

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
ДОНЕЦКОЙ НАРОДНОЙ РЕСПУБЛИКИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
АВТОМОБИЛЬНО-ДОРОЖНЫЙ ИНСТИТУТ

«УТВЕРЖДАЮ»
ДИРЕКТОР АДИ ГОУВПО «ДОННТУ»
М. Н. ЧАЛЬЦЕВ
04.08.2017

Кафедра «Высшая математика»

**УЧЕБНО–МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ К ВЫПОЛНЕНИЮ
КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ «КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И
РЯДЫ» ДЛЯ СТУДЕНТОВ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ: 23.03.01
«ТЕХНОЛОГИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ПРОЦЕССОВ», 27.03.04
«УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ», 23.05.01
«НАЗЕМНЫЕ ТРАНСПОРТНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА»,
23.03.03 «ЭКСПЛУАТАЦИЯ ТРАНСПОРТНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ
МАШИН И КОМПЛЕКСОВ», 08.03.01 «СТРОИТЕЛЬСТВО», 20.03.01
«ТЕХНОСФЕРНАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ», 08.05.02 «СТРОИТЕЛЬСТВО,
ЭКСПЛУАТАЦИЯ, ВОССТАНОВЛЕНИЕ И ТЕХНИЧЕСКОЕ
ПРИКРЫТИЕ АВТОМОБИЛЬНЫХ ДОРОГ, МОСТОВ И ТОННЕЛЕЙ»,
38.03.02 «МЕНЕДЖМЕНТ» (ВСЕХ ФОРМ ОБУЧЕНИЯ)**

2/52-2017-01

«РЕКОМЕНДОВАНО»

Учебно-методическая
комиссия факультета
«Транспортные технологии»
Протокол № 1 от 20.01.2017

«РЕКОМЕНДОВАНО»

Учебно-методическая
комиссия факультета
«Автомобильный транспорт»
Протокол № 3 от 03.02.2017

«РЕКОМЕНДОВАНО»

Кафедра «Высшая математика»
Протокол № 7 от 24.01.2017

«РЕКОМЕНДОВАНО»

Учебно-методическая
комиссия факультета
«Экономика и управление»
Протокол № 4 от 24.12.2016

«РЕКОМЕНДОВАНО»

Учебно-методическая
комиссия факультета
«Автомобильные дороги»
Протокол № 5 от 18.01.2017

Горловка – 2017

УДК 517.3

Учебно–методическое пособие к выполнению контрольных работ по теме «Кратные интегралы и ряды» для студентов направлений подготовки: 23.03.01 «Технология транспортных процессов», 27.03.04 «Управление в технических системах», 23.05.01 «Наземные транспортно - технологические средства», 23.03.03 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов», 08.03.01 «Строительство», 20.03.01 «Техносферная безопасность», 08.05.02 «Строительство, эксплуатация, восстановление и техническое прикрытие автомобильных дорог, мостов и тоннелей», 38.03.02 «Менеджмент» (всех форм обучения), [Электронный ресурс] / составители: Л. П. Вовк, Е. А. Королев. – Горловка: ГОУВПО «ДонНТУ» АДИ, 2017.

Учебно–методическое указание отвечает структуре дисциплины «Высшая математика», приведены примеры решений типовых задач и индивидуальные задания по теме «Кратные интегралы и ряды» .

Составители:	Вовк Л. П., д-р. техн. наук, проф. Королев Е. А., канд. физ.-мат. наук, доц.
Ответственный за выпуск:	Королев Е. А., канд. физ.-мат. наук, доц.
Рецензент:	Королев М. Е., канд. физ.-мат. наук, доц.

© Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Донецкий национальный технический университет»
Автомобильно-дорожный институт, 2017

СОДЕРЖАНИЕ

Введени.....	4
1. Индивидуальные задания	5
2. Решение типовых примеров по теме «Кратные интегралы и векторный анализ»	12
3. Решение типовых примеров по теме «Ряды»	31
Список рекомендуемой литературы	44

ВВЕДЕНИЕ

Цель данного методического указания – ознакомиться с основными методами вычисления кратных интегралов и характеристик векторного поля, а также с признаками сходимости числовых и функциональных рядов и их приложениями.

Пособие содержит основные теоретические сведения, задания для самостоятельной работы.

Каждый студент должен выполнить десять задач, условия которых взяты из [1] и которые приведены в разделе 1 настоящей работы. Выбирать номера задач необходимо согласно варианту, соответствующему номеру зачетной книжки 16-031. Для выбора номера задач следует принять во внимание лишь три последние цифры и расположить под ними три первые буквы русского алфавита, например,

$$\begin{array}{ccc} 0 & 3 & 1 \\ а & б & в \end{array}$$

Затем нужно обратиться к помещенной ниже таблице и из каждого ее вертикального столбца, обозначенного внизу определенной буквой, (или разностью) взять одно число, стоящее в горизонтальной строке, номер которой соответствует этой букве.

Таблица

№ строки	Номера контрольных заданий									
1	380	389	391	401	420	426	431	442	452	467
2	378	385	399	405	419	427	432	443	454	463
3	376	381	392	409	418	428	433	444	456	461
4	374	388	398	402	417	429	434	445	458	470
5	372	384	393	406	416	430	435	450	460	468
6	379	390	397	410	415	421	436	449	451	469
7	377	387	394	403	414	422	437	448	453	466
8	375	383	400	407	413	423	438	447	455	465
9	373	386	395	404	412	424	439	446	457	462
0	371	382	396	408	411	425	440	441	459	464
	в	$ \bar{б} - а $	$ в - а $	в	$ \bar{б} - в $	$\bar{б}$	в	в	$\bar{б}$	в

Номера задач, которые нужно решить для варианта 16-031, находятся при таких значениях:

$$а = 0;$$

$$в = 1;$$

$$\bar{б} = 3;$$

$$|\bar{б} - а| = |3 - 0| = 3;$$

$$|в - а| = |1 - 0| = 1;$$

$$|\bar{б} - в| = |3 - 1| = 2.$$

Таким образом, имеем следующие номера задач: 380, 381, 391, 401, 419, 428, 431, 442, 456, 467.

1 ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Решить в соответствии с шифром следующие десять заданий. Данные для выбора конкретных номеров заданий взять из таблицы приведенной выше.

371–380. Вычислить с помощью двойного интеграла в полярных координатах площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением в декартовых координатах ($a > 0$).

$$371. (x^2 + y^2)^3 = a^2 x^2 y^2.$$

$$372. (x^2 + y^2)^2 = a^2 (4x^2 + y^2).$$

$$373. (x^2 + y^2)^3 = a^2 x^2 (4x^2 + 3y^2).$$

$$374. (x^2 + y^2)^2 = a^2 (3x^2 + 2y^2).$$

$$375. x^4 = a^2 (3x^2 - y^2).$$

$$376. x^6 = a^2 (x^4 - y^4).$$

$$377. x^4 = a^2 (x^2 - 3y^2).$$

$$378. y^6 = a^2 (y^4 - x^4).$$

$$379. (x^2 + y^2)^2 = a^2 (2x^2 + 3y^2).$$

$$380. y^6 = a^2 (x^2 + y^2)(3y^2 - x^2).$$

381–390. Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного указанными поверхностями. Сделать чертежи данного тела и его проекцию на плоскость xOy .

$$381. z = 0, \quad z = x, \quad y = 0, \quad y = 4, \quad x = \sqrt{25 - y^2}.$$

$$382. z = 0, \quad z = 9 - y^2, \quad x^2 + y^2 = 9.$$

$$383. z = 0, \quad z = 4 - x - y, \quad x^2 + y^2 = 4.$$

$$384. z = 0, \quad z = y^2, \quad x^2 + y^2 = 9.$$

$$385. z = 0, \quad y + z = 2, \quad x^2 + y^2 = 4.$$

386. $z = 0, \quad 4z = y^2, \quad 2x - y = 0, \quad x + y = 9.$

387. $z = 0, \quad x^2 + y^2 = z, \quad x^2 + y^2 = 4.$

388. $z = 0, \quad z = 1 - y^2, \quad x = 2y^2 + 1.$

389. $z = 0, \quad z = 1 - x^2, \quad y = 0, \quad y = 3 - x.$

390. $z = 0, \quad z = 4\sqrt{y}, \quad x = 0, \quad x + y = 4.$

391. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L (x^2 - y)dx - x(x - y^2)dy$$

вдоль дуги L окружности $x = 5 \cos t, y = 5 \sin t$, обходя ее против хода часовой стрелки от точки $A (5; 0)$ до точки $B (0; 5)$. Сделать чертеж.

392. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L (x + y)dx - (x - y)dy$$

вдоль ломаной $L = OAB$, где $O (0; 0), A (2; 0), B (4; 5)$. Сделать чертеж.

393. Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_L \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$$

вдоль границы треугольника ABC , обходя ее против хода часовой стрелки, если $A (1; 0), B (1; 1), C (0; 1)$. Сделать чертеж.

394. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$$

вдоль дуги L параболы $y = x^2$ от точки $A (-1; 1)$ до точки $B (1; 1)$. Сделать чертеж.

395. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L (x^2 y - 3x)dx + (y^2 x + 2y)dy$$

вдоль верхней половины L эллипса $x = 3 \cos t, y = 2 \sin t (0 \leq t \leq \pi)$. Сделать чертеж.

396. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L (x^2 + y)dx - (y^2 + x)dy$$

вдоль ломаной $L = ABC$, где $A(1; 2)$, $B(1; 5)$, $C(3; 5)$. Сделать чертеж.

397. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L ydx + \frac{x}{y}dy$$

вдоль дуги L кривой $y = e^{-x}$ от точки $A(1; 2)$ до точки $B(2; 4)$. Сделать чертеж.

398. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L \frac{y^2 + 1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy$$

вдоль отрезка $L = AB$ прямой от точки $A(1; 2)$ до точки $B(2; 4)$. Сделать чертеж.

399. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L (xy - x^2)dx + xdy$$

вдоль дуги L параболы $y = 2x^2$ от точки $O(0; 0)$ до точки $A(1; 2)$. Сделать чертеж.

400. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L \frac{y}{x} dx + xdy$$

вдоль дуги L кривой $y = \ln x$ от точки $A(1; 0)$ до точки $B(e; 1)$. Сделать чертеж.

401–410. Даны векторное поле $F = X_i + Y_j + Z_k$ и плоскость $A_x + B_y + C_z + D = 0$ (p), которая совместно с координатными плоскостями образует пирамиду V . Пусть σ – основание пирамиды, принадлежащее плоскости (p); λ – контур, ограничивающий σ ; n – нормаль к σ , направленная вне пирамиды V .

Требуется вычислить:

1) поток векторного поля F через поверхность σ в направлении нормали n ;

2) циркуляцию векторного поля F по замкнутому контуру λ непосредственно и, применив теорему Стокса к контуру λ и ограниченной им поверхности σ с нормалью n ;

3) поток векторного поля F через полную поверхность пирамиды V в направлении внешней нормали к ее поверхности непосредственно и, применив теорему Остроградского. Сделать чертеж.

401. $F = (x + z)i$; $x + y + z - 2 = 0$.

402. $F = (y - x + z)j$; $2x - y + 2z - 2 = 0$.

403. $F = (x + 7z)k$; $2x + y + z - 4 = 0$.

404. $F = (x + 2y - z)i$; $-x + 2y + 2z - 4 = 0$.

405. $F = (2x + 3y - 3z)j$; $2x - 3y + 2z - 6 = 0$.

406. $F = (2x + 4y + 3z)k$; $3x + 2y + 3z - 6 = 0$.

407. $F = (x - y + z)i$; $-x + 2y + z - 4 = 0$.

408. $F = (3x + 4y + 2z)j$; $x + y + 2z = 0$.

409. $F = (5x + 2y + 3z)k$; $x + y + 3z - 3 = 0$.

410. $F = (x - 3y + 6z)i$; $-x + y + 2z - 4 = 0$.

411-420. Проверить, является ли векторное поле $F = X_i + Y_j + Z_k$ потенциальным и соленоидальным. В случае потенциальности поля F найти его потенциал.

411. $F = (6x + 7yz)i + (6y + 7xz)j + (6z + 7xy)k$.

412. $F = (8x - 5yz)i + (8y - 5xz)j + (8z - 7xy)k$.

413. $F = (10x - 3yz)i + (10y - 3xz)j + (10z - 3xy)k$.

414. $F = (12x + yz)i + (12y + xz)j + (12z + xy)k$.

415. $F = (4x - 7yz)i + (4y - 7xz)j + (4z - 7xy)k$.

416. $F = (x + 2yz)i + (y + 2xz)j + (z + 2xy)k$.

417. $F = (5x + 4yz)i + (5y + 4xz)j + (5z + 4xy)k$.

418. $F = (7x - 2yz)i + (7y + 2xz)j + (7z - xy)k$.

419. $F = (3x - yz)i + (3y - xz)j + (3z - xy)k$.

420. $F = (9x + 5yz)i + (9y + xz)j + (9z + xy)k$.

421–430. Исследовать сходимость числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n.$$

$$421. U_n \frac{n+3}{n^3-2}.$$

$$422. U_n \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}.$$

$$423. U_n \frac{1}{(2n+1)^2-1}.$$

$$424. U_n \frac{3^n}{(2)!}.$$

$$425. U_n \frac{n^3}{e^n}.$$

$$426. U_n \frac{1}{(n+1)[\ln(n+1)]^2}.$$

$$427. U_n \frac{2n+1}{n2^n}.$$

$$428. U_n \frac{n^2}{(n)!}.$$

$$429. U_n \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}.$$

$$430. U_n \frac{n^{n+1}}{(n+1)!}.$$

431–440. Найти интервал сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n.$$

$$431. a_n = \frac{\sqrt[3]{(n+1)^n}}{n!}.$$

$$432. a_n = \frac{2^n}{n(n+1)}.$$

$$433. a_n = \frac{(2n)!}{n^n}.$$

$$434. a_n = \frac{3^n n!}{(n+1)^n}.$$

$$435. a_n = \frac{n}{3^n(n+1)}.$$

$$436. a_n = \frac{5^n}{\sqrt[n]{n}}.$$

$$437. a_n = (1+\frac{1}{n})^n.$$

$$438. a_n = \frac{n+1}{3^n(n+2)}.$$

$$439. a_n = \frac{3^n}{\sqrt{2^n(3n-1)}}.$$

$$440. a_n = \frac{n+2}{n(n+1)}.$$

441–450. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^b f(x) dx$$

с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и затем, проинтегрировав его почленно.

441. $f(x) = e^{-x^2/3}, b = 1.$

442. $f(x) = \cos \sqrt{x}, b = 1.$

443. $f(x) = x \operatorname{arctg} x, b = 0,5.$

444. $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}, b = 0,5.$

445. $f(x) = x \ln(1-x^2), b = 0,5.$

446. $f(x) = xe^{-x}, b = 0,5.$

447. $f(x) = \operatorname{arctg} x^2, b = 0,5.$

448. $f(x) = \sin x^2, b = 1.$

449. $f(x) = \frac{\sin x^2}{x^2}, b = 0,5.$

450. $f(x) = \sqrt{1+x^2}, b = 0,5.$

451–460. Найти три первых, отличных от нуля, члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x; y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = y_0$.

451. $y' = \cos x + y^2; y(0) = 1.$

452. $y' = e^x + y^2; y(0) = 0.$

453. $y' = y + y^2; y(0) = 3.$

454. $y' = 2e^y - xy; y(0) = 0.$

455. $y' = \sin x + y^2; y(0) = 1.$

456. $y' = e^x + y; y(0) = 4.$

457. $y' = x^2 + y^2; y(0) = 2.$

458. $y' = \sin x + 0,5y^2; y(0) = 1.$

459. $y' = 2e^y + xy; y(0) = 0.$

460. $y' = x + x^2 + y^2; y(0) = 5.$

в интервале $(a; b)$.

461. $f(x) = x + 1$

в интервале $(-\pi; \pi)$.

462. $f(x) = x^2 + 1$

в интервале $(-2; 2)$.

463. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$

в интервале $(-\pi; \pi)$.

464. $f(x) = 1 + |x|$

в интервале $(-1; 1)$.

465. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ в интервале $(-\pi; \pi)$.
466. $f(x) = |1 - x|$ в интервале $(-2; 2)$.
467. $f(x) = |x|$ в интервале $(-\pi; \pi)$.
468. $f(x) = x - 1$ в интервале $(-1; 1)$.
469. $f(x) = e^2$ в интервале $(0; 2\pi)$.
470. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$ в интервале $(-\pi; \pi)$.

2 РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ ПО ТЕМЕ «КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ»

Тема «КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ» является одной из самых прикладных в курсе высшей математики, поскольку находит применение при решении самых разнообразных задач геометрии, механики, физики. Отметим лишь некоторые из них.

При помощи двойных и тройных интегралов определяются площади, ограниченные замкнутыми кривыми, объемы пространственных тел, положение их центров тяжести, массы плоских и пространственных областей, их моменты инерции.

Криволинейные интегралы находят свое применение при определении работы силового поля, при исследовании плоских установившихся течений несжимаемой жидкости, при нахождении длины и массы кривой, притяжения материальной точки материальной кривой.

С помощью поверхностных интегралов можно определять массы, моменты, координаты центров тяжести, величины для материальных поверхностей, вдоль которых распределены массы с определенной в каждой точке поверхностной плотностью.

Применение интегрального исчисления по вопросам математической физики и механики часто удобнее проводить в векторной форме. Поэтому студентам необходимо ознакомиться с некоторыми основными понятиями векторного анализа, которые приводят к векторной интерпретации интегрального исчисления. При помощи этих понятий можно проводить полный анализ скалярных и векторных полей и находить их основные характеристики: градиент, потенциал, циркуляцию, поток и т. д.

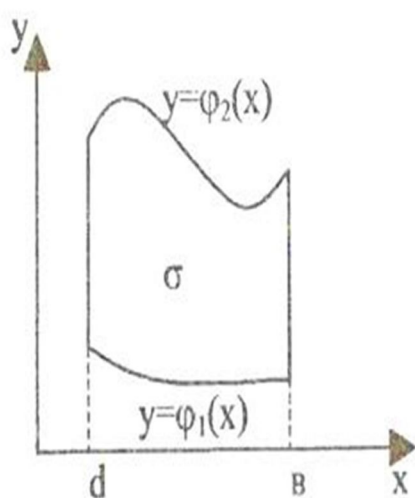


Рисунок 2.1

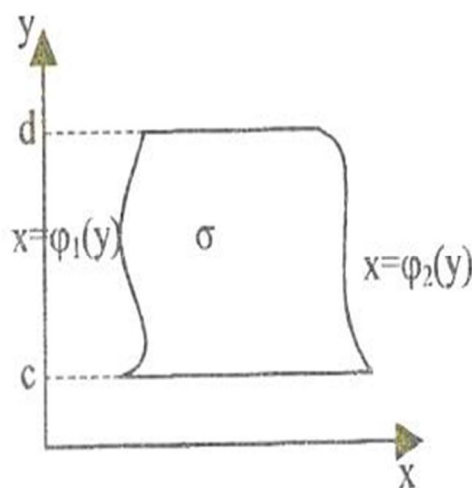


Рисунок 2.2

Для развития навыков самостоятельного решения практических задач предусмотрены индивидуальные задания по основным разделам данной темы: определение площади фигуры, ограниченной замкнутой кривой; вычисление объема тела; нахождение криволинейных интегралов; определение основных характеристик векторного поля (в том числе при помощи формул Стокса и Остроградского–Гаусса), нахождение потенциалов векторного поля.

