УДК 519.876.5: 621.311: 33.012.23

ЗАСОБИ МАТЕМАТИЧНОГО ТА КОМП’ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ РІВНОВАЖНОГО СТАНУ РИНКІВ ЕЛЕКТРОЕНЕРГІЇ

С.Є.Саух, А.В.Борисенко
Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є.Пухова

Математическое моделирование рыночного равновесия в электроэнергетике сведено к решению задач дополнительности. Представлен сравнительный анализ методов, алгоритмов и программных средств решения задач дополнительности. Обсуждены некоторые результаты компьютерного моделирования рынка электроэнергии Украины.

1. Особливості математичного моделювання енергоринку.

Протягом останніх двох десятиріч у більшості індустріально розвинених країн спостерігається послідовне впровадження ринкових стосунків в електоенергетиці. Працюючи в ринкових умовах кожна енергокомпанія самостійно приймає рішення щодо об’ємів виробництва електроенергії та вводу нових генеруючих потужностей, намагаючись при цьому максимізувати власні прибутки від поточної та майбутньої діяльності.

Традиційними однокритеріальними моделями неможливо описати роботу електроенергетичних систем в ринкових умовах. Тому протягом останнього десятиріччя в країнах Західної Європи та США були розроблені рівноважні моделі функціонування електроенергетики [1-4]. Рівноважна модель – це модель стану системи, в якому впливи учасників ринку є збалансованими.

2. Модельна структура енергоринку.

Математична модель ринку електроенергії з недосконалою конкуренцією складається із множини цілей:

- максимізації прибутку генеруючих компаній, які експлуатують енергоблоки з різними витратними характеристиками;
- максимізації прибутку оператора енергосистеми, який експлуатує системоутворюючу електромережу;
- максимізації прибутку арбітражних торгівців, які торгують електроенергією у вузлах системи, використовуючи різницю в цінах, доповнених умовами досягнення рівноважного стану ринку та режимно-технологічними обмеженнями.

Якщо на енергоринку діють 5 конкуруючих виробників, то визначення поточної ринкової рівноваги вимагатиме взаємопов'язаного розв'язку 7-ми критеріальних задач окремих учасників ринку. За тієї ж кількості виробників у довгостроковій задачі розвитку виробничих потужностей, наприклад, на 4 прогнозні періоди з 9-рівневою градацією навантажень, пошук рівноваги вимагатиме взаємопов'язаного розв'язку 257-и критеріальних задач (257=7*4*9+5, де враховано п'ять довгострокових цілей виробників).

При використанні лінійних витратних функцій генеруючих потужностей та лінійних функцій попиту на електроенергію цільові функції учасників ринку, що входять до складу багатокритеріальної рівноважної задачі, є також лінійними функціями.

Врахування особливостей функціонування енергосистеми України (зокрема, одночасної роботи регульованих та конкуруючих виробників) у задачах пошуку короткострокової та довгострокової ринкової рівноваги призводить до зростання кількості змінних та обмежень, а, головне, до нелінійності цільових функцій, що описують поведінку виробників на енергоринку [5].

Досвід моделювання поточного рівноважного стану об'єднаної енергосистеми країн Бенілюксу, Франції та Німеччини показав, що така задача містить майже 1500 невідомих величин [6]. В той же час в задачі планування розвитку меншої за розміром енергосистеми України кількість невідомих досягає щонайменше 15 тисяч.

3. Методи знаходження рівноваги в задачах недосконалої конкуренції

Знаходження взаємоповя'заного розв'язку наведених вище задач сукупної максимізації прибутку учасників ринку є нетривіальним завданням, яке не може бути вирішене традиційними методами.

В сучасних підходах до розвя'зку таких багатокритеріальних задач застосовують їх тотожне перетворення до нелінійних змішаних задач додатковості із застосуванням умов Куна-Куроша-Таккера (ККТ).

