

**ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**ФАКУЛЬТЕТ ИНЖЕНЕРНОЙ МЕХАНИКИ И МАШИНОСТРОЕНИЯ**

**КАФЕДРА «МЕХАНИЧЕСКОЕ ОБОРУДОВАНИЕ ЗАВОДОВ ЧЕРНОЙ МЕТАЛЛУРГИИ»  
ИМ. ПРОФ. СЕДУША В.Я.**

## **МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

**к проведению лабораторных работ по дисциплине вариативной части  
по выбору студента профессионального цикла**

## **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В РАСЧЕТАХ НА ЭВМ В ОТРАСЛИ**

**для студентов всех форм обучения  
направления подготовки 15.03.02  
«Технологические машины и оборудование»**

**Донецк  
ДОННТУ  
2017**

**ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**ФАКУЛЬТЕТ ИНЖЕНЕРНОЙ МЕХАНИКИ И МАШИНОСТРОЕНИЯ**

**КАФЕДРА «МЕХАНИЧЕСКОЕ ОБОРУДОВАНИЕ ЗАВОДОВ ЧЕРНОЙ  
МЕТАЛЛУРГИИ» ИМ. ПРОФ. СЕДУША В.Я.**

## **МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

**к проведению лабораторных работ по дисциплине вариативной части**

**по выбору студента профессионального цикла**

## **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В РАСЧЕТАХ**

## **НА ЭВМ В ОТРАСЛИ**

**для студентов всех форм обучения**

**направления подготовки 15.03.02**

**«Технологические машины и оборудование»**

Рассмотрены на заседании  
кафедры «Механическое оборудование  
заводов черной металлургии»  
им. проф. Седуша В.Я.  
Протокол № 11 от 03.04.2017 г.

Утверждены на заседании  
учебно-издательского совета ДОННТУ  
Протокол № \_\_\_\_ от \_\_.\_\_. 20\_\_ г.

**Донецк  
ДОННТУ  
2017**

Методические указания к проведению лабораторных работ по дисциплине вариативной части по выбору студента профессионального цикла «Математические методы в расчетах на ЭВМ в отрасли» для студентов всех форм обучения направления подготовки 15.03.02 «Технологические машины и оборудование» / сост.: Е. В. Ошовская. – Донецк: ГОУВПО «Донецкий национальный технический университет», 2017. – 116 с.

Отражены цели и задачи лабораторного практикума по дисциплине «Математические методы в расчетах на ЭВМ в отрасли» для студентов очной формы обучения по направлению подготовки 15.03.02 «Технологические машины и оборудование». Описаны структура лабораторных работ, порядок подготовки к ним, последовательность операций и действий, направленных на выполнение поставленных задач, указаны форма представления результатов работы и порядок защиты отчетов по выполненным заданиям, даны рекомендации по использованию теоретического материала.

*Составители:* Ошовская Е.В., к.т.н., доцент, доцент кафедры «Механическое оборудование заводов черной металлургии» им. проф. Седуша В.Я.

*Рецензенты:* д.т.н., профессор А.П. Кононенко  
к.т.н., профессор В.А. Сидоров

Ответственный за выпуск:  
к. т. н., профессор А. Л. Сотников

## СОДЕРЖАНИЕ

ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ КУРСА	4
<b>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1.</b> ЗНАКОМСТВО С ПАКЕТОМ MATHCAD.	
ОСНОВНЫЕ НАВЫКИ РАБОТЫ	5
<b>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2.</b> СИМВОЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. МАТРИЦЫ И МАТРИЧНЫЕ ОПЕРАТОРЫ. ПОСТРОЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ГРАФИКОВ	18
<b>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3.</b> ПРОГРАММИРОВАНИЕ В ПАКЕТЕ MathCAD	24
<b>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4.</b> ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ (МНК)	32
<b>ЛАБОРАТОРНОАЯ РАБОТА №5.</b> ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ПЛАНИРОВАННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА	38
<b>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6.</b> РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ	46
<b>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №7.</b> ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ	50
<b>ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №8.</b> ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЪЕМА И КООРДИНАТ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ ЖИДКОГО МЕТАЛЛА В МЕТАЛЛУРГИЧЕСКИХ СОСУДАХ	59
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ А.</b> Варианты индивидуальных заданий к лабораторной работе №4	71
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ Б.</b> Пример программы для определения коэф- фициентов регрессии уравнения методом наименьших квадратов (МНК)	86
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ В.</b> Пример оформления отчета по лабораторной работе №4	81
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ Д.</b> Критерий Стьюдента и критерий Фишера	93
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ Е.</b> Варианты индивидуальных заданий к лабораторной работе №5	94
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ Ж.</b> Пример оформления отчета по лабораторной работе №5	110
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ З.</b> Варианты индивидуальных заданий к лабораторной работе №6	113
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ И.</b> Пример программы для решения уравнения численными методами	114
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ К.</b> Пример оформления отчета по лабораторной работе №6	120
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ Л.</b> Варианты индивидуальных заданий к лабораторной работе №7	122
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ М.</b> Пример программы для вычисления определенного интеграла численными методами	123

**ПРИЛОЖЕНИЕ Н.** Пример оформления отчета по лабораторной  
работе №7

126

127

130

## ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ КУРСА

Основная задача курса «Математические модели в расчетах на ЭВМ» – дать студентам возможность ознакомиться с современными вычислительными методами, которые могут быть использованы при решении инженерных задач.

В результате прохождения данного курса студенты должны:

- получить основные навыки математического моделирования;
- научиться производить алгоритмизацию вычислительного процесса поставленной математической модели;
- научиться использовать современный прикладной пакет MatCAD и производить в нем расчеты;
- научиться анализировать полученные численные результаты и оценивать полученную погрешность.

## ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ПО ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Выполнение лабораторных занятий с использованием активных методов обучения является важной частью учебного процесса. Цель этих занятий - закрепить и углубить знания по курсу, привить навыки проведения анализа исходных данных, а также научить решать прикладные задачи, связанные со специальностью.

Включенные в методические указания задания охватывают, с одной стороны, основные вопросы курса, а с другой стороны, соответствуют тем вопросам, которые наиболее часто встречаются в практической работе инженеров-механиков (конструкторов, проектировщиков, эксплуатационного персонала, исследователей). Для каждого задания приведены исходные данные и методические указания, даны примеры решения.

Объем отдельного занятия рассчитан на два часа самостоятельной работы и два часа аудиторных занятий под руководством преподавателя.

# ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

## ЗНАКОМСТВО С ПАКЕТОМ MATHCAD.

### ОСНОВНЫЕ НАВЫКИ РАБОТЫ

**Цель работы:** Ознакомиться с интерфейсом и основными возможностями пакета MathCad. Научиться записывать заданные функции, вычислять их значения, составлять таблицы значений функций, строить двумерные графики.

### Теоретические положения

MathCAD – это мощная, и, в то же время, простая универсальная среда для решения задач в различных отраслях науки и техники, финансов и экономики, математики и статистики, организации производства и управления. Она располагает широким набором инструментальных, информационных и графических средств. На сегодняшний день пакет MathCAD одна из самых популярных математических систем.

При открытии пакета MathCAD на экране монитора появляется рабочее окно программы (рис. 1).