Решение типовых задач начнем с примеров, относящихся к двойным интегралам. Он вычисляется в зависимости от конфигурации области, по которой распространен двойной интеграл.

Предположим сперва, что область интегрирования σ ограничена двумя непрерывными кривыми $y = \varphi_1(x)$; $y = \varphi_2(x)$ и двумя прямыми $x = a$; $x = b$, причем для всех значений x , заключенных между a и b , имеет место неравенство $\varphi_2(x) \geq \varphi_1(x)$ (рисунок 2.1).

В этом случае двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области σ вычисляется в виде

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (2.1)$$

Для того, чтобы вычислить повторный интеграл в правой части формулы (2.1), нужно сперва вычислить определенный интеграл считая x постоянным.

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy,$$

Результаты вычисления этого интеграла являются функцией только от x . Интегрируя теперь эту функцию в границах от a до b , получим значение двойного интеграла.

Если область σ имеет конфигурацию, изображенную на рисунке 2.2, то имеет место равенство

$$\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = \int_c^b dx \int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x, y) dy. \quad (2.2)$$

Если контур области σ более сложный, чем изображение на рисунках 2.1, 2.2, то поступают так. Область σ разбивают на конечное число частей, удовлетворяющих условиям, при которых справедлива формула (2.1) или (2.2). Затем вычисляют интеграл по формуле (2.1) или (2.2) для каждой из таких областей. Интеграл же по всей области равен сумме интегралов по каждой из этих частей.

ПРИМЕР. Вычислить двойной интеграл

$$J = \iint_{\sigma} xy^2 d\sigma,$$

если область интегрирования σ ограничена линиями $x = 0$, $y = x$, $y = 2x^2$ (рисунок 2.3)

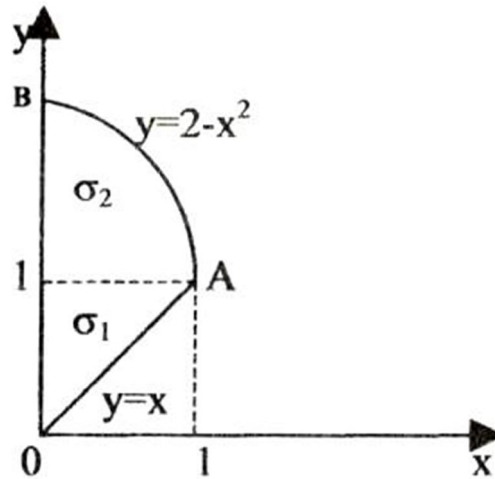


Рисунок 2.3

РЕШЕНИЕ

Применим формулу (2.1), принимая $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2 = 2 - x^2$, $a = 0$, $b = 1$.

Поэтому

$$\begin{aligned} J &= \iint_{\sigma} xy^2 d\sigma = \int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} xy^2 dy = \int_0^1 x dx \int_x^{2-x^2} y^2 dy = \int_0^1 x \left[\frac{y^3}{3} \Big|_x^{2-x^2} \right] dx = \\ &= \int_0^1 \left[x \cdot \frac{(2-x^2)^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right] dx = -\frac{1}{6} \int_0^1 (2-x^2)^3 d(2-x^2) - \frac{1}{3} \int_0^1 x^4 dx = \\ &= -\left[\frac{1}{6} \frac{(2-x^2)^4}{4} + \frac{x^5}{15} \right]_0^1 = -\frac{1}{24} - \frac{1}{15} + \frac{2^4}{24} = \frac{67}{120}. \end{aligned}$$

Вычисление двойного интеграла часто бывает удобно вести в полярных координатах. Установим связь между двойным интегралом в декартовых и полярных координатах. Выберем полярную систему координат так, чтобы полюс совпал с началом декартовой прямоугольной системы координат, а полярная ось – с осью абсцисс. Тогда декартовы координаты x , y точки P выразятся через полярные ρ , φ по формулам

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi. \quad (2.3)$$

Предположим, что область σ ограничена двумя кривыми с полярными уравнениями $\rho = \rho_1(\varphi)$ и $\rho = \rho_2(\varphi)$ лучами $\varphi = \varphi_1$ $\varphi = \varphi_2$, идущими из полюса 0.

Элемент площади dS в полярных координатах примет вид

$$dS = \rho d\rho d\varphi. \quad (2.4)$$

Учитывая (2.3) и (2.4), получим

$$\iint_{(D)} f(x, y) dS = \iint_{(D)} f(x, y) dx dy = \iint_{(D)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi. \quad (2.5)$$

Таким образом, чтобы преобразовать двойной интеграл в декартовых координатах в двойной интеграл в полярных координатах, нужно x и y в подынтегральной функции заменить соответственно на $\rho \cos \varphi$, $\rho \sin \varphi$, а произведение $dx dy$ заменить $\rho d\rho d\varphi$.

Вычисление двойного интеграла в полярной системе координат, так же как и декартовой, сводится к последовательному интегрированию по переменным ρ и φ .

Прямыми $\varphi = \text{const}$ разобьем область σ на полосы. Интегрируя сначала по ρ в пределах его изменения от точек входа до точек выхода в область σ прямых $\varphi = \text{const}$, а затем по φ в пределах его наибольшего изменения (рисунок 2.4), получим

$$\iint_{(D)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho. \quad (2.6)$$

Интегрирование в обратном порядке, т. е. сначала по φ , а потом по ρ , обычно не встречается.

Если область σ (рисунок 3.5) ограничена замкнутой кривой $\rho = \rho(\varphi)$, а полюс лежит внутри области, то пределы двукратного интеграла принимают вид

$$\iint_{(\sigma)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi = \int_0^{\rho(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho. \quad (3.7)$$

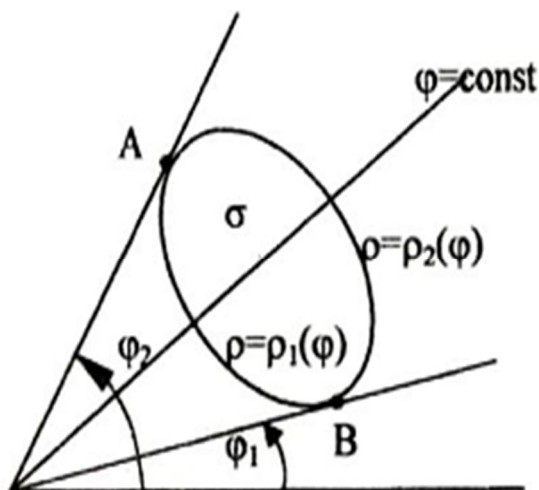


Рисунок 2.4

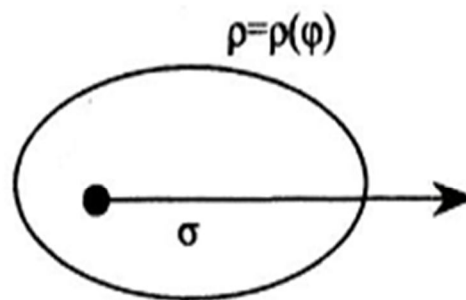


Рисунок 2.5

ПРИМЕР. Найти площадь фигуры, ограниченной линией

$$(x^2 + y^2)^3 = (x^4 + y^4) \cdot a^2$$

РЕШЕНИЕ. Линия симметрична относительно осей координат (рисунок 2.6). Ее уравнение в полярных координатах имеет вид

$$\rho^2 = a^2 (\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi).$$

Искомая площадь

$$\begin{aligned} S &= 4S_1 = 4 \iint_{\sigma} dx dy = 4 \iint_{\sigma} \rho d\rho d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi}} \rho d\rho = \\ &= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 + \sin^4 \varphi) d\varphi = \\ &= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((\cos^4 + 2\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + \sin^4 \varphi) - 2\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi) d\varphi = \\ &= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\varphi) d\varphi = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \frac{1 - \cos 4\varphi}{4}) d\varphi = \frac{3}{4} \pi a^2. \end{aligned}$$

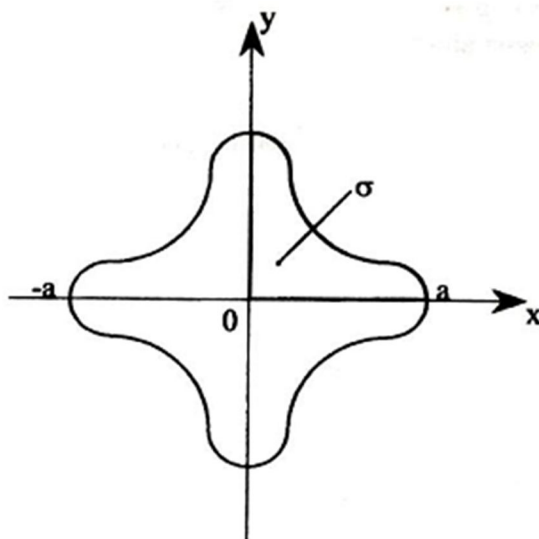


Рисунок 2.6

ОТВЕТ: $S = \frac{3}{4}\pi \cdot a^2$ (единица площади).

Тройной интеграл

$$\iiint_v f(x, y, z) dv \quad (2.8)$$

считается заданным, если известны тело (v) и непрерывная функция $f(x, y, z)$, определенная в каждой точке этого тела.

Предположим, что тело (v) ограничено поверхностями $z = z_1(x, y)$ – снизу и $z = z_2(x, y)$ сверху. Аналогично, как и для плоской области σ , определяется правильная трехмерная область (v), а также точки «входа» и «выхода» в эту область. При помощи плоскостей, параллельных координатным плоскостям, область (v) можно разбить на правильные области так, что точки входа (выхода) будут лежать на поверхностях, заданных одним аналитическим выражением.

