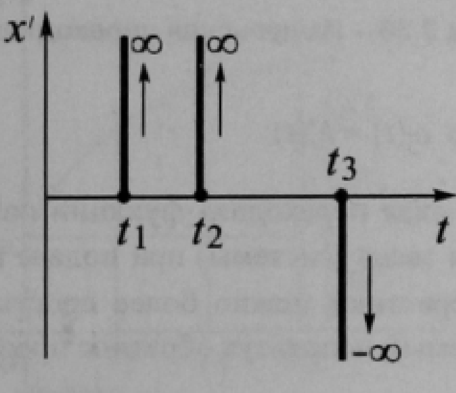


Рисунок 2.34 – График производной ступенчатой функции

2.10.2 Переходные характеристики

Для характеристики реакции звена (системы) на рассмотренные виды входных воздействий используют следующие переходные характеристики.

Реакция звена (системы) на единичную ступенчатую функцию называется переходной функцией и обозначается $h(t\text{-}t_0)$ **(рис. 2.35).**

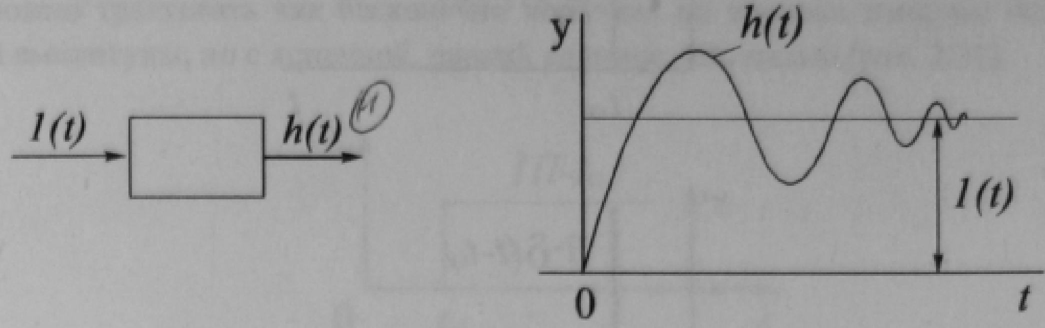


Рисунок 2.35 – Переходная функция

Реакция звена (системы) на импульсную функцию называется импульсной переходной функцией или весовой функцией □$(t\text{-}t_0)$ **(рис. 2.36).**

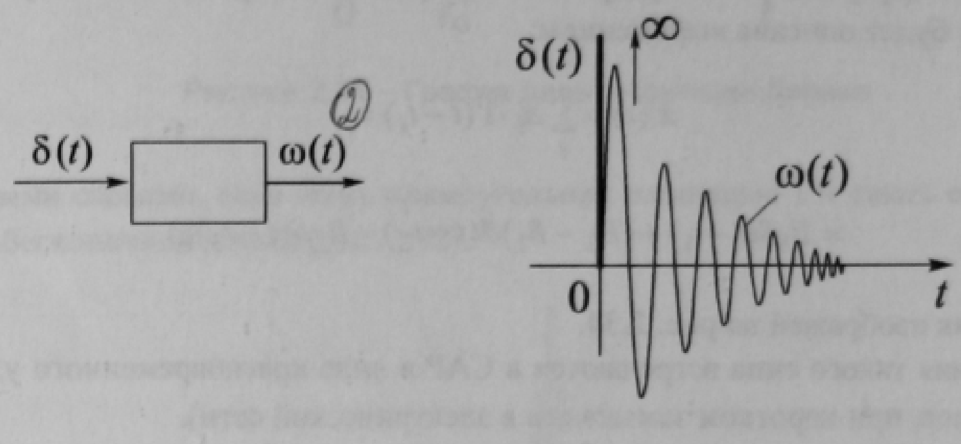


Рисунок 2.36 – Импульсная переходная функция

Так как $\delta(t) = 1'(t)$, то $\omega(t) = h'(t)$.

Переходная и импульсная переходная функции находятся путем решения дифференциального уравнения звена (системы) при подаче на вход 1(t) или □(t). Доказано, что найти эти характеристики можно более простым путем – по передаточной функции этого звена (системы), используя обратное преобразование Лапласа:

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{1}{p}W(p)\right\},$$

$$\omega(t) = L^{-1}\{W(p)\}.$$

Существуют таблицы обратного преобразования Лапласа для ряда наиболее часто встречающихся выражений.