Задача максимізації з обмеженнями

$$\boldsymbol{max}\; F(x,y),\; G(x,y)=0,\; H(x,y)\le 0,\; x\ge 0$$

в умовах ККТ набуває наступного вигляду

$$\begin{aligned}&\partial F/\partial x-\mu\cdot\partial G/\partial x-\lambda\cdot\partial H/\partial x\le 0,\; x\ge 0,\\&x\cdot(\partial F/\partial x-\mu\cdot\partial G/\partial x-\lambda\cdot\partial H/\partial x)=0;\\&\partial F/\partial y-\mu\cdot\partial G/\partial y-\lambda\cdot\partial H/\partial y=0;\; G(x,y)=0;\\&H(x,y)\le 0,\; \lambda\ge 0,\; \lambda\cdot H(x,y)=0.\end{aligned}$$

Така задача є змішаною задачею додатковості.

4. Математичний опис задач додатковості

Змішана задача додатковості (Mixed Complementarity Problem) $MCP(F,l,u)$ визначається нелінійною вектор-функцією F, а також верхніми та нижніми границями, відповідно, l та u для вектора x. Задача полягає у знаходженні x, w, v таких, що

$$F(x)=w-v,\ l \le x \le u, w \ge 0, v \ge 0,\ w^T(x-v)=0, v^T(u-x)=0.$$

Особливістю задач додатковості є набір умов додатковості. Кожна з цих умов визначається нульовим добутком двох або більше невід'ємних величин.

Якщо при цьому відображення F є лінійним, тобто $F(x)=q+Mx$ для деякого вектора q і матриці M, то задача $MCP(F,l,u)$ перетворюється на змішану лінійну задачу додатковості (Mixed Linear Complementarity Problem) $MLCP(q,M,l,u)$.

Якщо $l=-\infty$ та $u=+\infty$ то $MCP(F,l,u)$ зводиться до задачі знаходження x з системи нелінійних рівнянь $F(x)=0$.

Якщо $l=0$ та $u=+\infty$, то $MCP(F,l,u)$ перетворюється на нелінійну задачу додатковості (Nonlinear Complementarity Problem) $NCP(F)$, яка полягає у визначенні вектора x такого, що

$$0 \le x, \quad F(x) \ge 0, \quad x_i F_i(x)=0,$$

або у лаконічній формі

$$0 \le x \perp F(x) \ge 0.$$

Для лінійної вектор-функції F відповідно формулюється лінійна задача додатковості (Linear Complementarity Problem) $LCP(q,M)$.

5. Лінійна задача додатковості та її розв'язок

Лінійна задача додатковості $LCP(q,M)$ має єдиний розвязок для всіх векторів q лише тоді і тільки тоді, коли матриця M є Р-матрицею, тобто коли всі головні мінори матриці M є додатними [7].

Для розв'язку лінійних задач додатковості зазвичай застосовують спеціальні алгоритми розроблені на основі методу Лемке [8]. Особливість роботи таких алгоритмів полягає в тому, що на кожній наступній ітерації до базисної сукупності невідомих вводиться змінна, додаткова до змінної, виведеної з базису на попередній ітерації. Тому такі алгоритми мають назву комплементарного вибору провідного елементу [9].

Крім методу Лемке застосовуються також методи Коттла-Данцига, Мурті, внутрішьої точки, тощо [10].

Програмні інструменти розвязку лінійних змішаних задач додатковості можна знайти у складі деяких математичних пакетів програм, зокрема, GAMS до якого інтегровано програму MILES, здатну розв’язувати $LCP(q, M)$ значної розмірності.

6. Основні підходи до розв'язку нелінійних та змішаних задач додатковості

6.1. Умови існування та унікальності розв’язку задач додатковості.

Вектор-функція F називається рівномірною $P-$функцією на множині X, якщо існує константа $\alpha > 0$ така, що

$$\max_{1\le i\le n}(x_i - y_i)(F_i(x) - F_i(y)) \ge \alpha\|x - y\|^2,\ \forall x, y \in X.$$

Якщо F є неперервною та рівномірною $P-$функцією на множині $B = [l, u]$, то $NCP\ (MCP)$ має унікальний розв'язок.