Тогда можно доказать, что значение тройного интеграла вычисляется по формуле

$$\iiint_v f(x, y, z) dv = \iint_{\sigma_{xy}} \left\{ \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right\} d\sigma. \quad (3.9)$$

Для вычисления тройного интеграла (2.9) сначала находят внутренний интеграл, считая x и y постоянными. Пределы этого интеграла определяют из уравнений поверхностей, на которых лежат точки входа и выхода в область (v) прямых, параллельных оси OZ . Затем, по известным правилам, вычисляют внешний двойной интеграл.

Осуществляя разбиение области (v) на столбцы, параллельные оси Ox или оси Oy , получим аналогичные формулы перехода от тройного интеграла к двойному и определенному:

$$\iiint_v f(x, y, z) dv = \iint_{\sigma_{yz}} ds \int_{x_1(y, z)}^{x_2(y, z)} f(x, y, z) dx, \quad (2.10)$$

$$\iiint_v f(x, y, z) dv = \iint_{\sigma_{xz}} ds \int_{y_1(x, z)}^{y_2(x, z)} f(x, y, z) dy. \quad (2.11)$$

ПРИМЕР. Вычислить тройной интеграл

$$J = \iiint_V (x + y + z) dx dy dz,$$

где (v) – область, ограниченная координатными плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и плоскостью $x + 2y + 2z = 2$.

РЕШЕНИЕ. Область (v) – пирамида, ограниченная снизу плоскостью $z = 0$, а сверху – плоскостью $z = 1 - 0,5x - y$ (рисунок 2.7 а)

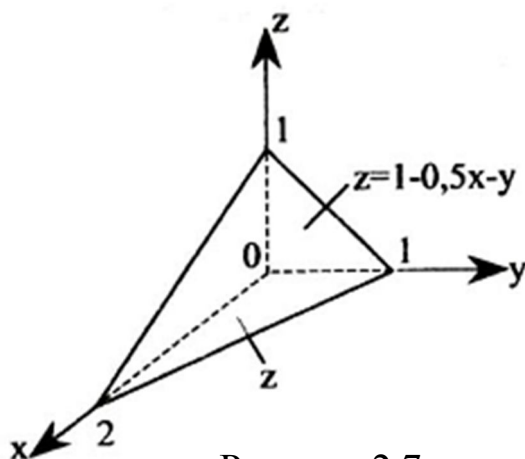


Рисунок 2.7 а

Поэтому

$$\begin{aligned} J &= \iint_{\sigma_{xy}} d\sigma \int_0^{1-0,5x-y} (x + y + z) dz = \iint_{\sigma_{xy}} \left[(x + y)z + \frac{z^2}{2} \right]_0^{1-\frac{x}{2}-y} \cdot d\sigma = \\ &= \iint_{\sigma_{xy}} \left[(x + y)\left(1 - \frac{x}{2} - y\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{2} - y\right)^2 \right] dx dy = \\ &= \iint_{\sigma_{xy}} \left[(x + y)\left(1 - \frac{x}{2}\right) - xy - y^2 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{2} - y\right)^2 \right] dx dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^2 dx \int_0^{1-\frac{x}{2}} \left[(x+y)\left(1-\frac{x}{2}\right) - xy - y^2 + \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}-y\right)^2 \right] dy = \\
&= \int_0^2 \left\{ \left(1-\frac{x}{2}\right)\left(xy + \frac{y^2}{2}\right) \Big|_0^{1-\frac{x}{2}-x\frac{y^2}{2}} - \frac{1}{2}xy^2 \Big|_0^{1-\frac{x}{2}-x\frac{y^2}{2}} + \frac{1}{6}\left(1-\frac{x}{2}-y\right)^3 \Big|_0^{1-\frac{x}{2}-x\frac{y^2}{2}} \right\} dx = \\
&= \int_0^2 \left\{ \left(1-\frac{x}{2}\right) \left[x\left(1-\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^2 \right] - \frac{x}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(1-\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{6}\left(1-\frac{x}{2}\right)^3 \right\} dx = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Наряду с декартовыми координатами положение точки в пространстве может быть задано тремя числами ρ , φ , z ,

где z – аппликата точки;

ρ , φ – полярные координаты проекции точки на плоскость XOY ;

(ρ, φ, z) – цилиндрические координаты точки.

Между декартовыми и цилиндрическими координатами легко установить связь, а именно

$$x = \rho \cdot \cos\varphi, \quad y = \rho \cdot \sin\varphi, \quad z = z. \quad (2.12)$$

С учетом (2.12) тройной интеграл теперь примет вид

$$\iiint_V f(x, y, z) dv = \iiint_V f(\rho \cos\varphi, \rho \sin\varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz. \quad (2.13)$$

Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах сводится к интегрированию по z , ρ и φ на основании тех же принципов, что и в случае декартовых координат. Кроме того, если в тройном интеграле в декартовых координатах внутренний интеграл берется по переменной z , а внешний двойной вычисляется в полярных координатах, то мы используем фактически цилиндрические координаты. Таким образом, алгоритм вычисления тройных интегралов в цилиндрических координатах отличается от алгоритма их вычисления в декартовых координатах лишь тем, что при нахождении внешнего двойного интеграла следует перейти к полярным координатам.

Криволинейный интеграл первого рода

$$\int_{(L)} f(x, y) dl \quad (2.14)$$

считается заданным, если известны линия (L) в плоскости OXY и непрерывная функция $f(x, y)$, определенная в каждой точке этой линии.

Пусть плоская кривая (L) в декартовой системе координат задана уравнением

$$y = \varphi(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Чтобы вычисление интеграла (2.14) стало возможным, необходимо выполнить над ним тождественные преобразования, в результате которых подынтегральное выражение содержало бы только одну переменную.

Так как подынтегральная функция $f(x, y)$ рассматривается только в точках линии (L) , то имеет очевидное равенство

$$f(x, y) = f(x, \varphi(x)). \quad (2.15)$$

Кроме того, дифференциал длин дуги, заданной уравнением, имеет вид

$$dl = \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx. \quad (2.16)$$

Учитывая (2.15) и (2.16), а также то, что переменная x на кривой (L) меняется в пределах от a до b , получим

$$\int_{(L)} f(x, y) dl = \int_a^b f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + (\varphi'(x))^2} dx \quad (2.17)$$

Справа в формуле (2.17) стоит обычный определенный интеграл. Если кривая (L) задана параметрически

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

то, учитывая, что в этом случае

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt,$$

получаем

$$\int_{(L)} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (2.18)$$

Если кривая (L) задана в полярной системе координат уравнением

$$\rho = \rho(\varphi), \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2,$$

то, учитывая формулы перехода от декартовых координат к полярным $x = \rho \cdot \cos \varphi$, $y = \rho \cdot \sin \varphi$, а также значение дифференциала дуги для этого случая

$$dl = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi,$$

получим

$$\int_{(L)} f(x, y) dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\varphi, \quad (2.19)$$

где $\rho = \rho(\varphi)$.

ПРИМЕР. Найти длину дуги одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$,
 $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

РЕШЕНИЕ:

$$L = \int_{(L)} 1 dl = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt =$$

$$2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

Векторным полем называется область пространства или плоскости, каждой точке которой поставлен в соответствие вектор

$$\vec{F} = P(x, y, z) \vec{i} + Q(x, y, z) \vec{j} + R(x, y, z) \vec{k}. \quad (2.20)$$

В частности, если поле задано на плоскости, то

$$\vec{F} = P(x, y) \vec{i} + Q(x, y) \vec{j}. \quad (2.21)$$

Пусть компоненты вектора \vec{F} – непрерывные функции координат. Тогда работа векторного поля (2.21) при перемещении вдоль кривой L

$$A \approx \sum_{i=1}^n [P(x_i, y_i) \Delta x_i + Q(x_i, y_i) \Delta y_i]$$

определяется приближенно интегральной суммой, а ее предел называется криволинейным интегралом второго рода по дуге L :

$$A = \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \lim_{\substack{\max \Delta x_i, \Delta y_i \rightarrow 0 \\ i=1, \dots, n}} \sum_{i=1}^n [P(x_i, y_i) \Delta x_i + Q(x_i, y_i) \Delta y_i].$$

Криволинейный интеграл можно вычислить, сводя его к определенному интегралу, если все переменные и дифференциалы под знаком интеграла выразить через одно переменное и его дифференциал из уравнения кривой.

Если кривая задана в параметрической форме

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

то $dx = \varphi'(t) dt$; $dy = \psi'(t) dt$ и

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ P[\varphi(t), \Psi(t)] \varphi'(t) + Q[\varphi(t), \Psi(t)] \Psi'(t) \right\} dt, \quad (2.22)$$

где t_1 и t_2 – значения параметра, соответствующие начальной и конечной точкам движения вдоль кривой.

Если линия задана уравнением $y = f(x)$, $x_1 \leq x \leq x_2$,
то $d(y) = f'(x) dx$ и

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ P[x, f(x)] + Q[x, f(x)] \cdot f'(x) \right\} dx. \quad (2.23)$$

Поверхностный интеграл первого рода

$$\iint_S f(x, y, z) ds \quad (2.24)$$

считается заданным, если известны поверхность (S) в пространстве $OXYZ$ и непрерывная функция $f(x, y, z)$, определенная в каждой точке этой поверхности.

Предположим, что поверхность (S) такова, что любая прямая, параллельная оси OZ , пересекает ее не более, чем в одной точке. Уравнение этой поверхности, разрешенное относительно переменной Z , запишем в виде

$$z = z(x, y).$$

Для вычисления интеграла (2.24) его следует преобразовать так, чтобы подынтегральное выражение содержало две переменные.