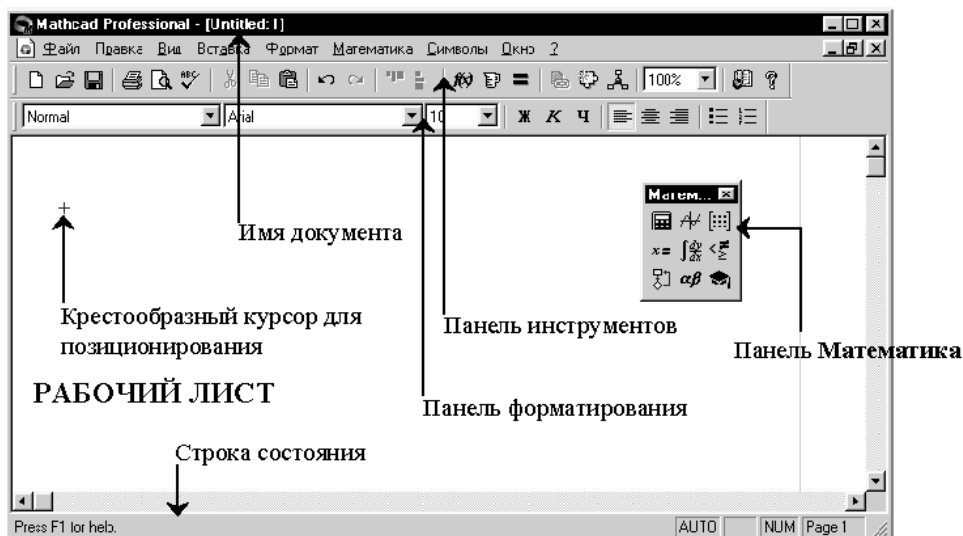


Рис. 1. Элементы окна MathCAD

Панель **инструментов** (рис. 2) состоит из пиктограмм наиболее часто используемых команд:

1. Создать новый документ [Ctrl + N];
2. Открыть существующий файл [Ctrl + O];
3. Сохранить текущий документ [Ctrl + S];

4. Печатать текущий документ [Ctrl + P];
5. Просмотр перед печатью;
6. Проверка орфографии;
7. Вырезать в буфер обмена [Ctrl + X];
8. Скопировать в буфер обмена [Ctrl + C];
9. Вставить из буфера обмена [Ctrl + V];
10. Отмена операции [Ctrl + Z];
11. Возврат операции [Ctrl + Y];
12. Выровнять по верхней границе;
13. Выровнять по левой границе;
14. Вставить функцию [Ctrl + E];
15. Вставить единицы намерения [Ctrl + U];
16. Вычислить [F9];
17. Вставить гипертекстовую ссылку [Ctrl + K];
18. Вставить компонент;
19. Запуск MathConnex;
20. Масштабирование;
21. Запуск Ресурс-Центра;
22. Помощь [F1].



Рис. 2. Панель инструментов

Панель **форматирования** (рис.3) состоит из пиктограмм для вызова следующих команд:

1. Стиль вводимого имени;
2. Выбор шрифта;
3. Выбор размера шрифта;
4. Полужирный;
5. Курсив;
6. Подчеркивание;
7. Выравнивание по левому краю;
8. Выравнивание по центру;
9. Выравнивание по правому краю;
10. Маркеры;
11. Нумерованный список.



Рис. 3. Панель форматирования



Панель **Математика** (рис.4) состоит из элементов для вызова отдельных специальных разделов математических функций и операций:

1. Вызов панели инструментов **Арифметические инструменты**;
2. Вызов панели инструментов **Инструменты графиков**;
3. Вызов панели инструментов **Векторные и матричные операции**;
4. Вызов панели инструментов **Инструменты некоторых знаков**;
5. Вызов панели инструментов **Операторы математического анализа**;
6. Вызов панели инструментов **Булевы операторы**;
7. Вызов панели инструментов **Инструменты программирования**;
8. Вызов панели инструментов **Символы греческого алфавита**;
9. Вызов панели инструментов **Символические операторы**.

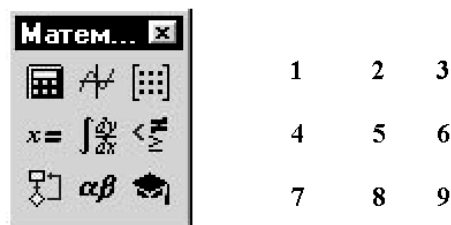


Рис.4. Панель Математика

После вызова всех панелей инструментов рабочее окно MathCAD принимает вид (рис. 5).

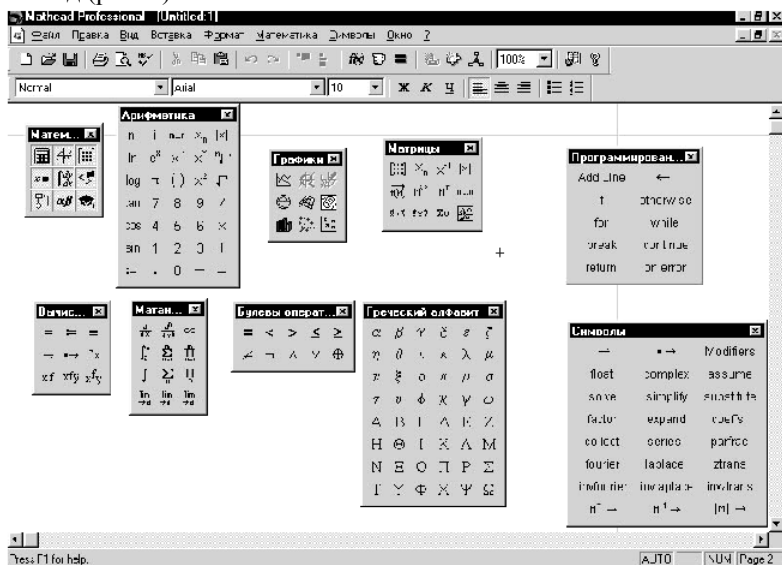


Рис. 5. Панели инструментов MathCAD

В таблице 1 приведены наиболее часто используемые операции MathCAD и «горячие» клавиши для их вызова.

Таблица 1 – Частопримяемые операции MathCAD

Операция	Запись	Клавиша (комбинация клавиш)
1	2	3
Сложение, вычитание	$x+y, x-y$	[+], [-]
Умножение	$x, y$	[*]
Деление	$\frac{x}{y}$	[/]
Возведение в степень	$x^y$	[^]
Факториал	$x!$	[!]
Квадратный корень	$\sqrt{x}$	[√]
Присвоить значение переменной	$x:=$	[:]
Вычислить	$x=$	[=]
Переменная, принимающая значения из промежутка	$x:=0..10$	[:]
Индекс переменной	$x_i$	[[]]
Сумма	$\sum_{i=1}^{10} x_i$	[Shift+4] [Ctrl+Shift+4]
Произведение	$\prod_{i=1}^{10} x_i$	[Shift+3] [Ctrl+Shift+3]
Определенный интеграл	$\int_0^{\pi} \sin(x)dx = 2$	[Shift+7]
Неопределенный интеграл	$\int \sin(t)dt \rightarrow -\cos(t)$	[Ctrl+I]
1-я производная	$\frac{d}{dt} \sin(t) \rightarrow \cos(t)$	[Shift+7]

Продолжение таблицы 1

1	2	3
n-я производная	$\frac{d^2}{dt^2} \sin(t) \rightarrow \cos(t)$	[Ctrl+Shift+ /]
Ввод текста		[Shift + ^]

**Ход работы**

**Задание 1.** Вычисление по заданной формуле.

Задание исходных данных:		Способ ввода:	
x:=0.8	a:=2.4	b:=0.78	x:0.8      a:2.4      b:0.78
Запись выражений:			
$y := \frac{3 + \sin\left(a \cdot \frac{b}{x}\right)^2}{15 \cdot \log(a - b)}$		y:3+sin(a*b/x)^2[Space]/15*log(a-b)	
$g := 8.15 \cdot y^4 \cdot \tan(a \cdot y \cdot \sqrt{5 \cdot x})$		g:8.15*y^4[Space]*tan(a*y*sqrt(5*x))	
Вывод результатов:			
y=1.119	g=-16.523	y=	g=

**Задание 2.** Составить таблицу значений функции, заданной на интервале [0,1;0,9] с шагом 0,1.

Задание интервала и шага  
изменения аргумента

Способ ввода:

x:=0.1,0.2... 0.9

x:0.1,0.2;0.9

Функция пользователя:

