УДК 629.113

Д. В. Фесенко, А. И. Петров

Автомобильно-дорожный институт
ГОУВПО «Донецкий национальный технический университет», г. Горловка

УЧЕТ КОЛЕИ В КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОЙ МОДЕЛИ АВТОМОБИЛЯ

Составлена нелинейная модель двухосного автомобиля, учитывающая момент сил увода управляемых колес. Определено необходимое условие применимости критерия устойчивости прямолинейного движения, полученного из простейшей модели автомобиля. Найдена уточненная характеристика статической чувствительности к управлению и проведено ее сравнение с характеристикой чувствительности для линеаризованной модели. Показано, что условие безусловной устойчивости, полученное для линейной модели, сохраняется и для нелинейной модели.

Ключевые слова: *критерий устойчивости, критическая скорость, управляемость автомобиля, характеристика управляемости, устойчивость автомобиля*

Постановка проблемы

Устойчивость и управляемость автомобиля являются одними из основных эксплуатационных качеств автомобиля. Под устойчивостью понимают способность сохранять заданный режим движения в условиях воздействия на автомобиль возмущающих факторов. В связи с важностью проблемы устойчивого движения ее изучению уделяется большое внимание. Отыскание условий устойчивости автомобиля в общем виде – сложная нелинейная задача. Поэтому для того, чтобы получить достаточно общие результаты, решение этой задачи ищут при некоторых ослабляющих предположениях. Таким образом был получен один из основных выводов в теории устойчивости автомобиля [1]:

– если $aC_f - bC_r \geq 0$, то движение автомобиля устойчиво при всех скоростях;

– если $aC_f - bC_r < 0$, то автомобиль устойчив только при скоростях не больших критической скорости:

$$V_{kr} = \sqrt{-\frac{C_f C_r \left(a+b\right)^2}{m\left(aC_f - bC_r\right)}}, \tag{1}$$

где C_f, C_r – коэффициенты увода передней и задней осей;

m – масса автомобиля;

a, b – расстояния от центра масс до передней и задней осей.

Эти выводы справедливы лишь при выполнении некоторых условий, предназначенных для представления автомобиля линейной моделью:

1. Автомобиль движется по прямой или по кривой достаточно большого радиуса, поэтому продольные составляющие скоростей всех точек приближенно равны.
2. Поперечные составляющие скоростей колес на одной оси считаются равными, т. е. рассматривается так называемая «плоская» модель автомобиля.
3. Силы увода представляются линейными функциями углов увода.

Такие предположения могут оказаться слишком нереалистичными, потому что значение таких факторов, как перераспределение нагрузки по осям и колесам одной оси, момент сил увода управляемых колес, вид зависимости сил увода от вертикальной нагрузки и угла увода может быть очень значительным, особенно в таких важных случаях, как движение с высокими скоростями и на кривых малых радиусов. По этой причине остается важной задача уточнения общих результатов устойчивости движения.

Анализ последних публикаций

Из последних работ, которые велись в этом направлении, можно отметить учет влияния вертикальной нагрузки на силу увода [2] и более полное описание сил в пятне контакта [3]. Применение точных моделей, включающих в себя много факторов, как, например, в [4] и [5], возможно для детального исследования лишь какого-то одного типа автомобиля численными методами. Одним из наиболее полных руководств по моделям автомобилей является [6]. Различные проблемы, связанные с нелинейностью, все еще изучены не достаточно глубоко. Перспективным в этом плане является рассмотрение двумерной модели автомобиля включающей колею вместо традиционной плоской модели.

Выделение нерешенных ранее частей общей проблемы

Обычно при исследовании устойчивости целью является получение локальных или глобальных условий устойчивости стационарных состояний. Однако при изучении нелинейных моделей, включающих большое количество параметров, нахождение стационарных состояний может оказаться либо трудной задачей, либо привести к настолько громоздким результатам, которые не пригодны для дальнейшего анализа. Одним из способов преодоления этого затруднения может быть не поиск новых условий устойчивости, а определение границ применимости ранее найденных грубых критериев.