Так как подынтегральная функция $f(x, y, z)$ рассматривается только в точках поверхности (S), то

$$f(x, y, z) = f(x, y, z(x, y)). \quad (2.25)$$

Кроме того,

$$ds = \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1} \cdot d\sigma_{xy}. \quad (2.26)$$

Учитывая (2.25) и (2.26), получим

$$\iint_S f(x, y, z) dg = \iint_{(\sigma_{xy})} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1} \cdot d\sigma_{xy}. \quad (2.27)$$

Формула (2.27) сводит вычисление поверхностного интеграла по поверхности (S) к вычислению двойного интеграла по плоскости (σ_{xy}).

Если поверхность (S) задана уравнением $y = y(x, z)$ или $x = x(y, z)$, то, повторяя рассуждения, получим:

$$\iint_S f(x, y, z) dg = \iint_{(\sigma_{xy})} f(x, y(x, z), z) \sqrt{(y'_x)^2 + (y'_z)^2 + 1} \cdot d\sigma_{xz}, \quad (2.28)$$

$$\iint_S f(x, y, z) dg = \iint_{(\sigma_{xz})} f(x(y, z), y, z) \sqrt{(x'_y)^2 + (x'_z)^2 + 1} \cdot d\sigma_{yz}. \quad (2.29)$$

Введем понятие потока векторного поля (2.20) через поверхность (S). При этом предположим, что в каждой точке этой поверхности определен единичный нормальный вектор

$$\bar{n} = \cos\alpha\bar{i} + \cos\beta\bar{j} + \cos\gamma\bar{k},$$

направляющие косинусы которого являются непрерывными функциями координат точки поверхности.

Потоком векторного поля \bar{F} (или потоком вектора \bar{F}) через поверхность S называется следующий интеграл по поверхности

$$\Pi = \iint_S \bar{F} \cdot \bar{n} ds = \iint_S (P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma) ds. \quad (2.30)$$

Вычисление этого интеграла сводится к вычислению двойного интеграла по формулам (2.27)–(2.29), где $f(x, y, z) = \bar{F} \cdot \bar{n}$.

В частности, если поверхность S задана уравнением $z = \varphi(x, y)$ и $\bar{F} = R(x, y, z)\bar{k}$,

то

$$\iint_S R(x, y, z) \cos\gamma ds = \iint_{\sigma_{xy}} R(x, y, \varphi(x, y)) d\sigma. \quad (2.31)$$

Если единичная нормаль с осью OZ образует тупой угол ($\cos\gamma < 0$), то

$$\iint_S R(x, y, z) \cos\gamma ds = - \iint_{\sigma_{xy}} R(x, y, \varphi(x, y)) d\sigma. \quad (2.32)$$

Если уравнение поверхности $S - y = \omega(x, z)$, то

$$\iint_S Q(x, y, z) \cos\beta ds = \iint_{\sigma_{xz}} Q(x, \omega(x, z), z) d\sigma. \quad (2.33)$$

Наконец, в случае, если поверхность S задана уравнением $x = g(y, z)$, имеем

$$\iint_S P(x, y, z) \cos\alpha ds = \iint_{\sigma_{yz}} P(g(y, z), y, z) d\sigma \quad (2.34)$$

Учитывая формулы $d\cos\alpha = d = dydz$

$$d\cos\beta = dxdz, \quad d\cos\gamma = dxdy,$$

поток векторного поля \vec{F} через поверхность S можно переписать в виде

$$\Pi = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) ds = \iint_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy,$$

в связи с чем его можно трактовать как интеграл по координатам и по аналогии с криволинейными интегралами называть поверхностным интегралом второго рода.

Теорема Остроградского – Гаусса. Если функции $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими частными производными первого порядка в ограниченной замкнутой области, имеющей объем V , то имеет место формула

$$\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) ds = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv, \quad (2.35)$$

где S – граница области (V), причем поток берется по внешней стороне этой поверхности.

Выражение, стоящее под интегралом в правой части формулы (2.35), называют дивергенцией векторного поля и обозначают

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (2.36)$$

Используя понятие дивергенции, формулу Остроградского – Гаусса (2.35) можно записать в векторной форме

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iiint_V \operatorname{div}\vec{F} \cdot dv. \quad (2.37)$$

Циркуляцией векторного поля по замкнутому контуру L называется криволинейный интеграл

$$\Phi = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz. \quad (2.38)$$

Теорема. Если функции $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$ и их частные производные первого порядка непрерывны на поверхности S , ограниченной замкнутым контуром L , то имеет место формула

$$\oint Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \right.$$

$$+ \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \Big] ds, \quad (2.39)$$

называется формулой Стокса.

Вектор

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \bar{k} = \text{rot} \bar{F} \quad (2.40)$$

называется ротором (или вихрем) векторного поля.

Иногда записывают это выражение в виде следующего символического определителя

$$\text{rot} \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \quad (2.41)$$

ПРИМЕР. Даны векторное поле $\bar{F} = (x + y)\bar{k}$ и плоскость $x + y + z = 1 (P)$, которая совместно с координатными плоскостями образует пирамиду V . Пусть σ – основание пирамиды, принадлежащее плоскости (P) ; λ – контур, ограничивающий σ ; \bar{n} – нормаль к σ , направленная вне пирамиды V (2.7.б)

Требуется вычислить:

1) поток векторного поля \bar{F} через поверхность σ в направлении нормали \bar{n} ;

2) циркуляцию векторного поля \bar{F} по замкнутому контуру λ – непосредственно и, применив теорему Стокса к контуру λ и ограниченной им поверхности σ с нормалью \bar{n} ;

3) поток векторного поля \bar{F} через полную поверхность пирамиды V в направлении внешней нормали к ее поверхности непосредственно, применив теорему Остроградского. Сделать чертеж.

РЕШЕНИЕ

Строим по трем точкам плоскость (P) . Из уравнения плоскости находим:

при $x = y = 0 z = 1$;

при $x = z = 0 y = 1$;

при $y = z = 0 z = 1$.

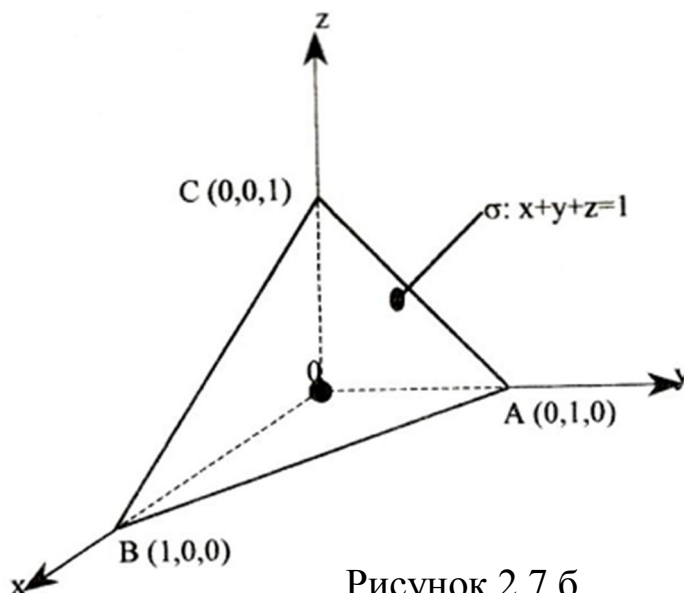


Рисунок 2.7.6

1. Поток векторного поля через поверхность (рисунок 2.8)

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\sigma} &= \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_{\sigma} (x+y) \cos \gamma ds = \iint_{\sigma} (x+y) dx dy = \\
 &= \iint_{\sigma_{xy}} (x+y) d\sigma_{xy} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y) dy = \int_0^1 dx \left(xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x} = \\
 &= \int_0^1 \left[x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2} \right] dx = \int_0^1 \left[x - x^2 + \frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2} \right] dx = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1-x^2) dx = \frac{1}{2} \left[x \Big|_0^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 \right] = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \text{ (ед. потока)}
 \end{aligned}$$

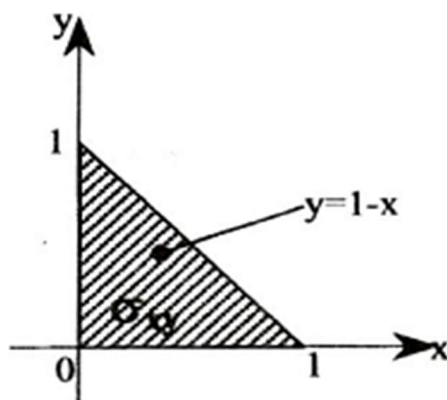


Рисунок 2.8

2. Циркуляция векторного поля \vec{F} по замкнутому контуру λ :
 а) непосредственно

$$\Phi = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint (x+y) dz = \int_{BA} (x+y) dz + \int_{AC} (x+y) dz + \int_{CB} (x+y) dz.$$

На прямой BA $dz=0$, следовательно

$$\int_{BA} (x+y) dz = 0$$

Прямая AC описывается уравнением

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x=0 \end{cases},$$

следовательно, на прямой AC: $x=0$; $y=1-z$, поэтому

$$\int_{AC} (x+y) dz = \int_0^1 (0+1-z) dz = z \left|_0^1 - \frac{z^2}{2} \right|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Прямая CB описывается уравнением

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ y=0 \end{cases},$$

поэтому на этой прямой $y=0$; $x=1-z$, т. е.

$$\int_{CB} (x+y) dz = \int_1^0 (1-z+0) dz = -\int_0^1 (1-z) dz = -\frac{1}{2}$$

Окончательно

$$\Phi = 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \text{ (ед. циркуляции);}$$