$F(x) := a \cos(x)^3 + x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}$

F(x):acos(x)^3[Space]+x^1/3[Space]+x^2/3

Вывод таблицы значений аргумента и функции:

x =	F(x) =
0.1	3.86
0.2	3.495
0.3	3.147
0.4	2.838
0.5	2.572
0.6	2.352
0.7	2.179
0.8	2.057
0.9	1.989

x=

F(x)=

**Задание 3.** Составить таблицу значений функции на множестве неравностоящих значений аргумента.

<p>Задание массива значений аргумента:</p> <p><math>i := 1..4</math></p> <p><math>x_i :=</math></p> <table border="1" style="margin-left: 40px;"> <tr><td>1</td></tr> <tr><td>1.7</td></tr> <tr><td>1.8</td></tr> <tr><td>2.1</td></tr> </table> <p>Задание функции:</p> <p><math>y(x) := \tan\left(\frac{\pi}{x} + x\right)^2</math></p> <p>Вывод результатов:</p> <table style="margin-left: 40px;"> <tr> <td><math>i =</math></td> <td><math>x_i =</math></td> <td><math>y(x_i) =</math></td> </tr> <tr><td>1</td><td>1</td><td>2.426</td></tr> <tr><td>2</td><td>1.7</td><td>0.185</td></tr> <tr><td>3</td><td>1.8</td><td>0.183</td></tr> <tr><td>4</td><td>2.1</td><td>0.239</td></tr> </table>	1	1.7	1.8	2.1	$i =$	$x_i =$	$y(x_i) =$	1	1	2.426	2	1.7	0.185	3	1.8	0.183	4	2.1	0.239	<p>Способ ввода:</p> <p><math>i:1;4</math></p> <p><math>x[i:1,1.7,1.8,2.1</math></p> <p><math>y(x):tan(\pi/x[Space]+x)^2</math></p> <p><math>i=</math>      <math>x[i=</math>      <math>y(x[i)=</math></p>
1																				
1.7																				
1.8																				
2.1																				
$i =$	$x_i =$	$y(x_i) =$																		
1	1	2.426																		
2	1.7	0.185																		
3	1.8	0.183																		
4	2.1	0.239																		

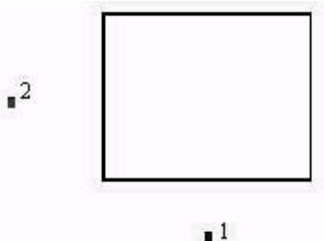
**Задание 4.** Рассчитать массив значений функции и вывести на экран индекс массива, массив значений аргумента, массив значений функции.

<p>Задание массива значений аргумента, индекса массива и функции</p> <p><math>i := 0..5</math></p> <p><math>x_i := i \cdot 0.21</math></p> <p><math>P_i := e^{-x_i} \cdot \sin(0.5 \cdot x_i)</math></p> <p>Вывод результатов:</p> <table style="margin-left: 40px;"> <tr> <td><math>i =</math></td> <td><math>x_i =</math></td> <td><math>P_i =</math></td> </tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0.21</td><td>0.085</td></tr> <tr><td>2</td><td>0.42</td><td>0.137</td></tr> <tr><td>3</td><td>0.63</td><td>0.165</td></tr> <tr><td>4</td><td>0.84</td><td>0.176</td></tr> <tr><td>5</td><td>1.05</td><td>0.175</td></tr> </table>	$i =$	$x_i =$	$P_i =$	0	0	0	1	0.21	0.085	2	0.42	0.137	3	0.63	0.165	4	0.84	0.176	5	1.05	0.175	<p>Способ ввода:</p> <p><math>i:0;5</math></p> <p><math>x[i:i*0.21</math></p> <p><math>P[i:e^-x[i[Space+Space]*sin(0.5*x[i]</math></p> <p><math>i=</math>      <math>x[i=</math>      <math>P[i=</math></p>
$i =$	$x_i =$	$P_i =$																				
0	0	0																				
1	0.21	0.085																				
2	0.42	0.137																				
3	0.63	0.165																				
4	0.84	0.176																				
5	1.05	0.175																				

## Построение двумерного графика в декартовой системе координат

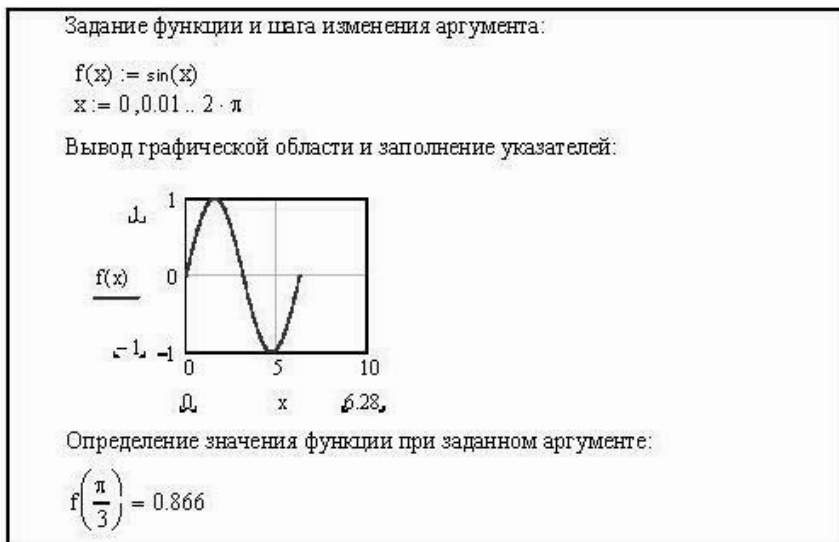
Для построения двумерного графика в декартовой системе координат необходимо:

1. Задать функцию пользователя или массив ее значений.
2. Задать интервал и шаг изменения аргумента или массив его значений.
3. Установив курсора свободной области экрана, нажать клавиши [Shift+2].  
При этом появиться пустая графическая область с 2-мя указателями:



4. В указатель 1 ввести имя аргумента, а в указатель 3 – имя функции.
5. Вывести курсор из графической области. Двойной щелчок в графической области вызывает окно **Формат графика** – «Formatting Currently Selected X-Y Plot»).

**Задание 5.** Построить график функции  $f(x)=\sin(x)$  на интервале  $[0, 2\pi]$ .  
Найти значение  $f(\pi/3)$ .



**Задание 6.:** Построить график кусочно-аналитической функции на интервале  $[-6;6]$ .

$$F(x) = \begin{cases} \sin(2 \cdot x) & \text{при } x \leq 0, \\ e^{-2 \cdot x} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Для построения функций такого вида используется встроенная функция **if**, следующего формата:

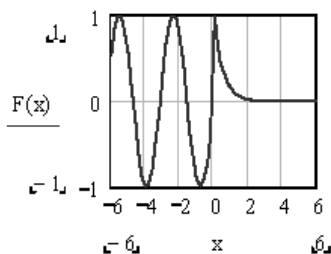
**if(условие, Выражение1, выражение2)**

Параметр «условие» – это выражение, включающее операторы отношения. Если «условие» истинно, то функция **if** принимает значение «**выражение1**», если ложно – «**выражение2**». Функция **if** допускает вложения и может иметь вид:

**if(условие, выражение1, if(условие2, выражение2, выражение3))**

$x := -6, -5.8..6$

$F(x) := \text{if}(x > 0, e^{-2x}, \sin(2 \cdot x))$



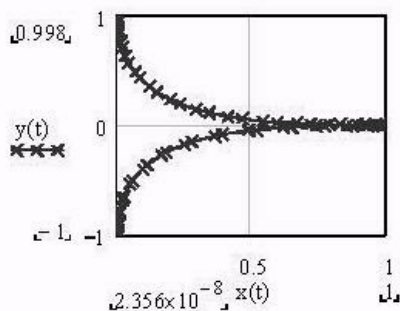
**Задание 7.** Построить график функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x(t) = \cos^4(t) \\ y(t) = \sin^5(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$t := 0, 0.1 \dots 2 \cdot \pi$$

$$x(t) := \cos(t)^4$$

$$y(t) := \sin(t)^5$$



**Задание 8.** Построить график кардиоиды.

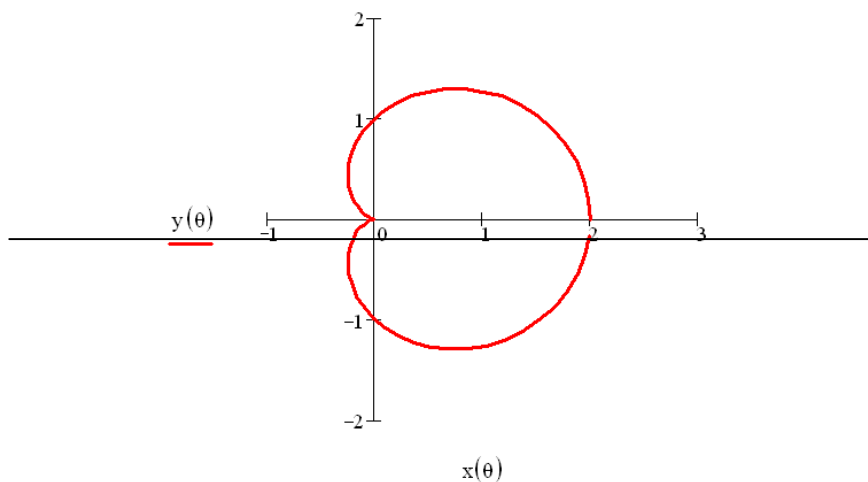
Диапазон изменения угла  $\theta := 0, 0.1 \dots 2 \cdot \pi$