Например:

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{p-a}\right\}=\ell^{at},$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{p(p-a)}\right\}=-\frac{1}{a}\left(1-\ell^{at}\right).$$

Таким образом, для определения реакции звена (системы) на единичную или дельта-функции достаточно найти выражение для *W(p)* и осуществить обратное преобразование Лапласа.

2.11 Определение реакции звена (системы) на входное воздействие с помощью переходных характеристик

Если известны переходные характеристики звена *h(t)* или □*(t)* и входной процесс *x(t)*, то можно найти выходной процесс *y(t)*. Суть расчета заключается в том, что входной процесс представляется в виде суммы скачков. Находятся реакции звена (системы) на каждый скачок, а затем, на основании принципа суперпозиции, реакции суммируются. Реакция на скачок величиной □ определяется: $y(t)=\Delta\cdot h(t)$.

Упрощение состоит в том, что не решая дифференциального уравнения, реакция системы определяется по известной реакции на скачок .

Если входной процесс непрерывный, то он может быть представлен в виде суммы элементарных скачков через интервал времени Δt (рис. 2.37).

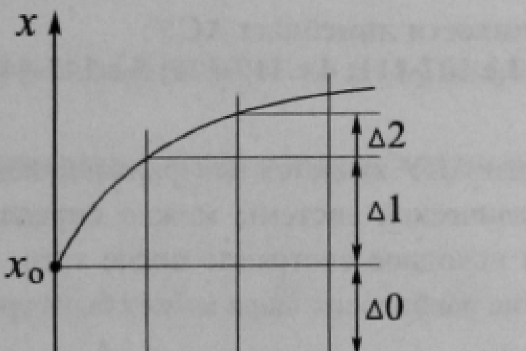


Рисунок 2.37 – Представление непрерывного процесса в виде суммы скачков

Так как □*t* очень мал, то приращение функции в точке □*ᵢ* равно произведению производной в точке на □*t*. Тогда

$$\Delta_0=x_0\ ;$$

$$\Delta_1=x'(0)\cdot\Delta t\ ;$$

$$\Delta_2 = x'(\Delta t)\cdot \Delta t\ ;$$

а выходной процесс

$$y(t) \approx x_0 \cdot h(t_0) + x'(0)\cdot h(t_1)\Delta t + x'(\Delta t)\cdot h(t_2)\Delta t + \dots .$$

При $\Delta t \to 0$ сумма переходит в интеграл, который называется интегралом Дюамеля. А переходный процесс на выходе звена (системы), т.е. реакция, определяется:

$$y(t) = x_0 h(t) + \int_0^t h(t-\tau)\cdot x'(\tau) d\tau \quad ,$$

где интегрирование ведется по $\tau = i\Delta t$, а t – величина постоянная.

Можно записать это же выражение иначе:

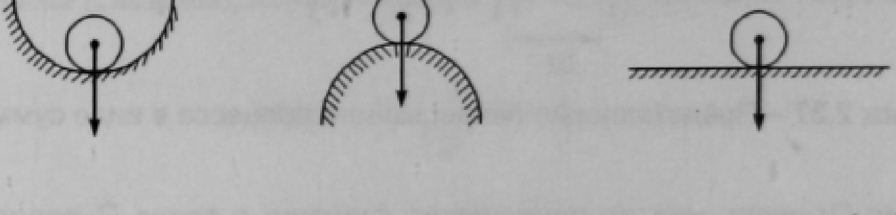
$$y(t) = x_0 h(t) + \int_0^t \omega(t-\tau)\cdot x(\tau) d\tau\ .$$

Таким образом, не решая дифференциального уравнения, можно получить реакцию системы (звена) на любое воздействие.

3 УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

3.1 Понятие устойчивости линейных АСУ [1,с.107; 2,с.84-90; 3,с.107-111; 4,с.119-126; 5,с.142-143]

Оценка устойчивости АСУ является центральной задачей при их исследовании. Устойчивость любой физической системы можно определить, как стремление этой системы возвратиться в исходное состояние после того, как она была выведена из него. Например, состояние равновесия шара может быть трех видов (рис. 3.1).



а) устойчивое; б) неустойчивое в) безразличное (нейтральное)

Рисунок 3.1 – Состояния равновесия шара