б) с помощью формулы Стокса

$$\text{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & x+y \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot 1 - \vec{j} \cdot 1 + 0 \cdot \vec{k}$$

$$\text{rot} \vec{F} = \vec{i} - \vec{j}$$

$$\Phi = \iint_{\sigma} \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_{\sigma} dydz - dx dz = \text{пл.} \sigma_{yz} - \text{пл.} \sigma_{xz}$$

$$\Phi = \iint_{\sigma} \text{rot} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_{\sigma} dydz - dx dz = \text{пл.} \sigma_{yz} - \text{пл.} \sigma_{xz}$$

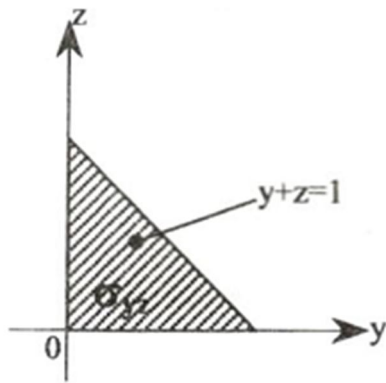


Рисунок 2.9

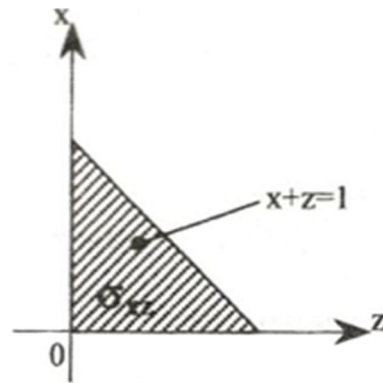


Рисунок 2.10

Как видно из рисунков 2.9, 2.10 площади проекции σ_{yz} и σ_{xz} равны площади

$$\sigma_{yz} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

Итак,

$$\Phi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \text{ (ед. циркуляции)}$$

Результаты совпадают.

3. Поток векторного поля \vec{F} через полную поверхность пирамиды:

а) непосредственно

$$\Pi = \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} ds + \iint_{\sigma_{yz}} \vec{F} \cdot \vec{n} ds + \iint_{\sigma_{xz}} \vec{F} \cdot \vec{n} ds + \iint_{\sigma_{xy}} \vec{F} \cdot \vec{n} ds,$$

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \Pi_{\sigma} = \frac{1}{3};$$

$$\iint_{\sigma_{xy}} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = - \iint_{\sigma_{xy}} (x+y) dx dy = - \iint_{\sigma_{xy}} (x+y) d\sigma_{xy} = -\Pi_{\sigma} = -\frac{1}{3};$$

$$\iint_{\sigma_{xz}} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = \iint_{\sigma_{xy}} \vec{F} \cdot \vec{n} ds = 0, \text{ т. к. на плоскостях } \sigma_{yz} \text{ и } \sigma_{xz}$$

векторы \vec{F} и \vec{n} ортогональны, т. е. $\vec{F} \cdot \vec{n} = 0$.

Таким образом,

$$\Pi = \frac{1}{3} + 0 - \frac{1}{3} = 0 \text{ (ед. потока).}$$

б) С помощью формулы Остроградского – Гаусса

$$\operatorname{div} \bar{F} = \frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(x+y) = 0.$$

Таким образом,

$$\Pi = \iiint_V \operatorname{div} \bar{F} dv = 0 \text{ (ед. потока).}$$

Результаты совпадают.

ОТВЕТ: 1) $\Pi_\sigma = \frac{1}{3}$ (ед. потока);

2) $\Phi = 0$ (ед. циркуляции);

3) $\Pi = 0$ (ед. потока).

Векторное поле \bar{F} , в каждой точке которого $\operatorname{div} \bar{F} = 0$, называется соленоидальным.

Векторное поле \bar{F} называется безвихревым, если во всех его точках $\operatorname{rot} \bar{F} = 0$.

Безвихревое поле является полем градиента некоторой функции

$$\bar{F} = \operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{k}.$$

Функция $V = U(x, y, z)$, градиент который равен вектору \bar{F} , называется потенциалом поля \bar{F} .

Таким образом, каждое безвихревое поле является потенциальным, и наоборот.

При нахождении потенциала

$$U(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P dx + Q dy + R dz$$

можно взять любую линию, соединяющую точки (x_0, y_0, z_0) (x, y, z) , т. к. криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования.

Для того, чтобы не смешивать координаты точки (x, y, z) с переменными интегрирования, обозначим последние буквами $\varepsilon, \mu, \vartheta$. Тогда

$$U(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P(\varepsilon, \mu, \vartheta) d\varepsilon + Q(\varepsilon, \mu, \vartheta) d\mu + R(\varepsilon, \mu, \vartheta) d\vartheta. \quad (2.42)$$

Для упрощения вычислений целесообразно в качестве пути интегрирования взять ломаную $OABC$ со стороны OA , AB и BC , соответственно параллельными координатами осей.

ПРИМЕР. Убедиться, что поле

$$\bar{F} = 2xy^3z\bar{i} + 3x^2y^2z\bar{j} + x^2y^3\bar{k}$$

является потенциальным, и найти его потенциал.

РЕШЕНИЕ. Находим ротор данного векторного поля

$$\operatorname{rot} \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy^3z & 3x^2y^2z & x^2y^3 \end{vmatrix} =$$

$$= (3x^2y^2 - 3x^2y^2)\bar{i} + (2xy^3 - 2xy^3)\bar{j} + (6xy^2z - 6xy^2z)\bar{k}$$

$\operatorname{rot} \bar{F} = 0$, следовательно данное поле потенциально.

По формуле (2.42) получим

$$U(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} 2\varepsilon\mu^3 \vartheta d\varepsilon + 3\varepsilon^2\mu^2 \vartheta d\mu + \varepsilon^2\mu^3 d\vartheta.$$

Пусть начальная точка совпадает с началом координат ($x_0 = y_0 = z_0 = 0$). За путь интегрирования возьмем ломаную $OABC$ со звеньями, соответственно параллельными осям координат (рисунок 2.11).

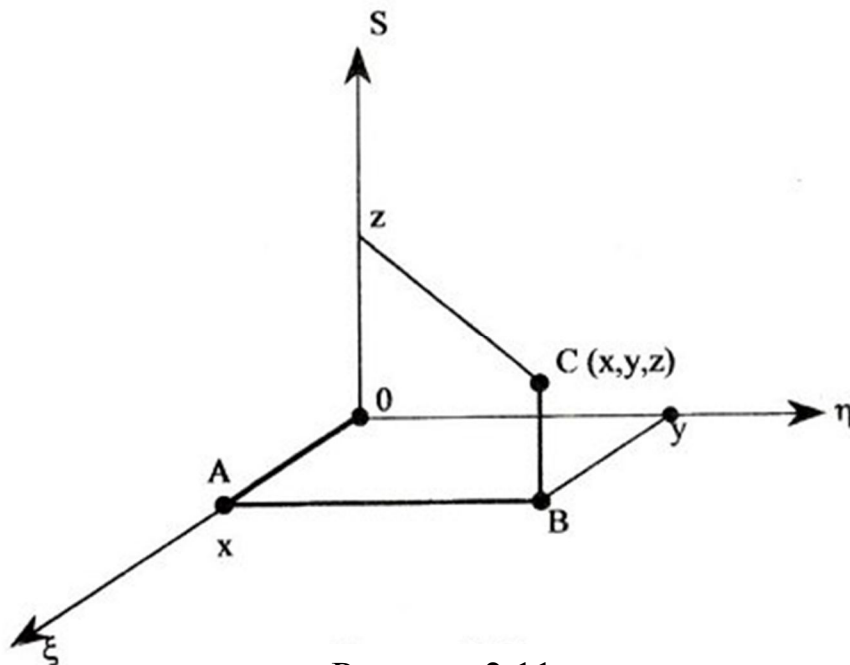


Рисунок 2.11

Тогда

$$U(x, y, z) = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} = \int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BC}.$$

На отрезке OA : $\mu = \vartheta = 0$, $d\mu = d\vartheta = 0$, поэтому

$$\int_0^x 2\varepsilon\mu^3 d\varepsilon + 3\varepsilon^3\mu^3 \vartheta d\mu + \varepsilon^2\mu^3 d\vartheta = \int_0^x 2\varepsilon \cdot 0^3 \cdot 0 d\varepsilon = 0.$$

На отрезке AB : $\varepsilon = x$, $\vartheta = 0$, $d\varepsilon = d\vartheta = 0$, следовательно

$$\int_{AB} = \int_0^y 3x^2\mu^2 \cdot 0 d\mu = 0.$$

На отрезке BC : $\varepsilon = x$, $\mu = y$, $d\varepsilon = d\mu = 0$, значит

$$\int_{BC} = \int_0^z x^2 y^3 d\vartheta = x^2 y^3 z \vartheta \Big|_0^z = x^2 y^3 z.$$

Итак,

$$U(x, y, z) = x^2 y^3 z + C,$$

где C – любое число.

3 РЕШЕНИЕ ТИПОВЫХ ПРИМЕРОВ ПО ТЕМЕ «РЯДЫ»

Числовым рядом называется выражение

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (3.1)$$

где числа $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ называемые членами ряда, образуют известную числовую последовательность.

Числовой ряд (3.1) называется сходящимся, если сумма n первых его членов $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ (частичная сумма ряда) при $n \rightarrow \infty$ имеет предел.

Этот предел называется суммой сходящегося ряда.

Если же $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не существует, то ряд называется расходящимся.

Одним из простейших, но очень часто встречающихся рядов является геометрическая прогрессия

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots \quad (3.2)$$

Известно, что при $|q| < 1$ ряд (3.2) является сходящимся и имеет сумму $a / (1 - q)$. При $|q| \geq 1$ геометрическая прогрессия представляет собой расходящийся ряд.