Радиус кардиоиды  $r(\theta) := \cos(\theta) + 1$

Координаты точек кардиоиды

$$x(\theta) := r(\theta) \cdot \cos(\theta)$$

$$y(\theta) := r(\theta) \cdot \sin(\theta)$$



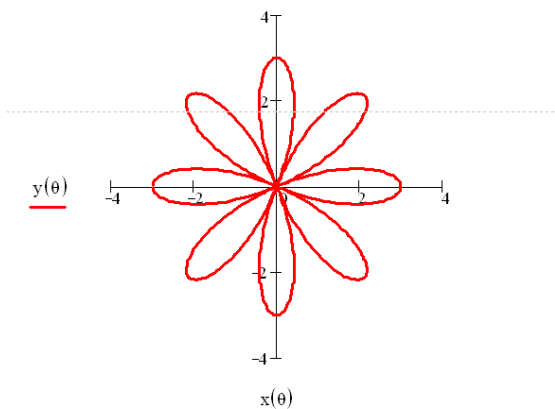
**Задание 9.** Построить график параметрической функции.

$$\theta := -\pi, -\pi + 0.01 \dots \pi$$

$$r(\theta) := 3 \cdot \cos(4 \cdot \theta)$$

$$x(\theta) := r(\theta) \cdot \cos(\theta)$$

$$y(\theta) := r(\theta) \cdot \sin(\theta)$$



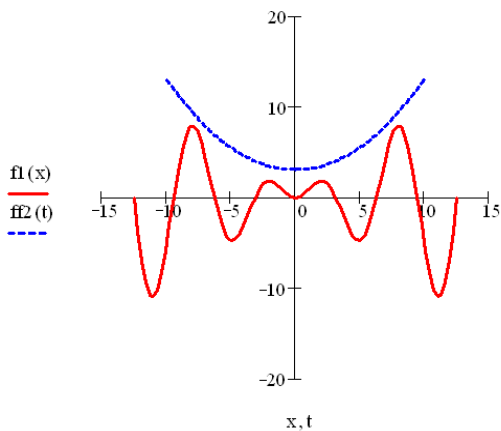
**Задание 10.** Построить графики двух функций от разных аргументов.

$$x := -4 \cdot \pi, -3.9 \cdot \pi \dots 4 \cdot \pi$$

$$f1(x) := x \cdot \sin(x)$$

$$t := -10, -9.9 \dots 10$$

$$ff2(t) := 0.1 \cdot t^2 + 3$$

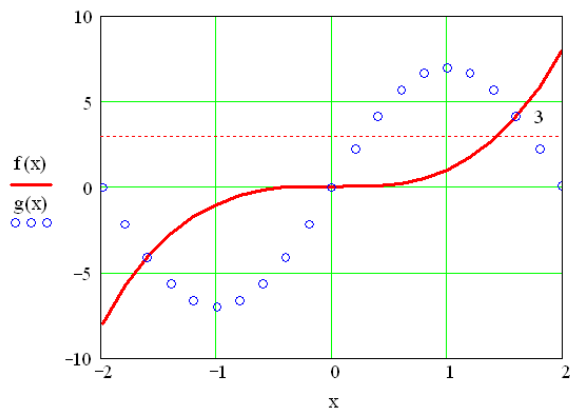




**Задание 11.** Построить графики двух функций одного аргумента.

$$x := -2, -1.8 \dots 2$$

$$f(x) := x^3 \qquad g(x) := 7 \cdot \sin\left(x \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$



**Индивидуальное задание 1.** Вычисление по заданной формуле.

Вариант	Функции	Вариант	Функции
1 11 21	$y = \frac{7 + \cos^2\left(\frac{a \cdot c}{x}\right)}{13 + \lg(b \cdot (c + x))}$ $g = 3 \cdot y \cdot (x^{2c}) \cdot a + \lg\left(\frac{x}{y}\right)$	2 12 22	$y = \frac{5 \cdot x^c \cdot \sqrt[3]{e^{\frac{2 \cdot x^c}{a}}}}{b \cdot \sin(\cos(b + c \cdot x))}$ $g = \cos\left(5 \cdot e^{\sin(a \cdot y^e)}\right)^{a \cdot b^e}$
3 13 23	$y = \sqrt{\frac{a \cdot \sin\left(c \cdot \frac{a}{5 \cdot \lg(x)}\right)}{x^{5e} + 14 \cdot \lg\left(14 \cdot \frac{x}{e}\right)}}$ $g = \lg\left(\sin\left(\frac{x^{\sin x}}{\cos\left(\frac{c \cdot a}{y}\right)}\right)\right)$	4 14 24	$y = \frac{14 + \sqrt[3]{a \cdot x^{2 \cdot x^{2a}}}}{\lg\left(\frac{\sin(x \cdot b)}{a^{5 \cdot x^4}}\right)}$ $g = 14 \cdot \sin^2\left(a \cdot \frac{y}{x}\right) + 23 \cdot \lg\left(y \cdot \frac{x}{a \cdot c}\right)^3$
5 15 25	$y = 14 \cdot \sqrt{\frac{15 \cdot \sin\left(\frac{4}{x \cdot c^{5e}}\right)}{\cos(2 \cdot x^c)}}$ $g = \cos\left(y^{\left(5 + a \cdot x \cdot \frac{12}{c^2}\right)}\right)$	6 16 26	$y = \frac{\sqrt{5 \cdot \sin\left(\frac{\sin(\cos(a))}{\sin(a \cdot c \cdot b)}\right)}}{b + 14 \cdot c}$ $g = y + \sin\left(x^{y+15}\right)^{\frac{c}{e}}$
7 17 27	$y = \frac{\sin\left(\frac{5 \cdot c^{x+1} + a \cdot b^{x-1}}{\sqrt{x^5}}\right)}{\cos\left(\sqrt[3]{b^x \cdot c}\right)}$ $g = \pi \cdot x \cdot \sqrt[5]{x^{\cos\left(\frac{\pi \cdot x}{a \cdot c^b}\right)}}$	8 18 28	$y = \frac{\pi \cdot c + \frac{x^{a+c}}{\sqrt{x^{a+b}}}}{\cos\left(\frac{\sin(x)}{a^{x+c}}\right)}$ $g = \log\left(x \cdot \lg^{(5+c)}\left(c^{\sqrt[5]{y^x}}\right)\right)$
9 19 29	$y = 14 + \frac{c \cdot \sin\left(\sqrt[4]{c^x}\right)}{\cos^{2x}(b \cdot c^n)}$ $g = \log\left(\sin\left(14 \cdot \pi^{(y+b \cdot x)}\right)\right) \cdot 28 \cdot a^y$	10 20 30	$y = \frac{14 \cdot \sin\left(c^{\sqrt{x+a \cdot b}}\right) + c^{\sqrt{x-a \cdot b}}}{90 - \sqrt{\pi^{(14+x)}}}$ $g = c \cdot \cos\left(y^{x+b}\right)^{x+c \cdot \sqrt{b+a}}$

Для всех вариантов:  $a=14 \cdot n$ ;  $b=n+a$ ;  $c=n+1$ ,  $x=n+a \cdot b$  где  $n$  – номер варианта.

**Индивидуальное задание 2.** Задать функцию пользователя, составить таблицу ее значений на фиксированном интервале с фиксированным шагом, Составить таблицу значений функции на множестве неравностоящих значений аргумента.

