МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ ИНСТИТУТ

«УТВЕРЖДАЮ »
ДИРЕКТОР АДИ ГОУВПО «ДонНТУ»
М. Н. ЧАЛЬЦЕВ
12.04.2017 г.

Кафедра «Высшая математика»

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА» (ДЛЯ СТУДЕНТОВ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ 23.03.01 «ТЕХНОЛОГИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ПРОЦЕССОВ», 27.03.04 «УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ», 23.05.01 «НАЗЕМНЫЕ ТРАНСПОРТНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА», 23.03.03 «ЭКСПЛУАТАЦИЯ ТРАНСПОРТНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ МАШИН И КОМПЛЕКСОВ», 08.03.01 «СТРОИТЕЛЬСТВО», 20.03.01 «ТЕХНОСФЕРНАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ», 08.05.03 «СТРОИТЕЛЬСТВО, ЭКСПЛУАТАЦИЯ, ВОССТАНОВЛЕНИЕ И ТЕХНИЧЕСКОЕ ПРИКРЫТИЕ АВТОМОБИЛЬНЫХ ДОРОГ, МОСТОВ И ТОННЕЛЕЙ», 38.03.02 «МЕНЕДЖМЕНТ» ВСЕХ ФОРМ ОБУЧЕНИЯ)

2/37-2017-01

«РЕКОМЕНДОВАНО»
Учебно-методическая
комиссия факультета
«Транспортные технологии»
Протокол № 1 от 20.01.2017

«РЕКОМЕНДОВАНО»
Учебно-методическая
комиссия факультета
«Экономика и управление»
Протокол № 4 от 24.12.2016

«РЕКОМЕНДОВАНО»
Учебно-методическая
комиссия факультета
«Автомобильный транспорт»
Протокол № 2 от 16.11.2016

«РЕКОМЕНДОВАНО»
Учебно-методическая
комиссия факультета
«Автомобильные дороги»
Протокол № 5 от 18.01.2017

«РЕКОМЕНДОВАНО»
Кафедра «Высшая математика»
Протокол № 4. от 14.10.2016

Горловка – 2017

УДК 519.2

Учебно–методические пособие к выполнению контрольных работ по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика» (для студентов направлений подготовки 23.03.01 «Технология транспортных процессов», 27.03.04 «Управление в технических системах», 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства», 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов», 08.03.01 «Строительство», 20.03.01 «Техносферная безопасность», 08.05.03 «Строительство, эксплуатация, восстановление и техническое прикрытие автомобильных дорог, мостов и тоннелей», 38.03.02 «Менеджмент» всех форм обучения), [Электронный ресурс] / составители М. Е. Королев. – Горловка: ГОУВПО «ДонНТУ» АДИ, 2017.

Учебно-методическое пособие отвечает структуре дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика», в котором приведены примеры решений типовых задач и индивидуальные задания по теме «Теория вероятностей и математическая статистика».

Составители: Вовк Л. П., д-р техн. наук, проф.
Королев Е. А., канд. физ.-мат.наук, доц.

Ответственный за выпуск: Ефремов Н. Ф.

Рецензент: Королев М.Е., канд. физ.-мат.наук, доц.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

При изучении курса высшей математики наибольшие трудности возникают у студентов при решении практических задач. Решение и анализ задач позволяют понять и запомнить основные теоремы и формулы данного курса. Умение решать задачи – лучший критерий оценки глубины изучения программного материала.

Данные методические указания относятся к теме «Теория вероятностей и математическая статистика». Для развития навыков самостоятельного решения практических задач предложены индивидуальные задания по основным разделам темы. Цель заданий – закрепить знание основных теорем и формул, освоить приемы решения задач.

Каждый студент выполняет пять задач, условия которых взяты из книги I и которые приведены в разделе 3 настоящей работы. Выбор номеров задач необходимо производить согласно варианту, соответствующему номеру зачетной книжки. Например, если студент имеет номер зачетной книжки 160987183, то для выбора номеров задач следует принять во внимание лишь три последние цифры и расположить под ними три первые буквы русского алфавита, например,

1 8 3
а б в

Затем нужно обратиться к помещенной ниже таблице 1 и из каждого ее вертикального столбца, обозначенного внизу определенной буквой, взять одно число, находящееся в той горизонтальной строке, номер которой соответствует этой букве или разности б–в.

Таблица 1. Варианты заданий

Номер строки	Номера задач контрольных заданий				
1	522	532	545	555	573
2	530	533	541	553	574
3	523	531	546	556	575
4	528	538	544	554	571
5	526	537	550	557	572
6	527	539	542	552	580
7	529	534	547	558	576
8	525	540	548	551	579
9	521	535	543	559	577
10	524	536	549	560	578
	в	б-в	б	в	б-в

Например, номера задач, которые нужно решить для варианта 160987183, следующие: 523, 537, 548, 556, 572.

1 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Вероятностью P события A называется отношение числа m благоприятствующих исходов к числу всех возможных исходов n, образующих полную группу равновозможных несовместных событий:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \tag{1.1}$$

Относительная частота события A определяется равенством

$$W(A) = \frac{m}{n}, \tag{1.2}$$

где m – число испытаний, в которых событие A наступило;
n – общее число произведенных испытаний.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A)+P(B)=P(A+B). \tag{1.3}$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления

$$P(A+B) = P(A)+P(B)-P(A\cdot B). \tag{1.4}$$

Сумма вероятностей событий $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, ..., \mathrm{A}_n$, образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+...+P(A_n)=1. \tag{1.5}$$

Теорема умножения вероятностей независимых событий

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B). \tag{1.6}$$

Теорема умножения вероятностей зависимых событий

Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению одного из них на условную вероятность второго

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B). \tag{1.7}$$

Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\overline{A_1}, \overline{A_2}, ..., \overline{A_n}$:

$$P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot ... \cdot q_n. \tag{1.8}$$

В частности, если все события $A_1, A_2, ..., A_n$, имеют одинаковую вероятность, равную P, то вероятность появления хотя бы одного из событий:

$$P(A) = 1 - q^n. \tag{1.9}$$

Формула полной вероятности

Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, ..., B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P_{B_i}(A). \tag{1.10}$$

Формула Бейеса

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий (гипотез $B_1, B_2, ..., B_n$, которые образуют полную группу событий). Если событие A уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формуле Бейеса:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(A)} (i = \overline{1, n}), \tag{1.11}$$

где

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P_{B_i}(A). \tag{1.12}$$

Задача 1

В урне 10 шаров: 3 белых и 7 черных. Из урны вынимают сразу два шара. Какова вероятность Р того, что оба шара окажутся белыми?

Решение

Число n всех равновероятных исходов испытания равно числу способов, которыми можно из 10 шаров вынуть два, т. е. числу сочетаний из 10 элементов по 2:

$$n = \frac{10!}{2!(10-2)!} = 45.$$

Число благоприятных исходов

$$m = C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$$

Следовательно, по формуле (4) искомая вероятность

$$P = \frac{m}{n} = \frac{2}{45} = \frac{1}{15}.$$

Задача 2

Из полной колоды карт (52 карты) вынимаются наугад сразу три карты. Найти вероятность того, что эти карты будут: тройка, семерка, туз.

Решение

Число всех различных троек карт в колоде $n = C_{52}^2$. Число троек, семерок и тузов – по четыре, т. е. число благоприятствующих исходов $m = 4^3 = e4$, следовательно:

$$P = \frac{64}{5525} = 0,0029.$$

Задача 3

На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлены 15 учебников, причем 5 из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу 3 учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете (событие A).