Цель работы

Целью данной работы является нахождение условий, при которых критерий устойчивости, полученный для плоской модели, оказывается неприменимым для полной нелинейной модели, учитывающей колею.

Основной материал

Уравнения движения автомобиля получают из схемы, показанной на рисунке 1. Уравнения оказываются более удобными, если систему координат iOj зафиксировать на кузове.

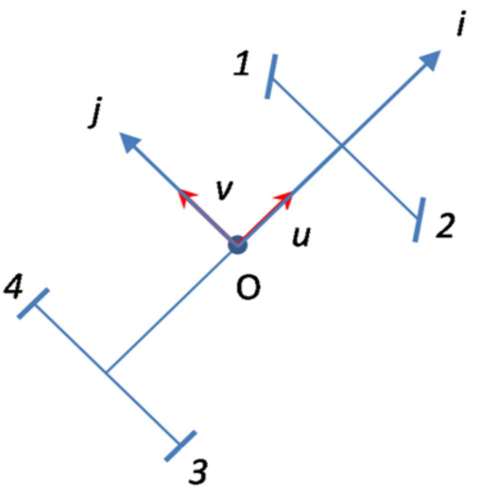


Рисунок 1 – Схема для составления уравнений движения
в подвижной системе координат

Приняты следующие обозначения:

u и v – продольная и поперечная составляющие скорости центра масс O;

θ – угол поворота управляемых колес;

J – момент инерции относительно вертикальной оси, проходящей через центр масс;

ω – угловая частота вращения автомобиля;

δ_i – угол увода *i*-го колеса.

Будем считать, что во время движения поддерживается постоянная экипажная скорость *u*. Используя общие законы динамики, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} m\left(\dot{v}+\omega u\right)=C_r\left(\delta_3+\delta_4\right)+C_f\left(\delta_1+\delta_2\right) \\ J\dot{\omega}=-bC_r\left(\delta_3+\delta_4\right)+aC_f\left(\delta_1+\delta_2\right)+lC_f\theta\left(\delta_1-\delta_2\right) \end{cases}, \quad (2)$$

где δ_i – угол увода *i*-го колеса:

$$\delta_{1,2}=\frac{v+\omega a}{u\mp\omega l}-\theta;\ \delta_{3,4}=\frac{v-\omega b}{u\pm\omega l},$$

где l – половина длины оси.

Из системы (2) видно, что значение имеют не сами углы увода, а лишь их суммы и разность. Раскладывая их в ряд по l, и оставляя только члены старшего порядка, получим:

$$\delta_1+\delta_2=2u\frac{v+\omega a}{u^2-\left(\omega l\right)^2}-2\theta\approx 2\left(\frac{v+\omega a}{u}-\theta\right),$$

$$\delta_3+\delta_4=2u\frac{v-\omega b}{u^2-\left(\omega l\right)^2}\approx 2\frac{v-\omega b}{u},$$

$$\delta_1-\delta_2=2\omega l\frac{v+\omega a}{u^2-\left(\omega l\right)^2}\approx 2\omega l\frac{v+\omega a}{u}.$$

После подстановки этих выражений в основную систему (2) получим:

$$\begin{cases} m\left(\dot{v}+\omega u\right)=2C_r\dfrac{v-\omega b}{u}+2C_f\left(\dfrac{v+\omega a}{u}-\theta\right) \\ J\dot{\omega}=-2bC_r\dfrac{v-\omega b}{u}+2aC_f\left(\dfrac{v+\omega a}{u}-\theta\right)+2l^2C_f\theta\omega\dfrac{v+\omega a}{u^2} \end{cases}.$$

Подставляя $\dot{\omega}=\dot{v}=0$, получаем систему уравнений для определения стационарных значений ω, которая приводится к одному квадратному уравнению:

$$\mathrm{f}\left(\omega\right)=\omega^2l^2\left(\frac{m}{2C_rL}+\frac{1}{u^2}\right)+\omega\left(\frac{1}{\omega_0}+l^2\frac{C_f\theta}{uC_rL}\right)-1=0, \quad (3)$$

где L – база автомобиля;

ω_0 – круговая частота вращения кузова, полученная для плоской модели (при $l = 0$):

$$\omega_0=\frac{2C_fC_r\theta Lu}{2C_fC_rL^2+mC_2u^2},$$

где $C_2 = aC_f - bC_r$.