Вариант	Функция	Вариант	Функция
1 11 21	$F(x) = \frac{7 + \cos^2\left(\frac{a \cdot c}{x} + 2\right)}{13 + \lg(b \cdot (c + x))}$	2 12 22	$y = \frac{5 \cdot x^c \cdot \sqrt{e^{\frac{2x^c}{a}}}}{b \cdot \sin(\cos(b + c \cdot x))}$
	1. Интервал: $x \in [0.1; 1.6]$ шаг 0,05 2. $x=3, 3.8, 4.2, 5.1, 6.4$		1. Интервал: $x \in [2.1; 3.5]$ шаг 0,04 2. $x=2, 2.1, 3.4, 4.1, 5.8$
3 13 23	$y = \sqrt{\frac{a \cdot \sin\left(c \cdot \frac{a}{5 \cdot \operatorname{tg}(x)}\right)}{x^{5a} + 14 \cdot \operatorname{tg}\left(14 \cdot \frac{x}{e}\right)}}$	4 14 24	$y = \frac{14 + \sqrt[3]{a \cdot x^{2x^{5x}}}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\sin(x \cdot b)}{a^{5x^4}}\right)}$
	1. Интервал: $x \in [0.1; 1.6]$ шаг 0,05 2. $x=3, 3.8, 4.2, 5.1, 6.4$		1. Интервал: $x \in [2.1; 3.5]$ шаг 0,04 2. $x=2, 2.1, 3.4, 4.1, 5.8$
5 15 25	$y = 14 \cdot \sqrt{\frac{15 \cdot \sin\left(\frac{4}{x \cdot c^{5a}}\right)}{\cos(2 \cdot x^c)}}$	6 16 26	$y = \frac{\sqrt{5 \cdot \sin\left(\frac{\sin(\cos(a \cdot c)^x)}{\sin(a \cdot c \cdot b)}\right)}}{b + 14 \cdot c}$
	1. Интервал: $x \in [0.1; 1.6]$ шаг 0,05 2. $x=3, 3.8, 4.2, 5.1, 6.4$		1. Интервал: $x \in [2.1; 3.5]$ шаг 0,04 2. $x=2, 2.1, 3.4, 4.1, 5.8$
7 17 27	$y = \frac{\sin\left(\frac{5 \cdot c^{x+1} + a \cdot b^{x-1}}{\sqrt{x^{5a} c^b}}\right)}{\cos(\sqrt[3]{b^x \cdot c})}$	8 18 28	$y = \frac{\pi \cdot c + \frac{x^{a+c^b}}{\sqrt{x^{a+b^c-1}}}}{\cos\left(\frac{\sin\left(x^{\sqrt{b+c}}\right)}{a^{x+c}}\right)}$
	1. Интервал: $x \in [0.1; 1.6]$ шаг 0,05 2. $x=3, 3.8, 4.2, 5.1, 6.4$		1. Интервал: $x \in [2.1; 3.5]$ шаг 0,04 2. $x=2, 2.1, 3.4, 4.1, 5.8$
9 19 29	$y = 14 + \sqrt{\frac{c \cdot \sin(\sqrt[3]{c^{13+x}})}{\cos^{2x}(b \cdot c^x)}}$	10 20 30	$y = \frac{14 \cdot \sin\left(c^{\sqrt{x+a \cdot b}}\right) + c^{\sqrt{x+a \cdot b}}}{90 - \sqrt{\pi^{(14+x)}}}$
	1. Интервал: $x \in [0.1; 1.6]$ шаг 0,05 2. $x=3, 3.8, 4.2, 5.1, 6.4$		1. Интервал: $x \in [2.1; 3.5]$ шаг 0,04 2. $x=2, 2.1, 3.4, 4.1, 5.8$

Для всех вариантов:  $a=14 \cdot n$ ;  $b=n+a$ ;  $c=n+1$ , где  $n$  – номер варианта.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

### СИМВОЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. МАТРИЦЫ И МАТРИЧНЫЕ ОПЕРАТОРЫ. ПОСТРОЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ГРАФИКОВ

**Цель работы:** Освоить приемы выполнения символьных преобразований в пакете MathCad. Научиться работать с матрицами и строить трехмерные графики.

#### Теоретические положения

Пакет MathCAD позволяет выполнять **численное** и **символьное** решение задач.

Система определяет, по какому типу следует проводить расчет, в зависимости от используемого **оператора вывода**. Существует 2 различных оператора вывода: оператор численного вывода « $=$ » и оператор символьного вывода « $\rightarrow$ », ввести его можно с панели **Символика**.

Символьный процессор производит вычисления подобно человеку и стремится получить результат в виде какого-то выражения, а численный процессор всегда выдает только десятичную дробь.

**Массивом** называется любая упорядоченная последовательность элементов. В MathCAD массивы отображаются в виде прямоугольных таблиц. Массивы MathCAD делятся на:

- **Векторы.** В MathCAD этим термином принято обозначать матрицы-столбцы.
- **Матрицы.** Двумерный массив.

Операторы, позволяющие проводить основные матричные и векторные преобразования, расположены на панели **Матрица** (рис. 6).

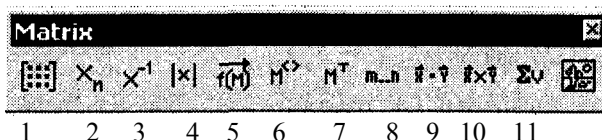


Рис. 6. Панель **Матрица**

Массив является основным элементом, на основе которого строится практически любая программа или численный алгоритм. В MathCAD можно реализовать **несколько способов задания массивов:**

- 1) задание матрицы или вектора вручную при помощи команды **Insert Matrix (Вставить матрицу)**;
- 2) определение матрицы последовательным заданием каждого элемента;
- 3) использование ранжированных переменных;
- 4) задание при помощи языка программирования;
- 5) чтение из внешнего файла.

**Наиболее простым способом** задания матрицы является использование кнопки 1 (см. рис.6) **Insert Matrix (Вставить матрицу)** рабочей панели **Матрицы** (рис. 7). Чтобы ее вызвать, необходимо нажать одноименную кнопку с изображением матрицы с местозаполнителями вместо элементов или нажать «горячие» клавиши **[Ctrl]+[M]**.

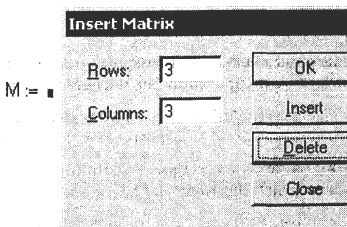


Рис.7. Формирование новой матрицы

Параметры создаваемой матрицы можно определить в окошках **Rows (Строки)** и **Columns (Колонки)**. При этом число строк и столбцов в будущей матрице **не может превышать 10**.

Определившись с размерами матрицы, нажмите **OK** (или **[Enter]**). В документ будет вставлена заготовка с черными маркерами вместо элементов. Последовательно перемещая курсор при помощи мыши или клавиш движения, введите в местозаполнители нужные значения (рис. 8). Делается это так же, как и при задании величин переменных.

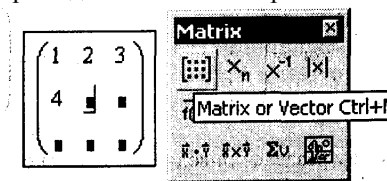


Рис. 8. Заполнение матрицы значения

В случае необходимости можно **добавить к уже созданной и заполненной матрице строку или столбец**. Поставьте курсор к тому элементу, **правее** которого должен быть добавлен столбец (или **ниже** которого — в случае строки). Откройте панель **Insert Matrix (Вставить матрицу)**, в окошках параметров введите 0 — для строк и 1, — для столбцов (или наоборот — в случае добавления строки). Нажмите **[Enter]**.

Добавить описанным способом столбец или строку можно только правее или, соответственно, ниже выбранного элемента.

На практике обычно оперируют не матрицами, а **их именами**. Чтобы вместо матрицы использовать имя, нужно определить ее как **некоторую переменную**. Делается это так же, как и при задании переменной как числа, введением матричной заготовки при помощи панели **Insert Matrix** в маркер оператора присваивания.