Решение

I способ. Требование (хотя бы один из взятых трех учебников окажется в переплете) будет осуществлено, если произойдет любое из следующих трех несовместных событий:

B – один учебник в переплете, два без переплета;

C – два учебника в переплете, один без переплета;

D – три учебника в переплете.

Интересующее нас событие A (хотя бы один из взятых трех учебников в переплете) можно представить в виде суммы этих трех событий:

$$A=B+C+D.$$

По теореме сложения вероятностей несовместных событий

$$P(A) = P(B)+ P(C) + P(D). \tag{1.13}$$

Найдем вероятности событий B, C и D:

$$P(B)=\frac{C_5^1 C_{10}^2}{C_{15}^3}=\frac{45}{91},\ P(C)=\frac{C_5^2 C_{10}^1}{C_{15}^3}=\frac{20}{91},P(D)=\frac{C_5^3}{C_{15}^3}=\frac{2}{91}.$$

Подставив эти вероятности в равенство (1.12), окончательно получим:

$$P(A)=\frac{45}{91}+\frac{20}{91}+\frac{2}{91}=\frac{67}{91}.$$

II способ. События A (хотя бы один из взятых трех учебников имеет переплет) и $\overline{A}$ (ни один из взятых учебников не имеет переплет) противоположные, поэтому (сумма вероятностей двух противоположных событий равна единице):

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Отсюда

$$P(A)=1-P(\overline{A}).$$

Вероятность появления события $\overline{A}$ (ни один из взятых учебников не имеет переплет) равна:

$$P(\overline{A})=\frac{C_{10}^3}{C_{15}^3}=\frac{24}{91}.$$

Искомая вероятность равна

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{24}{91}=\frac{67}{91}.$$

Задача 4

При приемке партии из 80 изделий, среди которых 6 бракованных, проверяется 40 наудачу выбранных изделий. Определить вероятность того, что партия будет принята, если условиями приема допускается бракованных изделий не более двух среди проверенных.

Решение

Обозначаем через A событие, состоящее в том, что при проверке 40 изделий не получено ни одного бракованного изделия, через B – событие, состоящее в том, что получено только одно бракованное изделие, а через C – событие, состоящее в том, что получено два бракованных изделия. События A, B и C несовместны.

Согласно условиям приема, партия изделий будет принята, если будет иметь место событие $A+B+C$. Поэтому, по теореме сложения вероятностей, искомая вероятность

$$P=P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C).$$

Из 80 изделий 40 изделий можно выбрать C_{80}^{40} способами. Из 74 не бракованных изделий 40 изделий можно выбрать C_{74}^{40} способами. Следовательно,

$$P(A)=\frac{C_{74}^{40}}{C_{80}^{40}}.$$

Аналогично:

$$P(B)=\frac{C_{74}^{39}\cdot C_{0}^{1}}{C_{80}^{40}},\ P(C)=\frac{C_{74}^{38}\cdot C_{6}^{2}}{C_{80}^{40}}.$$

Поэтому

$$P=P(A)+P(B)+P(C)=P(A)=\frac{C_{74}^{40}}{C_{80}^{40}}+\frac{C_{74}^{39}\cdot C_{0}^{1}}{C_{80}^{40}}+\frac{C_{74}^{38}\cdot C_{6}^{2}}{C_{80}^{40}}\approx 0,337.$$

Задача 5

Для сигнализации об аварии установлены три независимо работающих устройства. Вероятность того, что при аварии сработает первое устройство, равна 0,9, второе – 0,95, третье – 0,85. Найти вероятность того, что при аварии сработает: а) только одно устройство; б) только два устройства; в) все три устройства.

Решение

а) введем обозначения событий:

B_1 – при аварии сработал только первый сигнализатор, т. е. появилось только событие A_1;

B_2 – при аварии сработал только второй сигнализатор, т. е. появилось только событие A_2;

B_3 – при аварии сработал только третий сигнализатор, т. е. появилось событие A_3.

Появление события B_1 равносильно появлению события $A_1\overline{A_2 A_3}$ (сработал первый сигнализатор и не сработал второй и третий), т. е. $B_1 = A_1\overline{A_2 A_3}$. Аналогично $B_2 = \overline{A_1}A_2\overline{A_3}$ и $B_3 = \overline{A_1 A_2}A_3$. События B_1, B_2 и B_3 – несовместны, поэтому применима теорема сложения:

$$P(B_1 + B_2 + B_3) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3).$$

Найдем вероятности каждого из событий: B_1, B_2 и B_3. События A_1, A_2 и A_3 независимы, следовательно, независимы события $A_1, \overline{A_2}$ и $\overline{A_3}$, а также события $\overline{A_1}, A_2$ и $\overline{A}_3$, и $\overline{A_1}, \overline{A_2}$ и A_3, поэтому применима теорема умножения:

$$P(B_1) = P(A_1\overline{A_2 A_3}) = P(A_1)\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(\overline{A_3}) = p_1 q_2 q_3,$$

$$P(B_2) = P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3}) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3) = q_1 p_2 q_3,$$

$$P(B_3) = P(\overline{A_1 A_2}A_3) = P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(A_3) = q_1 q_2 p_3.$$

После этого находим искомую вероятность появления только одного из событий – B_1, B_2 и B_3

$$P(B_1 + B_2 + B_3) = p_1 q_2 q_3 + q_1 p_2 q_3 + q_1 q_2 p_3.$$

Поскольку $p_1 = 0{,}9$, $p_2 = 0{,}95$, $p_3 = 0{,}85$, $q_1 = 1 - p_1 = 0{,}1$, $q_2 = 1 - p_2 = 0{,}05$, $q_3 = 0{,}15$, окончательно имеем

$$P(B_1 + B_2 + B_3) =$$

$$= 0{,}9\cdot 0{,}05\cdot 0{,}15 + 0{,}1\cdot 0{,}95\cdot 0{,}15 + 0{,}1\cdot 0{,}05\cdot 0{,}85 = 0{,}02525;$$

б) аналогично найдем вероятность того, что при аварии сработает только два устройства:

$$P(B_1 + B_2 + B_3) = p_1 p_2 q_3 + p_1 q_2 p_3 + q_1 p_2 p_3 =$$

$$= 0{,}9\cdot 0{,}95\cdot 0{,}15 + 0{,}9\cdot 0{,}85\cdot 0{,}05 + 0{,}95\cdot 0{,}85\cdot 0{,}1 = 0{,}34725;$$

в) вероятность совместного появления независимых событий B_1, B_2 и B_3 найдем по теореме умножения

$$P(B_1\cdot B_2\cdot B_3) = p_1 p_2 p_3 = 0{,}9\cdot 0{,}95\cdot 0{,}85 = 0{,}72675.$$

Задача 6

В электрическую цепь последовательно включены три элемента, работающих не зависимо один от другого. Вероятность отказов первого, второго и третьего элементов $p_1 = 0{,}1, p_2 = 0{,}15, p_3 = 0{,}2$ соответственно. Найти вероятность того, что тока в цепи не будет.

Решение

Поскольку элементы последовательно включены в цепь – тока в ней не будет (событие *A*), если откажет хотя бы один из элементов. Искомая вероятность по (1.8)

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 = 1 - (1 - 0{,}1) \cdot (1 - 0{,}15) \cdot (1 - 0{,}2) = 0{,}388.$$

Задача 7

Вероятность хотя бы одного попадания в мишень стрелком при трех выстрелах равна 0,875. Найти вероятность попадания при одном выстреле.

Решение

Вероятность попадания в мишень хотя бы при одном из трех выстрелов (событие *A*) равна $P(A) = 1 - q^3$

где q – вероятность промаха.

По условию $P(A) = 0{,}875$.

Следовательно, $q^3 = 1 - 0{,}875 = 0{,}125$.