Існує значна кількість методів розв'язку $NCP(F)$ [7]. Розглянемо ті з них, які знайшли відображення у найбільш поширених програмних засобах розв’язку задач пошуку рівноваги на енергетичних ринках.

6.2. Заміна $NCP(F)$ послідовністю LCP.

На ітерації k, крок d знаходиться шляхом розв’язку задачі

$$F(x^k) + \nabla F(x^k)d - w + v = 0,$$

$$l \le d + x^k \le u,\quad w \ge 0,\quad v \ge 0, w^T(d + x^k - l) = v^T(u - d - x^k) = 0.$$

Тут $F(x) = F(x^k) + \nabla F(x^k)d$, $x = x^k + d$, а w та v - це фіктивні змінні. В ітераційній послідовності лінійних задач додатковості враховуються встановлені обмеження на вектор змінних $l \le x^k \le u$.

Ітераційний метод демонструє добрі результати роботи лише у випадку, якщо початкова точка x^0 є достатньо близькою до розв’язку x.

6.3. Переформулювання $NCP(F)$ у систему нелінійних рівнянь.

При такому підході розглядають функцію $\Psi : \Re^2 \to \Re$, яка є $C-$функцією, якщо з умови $\Psi(a, b) = 0$ слідує, що для a, b виконуються умови додатковості: $(a, b) \ge 0$, $ab = 0$. За допомогою $C-$функції $NCP(F)$ формулюється у вигляді системи рівнянь

$$0 = \Phi_\psi(x) \equiv \begin{pmatrix} \Psi[x_1, F_1(x)] \\ \vdots \\ \Psi[x_n, F_n(x)] \end{pmatrix}.$$

В перших алгоритмах [11] застосовувались гладкі переформулювання $NCP(F)$ у вигляді нелінійних систем рівнянь, до яких можуть бути безпосередньо застосовані методи Ньютона. Однак у випадку виродженості розв'язку x^*, коли існує хоча б один індекс $i \in \{1,...,n\}$ такий, що $x_i^* = 0$ та $F_i(x^*) = 0$, втрачається швидка локальна збіжність методів Ньютона. Тому в сучасних алгоритмах переважно застосовуються напівгладкі переформулювання задач додатковості.

Найбільш поширеними прикладами $C-$функцій, що призводять до негладких переформулювань, є:

- функція мінімуму $\Psi_{min}(x) \equiv \boldsymbol{min}(a,b)$;
- функція Фішера-Бурмайстера $\Psi_{FB}(a,b) = \sqrt{a^2+b^2} - (a+b)$;
- плюс-функція $(x)_+ = \boldsymbol{max}\{0,x\}$.

Також використовується оператор нормального відображення: $\Pi_{[l,u]}(x) = F(\pi_{[l,u]}(x)) + x - \pi_{[l,u]}(x)$, де $\pi_{[l,u]}(\cdot)$ означає евклідів проектор на множину $[l,u]$.

Для $MCP(F,l,u)$ $\pi_{[l,u]}(x)$ є розв’язком, якщо $F_{[l,u]}(x) = 0$, де $x = z - F(x)$, а $z = \pi_{[l,u]}(x)$.

Необхідно відзначити, що використання наведених перетворень призводить до негладких систем рівнянь, розв’язок яких вимагає застосування методів негладкого аналізу.

6.4. Методи негладкої оптимізації.

Субдиференціал Буліганда ($B-$субдиференціал) від Φ по x має вигляд

$$\partial_B \Phi(x) := \left\{ H \in \Re^{m\times n} \middle| \exists \left\{x^k\right\} \subseteq D_\Phi : x^k \to x \ та \ \Phi'\left(x^k\right) \to H \right\},$$

де через D_Φ позначається множина точок, на яких функція Φ є диференційованою. Опукла оболонка субдиференціалу є узагальненим якобіаном $\partial\Phi(x) := conv\left\{\partial_B \Phi(x)\right\}$.

Поглиблений розгляд субдиференціалів можна знайти у роботі [12].

