УДК 519.6

РЕШЕНИЕ ЖЕСТКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДАМИ РУНГЕ-КУТТЫ

Я.А. Куприй, О.А. Дмитриева
Донецкий национальный технический университет
k_yana@list.ru

В данной работе рассматривается механизм конструирования методов Рунге-Кутты, которые могут быть реализованы на параллельных вычислительных системах.

Многие реальные динамические системы описываются жесткими дифференциальными уравнениями. Решение таких задач требует разработки неявных алгоритмов решения дифференциальных уравнений.

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) вида (1):

$$f\left(x, y, y', \ldots, y^{(m)}\right) = 0, \tag{1}$$

с начальными условиями (2):

$$\begin{gathered} y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y'_0, \\ \ldots \\ y^{(m-1)}(x_0) = y_0^{(m-1)}, \end{gathered} \tag{2}$$

где f – некоторая функция, связывающая независимую переменную x, искомую функцию y(x) и ее производные до m-го порядка включительно.

S-стадийный неявный метод Рунге-Кутта определяется следующими формулами:

$$\begin{gathered} g_i = y_0 + h\sum_{js=1}^{s} a_{ij} f\left(x_0 + c_j h, g_j\right) \quad i = 1,\ldots s, \\ , \\ y_1 = y_0 + h\sum_{j=1}^{s} b_j f\left(x_0 + c_j h, g_j\right) \end{gathered} \tag{3}$$

где a_{ij}, b_i и c_j – определяющие коэффициенты метода [1].

Метод (3) также можно представить в виде матрицы коэффициентов (4):

$$\begin{array}{c|cccccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,s-1} & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,s-1} & a_{2s} \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3,s-1} & a_{3s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{s,s-1} & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \dots & b_{s-1} & b_s \end{array} \tag{4}$$

При этом справедливо условие (5):

$$c_i = \sum_j a_{ij} \tag{5}$$

В случае если $a_{ij}=0$ для всех $i \geq j$, то метод является явным, если $a_{ij}=0$ для всех $i>j$ или хотя бы один элемент $a_{ii} \neq 0$, то метод – диагонально-неявный, во всех остальных случаях метод является неявным [2].

Условия порядка, позволяющие вычислить определяющие метод константы, формируются путем сопоставления рядов Тейлора для приближенного решения, определяемого формулой (3) и точного решения. Для генерации явных методов Рунге-Кутты можно использовать алгоритмы, основанные на «помеченных деревьях» [3, 4]. Например, условия для определения коэффициентов метода Рунге-Кутта третьего порядка приведены ниже (6):

$$\begin{gathered} \sum_i b_{i_1} = 1 \\ \sum_i b_{i_1} c_{i_1} = \frac{1}{2} \\ \sum_i b_{i_1} c_{i_1}^2 = \frac{1}{3} \\ \sum_i b_{i_1} a_{i_1 i_2} c_{i_2} = \frac{1}{6} \end{gathered} \tag{6}$$

Неявные методы Рунге-Кутты должны удовлетворять условиям порядка B(k), C(k), D(k) и E(k):

$$\begin{aligned}
&B(k): \quad \sum_{i=1}^{s} b_i c_i^{j-1} = \frac{1}{j}, && j = 1,2,\dots k \\
&C(k): \quad \sum_{j=1}^{s} a_{ij} c_j^{r-1} = \frac{1}{r} c_i^r && i = 1,2,\dots s,\ r = 1,2,\dots k \\
&D(k): \quad \sum_{i=1}^{s} b_i c_i^{r-1} a_{ij} = \frac{1}{r} b_j \left(1 - c_j^r\right) && j = 1,2,\dots s,\ r = 1,2,\dots k \\
&E(k): \quad \sum_{i,j=1}^{s} b_i c_i^{m-1} a_{ij} c_j^{n-1} = \frac{1}{(m+n)n} && m,n = 1,2,\dots s
\end{aligned} \qquad (7)$$

Применив к методам Рунке-Кутты идею многошаговости получим общий линейный метод [5]:

$$\begin{aligned}
&g_i = \sum_{j=1}^{r} u_{ij} y_j^{[n-1]} + h \sum_{js=1}^{s} a_{ij} f\left(x_{n-1} + c_j h, g_j\right) \quad i = 1,\dots s, \\
&y_i^{[n]} = \sum_{j=1}^{r} v_{ij} y_j^{[n-1]} + h \sum_{j=1}^{s} b_{ij} f\left(x_{n-1} + c_j h, g_j\right) \quad i = 1,\dots, r
\end{aligned} \quad , \qquad (8)$$

Поскольку компоненты вектора y могут вычисляться независимо, метод (8) подходит для реализации на параллельных вычислительных системах. Параллельная реализация неявных методов Рунге-Кутты позволяет существенно повысить эффективность решения жестких дифференциальных уравнений.

Список литературы

1. Формалев В. Ф., Ревизников Д. Л. Численные методы. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 400 с.

2. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – М.: Мир, 1990. – 512 с.

3. Дмитриева О.А., Куприй Я.А.Генерация численных методов решения дифференциальных уравнений високих порядков // Системний аналіз та інформаційні технології у науках про природу та суспільство (САІТ-2011). Випуск 1 – Донецьк: ДонНТУ, – 2011. – 214 стор.

4. А.В. Тыглиян, С.С.Филиппов. Элементарные дифференциалы, их графы и коды // Математическое моделирование, т.21, №8, 2009. – с. 37-43.

5. John Butcher. Numerical Method for Ordinary Differential Equations. – John Willey & Sons Ltd, 2008. – 482 p.

Получено 10.09.2011