Отсюда $q = \sqrt[3]{0{,}125} = 0{,}5$.

Искомая вероятность равна $P = 1 - q = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$.

Задача 8

В вычислительной лаборатории имеется 6 клавишных автоматов и 4 полуавтомата. Вероятность того, что за время выполнения некоторого расчета автомат не выйдет из строя, равна 0,95; для полуавтомата эта вероятность равна 0,8. Производится расчёт на машине, выбранной наугад. Найти вероятность того, что до окончания расчета машина не выйдет из строя.

Решение

Обозначим *A* событие, состоящее в том, что до окончания расчета машина не выйдет из строя. Возможны два предположения (гипотезы) о выборе машины: B_1 – для расчета взят автомат, B_2 – полуавтомат. Вероятность этих предположений, соответственно:

$$P(B_1) = \frac{6}{10}, P(B_2) = \frac{4}{10}.$$

Условная вероятность того, что до окончания некоторого расчета автомат не выйдет из строя $P_{B_1}(A)=0,95$, для полуавтомата – $P_{B_2}(A)=0,8$. Искомую вероятность того, что до окончания расчета наугад выбранная машина не выйдет из строя, находим по формуле полной вероятности (1.10):

$$P(A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)=\frac{6}{10}\cdot 0,95+\frac{4}{10}\cdot 0,8=0,89.$$

Задача 9

Шина легкового автомобиля работает в двух режимах при скорости 90 км/ч и 130 км/ч. Со скоростью 90 км/ч автомобиль движется в 80 % случаев его работы, с повышенной скоростью – в 20 % случаев. Вероятность отказа шины за время *t* при скорости 130 км/ч равна 0,7, а при скорости 90 км/ч – 0,1. Определить полную вероятность отказа шины за время *t*.

Решение

Обозначим событие *A* – отказ шины за время *t*, событие B_1 – работа шины при скорости 90 км/ч, событие B_2 – шины при скорости 130 км/ч. События B_1 и B_2 – несовместные. Событие *A* может проявиться только с одним из событий B_1 или B_2.

$$P(B_1)=0,8, P(B_2)=0,2, P_{B_1}(A)=0,1, P_{B_2}(A)=0,7.$$

Тогда по формуле (1.10)

$$P(A)=0,8\cdot 0,1+0,2\cdot 0,7=0,22.$$

Задача 10

На склад поступило 1000 подшипников. Из них 200 изготовлены на 1-м заводе, 460 – на 2-м и 340 – на 3-м. Вероятность того, что подшипник окажется нестандартным, для 1-го завода равна 0,03, для 2-го – 0,02, для 3-го – 0,01. Взятый наудачу подшипник оказался нестандартным. Какова вероятность того, что он изготовлен 1-м заводом?

Решение

Пусть *A* – событие, состоящее в том, что взятый подшипник нестандартный, а H_1, H_2 и H_3 – гипотезы, что он изготовлен 1-м, 2-м или 3-м заводом, соответственно. Вероятности указанных гипотез составляют:

$$P(H_1)=\frac{200}{1000}=0,2,\ P(H_2)=\frac{460}{1000}=0,46,\ P(H_3)=\frac{340}{1000}=0,34.$$

Из условия задачи следует, что:

$$P_1=P_{H_1}(A)=0,03,\ P_2=P_{H_2}(A)=0,02,\ P_3=P_{H_3}(A)=0,01.$$

Найдем $P_A(H_1)$, т. е. вероятность того, что подшипник, оказавшийся нестандартным, изготовлен 1-м заводом. По формуле Бейеса (1.11) имеем

$$P_A(H_1)=\frac{P(H_1)\cdot P_1}{P(H_1)\cdot P_1+P(H_2)\cdot P_2+P(H_3)\cdot P_3}=$$

$$=\frac{0,2\cdot 0,03}{0,2\cdot 0,03+0,46\cdot 0,02+0,34\cdot 0,01}\approx 0,322.$$

Таким образом, вероятность гипотезы, что подшипник изготовлен 1-м заводом, изменилась после того, как стало известно, что он нестандартен.

Формула Бернулли.

Пусть проводится серия из n опытов, подчиненных схеме испытаний Бернулли. Вероятность появления события A в отдельном опыте равна P, а вероятность непоявления события $q=1-p$. Вероятность того, что в серии из n опытов событие A появится ровно k раз вычисляют по формуле

$$P_n(K)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)}\cdot p^k q^{n-k}. \tag{1.14}$$

Формула Пуассона.

Проводимые опыты подчинены схеме испытаний Бернулли. Число опытов n достаточно велико, а вероятность появления события A в отдельном опыте достаточно мала. В этом случае

$$P_n(K)=\frac{a^k}{k!}\cdot e^{-a}. \tag{1.15}$$

Локальная теорема Лапласа.

Если вероятность P появления события A в каждом опыте постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность того, что событие A появиться в n опытах равно k раз равна:

$$P_n(k)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\cdot\varphi(x), \tag{1.16}$$

где $x=\dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Функцию $\varphi(x)$ вычисляют по таблице.

Свойства функции $\varphi(x)$:

1. $\varphi(x)$ – нечетная функция, $\varphi(-x)=\varphi(x)$.

2. При $x>0$ функция $\varphi(x)$ монотонно убывающая.

3. При $x\geq 5$ можно считать $\varphi(x)=0$. Поэтому в таблицах значения функции $\varphi(x)$ даны для $x<5$.

Интегральная теорема Лапласа

Если вероятность P наступления события A в каждом опыте постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A появится от k_1 до k_2 раз, вычисляют по формуле

$$P_n(k_1,k_2)=\varphi(x_1)-\varphi(x_2), \tag{1.17}$$

где

$$x_1=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}},\ x_2=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}},\ \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz. \tag{1.18}$$

Значение функции $\varphi(x)$ которое называется функцией Лапласа, определяют по таблице.

Свойства функции $\varphi(x)$:

1. $\varphi(-x)=-\varphi(x)$ – функция Лапласа нечетная.

2. Функция $\varphi(x)$ – монотонно возрастающая.

3. Для $x\geq 5$ считают $\varphi(x)=0,5$. Поэтому в таблицах не даны значения функции при $x>5$.

Задача 11

Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,6. Какова вероятность того, что 8 выстрелов дадут 5 попаданий?

Решение

Здесь n = 8, k = 5, P = 0,6, q = 1 – 0,6 = 0,4. Используя формулу (1.14), имеем

$$P_8(5)=\frac{8!}{5!(8-5)!}\cdot(0,6)^5\cdot(0,4)^3\approx 0,28.$$

Задача 12

Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна 0,9. Определить вероятность того, что из 6 наудачу взятых деталей 4 окажутся стандартными.

Решение

Условие задачи соответствует схеме повторных испытаний в одинаковых условиях. Поэтому, применяя формулу (1.14) при n = 6, k = 4 и P = 0,9, получим:

$$P_6(4) = C_6^4 (0,9)^4 (0,1)^2 = 0,0984.$$

Задача 13

При диагностировании новых автомобилей ВАЗ 2101 на СТО для 1% транспортных средств диагноз неверен, что обусловлено точностью применяемого оборудования. Какова вероятность получения неправильного диагноза для пяти автомобилей из 500, прошедших диагностирование?

Решение

По условию задачи ошибка при диагностировании новых автомобилей составляет 1 %, тогда вероятность допустить эту ошибку равна 0,01 и не меняется при диагностировании любого транспортного средства. Имеем схему испытаний Бернулли. Всего проверяют 500 машин, следовательно, n = 500. Нас интересует вероятность получения неправильного диагноза у пяти машин, т.е. k = 5.