Значение любого элемента матрицы можно вывести отдельно, используя его матричные индексы. **Матричные индексы равняются номеру строки и столбца, на пересечении которых элемент находится.**

По умолчанию в MathCAD строки и столбцы также отсчитываются с 0. В том случае, если такая система вам неудобна или непривычна, можете изменить начало отсчета индексов на 1. Чтобы это сделать, вверху документа нужно сделать определение системной константы: **ORIGIN :=1**

**Чтобы получить значение** какого-то матричного элемента, нужно ввести имя матрицы с соответствующими индексами и поставить «=». Для задания индексов на панели **Матрица** имеется специальная кнопка **Индекс** (кнопка 2, см.рис.6) , которой соответствует клавиша **[ ]** . Нажав ее, вы увидите, что на месте будущего индекса, чуть ниже текста имени матрицы, появится черный маркер.

В него через запятую следует ввести значения индексов. На первом месте должен стоять номер строки, на втором – столбца. Для вектора – только номер строки.

Кроме ручного ввода матрицы можно определять **поэлементно**. Это делается аналогично извлечению отдельных элементов матрицы, используя индексы. Нужно проделать операцию присвоения для каждого элемента. При этом размерность матрицы будет определяться элементом с наибольшими индексами. В том случае, если вы присвоите значения не всем элементам создаваемого массива, все остальные будут автоматически определены как 0.

Помимо одного элемента **можно выделить и целые матричные столбцы**. Чтобы сделать, нужно использовать специальный оператор панели **Матрица – Столбец матрицы** (кнопка 6, см.рис.6), которая вводится сочетанием клавиш **[Ctrl]+[6]**.

Если требуется выделить строку, матрицу необходимо транспонировать (оператор **Матричное транспонирование**, кнопка 7, см.рис.6) той же рабочей панели.

Наиболее важные операции над матрицами реализуются при помощи соответствующих операторов панели **Матрица**:

- **Транспонирование** (кнопка 7, см.рис.6).
- **Обращение матрицы** (кнопка 3, см.рис.6).
- **Вычисление определителя** (кнопка 4, см.рис.6).
- **Сумма элементов вектора** (кнопка 11, см.рис.6).

Над матрицами можно выполнять действия с использованием встроенных и пользовательских функций, строить трехмерные графики.

Для построения трехмерных графиков необходимо:

1. Задать параметры  $i$  и  $j$ .
2. Задать промежуток изменения параметров или функцию их изменения.
3. Задать функцию.
4. Задать матрицу значений функции.
5. Нажать **[Ctrl+2]** для построения трехмерного графика. **[Ctrl+5]** для построения карты линий уровня. В указателе задать имя матрицы значений

функции.

При установке курсора в графическую область при помощи нажатой левой кнопки «мышь» возможно вращение графиков вокруг соответствующих осей.

Столбчатый и трехмерный точечный график получаются либо изменением соответствующих параметров в **Формат 3-D графика** (двойной щелчок в графической области), либо с использованием соответствующих вкладок подменю **Графики**.

### Ход работы

**Задание 1.** Численно и символично вычислить несобственный интеграл вероятности.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{2} dx = 0.886$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{2} dx \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \pi^{\frac{1}{2}}$$

**Задание 2.** Вычислить неопределенный интеграл.

$$\int \sin(x) \cdot \cos(x) \cdot x dx \rightarrow \frac{-1}{2} \cdot x \cdot \cos(x)^2 + \frac{1}{4} \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) + \frac{1}{4} \cdot x$$

**Задание 3.** Вручную создать матрицы и вывести элементы массива.

$$V := \begin{pmatrix} \text{"Vector"} \\ 0 \end{pmatrix} \quad M := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \sin(\pi) & \frac{4}{8} \end{pmatrix} \quad N(x$$

$$V_0 = \text{"Vector"}$$

$$M_{0,0} = 1$$

$$M_{0,1} = 2$$

$$V_1 = 0$$

$$M_{1,0} = 0$$

$$M_{1,1} = 0.5$$

**Задание 4.** Поэлементно задать матрицы.

$$M_{0,0} := 0$$

$$M_{0,1} := 1$$

$$N_{0,0} := \text{"Start"}$$

$$M_{1,0} := 2$$

$$M_{1,1} := 3$$

$$N_{2,1} := \text{"End"}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} \text{"Start"} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \text{"End"} \end{pmatrix}$$

**Задание 5.** Выделить из матрицы строки и столбца.

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$M^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$M^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(M^T)^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(M^T)^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

**Задание 6.** Выполнить основные матричные операции.

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -0.5 & 0.667 & -0.167 \\ 1 & -4.333 & 2.333 \\ -0.5 & 3.333 & -1.833 \end{pmatrix}$$

$$M^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 4 & 5 & 8 \\ 5 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$|M| = 6 \quad \sum M^{(0)} = 12$$

**Задание 7.** Построить трехмерный график, линии уровня, столбчатый и точечный графики функции.

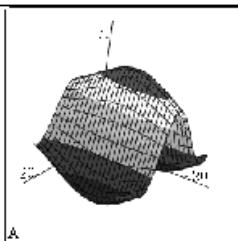
$i := 0..25 \quad j := 0..25$

$x_i := -7 + 1 \cdot i$

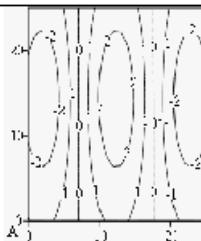
$y_j := -14 + 1 \cdot j$

$f(x, y) := \sin(3 \cdot x) \cdot e^{\cos(y)}$

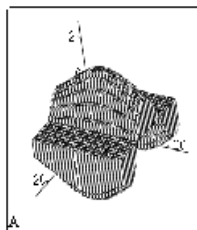
$A_{i,j} := f(x_i, y_j)$



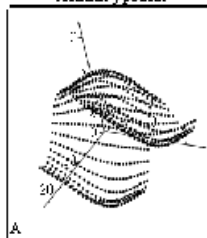
Трехмерный график



Линии уровня



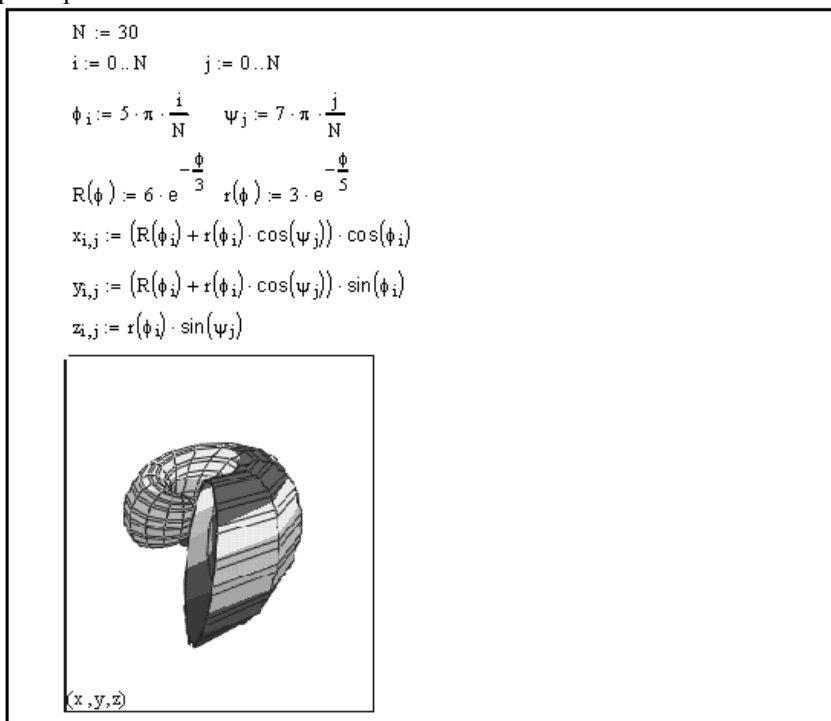
Столбчатый график



Трехмерный точечный график



**Задание 8.** Построить трехмерный график поверхности, заданной параметрически.



**Индивидуальное задание 1.** Найти символьное и численное решение.

$$\frac{d}{dx} x^5 \rightarrow \quad ; \quad \frac{d}{dx} \sin(x) \rightarrow \quad ; \quad \frac{d^3}{dx^3} \frac{b}{x+a} \rightarrow \quad ;$$

$$x:=0.5 \quad a:=2 \quad b:=\pi$$

$$\frac{d}{dx} x^5 = \quad ; \quad \frac{d}{dx} \sin(x) = \quad ; \quad \frac{d^3}{dx^3} \frac{b}{x+a} = \quad .$$

$$\sqrt{8} \rightarrow \quad ; \quad \sqrt{8} = \quad ; \quad \frac{1}{4} + \frac{7}{67} \rightarrow \quad ; \quad \frac{1}{4} + \frac{7}{67} = \quad ;$$

$$\frac{78}{67} + 0.1^3 \rightarrow \quad ; \quad \frac{78}{67} + 0.1^3 = \quad ; \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \rightarrow \quad ; \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \quad ;$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{e^i} \rightarrow \quad ; \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot x^n \rightarrow \quad ; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \rightarrow \quad .$$

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3

### ПРОГРАММИРОВАНИЕ В ПАКЕТЕ MathCAD

**Цель работы:** Получить навыки составления специальных программных блоков с использованием операторов программирования.