В методах розв'язку систем негладких рівнянь, що виникають в результаті переформулювання $MCP(F,l,u)$, важливе місце займає концепція напівгладкості. Екстремуми напівгладких функцій можуть бути знайдені із залученням методів Ньютона.

Функція $\Phi(x)$ є напівгладкою, якщо вона є локально неперервною за Ліпшицем у околі x та якщо $\lim\limits_{\substack{H\in\partial\Phi(x+td') \\ d'\to d,\, t\downarrow 0}} Hd'$ існує для всіх $d \in \Re^n$.

Елементи $\partial_B \Phi(x)$ та $\partial\Phi(x)$ можна використовувати замість звичайного якобіана $\Phi'(x)$. В результаті ітерації негладкого методу

Ньютона набувають вигляду $x^{k+1} := x^k - H_k^{-1}\Phi\left(x^k\right),\quad k = 0,1,2,\ldots,$ де $H_k \in \partial_B\Phi\left(x^k\right)$.

Умовам напівгладкості відповідають зазначені вище $C-$функції, зокрема, функції Фішера-Бурмайстера, мінімуму, тощо. По відношенню до них можливим є застосування негладких ньютонівських методів оптимізації.

Зазвичай знаходження елементів $\partial_B\Phi(x)$ та $\partial\Phi(x)$ є складним завданням, але для наведених вище $C-$функцій таких труднощів не виникає. Саме зручність визначення елементів субдиференціалу $\partial_B\Phi(x)$ та $\partial\Phi(x)$ є одним з основних чинників застосування $C-$функцій в алгоритмах негладкої оптимізації.

6.5. Апроксимація $C-$функцій системою гладких рівнянь.

Одним з підходів до розв’язку $NCP(F)$ ($MCP(F,l,u)$) є апроксимація систем негладких рівнянь, створених за допомогою $C-$функціq, системою гладких нелінійних рівнянь.

В роботі [13] запропоновано параметризовані гладкі функції, за допомогою яких апроксимується плюс функції $(x)_+ = \boldsymbol{max}\{0,x\}$ шляхом подвійного інтегрування гама-функції. В результаті отримано апроксимаційні гладкі параметризовані нелінійні рівняння для нелінійних та змішаних задач додатковості. Для будь-яких $NCP(F)$ ($MCP(F,l,u)$), що мають розв'язок, доведено існування розв'язку відповідних їм апроксимаційних гладких нелінійних рівнянь.

7. Глобальні методи оптимізації для негладких функцій

7.1. Оціночні функції.

У випадку, коли прийнятний початковий розв'язок отримати неможливо, виникає необхідність розробки алгоритмів, що збігаються глобально, та допускають довільний вибір точки початкового наближення, яка може знаходитись далеко від точки розв'язку системи рівнянь що розглядається.

Функція $\theta : \Re^n \to \Re$ є оціночною функцією для $NCP(F)$ ($MCP(F,l,u)$), якщо вона має наступні властивості:

- $\theta(x) \geq 0, \forall x \in \Re^n$;
- $\theta(x) = 0$, якщо і лише якщо x є розв'язком $NCP(F)$ ($MCP(F,l,u)$).

Прикладом оціночної функції для заданого переформулювання задачі додатковості, виконаного за допомогою $C-$функції Ψ: $\Phi_\Psi(x) = 0$, є оціночна функція норми:

$$\theta(x) := \frac{1}{2}\Phi_\Psi(x)^T \Phi_\Psi(x).$$

Оціночна функція норми, для $C-$функцій $\Phi_\Psi \in \{\Phi_{min}, \Phi_{FB}\}$ позначається як $\theta_{min}, \theta_{FB}$, відповідно. Оціночна функція θ_{min} є, загалом, недиференційованою. З іншого боку θ_{FB} є неперервно диференційованою (незважаючи на той факт, що оператор Φ_{FB} є негладким). Якщо функція F є неперервно диференційованою, тоді оціночна функція θ_{FB} є неперервно диференційованою з $\nabla\theta_{FB}(x) = H^T \Phi_{FB}(x)$.