Число машин велико, вероятность ошибки при диагностировании машин мала, поэтому решим задачу по формуле Пуассона (1.15):

$$a = n \cdot P = 500 \cdot 0,01 = 5.$$

Вероятность мала, практически невозможное событие.

Задача 14

В партии из 1000 изделий имеется 100 окрашенных. Найти вероятность того, что среди наугад взятых из этой партии 50 изделий 5 окажутся окрашенными.

Решение

Вероятность появления одной окрашенной детали в партии из 1000 деталей

$$P = \frac{m_1}{n_1} = \frac{100}{1000} = 0,1.$$

По условию n = 50, k = 5, q = 1, – p = 0,9. Поскольку n = 50 – достаточно большое число, p = 0,1, воспользуемся формулой локальной теоремы Лапласа (1.16).

Найдем

$$x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}=\frac{5-50\cdot 0,1}{\sqrt{50\cdot 0,9\cdot 0,1}}=0.$$

По таблице найдем $\varphi(x)=0,3989.$ Искомая вероятность

$$P_{50}(5)=\frac{0,3989}{\sqrt{50\cdot 0,9\cdot 0,1}}=0,188.$$

Задача 15

Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна p = 0,8. Найти вероятность того, что событие появится:

а) не менее 75 раз и не более 90 раз;

б) не менее 75 раз;

в) не более 74 раз.

Решение

Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа (1.17)

$$P_n(k_1,k_2)=\varphi(x'')-\varphi(x'),$$

где $\varphi(x)$ – функция Лапласа,

$$x'=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}},\quad x''=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}.$$

а) по условию n = 100, p = 0,8, q = 0,2, k_1 = 75, k_2 = 90. Вычислим x' и x'':

$$x'=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{75-100\cdot 0,8}{\sqrt{100\cdot 0,8\cdot 0,2}}=-1,25,$$

$$x''=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{190-100\cdot 0,8}{\sqrt{100\cdot 0,8\cdot 0,2}}=2,5.$$

Учитывая, что функция Лапласа нечетна, т. е. $\varphi(-x)=-\varphi(x)$, получим

$$P_{100}(75;90)=\varphi(2,5)-\varphi(-1,25)=\varphi(2,5)+\varphi(1,25).$$

По таблице найдем $\varphi(2,5)=0,4938, \varphi(1,25)=0,3944.$ Искомая вероятность равна

$$P_{100}(75;90)=0,4938+0,3944=0,8882.$$

б) требование, чтобы событие появилось не менее 75 раз, означает, что число появлений событий может быть равно 75 либо 76,…, либо 100. Таким образом, в рассматриваемом случае следует принять k_1 = 75, k_2 =100. Тогда:

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -1,25,$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 5.$$

По таблице найдем $\varphi(5) = 0,5$, $\varphi(1,25) = 0,3944$.

Искомая вероятность равна

$$P_{100}(75;90) = 0,5 + 0,3944 = 0,8944.$$

в) события – (A появилось не менее 75 раз) и ($\overline{A}$ появилось не более 74 раз) противоположны, поэтому сумма вероятностей этих событий равна единице. Следовательно, искомая вероятность равна

$$P_{100}(0;74) = 1 - P_{100}(75;100) = 1 - 0,8944 = 0,1056.$$

Задача 16

Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна 0,2. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажется непроверенных от 70 до 100 деталей.

Решение

По условию n = 400, k_1 =70, k_2 =100, p = 0,2, q = 0,8. Воспользуемся интегральной теоремой Лапласа:

$$P_{400}(70;100) = \varphi(x'') - \varphi(x').$$

Вычислим нижний и верхний пределы интегрирования:

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = -1,25,$$

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{190 - 100 \cdot 0,8}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} = 2,5.$$

Таким образом, имеем

$$P_{400}(75;100) = \varphi(2,5) - \varphi(-1,25) = \varphi(2,5) + \varphi(1,25).$$

По таблице найдем: $\varphi(2,5) = 0,4938$, $\varphi(1,25) = 0,3944$.

Искомая вероятность

$$P_{400}(75;100) = 0,4938 + 0,3944 = 0,8882.$$

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное (но только одно) значение, причем заранее, до опыта, неизвестно, какое именно.

Дискретной случайной величиной называется такая величина, число возможных значений которой либо конечное, либо бесконечное счетное множество (множество, элементы которого могут быть занумерованы).

Непрерывной случайной величиной называется такая величина, все возможные значения которой непрерывно заполняют некоторый интервал (конечный или бесконечный) числовой оси.

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями.

Закон распределения дискретной случайной величины X может быть задан в виде таблицы, первая строка которой содержит возможные значения x_k, вторая – вероятности P_k:

X	x_1	x_2	…	x_k	…
P	P_1	P_2	…	P_k	…

где

$$\sum_{k=1}^{n} P_k = 1.$$

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности.

$$M(x) = x_1 P_1 + x_2 P_2 + \ldots + x_n P_n. \quad (1.19)$$

Дисперсией случайной величины x называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания

$$D(X) = M((x) - M(X))^2). \quad (1.20)$$

Вычислять дисперсию удобно следующим образом

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X). \quad (1.21)$$

Среднеквадратичным отклонением случайной величины называют квадратный корень из дисперсии

$$G(X) = \sqrt{D(X)}. \quad (1.22)$$

Задача 17

В партии из 15 деталей имеется 3 неокрашенные. Наугад извлечены 2 детали. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины – числа окрашенных деталей среди двух отобранных.

Решение

Случайная величина ***X*** может принять значения: $X_1 = 0$, $X_2 = 1$, $X_3 = 2$.

Вероятность этих значений:

$$P(X=0)=\frac{C_{12}^0 \cdot C_3^2}{C_{15}^2}=\frac{1}{35},$$

$$P(X=1)=\frac{C_{12}^1 \cdot C_3^1}{C_{15}^2}=\frac{12}{35},$$

$$P(X=2)=\frac{C_{12}^2 \cdot C_3^0}{C_{15}^2}=\frac{22}{35}.$$

Таблица распределения случайной величины имеет вид:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{22}{35}$

Математическое ожидание случайной величины

$$M(X)=0\cdot\frac{1}{35}+1\cdot\frac{12}{35}+2\cdot\frac{22}{35}=1,6.$$

Задача 18

Дискретная случайная величина X имеет только два возможных значения: x_1 и x_2, причем $x_2 > x_1$. Вероятность того, что X примет значение x_1, равна 0,6. Найти закон распределения величины ***X***, если математическое ожидание и дисперсия известны: $M(X) = 1{,}4$; $D(X) = 0{,}24$.

Решение

Так как сумма вероятностей всех возможных значений дискретной случайной величины равна единице, то вероятность того, что X примет значение x_2, равна 1 – 0,6 = 0,4.

Напишем закон распределения:

X	x_1	x_2
P	0,6	0,4

Для отыскания x_1 и x_2 надо составить два уравнения, связывающие эти числа. С этой целью выразим известные математическое ожидание и дисперсию через x_1 и x_2.

Найдем $M(X)$

$$M(X) = 0,6 \cdot x_1 + 0,4 \cdot x_2.$$

По условию $M(X)$ = 1,4, следовательно,

$$0,6 \cdot x_1 + 0,4 \cdot x_2 = 1,4.$$

Одно уравнение, связывающее x_1 и x_2, получено. Для того, чтобы получить второе уравнение, выразим известную дисперсию через x_1 и x_2.