Другим важным примером служит обобщенный гармонический ряд

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad (3.3)$$

который сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

Особенно часто встречается случай $p = 1$, которому соответствует расходящийся ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad (3.4)$$

известный под именем гармонического ряда.

Ряд может сходиться лишь при условии, когда общий член ряда a_n стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. (Это необходимый, но недостаточный признак сходимости для всякого ряда).

Если же $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

Для числовых рядов с положительными членами ($a_n > 0$), при исследовании их сходимости употребительны следующие достаточные признаки сходимости.

Первый признак сравнения. Даны два знакоположительных ряда

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \quad (3.5)$$

$$V_1 + V_2 + \dots + V_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} V_n \quad (3.6)$$

Пусть члены первого ряда не превосходят соответствующих членов второго порядка ряда:

$$U_1 \leq V_1, U_2 \leq V_2, \dots, U_n \leq V_n, \dots$$

и второй ряд сходится. В таком случае первый ряд также сходится и его сумма не превосходит суммы второго ряда.

ПРИМЕР. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}.$$

РЕШЕНИЕ. Члены данного ряда меньше соответствующих членов ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$$

Но последний ряд сходится как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия $\left(q = \frac{1}{2} < 1\right)$. Следовательно, сходится и данный ряд.

ОТВЕТ. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$ сходится.

Второй признак сравнения. Даны два знакоположительных ряда (3.5) и (3.6).

Пусть члены первого ряда (3.5.) не меньше соответствующих членов второго порядка (3.6.):

$$U_1 \geq V_1, U_2 \geq V_2, \dots, U_n \geq V_n, \dots$$

и ряд (3.6) расходится. В таком случае ряд (3.5) также расходится.

Третий признак сравнения. Если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (U_n / V_n) = k$, то оба ряда (3.5) и (3.6) одновременно сходятся или одновременно расходятся.

Следует отметить, что в рядах, содержащих факториалы, полезна бывает формула Стирлинга

$$n! = \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}} \quad (0 < \theta < 1),$$

которая позволяет оценивать величину факториала $n!$ при больших значениях n .

Применение признаков сравнения при исследовании рядов часто бывает затруднительно из-за необходимости составлять вспомогательный ряд. Общих приемов для этого, годных для всех случаев, не существует. Поэтому при исследовании рядов часто применяют другие достаточные признаки, в частности, следующий признак.

Признак Даламбера. Если для знакоположительного ряда (3.5) существует предел отношения последующего члена к предыдущему при неограниченном возрастании номера члена n , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = \rho,$$

то при $\rho < 1$ ряд сходится, при $\rho > 1$ ряд расходится.

Сразу же отметим, что при $\rho = 1$ данный признак не дает возможности судить о поведении ряда (3.5).

Интегральный признак Коши. Пусть члены знакоположительного ряда (3.5) $U_n (n = 1, 2, \dots)$ являются значениями при $x = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$ некоторой функции $f(x)$ положительной, непрерывной, убывающей на интервале $1 \leq x \leq \infty$ так что

$$U_1 = f(1), U_2 = f(2), \dots, U_n = f(n), \dots$$

Тогда ряд (3.5) будет сходиться или расходиться в зависимости от того, сходится или расходится интеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$.

ПРИМЕР. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}.$$

РЕШЕНИЕ. Функция $f(x) = \frac{1}{x \ln^p x}$ при $x > 1$ является положительной и убывающей (при любом p и достаточно большом x). Поэтому для исследования данного ряда на сходимость можно применять интегральный признак Коши.

Имеем:

$$I = \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} = \int_2^{\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^p x} = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{\ln^{1-p} x}{1-p} \Big|_2^A.$$

При $p > 1$ получим

$$I = \frac{1}{(p-1) \ln^{p-1} 2} < \infty.$$

ОТВЕТ Ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$ сходится при $\rho > 1$

Рассмотрим теперь ряды, члены которых имеют разные знаки. Знако-чередующимся рядом называется ряд вида

$$U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + \dots, \quad (3.7)$$

где $U_n > 0 (n = 1, 2, 3, \dots)$.

Признак Лейбница. Знакопеременный ряд (3.7) сходится, если абсолютные величины его членов убывают, а общий член стремится к нулю, т. е. если выполняются следующие два условия:

$$1) U_1 > U_2 > \dots > U_n > U_{n+1} > \dots \text{ и } 2) \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0.$$

ПРИМЕР. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{1 \cdot 2^2} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3 \cdot 4^2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n(n+1)^2} + \dots$$

РЕШЕНИЕ. Этот ряд удовлетворяет условиям признака Лейбница:

$$1) \frac{1}{1 \cdot 2^2} > \frac{1}{2 \cdot 3^2} > \frac{1}{3 \cdot 4^2} > \dots > \frac{1}{n(n+1)^2} > \dots;$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(n+1)^2} = 0.$$

ОТВЕТ. Данный ряд сходится.

Теорема. Знакопеременный ряд

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots \quad (3.8)$$

сходится, если сходится ряд

$$|U_1| + |U_2| + |U_3| + \dots + |U_n| + \dots \quad (3.9)$$

В этом случае ряд (3.8) называется абсолютно сходящимся.

Сходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n$$

называется условно сходящимся, если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |U_n|$$

расходится.

При практическом использовании сходящихся рядов обычно ограничиваются несколькими их первыми членами. Допускаемая при этом ошибка (остаток ряда) наиболее просто оценивается для знакопеременных рядов.

Теорема Лейбница. Ошибка при замене суммы сходящегося знакопеременного ряда суммой нескольких его первых членов меньше абсолютного значения первого из отброшенных членов.

ПРИМЕР. Проверить, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 + 1}$

сходится и вычислить приближенно значения его суммы с точностью до 0,01.

РЕШЕНИЕ. Проверяем сходимость ряда до признаку Лейбница: убеждаемся, что его члены убывают по абсолютному значению и что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3 + 1} = 0.$$

Далее вычисляем несколько последовательных первых членов данного ряда, пока не получим такой член, абсолютное значение которого меньше 0,01:

$$a_1 = -\frac{1}{2}; a_2 = \frac{1}{9}; a_3 = -\frac{1}{28}; a_4 = \frac{1}{65}; a_5 = -\frac{1}{126}.$$

Согласно указанному выше свойству знакочередующихся сходящихся рядов для вычисления суммы данного ряда с точностью до 0,01 достаточно взять сумму четырех его первых членов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 + 1} \approx -\frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{1}{28} + \frac{1}{65} \approx -0,41.$$

ОТВЕТ. Сумма данного ряда приблизительно равна $-0,41$.

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x) = U_1(x) + U_2(x) + \dots + U_n(x) + \dots,$$

члены которого являются функциями от переменной X , называется функциональным.

При различных значениях X их функционального ряда получаются различные числовые ряды, которые могут быть сходящимися или расходящимися.

Совокупность значений X , при которых функциональный ряд сходится, называется его областью сходимости.

Из всех функциональных рядов простейшими и наиболее употребительными являются степенные ряды вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (3.10)$$

или общего вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots \quad (3.11)$$

Областью сходимости всякого степенного ряда является один интервал числовой оси, симметричный относительно точки $X = 0$ (для ряда (3.10)) или $X = X_0$ (для ряда (3.11)), который может быть закрытым или открытым, или полуоткрытым.

Для определения области сходимости функциональных рядов обычно вначале используется признак Даламбера, а затем те значения X , для которых этот признак не решает вопроса о сходимости ряда ($\rho = 1$), исследуется посредством других признаков сходимости рядов.

ПРИМЕР. Найти интервал сходимости степенного ряда

$$\frac{x}{\sqrt{1}} + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{x^n}{\sqrt{n}} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

РЕШЕНИЕ. Составляем предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{\sqrt{n+1}} \div \frac{x^n}{\sqrt{n}} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = |x|.$$

Таким образом, исходный ряд сходится для $|x| < 1$, т. е. в интервале $[-1; 1]$, и расходится для $|x| > 1$. Радиус сходимости $R = 1$. Исследуем теперь сходимость ряда на концах интервала сходимости, т. е. в точках $x = 1$ и $x = -1$.

Подставляя в исходный ряд $x = 1$, получим расходящийся обобщенный гармонический ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

(т. к. $p = \frac{1}{2} < 1$).

В точке $x = -1$, получим знакочередующийся ряд

$$-1 + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} - \dots,$$

который сходится на основании признака Лейбница.

ОТВЕТ. Областью сходимости данного ряда является интервал $-1 \leq x < 1$.

Рядом Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки a называется степенной ряд вида

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \quad (3.12)$$

Так как разность между $f(x)$ и суммой $n + 1$ членов ряда Тейлора есть дополнительный член $r_n(x)$, то, очевидно: для того, чтобы при некотором значении X действительно имело место разложения (3.12), необходимо и достаточно, чтобы дополнительный член $r_n(x)$ формулы Тейлора при этом значении X стремился к нулю с возрастанием n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0. \quad (3.13)$$

Чаще всего приходится иметь дело со случаем, когда $a = 0$ и функция $f(x)$ разлагается в ряд непосредственно по степени X :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad (3.14)$$

Этот ряд называют рядом Маклорена.

Итак, для разложения данной функции в ряд Тейлора (или Маклорена) нужно:

1) написать ряд Тейлора для данной функции, т. е. вычислить значения этой функции и ее производных при $X=a$ и подставить их в общее выражение ряда Тейлора (3.12) для произвольной функции;

2) исследовать остаточный член r_n формулы Тейлора для данной функции и определить совокупность значений X , при которых выполняется соотношение (3.13).