7.2. Методи лінійного пошуку

Для заданого початкового вектору x^0, алгоритм лінійного пошуку генерує послідовність $\{x^k\}$, яка має вигляд:

$$x^{k+1} = x^k + \tau_k d^k, k = 0,1,...,$$

де $d^k \neq 0$ є напрямком пошуку, а τ_k є величина кроку. Точне визначення d^k та τ_k на кожній ітерації відрізняють конкретний алгоритм від інших.

Напрямок спуску d^k визначається з використанням певного елементу субдиференціалу, наприклад, для $H_k \in \partial_B \Phi(x^k)$ маємо $d^k = -H_k{}^T \Phi(x^k)$. Критерієм успішності ітерації є прийнятне зменшення величини оціночної функції $\theta(x) := \frac{1}{2}\Phi(x)^T \Phi(x)$.

Аналогічно, для розв'язку задач негладкої оптимізації можуть використовуватись методи Левенберга-Марквардта та Гаусса-Ньютона.

7.3. Стратегія немонотонної стабілізації [14]

Якщо функція F не є монотонною, то оціночна функція містить локальні мінімуми, для яких $\theta \neq 0$. Для такої функції ітераційний алгоритм може зупиняти роботу у окремих локальних мінімумах, а не у точці глобального розв'язку.

Для ігнорування локального мінімуму необхідно знайти покращену стартову точку $\tilde{x}$, для якої величина оціночної функції $\theta(\tilde{x})$ є меншою, ніж величина цієї функції $\theta(x^k)$ у точці локального мінімуму. Оскільки згідно правила спуску величина θ від ітерації до ітерації не може зростати, ітераційні процедури можуть бути розпочаті знову з точки $\tilde{x}$ з гарантією того, що алгоритм не повернеться до попереднього локального мінімуму.

Стратегія немонотонної стабілізації полягає у побудові послідовності розв'язків $\{x^k\}$, що веде до покращеної стартової точки $\tilde{x}$.

Наступний ітераційний розвязок x^{k+1} отримують в результаті розв'язку збуреної задачі $MCP(F^{\lambda,\bar{x}},B)$, що базується на збуренні функції F виду:

$$F^{\lambda,\bar{x}}(x) = F(x) + \lambda(x - \bar{x}),$$

де $\bar{x} \in B$ - центральна точка, $\lambda > 0$ - задана константа. При цьому збурена задача $MCP(F^{\lambda,\bar{x}},B)$ розв'язується з використанням базового алгоритму.

Всі підзадачі у послідовності використовують одну величину λ, але різні центральні точки $\bar{x}$: центральна точка $(\bar{x})$ кожної наступної підзадачі є розв'язком попередньої підзадачі.

Після отримання покращеної стартової точки алгоритм повертається до роботи у незбуреному режимі.

7.4. Алгоритм пошуку маршруту

Як відзначалось вище, задачу $MCP(F,B)$, де $B = \{z \mid l \le z \le u\}$, можна представити у вигляді рівняння:

$$\Pi_B(x) = F(\pi_B(x)) + x - \pi_B(x) = 0.$$

Внаслідок застосування оператору проектування ця функція є негладкою.

На кожній ітерації алгоритму здійснюється лінійна апроксимація Π_B у x^k:

$$A_k(x) = F[\pi_B(x^k)] + \nabla F[\pi_B(x^k)][\pi_B(x) - \pi_B(x^k)] + x - \pi_B(x).$$

Наведений вираз є еквівалентним до $MLCP(M,q,B)$:

$$A_k(x) := M\pi_B(x) + q + x - \pi_B(x),$$

де $M = \nabla F[\pi_B(x^k)]$ та $q = F[\pi_B(x^k)] - M\pi_B(x^k)$.

$MLCP(M,q,B)$ розвязують з використанням методу Лемке. В результаті отримують кусочно-лінійний маршрут, кожний відрізок якого відповідає певному кроку методу Лемке.