Напишем закон распределения X^2:

X	x_1^2	x_2^2
P	0,6	0,4

Найдем $M(X^2)$

$$M(X^2) = 0,6 \cdot x_1^2 + 0,4 \cdot x_2^2.$$

Найдем дисперсию

$$D(X) = M(X^2) - (M(x))^2 = 0,6 \cdot x_1^2 + 0,4 \cdot x_2^2 - (1,4)^2.$$

Подставим сюда $D(X)$ = 0,24. После элементарных преобразований получим

$$0,6 \cdot x_1^2 + 0,4 \cdot x_2^2 = 2,2.$$

Таким образом, получим систему у равнений

$$\begin{cases} 0,6 \cdot x_1 + 0,4 \cdot x_2 = 1,4 \\ 0,6 \cdot x_1^2 + 0,4 \cdot x_2^2 = 2,2 \end{cases}.$$

Решив эту систему, имеем два решения: x_1 = 1, x_2 = 2 и x_1 = 1,8, x_2 = 0,8.

По условию $x_2 > x_1$, поэтому задаче удовлетворяет лишь первое решение: x_1 = 1 и x_2 = 2.

Учитывая это, получим искомый закон распределения:

X	1	2
P	0,6	0,4

Интегральной функцией распределения называют функцию $F(x)$, определяющую для каждого значения *x* вероятность того, что случайная величина *X* примет значение, меньше *x*, т. е $F(x)=P(X<x)$. Вероятность того, что случайная величина ***X*** примет значение, заключенное в интервале (*a; b*), равна приращению интегральной функции на этом интервале:

$$P(a<x<b)=F(b)-F(a). \tag{1.23}$$

Для дискретной случайной величины *X*, которая может принимать значения $x_1, x_{2,...,}x_n$, функция распределения будет иметь вид:

$$F(x)=\sum_{x_i<x} P(X=x_i). \tag{1.24}$$

Задача 19

По цели производится три независимых выстрела. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,4. Построить функцию распределения числа попаданий.

Решение

Обозначим число попаданий через *X*, тогда возможные значения случайной величины *X* будут следующие: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$.

Вероятность возможных значений случайной величины определяем по формуле Бернулли

$$P(X=x_i)=C_n^{x_i} p^{x_i} q^{n-x_i},$$

где $n = 3$.

Будем иметь: $P(X=0) = 0{,}216$, $P(X=1) = 0{,}432$, $P(X=2) = 0{,}288$, $P(X=3) =$ $= 0{,}064$.

Составляем ряд распределения:

X	0	1	2	3
P	0,216	0,432	0,288	0,064

Построим с помощью выражения (1.24) функцию распределения случайной величины *X*:

1. При $x \le 0, F(x)=\sum_{x_i<0} P(X=x_i)=0.$

2. При $0<x\le 1, F(x)=\sum_{x_i<1} P(X=x_i)=P(X=0)=0,216.$

3. При $1<x\le 2, F(x)=\sum_{x_i<2} P(X=x_i)=P(X=0)+P(X=1)=$
$=0,216+0,432=0,648.$

4. При $2<x\le 3, F(x)=\sum_{x_i<3} P(X=x_i)=P(X=0)+P(X=1)+$
$+P(X=2)=0,216+0,432+0,288=0,936.$

5. При $x>3, \mathrm{F(x)} = \sum_{x_i<\infty} P(X=x_i) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+$
$+P(X=3)=1.$

График функции распределения представлен на рисунке 1. В рассмотренном примере значения случайной величины разделены интервалами, внутри которых других возможных значений нет. Характерно то, что на этих интервалах функция распределения $F(x)$ постоянна, т. е. график функции распределения представляет собой ступенчатую ломаную линию.

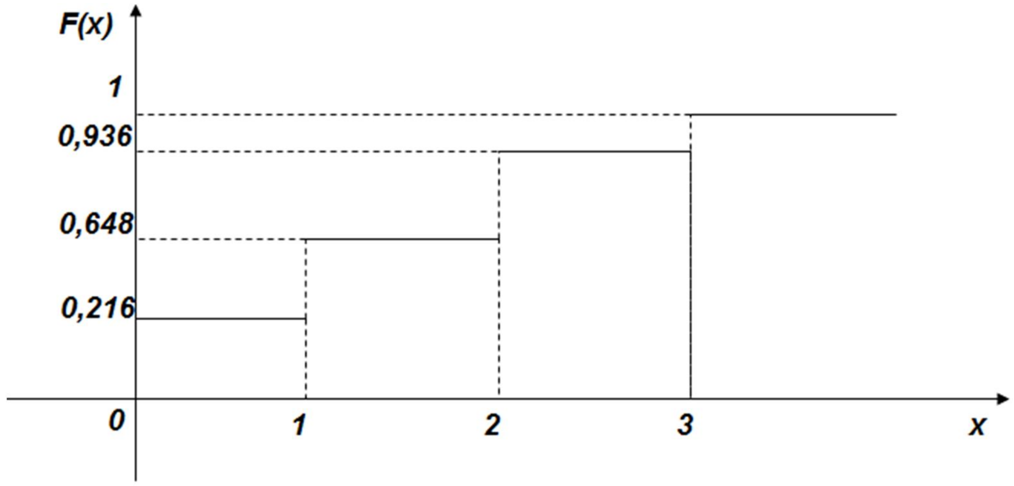

Рисунок 1 – График функции распределения

Из графика видно, что при каждом новом значении случайной величины ступень поднимается выше на величину, равную вероятности этого значения.

Дифференциальной функцией распределения вероятностей называют первую производную от интегральной функции

$$f(x) = F'(x) \qquad (1.25)$$

Часто вместо термина «дифференциальная функция» пользуются термином «плотность вероятности».

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(a;b)$, определяется равенством

$$P(0< X < b) = \int_a^b f(x)dx. \qquad (1.26)$$

Зная дифференциальную функцию, можно найти интегральную функцию по формуле

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \qquad (1.27)$$

Несобственный интеграл от дифференциальной функции в пределах от $-\infty$ до ∞ равен единице

$$\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = 1. \tag{1.28}$$

Задача 20

Случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью

$$f(x) = \begin{cases} a\sin x, \text{при } 0 \le x \le \pi \\ 0, \text{ при } x < 0, x > \pi \end{cases} .$$

Требуется:

1. Найти коэффициент a.
2. Найти вероятность попадания случайной величины на участок от 0 до $\pi/4$.

Решение

1) Для определения коэффициента a воспользуемся свойством (1.28) плотности распределения

$$\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int\limits_{0}^{\pi} a\sin x dx = -a\cos x|_0^{\pi} = 2a = 1.$$

Откуда $a = 1/2$.

2) По формуле (1.26) имеем

$$P(0 < \mathrm{x} < \frac{\pi}{4}) = \int\limits_{0}^{\pi/4} \frac{1}{2}\sin x dx = -\frac{1}{2}\cos x|_0^{\pi/4} =$$

$$= -\frac{1}{2}(\cos\frac{\pi}{4} - \cos 0) \approx 0{,}15.$$

Задача 21

Плотность распределения непрерывной случайной величины задана следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \quad \text{если } x < 0; \\ \frac{3}{32}(4x - x^2), \text{если } 0 \le x \le 4; \\ 0, \quad \text{если } x > 4. \end{cases}$$

Определить вероятность того, что случайная величина X примет значение, удовлетворяющее неравенствам $-2 \le \boldsymbol{X} \le 3$. Найти функцию распределения заданной случайной величины.

Решение

Используя формулу (1.26), имеем:

$$P(-2 \le X \le 3) = \int_{-2}^{3} f(x)dx = \int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{3} f(x)dx =$$

$$= \int_{-2}^{0} 0 \cdot dx + \int_{-2}^{3} \frac{3}{32}(4x - x^2)dx = \frac{27}{32}.$$

По формуле (1.27) находим функцию распределения $F(x)$ для заданной случайной величины.