#### **Теоретические положения**

Для создания программных блоков в пакете MathCAD используется специальная панель, содержащая все операторы языка программирования. Панель эта называется **Программирование (Programming)** (рис.9) и вызывается с панели **Математика** (кнопка в виде блок-схемы).

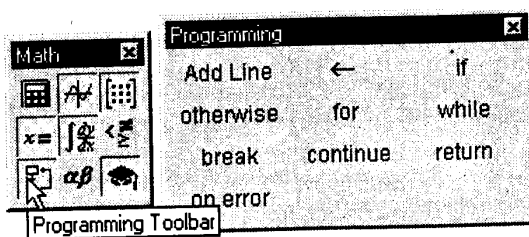


Рис.9. Рабочая панель Программирование

Набор операторов для создания программных модулей содержит следующие элементы:

**Add Line** – создает программный блок и при необходимости расширяет его путем добавления новых строк (при этом удлиняется жирная вертикальная линия, справа от которой в маркерах записываются операторы программного блока);

**←** – символ локального присваивания (в теле программного блока);

**if** – оператор условного выражения (если);

**otherwise** – оператор иного выбора (иначе) (обычно применяется с **if**);

**for** – оператор задания цикла с фиксированным числом повторений;

**while** – оператор задания цикла типа «пока» (цикл выполняется, пока выполняется некоторое условие);

**break** – оператор прерывания;

**continue** – оператор продолжения;

**return** – оператор–функция возврата;

**on error** – оператор обработки ошибок.

Программный блок представляет собой **специальный обособленный от остального документа блок**. Выглядит он как **черная вертикальная**

**линия с маркерами**, в которые заносятся те или иные выражения алгоритма (рис.10).

Рис.10. «Заготовка» программного блока



Для того чтобы построить единичный элемент программного блока, необходимо нажать кнопку оператора **Add Line (Добавить линию)** панели **Программирование**. В области курсора появится следующий объект:

Обычно программа содержит больше чем две строки, поэтому лучше сразу задать блок из 5–6 маркеров, последовательно нажимая **Add line** нужное количество раз, т.е. оператор **Add Line** выполняет функции расширения программного блока. Расширение фиксируется удлинением вертикальной черты программных блоков или их древовидным расширением.

Иногда при написании программы бывает нужным **добавить строку к уже созданному блоку**. Чтобы это сделать, нужно поставить курсор в ту строку блока, выше или ниже которой должна быть введена строка. Положение вставляемого маркера определяется размещением вертикальной черты курсора. Если она находится **слева** от выделенного выражения, то маркер будет добавлен **выше** выделенной строки, если **справа** — то **ниже**. Для того чтобы развернуть курсор в нужную сторону, нажмите клавишу **Insert**.

Расширить программный блок можно создать и внутри уже заданного блока (рис.10). Для этого используется такой же способ – поставить курсор в маркер любого из операторов программирования, нажать кнопку **Add Line**. Заданный таким образом блок выглядит как **параллельная** главному блоку линия, выражения, внесенные в него, будут обособлены от остальной программы, и выполнение соответствующих им действий будет связано только с оператором, к которому вносится внутренний блок.

Оператор **Local Definition (Локальное определение)**

← используется в программах MathCAD для присвоения значений переменным, выражениям или константам (рис.11). Например, выражение  **$x \leftarrow 123$**  присваивает переменной  $x$  значение 123. Локальный характер присваивания означает, что такое **значение  $x$  сохраняет только в теле программы**. За пределами тела программы значение переменной  $x$  может быть не определенным, либо равно значению, которое задается оператором присваивания  **$:=$**  вне программного блока.

$$y := 25$$

$$\left| \begin{array}{l} x \leftarrow 12 = 3.464 \\ y \leftarrow \sqrt{x} \\ y \end{array} \right.$$

$$y = 25$$

Рис.11. Пример локального определения в программном блоке

**Использовать оператор обычного присвоения « $:=$ » в программах нельзя.**

Программный модуль может вести себя как **функция без имени и параметров, но возвращающая результат** (см. пример на рис.11), результат выводится после нажатия **=**. Программный модуль может выполнять и роль

**функции пользователя с именем и параметрами.** Причем параметры функции могут быть определены в общем виде. Заполнив маркеры созданной таким образом функции числовыми значениями, можно получить непосредственно результат программного расчета. Такой подход позволяет значительно экономить время в том случае, если программа должна быть использована много раз.

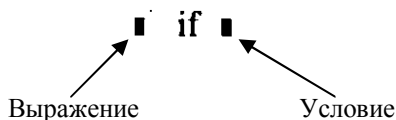
**В качестве результата работы программы** выводится значение того выражения, которое находится в последнем маркере главного программного блока. Ошибившись с его определением (или забыв задать его вовсе), можно получить совсем не тот ответ, который соответствует решению данной задачи (задание 3).

Любая программа строится с использованием **специальных операторов**. Чтобы задать нужный оператор, используются соответствующие команды панели **Программирование**.

**Просто набрать оператор с клавиатуры нельзя – он будет воспринят системой как неизвестная функция.**

### **Условные операторы if, otherwise**

Оператор **if (если)** является оператором для создания условных выражений. Условный оператор **if** имеет два маркера:



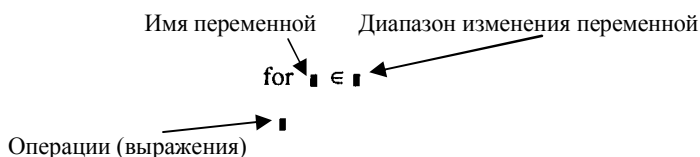
В правый маркер вводится **условие**, в левый – **операция**, которая должна быть проделана в случае, если условие выполнится (если же оно не выполняется, система просчитывает программу, пропуская данный фрагмент). В маркер **операций** может быть внесено **несколько выражений**.

Оператор **otherwise (Иначе)** предназначен для определения того действия, которое должно быть выполнено, если условие оператора **if (Если)** окажется неистинным.

Для задания сложных условий нужно использовать логические операторы, расположенные на панели **Boolean (Булевы)**.

### **Операторы цикла For, While, Break, Continue**

**Оператор for** служит для организации циклов с заданным числом повторений. Он имеет три маркера и записывается в виде:



В двух верхних маркерах, соединенных символом принадлежности, задается имя переменной, по которой организуется цикл, и диапазон принимаемых ею значений. В нижнем маркере определяется операция или комплекс операций, которые должны быть выполнены для каждого значения переменной.

Оператор **while** служит для организации циклов, действующих до тех пор, пока выполняется некоторое условие. Этот оператор записывается в виде:

**while**    Условие

Иногда при работе программы могут возникнуть непредусмотренные в ней проблемы. В этом случае следует остановить работу цикла и выдать сообщение об ошибке. Одна из технических возможностей реализации – использование оператора **Break (Прервать)**. Этот оператор вызывает прерывание работы программы всякий раз, как он встречается. Чаще всего он используется совместно с операторами **if, while, for**.

### Оператор **Continue**

Используется для продолжения работы после прерывания программы. Используется совместно с операторами задания циклов **while** и **for**, обеспечивая после прерывания возврат в начало цикла.

Иногда алгоритм содержит несколько условий, причем при выполнении одного из них рассмотрение остальных приведет к ошибке. В этом случае нужно после выполнения операций, прописанных в первом условии, перейти к рассмотрению следующего значения циклической переменной. Чтобы это сделать, следует использовать специальный оператор **Continue (Продолжить)**. Синтаксис оператора **Continue** аналогичен оператору **Break**.