На отриманому кусочно-лінійному маршруті за критерієм істотного зменшення оціночної функції (норми Π_B) здійснється пошук нового ітеративного розв'язку x^{k+1}.

Для алгоритму пошуку маршруту також може застосовуватись техніка немонотонної стабілізації [15].

7.5. Метод довірчої області

Метод довірчої області базується на квадратичній апроксимації цільової функції в околі певного радіусу Δ поточного розв'язку. Для заданого Δ_k обирають $H_k \in \partial_B \Phi(x^k)$, та знаходять напрямок пошуку d^k, як розв'язок задачі квадратичного програмування

$$\boldsymbol{min} \frac{1}{2} \left\| H^k d^k + \Phi(x^k) \right\|^2, \quad \left\| d^k \right\| \le \Delta_k \ .$$

Для оцінки успішності завершення ітерації використовують оціночну функцію норми

$$\theta(x) = \frac{1}{2} \Phi(x)^T \Phi(x).$$

В залежності від успішності ітерації визначають новий ітераційний розвязок x^{k+1} та уточнюють радіус довірчої області Δ_k.

У разі успішності ітерації визначають новий ітераційний розв'язок $x^{k+1} = x^k + d^k$, а радіус довірчої області залишають незмінним $\Delta_{k+1} = \Delta_k$. Якщо ітераційний розв'язок не призвів до бажаного зменшення величини оцночної функції, то встановлюють $x^{k+1} = x^k$ та зменшують радіус довірчої області $\Delta_{k+1} = \sigma \Delta_k$, $0 < \sigma < 1$.

Існує також немонотонний варіант алгоритму довірчої області [7].

8. Опис програмних засобів розв'язку задач додатковості.

На сьогоднішний день найбільшого розповсюдження набули наступні алгоритми розв'язку MCP:

- MILES, в якому застосовано апроксимацію $NCP(F)$ послідовністю $MLCP(q, M, l, u)$, які розв'язуються методом Лемке;
- PATH, що базується на використанні оператору нормального відображення, а розв'язок $MCP(F, l, u)$ визначається методом пошуку маршруту;
- SMOOTH, де застосовано гладку апроксимацію (подвійний інтеграл гама-функції) $C-$функції;
- NE/SQP, де використовується $C-$функція мінімуму для переформулювання $MCP(F, l, u)$ у систему негладких нелінійних рівнянь, а розв'язок останніх знаходиться напівгладким методом лінійного пошуку з використанням методу Гауса-Ньютона;
- QPCOMP, який створено на основі NE/SQP з використанням стратегії немонотонного пошуку;
- PROXI, де використовується $C-$функція мінімуму, а розв'язок визначається напівгладким методом лінійного пошуку із застосуванням градієнтного методу та стратегії немонотонного

пошуку;

- SEMISMOOTH, де застосовується оціночна функція Фішера-Бурмайстера, а розв'язок знаходиться напівгладким методом лінійного пошуку, створеним на базі градієнтного методу;
- SEMICOMP, який створено на основі SEMISMOOTH з використанням стратегії немонотонного пошуку.

9. Досвід комп'ютерного моделювання рівноважного стану ринків електроенергії

В роботі [16] на основі бібліотеки тестових задач додатковості з використанням описаних солверів проведено розрахунки, які показали, що за здатністю та швидкістю розв'язку широкого кола задач додатковості невеликої розмірності перевагу мають програмні засоби PATH, SMOOTH, PROXI. Крім того, солвер PATH, на відміну від SMOOTH та PROXI, інтегровано до таких потужних середовищ програмування як GAMS та AMPL, що значно спрощує їх використання в розробках математичних моделей енергоринків.

Нині алгоритм пошуку маршруту та програмний солвер PATH, що його реалізує, є найбільш придатними інструментами роз'язку нелінійних змішаних задач додатковості, до яких зводиться задача математичного моделювання рівноважного стану енергоринку [2 – 6].