Если $-\infty < x \le 0$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{0}^{x} 0 \cdot dx = 0.$

Если $0 < x \le 4$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx + \int_{0}^{x} f(x)dx =$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{x} \frac{3}{32}(4x - x^2)dx = \frac{6x^2 - x^2}{32}.$$

Если $x > 4$, то $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{4} f(x)dx + \int_{4}^{x} f(x)dx =$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx + \int_{0}^{4} \frac{3}{32}(4x - x^2)dx + \int_{4}^{x} 0 \cdot dx = 1.$$

Итак, $F(x) = \begin{cases} 0, \text{если}\, x < 0; \\ \dfrac{6x^2 - x^3}{32}, \quad \text{если}\, 0 \le x \le 4; \\ 1, \text{если}\, x > 4. \end{cases}$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X , возможные значения которой принадлежат оси Ox, определяется равенством

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx, \tag{1.29}$$

где $f(x)$ – дифференциальная функция.

В частности, если все возможные значения принадлежат интервалу $(a;b)$, то

$$M(X) = \int_{a}^{b} xf(x)dx. \tag{1.30}$$

Дисперсия непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат всей оси Ox, определяется равенством

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx \qquad (1/31)$$

или равносильным равенством

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx-(M(X))^2. \tag{1.33}$$

В частности, если все возможные значения принадлежат интервалу ($a;b$), то:

$$D(X)=\int\limits_{a}^{b} (x-M(X))^2 f(x)dx, \tag{1.33}$$

$$D(X)=\int\limits_{a}^{b} x^2 f(x)dx-(M(X))^2. \tag{1.34}$$

Среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины определяется так же, как и для дискретной величины

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}. \tag{1.35}$$

Задача 22

Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, заданной интегральной функцией

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x\le -2; \\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}, & \text{при } -2< x\le 2; \\ 1, & \text{при } x>2. \end{cases}$$

Решение

Найдем дифференциальную функцию

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x\le -2; \\ \dfrac{1}{4}, & \text{при } -2< x\le 2; \\ 0, & \text{при } x>2. \end{cases}$$

Найдем математическое ожидание

$$M(X)=\int\limits_{-2}^{2} xf(x)dx=\int\limits_{-2}^{2} x\cdot\frac{1}{4}dx=0.$$

Найдем искомую дисперсию, учитывая, что $M(X)=0$:

$$D(X)=\int\limits_{-2}^{2}(x-M(X))^2 f(x)dx=\int\limits_{-2}^{2}x^2\cdot\frac{1}{4}dx=\frac{4}{3}.$$

Задача 23

Пусть X – случайная величина, имеющая равномерное распределение с плотностью

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x<a; \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{если } a\le x\le b; \\ 0, & \text{если } x>b. \end{cases}$$

Найти $M(x)$, $D(x)$ и $\sigma(x)$.

Решение

По формулам (1.29), (1.31) и (1.35) находим:

$$M(X)=M(X)=\int\limits_{a}^{b}xf(x)dx=\frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b=\frac{a+b}{2},$$

$$D(X)=\int\limits_{a}^{b}(x-\frac{b+a}{2})^2\cdot\frac{dx}{b-a}=\frac{(b-a)^2}{12},$$

$$\sigma(\mathrm{X})=\sqrt{D(X)}=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, если дифференциальная функция имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \tag{1.36}$$

где a – математическое ожидание, σ – среднеквадратичное отклонение X.

Вероятность того, что случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\beta)$

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi(\frac{\beta-a}{\sigma})-\Phi(\frac{\alpha-a}{\sigma}), \tag{1.37}$$

где $\Phi(x)$ – интегральная функция Лапласа.

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx. \qquad (1.38)$$

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения случайной величины от ее математического ожидания меньше положительного числа σ.

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi(\frac{\delta}{\sigma}). \qquad (1.39)$$

Задача 24

Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормально распределенной случайной величины X равны 10 и 2, соответственно. Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале (12;14)

Решение

Воспользуемся формулой (1.37):

$$P(\alpha< X<\beta)=\Phi(\frac{\beta-a}{\sigma})-\Phi(\frac{\alpha-a}{\sigma}).$$

Подставим сюда α = 12, β = 14, a = 10 и σ = 2, получим

$$P(12< X<14)=\Phi(\frac{14-10}{2})-\Phi(\frac{12-10}{2})=\Phi(2)-\Phi(1).$$

По таблице [2] находим $\Phi(2)$ = 0,4772, $\Phi(1)$ = 0,3413.
Искомая вероятность равна

$$P(12< X<14)=0{,}1359.$$

Задача 25

Ошибка радиодальномера подчинена нормальному закону. Математическое ожидание этой ошибки равно 5 м, а среднее квадратичное отклонение равно 10 м. Найти вероятность того, что измеренное значение дальности будет отклоняться от истинного не более чем на 20 м.

Решение

Решение задачи сводится к определению вероятности попадания случайной величины X (ошибка радиодальномера) с математическим ожиданием a =5 и средним квадратическим отклонением σ =10 на участок (–20; 20). По формуле (1.37) имеем

$$P(-20< X<20)=\Phi(\frac{20-5}{10})-\Phi(\frac{-20-5}{10})=\Phi(1{,}5)+\Phi(2{,}5)\approx 0{,}875.$$

Задача 26

Измеряется диаметр вала без систематических (одного знака) ошибок. Случайные ошибки измерения X подчинены нормальному закону со средне-квадратичным отклонением σ = 10 мм. Найти вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превышающей по абсолютной величине 15 мм.

Решение

Математическое ожидание случайных ошибок равно нулю, поэтому применима формула (1.39).

Положив δ = 15, σ = 10, найдем $P(|X|<15)=2\Phi(1,5)$. Учитывая, что $\Phi(1,5)$ = 0,4332, окончательно получим

$$P(|X|<15)=2\cdot 0,4332=0,8664.$$

2 ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Для изучения количественного (дискретного или непрерывного) признака X из генеральной совокупности извлекают выборку $x_1, x_2, ..., x_n$ объема n. Наблюдавшиеся значения x_i признака x называют вариантами, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, – вариационным рядом.

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант x_i вариационного ряда и соответствующих им частот n_i (сумма всех частот равна объему n) или относительных частот w_i (каждое значение относительной частоты w_i определяется по формуле $w_i = \frac{n_i}{n}$ и сумма всех относительных частот равна единице).

Статистическое распределение выборки можно также задать в виде последовательности интервалов и соответствующих им частот (в качестве частоты интервала принимают сумму частот вариант, попавших в этот интервал).

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длинной $h = x_i - x_{i-1}$, а высоты равны плотности частот $\frac{n_i}{h}$ или $\frac{w_i}{h}$.

Точечной называют статистическую оценку, которая определяется одним числом.

Смещенной называют статистическую оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.

Несмещенной оценкой генеральной средней (математического ожидания) служит выборочная средняя

$$\overline{x_B} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i \cdot x_i (i = \overline{1,n}), \tag{2.1}$$

где x_i – варианта выборки;

n_i – частота варианты x_i;

n – объем выборки.