Остаточный член $r_n(x)$ при этом обычно записывают в форме Лагранжа

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}, \quad a < \theta < x. \quad (3.15)$$

Для многих функций, употребляемых в практических применениях математического анализа, интервал сходимости ряда Тейлора полностью совпадает с совокупностью тех значений X , при которых соответствующий остаточный член $r_n \rightarrow 0$, когда $n \rightarrow \infty$, т. е. для многих функций каждая точка X сходимости ряда Тейлора является и точкой сходимости этого ряда к породившей его функции. Поэтому при разложении многих функций в ряд Тейлора можно вместо исследования соответствующего остаточного члена r_n , что во многих случаях весьма затруднительно,

исследовать сходимость самого ряда Тейлора, как обычного степенного ряда.

Приведем разложения в ряд Тейлора следующих функций:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, -\infty < x < \infty; \quad (3.16)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, -\infty < x < \infty; \quad (3.17)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, -\infty < x < \infty; \quad (3.18)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \dots, -1 < x \leq 1; \quad (3.19)$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, -1 \leq x \leq 1; \quad (3.20)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots \quad (3.21)$$

Это последнее разложение пригодно:

при $m \geq 0$, если $-1 \leq x \leq 1$;
 при $-1 < m < 0$, если $-1 < x \leq 1$;
 при $m \leq -1$, если $-1 < x < 1$.

ПРИМЕР. Вычислить интеграл $\int_0^1 e^{-x^2} dx$, разлагая подынтегральную функцию в степенной ряд и используя семь членов этого разложения

РЕШЕНИЕ. Воспользовавшись формулой (3.16), получим:

$$\begin{aligned} e^{-x^2} &= 1 + \frac{(-x^2)}{1!} + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \dots + \frac{(-x^2)^n}{n!} + \dots = \\ &= 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \dots \end{aligned} \quad (3.22)$$

Этот ряд сходится при любом X . Проинтегрировав почленно его первые семь членов, получим:

$$\int_0^1 e^{-x^2} \approx \left(x - \frac{x^3}{1!3} + \frac{x^5}{2!5} - \frac{x^7}{3!7} + \frac{x^9}{4!9} - \frac{x^{11}}{5!11} + \frac{x^{13}}{6!13} \right) \Big|_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{42} + \frac{1}{126} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360}. \quad (3.23)$$

Оценим остаток ряда r_7 . В силу теоремы Лейбница

$$|r_7| \leq \frac{x^{15}}{7!15} \Big|_0^1 = \frac{1}{75600} < 0,0000133 < 1,5 \cdot 10^{-5}.$$

Учитывая точность оценки (четыре верных знака после запятой), вычислим сумму (3.23) с пятью знаками после запятой (с одним запасным знаком). Окончательно получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-x^2} dx \approx & 1 - 0,33333 + 0,10000 - 0,02381 + 0,00463 - 0,00076 + \\ & + 0,00011 = 0,74684 \approx 0,7468 \end{aligned}$$

со всеми верными знаками.

Изложим теперь на примерах метод нахождения приближенного решения дифференциального уравнения с помощью рядов. Этот метод пригоден для приближенного решения уравнений любого порядка.

Решение дифференциального уравнения может во многих случаях быть представлено в виде степенного ряда, сходящегося в определенном интервале. Коэффициенты этого ряда можно найти методом, основанным на применении ряда Тейлора, в соответствии с которым искомое решение дифференциального уравнения $y = y(x)$ представляется в виде

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \dots \quad (3.24)$$

ПРИМЕР. Найти первые четыре члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения $y' = y^2 + x(x+1)$ при начальном условии $y(0) = 1$.

РЕШЕНИЕ. Пусть искомая функция $y(x)$ разложена в ряд Маклорена

$$y(x) = y(0) + y'(0) \cdot x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{y^n(0)}{n!} x^n + \dots$$

Первый коэффициент дан в условии задачи, второй получим при подстановке известных величин в данное уравнение

$$y'(0) = [y(0)]^2 + 0 \cdot (0+1) = 1,$$

а следующие коэффициенты найдем путем последовательного дифференцирования данного уравнения

$$y'' = 2y \cdot y' + 2x + 1;$$

$$y''' = 2(y'^2 + y \cdot y'') + 2 = 2(y'^2 + yy'' + 1).$$

Отсюда при $x = 0$ получим

$$y''(0) = 2y(0) \cdot y'(0) + 2 \cdot 0 + 1 = 3;$$

$$y'''(0) = 2(1^2 + 1 \cdot 3 + 1) = 10.$$

Подставляя эти значения коэффициентов в ряд Маклорена, получим искомое разложение в виде $y = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3$.

ОТВЕТ. $y \approx 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{3}x^3$.

Переходим к вопросам разложения функций в ряды Фурье. Пусть в некотором промежутке $[-L; L]$ задана функция $f(x)$. Поставим вопрос, нельзя ли построить такой тригонометрический ряд, который в этом промежутке сходил бы к функции $f(x)$? Как найти коэффициенты a_b и b_n такого ряда?

Эти вопросы помогает разрешить следующая теорема:

если функция $f(x)$ разложима в равномерно сходящийся на всей числовой оси тригонометрический ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right), \quad (3.25)$$

то коэффициенты этого ряда определяются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad (3.26)$$

$$a_b = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, n = 1, 2, 3, \dots$$

Этот ряд называется рядом Фурье для функции $f(x)$, a_0, a_n, b_n – коэффициенты Фурье.

Примечания:

1. Если $f(x)$ – четная функция, то $b_n = 0$,

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}, \quad (3.27)$$

а поэтому

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}. \quad (3.28)$$

2. Если $f(x)$ – нечетная функция, то $a_0 = a_n = 0$,

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad (3.29)$$

а поэтому разложение принимает вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (3.30)$$

3. Функция, заданная в интервале $[0, L]$, может быть разложена в зависимости от требования либо только в ряд косинусов, либо только в ряд синусов. Для этого она должна быть продолжена в интервале $[-L, 0]$ либо как четная, либо как нечетная функция.

4. При $L = \pi$ формулы разложения в ряд Фурье принимают вид:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (3.31)$$

где $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$;

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.32)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx, \quad n = 1, 2, \dots$$

ПРИМЕР. Разложить в ряд Фурье функцию, заданную на интервале $[-1; 1]$ уравнением $f(x) = x^2$.

РЕШЕНИЕ. Рассматриваемая функция является четной, поэтому используем формулы (3.27), (3.28) при $L = 1$.

Получим:

$$a_0 = \frac{2}{1} \int_0^1 x^2 dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3},$$

$$a_n = 2 \int_0^1 x^2 \cos n\pi x dx.$$

Дважды интегрируем по частям:

$$U = x^2, dV = \cos n\pi x dx, dU = 2x dx, V = \frac{1}{n\pi} \sin n\pi x;$$

$$1) a_n = \frac{2x^2}{n\pi} \sin n\pi x \Big|_0^1 - \frac{4}{n\pi} \int_0^1 x \sin n\pi x dx = -\frac{4}{n\pi} \int_0^1 x \sin n\pi x dx;$$

$$U = x, dV = \sin n\pi x dx, dU = dx, V = -\frac{1}{n\pi} \cos n\pi x;$$

$$2) a_n = \frac{4x}{n^2 \pi^2} \cos n\pi x \Big|_0^1 - \frac{4x}{n^2 \pi^2} \int_0^1 \cos n\pi x dx = \frac{4}{n^2 \pi^2} (-1)^2.$$

Следовательно,

$$f(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi x.$$

ОТВЕТ

$$f(x) = \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2} \left(\cos \pi x - \frac{\cos 2\pi x}{2^2} + \frac{\cos 3\pi x}{3^2} - \frac{\cos 4\pi x}{4^2} + \dots \right).$$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Арутюнов Ю. С. Высшая математика / Ю. С. Арутюнов, А. П. Полозков, Д. П. Полозков; под ред. Ю. С. Арутюнова. – М.: Высшая школа, 1985. – 144с.
- 2 Шнейдер В. Е. Краткий курс высшей математики т. 1, 2 / В. Е. Шнейдер, А. И. Слуцкий, А. С. Шумов. – М.: Высшая школа, 1978.
- 3 Гусак А. А. Пособие к решению задач по высшей математике / А. А. Гусак. – Минск: Высшая школа, 1973. – 530 с.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ИЗДАНИЕ

Вовк Леонид Петрович
Королев Евгений Алескандрович

**УЧЕБНО–МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ К ВЫПОЛНЕНИЮ
КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ «КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И
РЯДЫ» ДЛЯ СТУДЕНТОВ НАПРАВЛЕНИЙ ПОДГОТОВКИ: 23.03.01
«ТЕХНОЛОГИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ПРОЦЕССОВ», 27.03.04
«УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ», 23.05.01
«НАЗЕМНЫЕ ТРАНСПОРТНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА»,
23.03.03 «ЭКСПЛУАТАЦИЯ ТРАНСПОРТНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ
МАШИН И КОМПЛЕКСОВ», 08.03.01 «СТРОИТЕЛЬСТВО», 20.03.01
«ТЕХНОСФЕРНАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ», 08.05.02 «СТРОИТЕЛЬСТВО,
ЭКСПЛУАТАЦИЯ, ВОССТАНОВЛЕНИЕ И ТЕХНИЧЕСКОЕ
ПРИКРЫТИЕ АВТОМОБИЛЬНЫХ ДОРОГ, МОСТОВ И ТОННЕЛЕЙ»,
38.03.02 «МЕНЕДЖМЕНТ» (ВСЕХ ФОРМ ОБУЧЕНИЯ)**

Подписано к выпуску 04.08.2017 г. Гарнитура Times New.
Усл. печ. л. 2,81. Зак. № 273.

Государственное образовательное учреждение
Высшего профессионального образования
«Донецкий национальный технический университет»
Автомобильно-дорожный институт
84646, ДНР г. Горловка, ул. Кирова, 51
e-mail: print-adi@adidonntu.ru

Редакционно-издательский отдел