Наші власні експериментальні дослідження підтверджують можливість застосування солверу PATH для пошуку поточної ринкової рівноваги в електроенергетичних системах, коли кількість невідомих сягає 50 – 1500. При намаганні поширити застосування солверу PATH на задачі планування розвитку енергосистеми України в ринкових умовах, коли кількість змінних зростає до 15000 і більше, спостерігається нестабільність обчислень, що проявляється у зростанні неуспішних випадків роботи солверу, навіть за умов незначної варіації значень початкових даних. Безумовно такий стан речей стимулює подальші дослідження алгоритмів розв'язку задач додатковості великої розмірності таких, що задовільняють практичні потреби в математичному забезпеченні задач моделювання рівноважного стану енергоринків.

Список літератури

1. Neuhoff K. Integrating Transmission and Energy Markets Mitigates Market Power // CMI Working Paper. – Cambridge: University of Cambridge, 2003. – №17. – 53 p.
2. Hobbs B., Helman U. Complementarity-Based Equilibrium Modeling for Electric Power Markets // Modeling Prices in Competitive Electricity Markets. Series in Financial Economics. – Chichester: Wiley, 2004. – 337 p.
3. Ventosa M., Denis R., Redondo C. Expansion planning in electricity markets. Two different approaches // 14th PSCC, 24-28 June 2002. – Sevilla, 2002. – 8 p.

4. Murphy F., Smeers Y. Generation capacity expansion in imperfectly competitive restructured electricity markets // Operations Research. – 2005. – Vol.53. – №4. – P. 646-661.

5. Саух С.Е., Борисенко А.В. Равновесные модели процессов функционирования и развития генерирующих мощностей Украины в рыночных условиях. // Объединенный симпозиум «ЭНЕРГЕТИКА РОССИИ В XXI ВЕКЕ: СТРАТЕГИЯ РАЗВИТИЯ - ВОСТОЧНЫЙ ВЕКТОР». Всероссийская конференция «ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ КООПЕРАЦИЯ В АЗИИ: ЧТО ПОСЛЕ КРИЗИСА?» Международная конференция AEC-2010. – Иркутск: 30 августа - 3 сентября 2010. – 10 с.

6. Борисенко А.В., Саух С.Е. Моделирование равновесного состояния электроэнергетических систем в рыночных условиях // Моделирование-2008. Сборник трудов конференции. – Киев: Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г.Е.Пухова, 2008. – С. 172. – 177.

7. Facchinei F., Pang J.-S. Finite-dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems. – Springer, 2003. – 728 p.

8. Lemke C.E. Howson J.T. Equilibrium Points of Bimatrix Games // Journal of Society. for Industrial and Applied Mathematics. – 1964. – №2. –Vol. 12. – P. 413 – 423.

9. Murty, K. G. Linear complementarity, linear and nonlinear programming // Sigma Series in Applied Mathematics. Berlin: Heldermann Verlag. – 1988. – 629p.

10. Берщанский Я.М., Мееров М.В. Теория и методы решения задач дополнительности // Автоматика и Телемеханика. – 1983. – №6. – С.5-31.

11. Mangasarian O.L. Equivalence of the complementarity problem to a system of nonlinear equations // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 1976. – №31. – P. 89-92.

12. Borwein J.M., Lewis A.S. Convex Analysis and Nonlinear optimization: Theory and Examples // Canadian Mathematical Society. Books in Mathematics. – 2000. – 310p.

13. Chen C., Mangasarian O. L. A class of smoothing functions for nonlinear and mixed complementarity problems // Comput. Optim. Appl. – 1996. – №5. – P. 97-138.

14. Billups S. C. Algorithms for complementarity problems and generalized equations: Ph.D. thesis. – Madison, 1995. – 168 p.

15. Dirkse S. P., Ferri M. C. A pathsearch damped Newton method for computing general equilibria // Annals of Operations Research. – 1996. – P. 211–232.

16. Billups S. C., Dirkse S. P., Ferris M. C. A Comparison of Algorithms for Large Scale Mixed Complementarity Problems // Computational Optimization and Applications. – 1997. – №7. – P. 3-25.

Отримано 13.05.2011