Смещенной оценкой генеральной дисперсии служит выборочная дисперсия

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{K} n_i (x_i - \overline{x_B})^2}{n} \quad \text{или} \quad D_B = \overline{x}^2 - (\overline{x}). \tag{2.2}$$

Эта оценка является смещенной, так как $M(D_B)=\dfrac{n-1}{n}D.$

Несмещенной оценкой генеральной дисперсии служит «исправленная дисперсия»

$$S^2=\frac{n-1}{n}\cdot D_B=\frac{\sum_{i=1}^{K}n_i(x_i-\overline{x_B})^2}{n-1} \tag{2.3}$$

или (что то же)

$$S^2=\frac{\sum n_i x_i^2-\dfrac{(\sum n_i x_i)^2}{n}}{n-1}. \tag{2.4}$$

Задача 27

Найти оценки числовых характеристик генеральной совокупности по данным выборки объема n = 50.

x_i	1	2	3	5
n_i	20	15	10	5

Решение

Находим среднюю выборочную по формуле (2.1)

$$\bar{x}_B=\frac{1\cdot 20+2\cdot 15+3\cdot 10+4\cdot 5}{50}=2.$$

Смещенная оценка дисперсии генеральной по (2.2)

$$D_B=5-4=1.$$

Исправленная дисперсия по (2.3) равна

$$S^2=\frac{50-1}{50}(5-2^2)=0,98.$$

Несмещенная оценка дисперсии генеральной

$$S^2=0,98.$$

Несмещенная оценка математического ожидания генеральной совокупности $\overline{x}_B=2.$

Оценку называют интервальной, если она определяется двумя числами-концами интервала.

Интервал (α_1,α_2) называют доверительным, если внутри него с заданной вероятностью (надежностью), близкой к единице, находится оцениваемый параметр.

Надежностью оценки параметра θ называют вероятность γ, с которой осуществляется неравенство $\alpha_1<\theta<\alpha_2$. Для оценки вероятности этого неравенства в общем случае служит формула

$$\mathrm{P}(\alpha_1<\theta<\alpha_2)=\int_{\alpha_2}^{\alpha_1} f(x)dx, \qquad (2.5)$$

где $f(x)$ – дифференциальная функция распределения величины.

Для оценки математического ожидания a нормально распределенного количества признака $\boldsymbol{X}$ при известной дисперсии служит доверительный интервал

$$\overline{x}_B - t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_B + t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \qquad (2.6)$$

где σ – известное среднеквадратичное отклонение;

n – объем выборки.

Вероятность того, что неизвестное математическое ожидание заключено в указанном интервале, определяется так:

$$P(|X-a|<t\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}})=2\Phi(t)=\gamma,$$

где $\Phi(t)$ – интегральная функция Лапласа.

Из этого равенства находим параметр t. Если дисперсия генеральной совокупности известна, то при вычислении интервальной оценки для математического ожидания a с заданной надежностью γ, используют формулу:

$$P\left(\left|\frac{\overline{x}-a}{S}\sqrt{n}\right|<t_\gamma\right)=\gamma, \qquad (2.7)$$

в которой параметр t_γ находят по таблице по заданным n и γ.

Доверительный интервал для неизвестного математического ожидания a в этом случае имеет вид

$$\overline{x} - t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}} < a < \overline{x} + t_\gamma\frac{S}{\sqrt{n}}, \qquad (2.8)$$

где $\frac{S}{\sqrt{n}}=\sqrt{\frac{D_B}{n-1}}$.

Задача 28

Найти доверительный интервал для оценки с надежностью 0,95 неизвестного математического ожидания a нормально распределенного признака X генеральной совокупности, если даны генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma = 5$, выборочная средняя $\overline{x}_B = 14$ и объем выборки n = 25.

Решение

Требуется найти доверительный интервал по (2.6)

$$\overline{x}_B - t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_B + t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Здесь все величины, кроме t, известны. Найдем t. Из соотношения $2\Phi(t) = 0,95$ получим $\Phi(t) = 0,475$. По таблице значений функкий $\Phi(x)$ [2] находим $t = 1,96$. Подставив $t = 1,96, \overline{x} = 14, \sigma = 5, n = 25$ в (2.6), окончательно получим искомый доверительный интервал$12,04 < a < 15,96$.

Задача 29

В результате наблюдения за 115 автомобилями ЗИЛ-130 был получен средний пробег до первого капитального ремонта рулевого механизма 145,0 тыс. км при σ = 3 7,5 тыс. км. Какова точность полученного результата при надежности, равной 0,95.

Решение

Считая, что величина пробега до первого капитального ремонта рулевого механизма распределена по нормальному закону, точность результата можно получить с помощью доверительного интервала:

$$\overline{x}_B - t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_B + t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

По условию задачи γ = 0,95. Тогда $\Phi(t) = 0,475$, а $t = 1,96$. При построении доверительного интервала получили:

$$\delta = \frac{1,96 \cdot 37,6}{\sqrt{115}} \approx 6,88.$$

Откуда в 95 случаях из 100 для автомобилей ЗИЛ-130 средний пробег до первого капитального ремонта рулевого механизма составляет $145,0 \pm 6,9$ тыс.км.

Абсолютная погрешность 6,9 тыс.км, относительная погрешность результата

$$\Delta = \frac{6,88}{145,0} \cdot 100\% = 4\%.$$

Задача 30

Измерения твердости 16 образцов легированной стали (в условных единицах) дали следующие результаты: 13,1; 12,8; 111,9;12,4;13,5; 13,7; 12,0;13,8; 10,6; 12,4;13,5;11,7;13,9;11,5;12,5;11,9.

В предположении,что выборка измерений получена из нормально распределенной генеральной совокупности, найти доверительные интервалы для среднего и дисперсии при доверительной вероятности $\gamma = 0{,}95$.

Решение

По выборке найдем оценки среднего, дисперсии и среднеквадратичного отклонения: $\overline{x}_B$ = 12,57, S^2 = 0,91 или S =0,95.

По таблице значений t_γ [2] находим t_γ =2,131, при n =16 и γ = 0,95. Тогда доверитель- ный интервал для математического ожидания

$$\overline{x}_B - t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_B + t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

$$12{,}57 - 2{,}131 \cdot \frac{0{,}95}{16} < a < 12{,}57 + 2{,}131 \cdot \frac{0{,}95}{16},$$

$$12{,}06 < a < 12{,}08.$$

3 ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

521. Студент знает 45 из 60 вопросов программы. Каждый экзаменационный билет содержит три вопроса. Найти вероятность того, что студент знает: а) все три вопроса; б) только два вопроса; в) только один вопрос экзаменационного билета.

522. В каждой из двух урн находится 5 белых и 10 черных шаров. Из первой урны переложили во вторую наудачу один шар, а затем из второй урны вынули наугад один шар. Найти вероятность того, что вынутый шар окажется черным.

523.Три стрелка в одинаковых и независимых условиях произвели по одному выстрелу по одной и той же цели. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,9. Вторым–0,8, третьим–0,7. Найти вероятность того, что: а)только один из стрелков попал в цель; б) только два стрелка попали в цель; в) все три стрелка попали в цель.

524. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что в 1600 испытаниях событие наступит 1200 раз.

525. Для сигнализации об аварии установлены три независимо работающих устройства. Вероятность того, что при аварии сработает первое устройство, равна 0,9, второе–0,95, третье–0,85. Найти вероятность того, что при аварии сработает: а) только одно устройство; б) только два устройства; в) все три устройства.

526. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,02. Найти вероятность того, что в 150 испытаниях событие наступит 5 раз.

527. В партии из 1000 изделий имеются 10 дефектных. Найти вероятность того, что среди 50 изделий, взятых наудачу из этой партии, ровно три окажутся дефектными.

528. Вероятность наступления события в каждом из одинаковых и независимых испытаний равна 0,8. Найти вероятность того, что в 125 испытаниях событие наступит не менее 75 и не более 90 раз.

529. На трех станках при одинаковых и независимых условиях изготовляются детали одного наименования. На первом станке изготовляют 10%, на втором –30 %, на третьем–60 % всех деталей. Вероятность каждой детали быть бездефектной равна 0,7, если она изготовлена на первом станке, 0,8–если на втором станке, и 0,9–если на третьем станке. Найти вероятность того, что наугад взятая деталь окажется бездефектной.