Понятие устойчивости относится к стационарным значениям характеристик движения – в данном случае к величинам ω и v. Пара стационарных значений (ω, v) называется стационарным состоянием. Если стационарные состояния отсутствуют, то исследование их устойчивости теряет смысл. Выясним в каком случае исчезает стационарное значение угловой скорости. Для этого определим условие, при котором уравнение (3) не имеет решений. Дискриминант этого уравнения

$$\mathrm{D} = \left(\frac{1}{\omega_0} + l^2 \frac{C_f \theta}{u C_r L}\right)^2 + 4l^2 \left(\frac{m}{2C_r L} + \frac{1}{u^2}\right).$$

Решением неравенства $\mathrm{D} > 0$ является $u < \sqrt{-\frac{2C_r L}{m}}$. Следовательно, при $u < \sqrt{-\frac{2C_r L}{m}}$ существует два стационарных состояния. При дальнейшем увеличении скорости стационарные состояния сначала сольются в одно, а затем исчезнут. Величина V_{kr}, фигурирующая в критерии (1), отделяет устойчивые стационарные состояния от неустойчивых. Справедливость критерия (1) будет нарушена, если стационарные состояния исчезают при скорости меньшей V_{kr} (рисунок 2). Условием этого является отрицательный дискриминант D при $u = V_{kr}$.

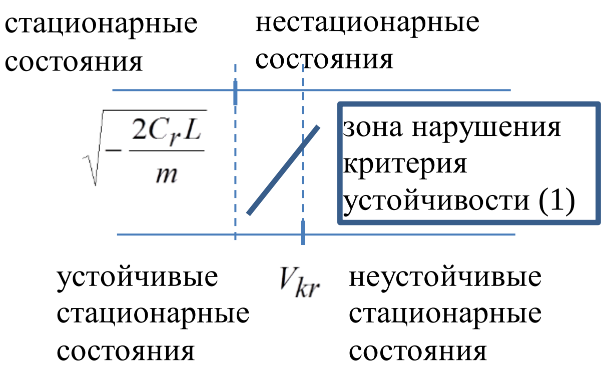


Рисунок 2 – Нарушение критерия устойчивости

Учитывая, что при $l \neq 0$ C_r и C_f, в выражении для V_{kr}, следует заменить на $2C_r$ и $2C_f$ – критическая скорость станет равной

$$V_{kr} = \sqrt{-\frac{2C_f C_r L^2}{m\left(aC_f - bC_r\right)}}.$$

Так как при $u \to V_{kr}$ $\frac{1}{\omega_0} \to 0$, получим

$$D\left(V_{kr}\right)=\frac{l^2}{V_{kr}^2}\left(\left(l\frac{C_f\theta}{C_rL}\right)^2+4\left(\frac{mV_{kr}^2}{2C_rL}+1\right)\right)=$$

$$=\frac{l^2}{V_{kr}^2}\left(\left(l\frac{C_f\theta}{C_rL}\right)^2+4\left(-\frac{C_fL}{C_2}+1\right)\right)=\frac{l^2}{V_{kr}^2}\left(\left(l\frac{C_f\theta}{C_rL}\right)^2-4b\frac{C_1}{C_2}\right),$$

где $C_1=C_f+C_r$.