530. Два брата входят в состав двух спортивных команд, состоящих из 12 человек каждая. В двух урнах имеются по 12 билетов с номерами от 1 до 12. Члены каждой команды вынимают наудачу по одному билету из определенной урны (без возвращения). Найти вероятность того, что оба брата вытащат билет номер 6.

531–540. Дискретная случайная величина $\boldsymbol{X}$ может принимать только два значения: x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Известны вероятность p_1 возможного значения x_1, математическое ожидание $M(x)$ и дисперсия (x). Найти закон распределения этой случайной величины.

531. $p_1 = 0{,}1;\quad M(X) = 3{,}9;\quad (X) = 0{,}09.$

532. $p_1 = 0{,}3;\quad M(X) = 3{,}7;\quad (X) = 0{,}21.$

533. $p_1 = 0{,}5;\quad M(X) = 3{,}5;\quad (X) = 0{,}25.$

534. $p_1 = 0{,}7;\quad M(X) = 3{,}3;\quad (X) = 0{,}21.$

535. $p_1 = 0{,}9;\quad M(X) = 3{,}1;\quad (X) = 0{,}09.$

536. $p_1 = 0{,}9;\quad M(X) = 2{,}2;\quad (X) = 0{,}36.$

537. $p_1 = 0{,}8;\quad M(X) = 3{,}2;\quad (X) = 0{,}16.$

538. $p_1 = 0{,}6;\quad M(X) = 3{,}4;\quad (X) = 0{,}24.$

539. $p_1 = 0{,}4;\quad M(X) = 3{,}6;\quad (X) = 0{,}24.$

540. $p_1 = 0{,}2;\quad M(X) = 3{,}8;\quad (X) = 0{,}16.$

541–550. Случайная величина x задана функцией распределения. Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

541. $F(x)=\begin{cases} 0, x \le 0; \\ x^2, 0 < x \le 1; \\ 1, x > 1. \end{cases}$

542. $F(x)=\begin{cases} 0, x \le 1; \\ \dfrac{x^2 - x}{2}, 1 < x \le 2; \\ 1, x > 2. \end{cases}$

543. $F(x)=\begin{cases} 0, x \le 0; \\ x^3, 0 < x \le 1; \\ 1, x > 1. \end{cases}$

544. $F(x)=\begin{cases} 0, x \le 0; \\ 3x^2+2x,\ 0<x\le\dfrac{1}{3}; \\ 1, x>\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

545. $F(x)=\begin{cases} 0, x \le 2; \\ \dfrac{x}{2}-1,\ 2<x\le 4; \\ 1, x>4. \end{cases}$

546. $F(x)=\begin{cases} 0, x \le 0; \\ \dfrac{x^2}{9}, 0<x\le 3; \\ 1, x>3. \end{cases}$

547. $F(x)=\begin{cases} 0, x \le 0; \\ \dfrac{x^2}{4}, 0<x\le 2; \\ 1, x>2. \end{cases}$

548. $F(x)=\begin{cases} 0, x \le -\dfrac{\pi}{2}; \\ \cos x, -\dfrac{\pi}{2}<x\le 0; \\ 1, x>0. \end{cases}$

549. $F(x)=\begin{cases} 0, x \le 0; \\ 2\sin x, 0<x\le\dfrac{\pi}{6}; \\ 1, x>\dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$

550. $F(x)=\begin{cases} 0, x \le \dfrac{3\pi}{4}; \\ \cos 2x, \dfrac{3\pi}{4} < x \le \pi; \\ 1, x > \pi. \end{cases}$

551–560. Известны математическое ожидание a и среднеквадратическое отклонение σ нормально распределенной случайной величины X. Найти вероятность попадания этой величины в заданный интервал.

551. $a = 10$, $\sigma = 4$, $\alpha = 2$, $\beta = 13$.

552. $a = 9$, $\sigma = 5$, $\alpha = 5$, $\beta = 14$.

553. $a = 8$, $\sigma = 1$, $\alpha = 4$, $\beta = 9$.

554. $a = 7$, $\sigma = 2$, $\alpha = 3$, $\beta = 10$.

555. $a = 6$, $\sigma = 3$, $\alpha = 2$, $\beta = 11$.

556. $a = 5$, $\sigma = 1$, $\alpha = 1$, $\beta = 12$.

557. $a = 4$, $\sigma = 5$, $\alpha = 2$, $\beta = 11$.

558. $a = 3$, $\sigma = 2$, $\alpha = 3$, $\beta = 10$.

559. $a = 2$, $\sigma = 5$, $\alpha = 4$, $\beta = 9$.

560. $a = 2$, $\sigma = 4$, $\alpha = 6$, $\beta = 10$.

571–580. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью 0,95, зная выборочную среднюю $\overline{x}$ объем выборки n и среднее квадратическое σ.

571. $\overline{x} = 75{,}17$, $n = 36$, $\sigma = 6$.

572. $\overline{x} = 75{,}16$, $n = 49$, $\sigma = 7$.

573. $\overline{x} = 75{,}15$, $n = 64$, $\sigma = 8$.

574. $\overline{x} = 75{,}14$, $n = 81$, $\sigma = 9$.

575. $\overline{x} = 75{,}13$, $n = 100$, $\sigma = 10$.

576. $\overline{x} = 75{,}12$, $n = 121$, $\sigma = 11$.

577. $\overline{x} = 75{,}11$, $n = 144$, $\sigma = 12$.

578. $\overline{x} = 75{,}10$, $n = 169$, $\sigma = 13$.

579. $\overline{x} = 75{,}09$, $n = 196$, $\sigma = 14$.

580. $\overline{x} = 75{,}08$, $n = 225$, $\sigma = 15$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гмурман В. Е Теория вероятностей и математическая статистика. / В. Е. Гурман – М.: Высшая школа, 1977. – 477 с.
2. Гмурман В. Е Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. / В. Е. Гурман – М.: Высшая школа, 1979. – 400 с.
3. Галушко В. Г Вероятностно-статистические методы на автотранспорте. / В. Г. Галушко. – К.: Высшая школа. 1976. – 230 с.
4. Гурский Е.И Теория вероятностей с элементами математической статистики. — М.: Высшая школа, 1971. — 327 с.
5. Джонсон Н. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. / Н. Джонсон, Ф. Лион. – М.: Мир, 1980. – 516 с.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ

Вовк Леонид Петрович
Королев Евгения Александрович

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА» (ДЛЯ СТУДЕНТОВ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ 23.03.01 «ТЕХНОЛОГИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ПРОЦЕССОВ», 27.03.04 «УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ», 23.05.01 «НАЗЕМНЫЕ ТРАНСПОРТНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА», 23.03.03 «ЭКСПЛУАТАЦИЯ ТРАНСПОРТНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ МАШИН И КОМПЛЕКСОВ», 08.03.01 «СТРОИТЕЛЬСТВО», 20.03.01 «ТЕХНОСФЕРНАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ», 08.05.03 «СТРОИТЕЛЬСТВО, ЭКСПЛУАТАЦИЯ, ВОССТАНОВЛЕНИЕ И ТЕХНИЧЕСКОЕ ПРИКРЫТИЕ АВТОМОБИЛЬНЫХ ДОРОГ, МОСТОВ И ТОННЕЛЕЙ», 38.03.02 «МЕНЕДЖМЕНТ» ВСЕХ ФОРМ ОБУЧЕНИЯ)

Подписано к выпуску 12.04.2017 г. Гарнитура Times New.
Усл. печ. л. 2.4. Зак. № 121.

Государственное образовательное учреждение
Высшего профессионального образования
«Донецкий национальный технический университет»
Автомобильно-дорожный институт
84646, ДНР, г. Горловка, ул. Кирова, 51
e-mail: print-adi@adidonntu.ru

Редакционно-издательский отдел