Отсюда условие нарушения критерия (1)

$$\left(l\frac{C_f\theta}{C_rL}\right)^2\le 4b\frac{C_1}{C_2}. \tag{4}$$

Так как $C_1<0$, то потеря управляемости может наступить только при $C_2<0$. Теоретически при некоторых значениях параметров неравенство (4) может не выполняться, однако при обычных значениях параметров, встречающихся на практике, неравенство (4) будет выполнено. Проверим полученный результат путем численного интегрирования системы (2). Для этого примем следующие значения параметров: u = 13,1; a = b = 2,5; l = 0,75; m = 2500; J = 1000; Cr = –5000; Cf = –6000; θ = 0,1. Проверим условия нарушения справедливости критерия устойчивости:

$$C_2=aC_f-bC_r=2{,}5(-6000)-2{,}5(-5000)=-2500<0;$$

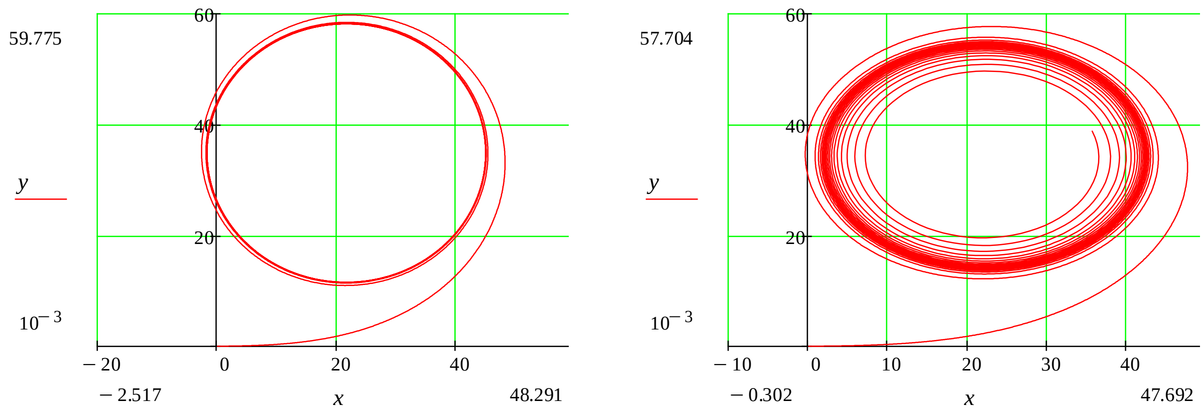
$$\left(l\frac{C_f\theta}{C_rL}\right)^2=\left(0{,}75\frac{(-6000)0{,}1}{(-5000)(2{,}5+2{,}5)}\right)^2=3{,}24\cdot10^{-4};$$

$$4b\frac{C_1}{C_2}=4\cdot2{,}5\frac{-5000-6000}{2{,}5\cdot(-6000)-2{,}5\cdot(-5000)}=44.$$

Критическая скорость, предсказываемая линейной моделью, равна

$$V_{kr}=\sqrt{-\frac{2C_fC_rL^2}{m\left(aC_f-bC_r\right)}}=\sqrt{-\frac{2(-5000)(-6000)(2{,}5+2{,}5)^2}{2500\left(2{,}5(-6000)-2{,}5(-5000)\right)}}=15{,}5\ \text{м/с}.$$

Проинтегрируем систему (2) при скорости u = 13,1<V_{kr} (рисунок 3 и рисунок 4). Видно, что линейная модель в соответствии с критерием устойчивости предсказывает, что автомобиль со временем будет двигаться по окружности с постоянной угловой скоростью, тогда как на самом деле, как видно из рисунка 4, угловая скорость будет неограниченно возрастать и при некотором ее значении автомобиль занесет. Также из рисунка 5 видно, что при невысоких скоростях стационарные угловые частоты примерно равны, а с увеличением скорости угловая частота обращается в бесконечность раньше, чем это следует из линейной модели.



а) линейная модель　　　　б) нелинейная модель

Рисунок 3 – Траектории движения центра задней оси

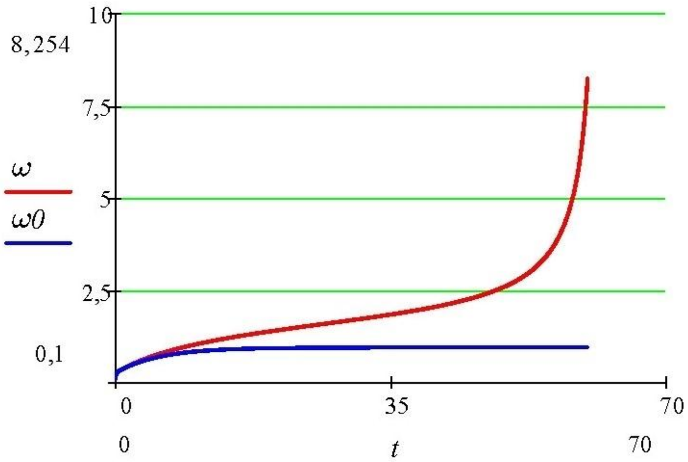


Рисунок 4 – Зависимость угловых скоростей от времени для линейной и нелинейной моделей

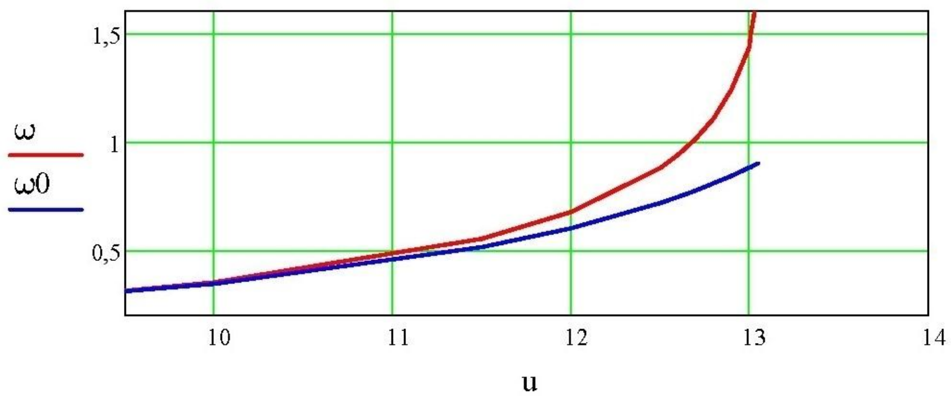


Рисунок 5 – Изменение угловых скоростей для линейной и нелинейной моделей в зависимости от скорости

Выводы и перспективы дальнейших исследований

Как и в случае плоской модели, автомобиль оказывается безусловно устойчивым при $C_2 \geq 0$. Если же $C_2 < 0$, то потеря управляемости произойдет при скорости ниже предсказываемой выражением (1). Результаты данной работы могут быть обобщены, если учесть различие коэффициентов увода на колесах одной оси, а также перераспределение нагрузки на осях и колесах.

Список литературы

1. Ellis, J. R. Vehicle Dynamics / J. R. Ellis. – London : Business Books Limited, 1969.
2. Вербицкий, В. Г. Влияние перераспределения нагрузок по осям на критическую скорость прямолинейного движения автомобиля / В. Г. Вербицкий, Е. М. Мисько // Вісник Донецького інституту автомобільного транспорту. – 2009. – № 2. – С. 58–67.
3. Костенко, А. В. К вопросу об исследовании курсовой устойчивости движения легкового автомобиля с учетом пяточного момента шин / А. В. Костенко, А. Н. Ефименко // Вісник СНУ ім. Володимира Даля. –2010. – № 6. – С. 67–70.
4. Прогнозирование характеристик шин и курсовой устойчивости движения легкового автомобиля / В. А. Макаров [и др.] // 77-я международная конференция ААИ «Автомобиле- и тракторостроение в России: приоритеты развития и подготовка кадров». – 2012. – С. 58–63.
5. Pacejka, H. B. Tire and Vehicle Dynamics / H. B. Pacejka. – 3rd Edition. – Butterworth-Heinemann is an Imprint of Elsevier, 2012. – 672 p.
6. Andersson, Johan Vehicle Dynamics: Optimization of Electronic Stability Program for Sports Cars [Электронный ресурс] / Johan Andersson. – Режим доступа : http://epubl.ltu.se/1404-5494/2008/010/LTU-HIP-EX-08010-SE.pdf .

Д. В. Фесенко, А. И. Петров
Автомобильно-дорожный институт
ГОУВПО «Донецкий национальный технический университет», г. Горловка

Учет колеи в критерии устойчивости плоской модели автомобиля

Задача определения условий устойчивого движения является одной из важнейших прикладных проблем в динамике колесных экипажей. Однако математическая сложность этой задачи не позволяет получить полное решение, пригодное для любых условий. По этой причине широко используются локальные методы исследования устойчивости. Суть их заключается в том, что исходная нелинейная задача рассматривается лишь в некоторой окрестности изучаемого решения, в которой решение близко к решению другой, обычно гораздо более простой задачи. При таком подходе остается неизученным вопрос – в какой именно области справедливы полученные результаты.

Данная работа является попыткой придать более корректную форму известному утверждению об устойчивости прямолинейного движения и связанному с ним понятию критической скорости. В линеаризованной модели, в рамках которой и был получен данный критерий, при каждом значении докритической скорости существует одно стационарное состояние. В полной нелинейной модели количество стационарных состояний изменяется. Достаточным условием нарушения критерия устойчивости является отсутствие стационарных состояний при докритических скоростях.

Построена модель движения автомобиля, учитывающая момент, создаваемый силами увода управляемых колес. На основании этой модели получено уравнение для нахождения стационарных состояний и определено при каких условиях стационарные состояния исчезают раньше, чем достигается критическая скорость.

Установлено достаточное условие нарушения результата относительно критической скорости.

Также показано, что, как и для линейной модели, условие $C_2 > 0$ гарантирует безусловную устойчивость автомобиля, причем как при прямолинейном движении, так и при движении на кривых.

МОДЕЛЬ АВТОМОБИЛЯ, КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОМОБИЛЯ, КРИТИЧЕСКАЯ СКОРОСТЬ АВТОМОБИЛЯ, УПРАВЛЯЕМОСТЬ АВТОМОБИЛЯ, УСТОЙЧИВОСТЬ АВТОМОБИЛЯ

D. V. Fesenko, A. I. Petrov
Automobile and Highway Institute of Donetsk National Technical University, Gorlovka

Wheel Track Account in the Stability Criterion of the Automobile Two-Dimensional Model

The determination task of stable motion conditions is one of the most important applied problems in the dynamics of wheel carriages. However, the mathematical complexity of this task forbids to arrive at complete solution applicable for any conditions. This is the reason why local methods of the stability study are widely used. The matter is that initial nonlinear problem is considered only in some neighbourhood of the problem under study. In this neighbourhood, the solution is close to the solution of the much easier problem. At such approach, the problem remain unexplored – in what field exactly the obtained results are valid.

This work is an attempt to shape more correctly the known statement about stability of the linear motion and the concept of critical speed connected with it. In the linear model within the scope of which the given criterion has been obtained at every level of the subcritical speed only one stationary state exists. In complete nonlinear model the number of stationary states varies. Sufficient condition of the stability criterion disruption is the lack of stationary states at subcritical speeds.

Automobile traffic model is developed. It takes into account the moment made by skid forces of steering wheels. Based on this model equation for finding automobile stationary states is obtained. It is determined when stationary states vanish before critical speed can be reached.

Sufficient condition of the result disruption relative to the critical speed is determined.

It is shown that as for linear model condition $C_2 > 0$ ensures absolute automobile stability both at linear motion and at motion on the curve.

AUTOMOBILE MODEL, AUTOMOBILE STABILITY CRITERION, CRITICAL SPEED, AUTOMOBILE STEERABILITY, AUTOMOBILE STABILITY

Сведения об авторах:
Д. В. Фесенко
SPIN-код: 7939-6050
ResearcherID: H-9689-2016
Телефон: 380951660895
Эл. почта: dimaadipmi@gmail.com
А. И. Петров
Телефон: 380951660895
Эл. почта: dimaadipmi@gmail.com

Статья поступила 30.06.2016

Рецензент: А. В. Химченко, канд. техн. наук, доц. АДИ ГОУВПО «ДонНТУ»