### Оператор **Return**

При помощи оператора **Return (Возвратить)** можно прервать работу программы и выдать некоторое значение при выполнении заданного условия. Обычно данный оператор используется при описании действий алгоритма в случае ошибочной ситуации. Ввиду того, что оператор **Return** предельно просто заменяется обычным переопределением, на практике он используется редко и имеет скорее эстетическое значение.

### Оператор **on error**

Оператор обработки ошибок позволяет создавать конструкции обработчиков ошибок. Этот оператор задается в виде:

Выражение\_2 **on error** Выражение\_1

Здесь, если при выполнении **Выражения\_1** возникает ошибка, то вы-

полняется **Выражение\_2**.

### Ход работы

**Задание 1.** Создание функции пользователя в виде программного блока и вывод результатов расчета для разных значений параметров.

$$F(x, y, z) := \left| \begin{array}{l} a \leftarrow x + y \cdot z \\ r \leftarrow \frac{x + y + z}{a} \\ r \end{array} \right. \quad F(2, 3, 5) = 0.588 \quad F(1, 7, 9) = 0.266$$

**Задание 2.** Создание функции пользователя в виде программного блока и вывод результатов расчета для разных значений параметров.

$$Ver(\alpha, \beta, \sigma, m) := \left| \begin{array}{l} A \leftarrow \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx \\ A \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{ll} Ver(-3, 3, 3, 1) = 0.656 & Ver(-6, 6, 3, 1) = 0.942 \\ Ver(-9, 9, 3, 1) = 0.996 & Ver(-100, 100, 3, 1) = 1 \end{array}$$

**Задание 3.** Сравнение результатов программного блока.

$$\left| \begin{array}{l} a \leftarrow 5 \\ b \leftarrow a + 6 \cdot \sin\left(a \cdot \frac{2}{\pi}\right) \\ c \leftarrow \frac{b}{a + b} \\ d \leftarrow c + b \cdot a \\ d \end{array} \right. = \blacksquare \quad \left| \begin{array}{l} a \leftarrow 5 \\ b \leftarrow a + 6 \cdot \sin\left(a \cdot \frac{2}{\pi}\right) \\ c \leftarrow \frac{b}{a + b} \\ d \leftarrow c + b \cdot a \\ c \end{array} \right. = \blacksquare$$

**Задание 4.** Использование операторов if, otherwise.

$$\left| \begin{array}{l} x \leftarrow \pi \\ y \leftarrow \frac{5}{4} \cdot \pi \\ t \leftarrow \sin(x + y) \\ n \leftarrow "+" \text{ if } t \geq 0 \\ n \leftarrow "-" \text{ otherwise} \\ n \end{array} \right. = "+"$$

$$M := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad N := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad M1 := \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 6 & 7 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad N1 := \begin{pmatrix} 11 \\ 23 \\ 78 \end{pmatrix}$$

$$\text{Linear}(M, N) := \left| \begin{array}{l} r \leftarrow \text{"Matrix is singular"} \text{ if } |M| = 0 \\ r \leftarrow M^{-1} \cdot N \text{ otherwise} \\ r \end{array} \right.$$

$$\text{Linear}(M, N) = \text{"Matrix is singular"} \quad \text{Linear}(M1, N1) = \begin{pmatrix} 13.491 \\ -8.642 \\ 0.849 \end{pmatrix}$$

**Задание 5.** Задание комплекса условий.

$$f(x) := \left| \begin{array}{l} y \leftarrow \sqrt[3]{x} \text{ if } x \geq 3 \wedge x \leq 12 \\ y \leftarrow x \text{ otherwise} \\ y \end{array} \right.$$

$$f(5) = \blacksquare$$

$$f(20) = \blacksquare$$

$$f(0) = \blacksquare$$

**Задание 6.** Программный блок с использованием цикла. В этом примере переменная i будет изменяться с шагом, равным 1.

$$\left| \begin{array}{l} N \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 0..10 \\ \quad \left| \begin{array}{l} n \leftarrow \sin\left(i \cdot \frac{\pi}{7} + \pi\right) \\ N \leftarrow N + n \end{array} \right. \\ N \end{array} \right. = \blacksquare$$

$$\sum_{i=0}^{10} \sin\left(i \cdot \frac{\pi}{7} + \pi\right) = \blacksquare$$

**Задание 7.** Вычисление пользовательской функции от переменной цикла  $i$ , изменяемой с шагом  $h$ .

$$G(in, ik, h) := \begin{cases} s \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in in, in + h.. ik \\ \quad s \leftarrow s + i \cdot 2 \\ s \end{cases} \quad G(2, 5, 0.2) = \blacksquare \quad G(0, 0.5, 0.1) = \blacksquare$$

$$k := 0, 0.1.. 0.5 \quad k = \quad (0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.4 + 0.5) \cdot 2 = \blacksquare$$

**Задание 8.** Программный блок с циклом `while` для вычисления суммы гармонического ряда из произвольного числа членов. Условием суммирования является то, что сумма не должна превысить 10.

$$Garm(n) := \begin{cases} i \leftarrow 1 \\ S \leftarrow 0 \\ \text{while } i < n \wedge S < 10 \\ \quad \begin{cases} S \leftarrow S + \frac{1}{i} \\ i \leftarrow i + 1 \end{cases} \\ S \leftarrow \text{"No result"} \quad \text{if } S \geq 10 \\ S \end{cases} \quad Garm(50) = \blacksquare$$

$$Garm(10000) = \blacksquare$$

$$Garm(20000) = \blacksquare$$

Проверка – суммирование при помощи специального оператора:

$$\sum_{i=1}^{10000} \frac{1}{i} = 9.788$$

**Задание 9.** Использование оператора `break`.

$$FF(x, y) := \begin{cases} \text{if } y = 0 \\ \quad \begin{cases} Z \leftarrow \text{"Na nol delit nelzya"} \\ \text{break} \end{cases} \\ Z \leftarrow \frac{x}{y} \quad \text{otherwise} \\ Z \end{cases} \quad FF(5, 2) = \blacksquare \quad FF(5, 0) = \blacksquare$$



**Задание 10.** Подсчет суммы всех неделящихся нацело на 3 чисел от 0 до 1000. Условие задается при помощи встроенной функции **trunc(n)**, которая служит для определения целой части числа.

$$\text{Sum} := \left| \begin{array}{l} S \leftarrow 0 \\ \text{for } n \in 0..1000 \\ \quad \left| \begin{array}{l} \text{continue if } \text{trunc}\left(\frac{n}{3}\right) = \frac{n}{3} \\ S \leftarrow S + n \end{array} \right. \\ S \end{array} \right.$$

Sum = ■

$$\text{Sum} := \left| \begin{array}{l} S \leftarrow 0 \\ \text{for } n \in 0..1000 \\ \quad S \leftarrow S + n \text{ if } \text{trunc}\left(\frac{n}{3}\right) \neq \frac{n}{3} \\ S \end{array} \right.$$

Sum = ■

**Задание 11.** Вычисление факториала с применением оператора **Return**.

$$\text{Factorial}(n) := \left| \begin{array}{l} s \leftarrow 1 \\ \text{return } 1 \text{ if } n = 0 \\ \text{return "Error" if } n < 0 \vee \text{trunc}(n) \neq n \\ \text{for } i \in 1..n \\ \quad s \leftarrow s \cdot i \\ s \end{array} \right.$$

Factorial(3) = 6  
Factorial(5) = 120  
Factorial(0) = 1  
Factorial(-2) = "Error"  
Factorial(2.3) = "Error"

**Задание 12.** Использование оператора **Return** для предотвращения деления на ноль.

$$S(x) := \left| \begin{array}{l} \text{return } 1 \text{ if } x = 0 \\ \frac{\sin(x)}{x} \text{ otherwise} \end{array} \right.$$

S(0) = 1      S(1) = 0.841  
S(-2) = 0.455

**Задание 13.** Использование оператора обработки ошибок.

$$Z(y) := \left| \begin{array}{l} a \leftarrow y^2 \text{ on error } a \leftarrow \frac{1}{y} \\ a \end{array} \right.$$

Z(0) = 0      Z(2) = 0.5      Z(-5) = -0.2

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4

### ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ (МНК)

**Цель работы:** освоение навыков построения математических моделей по экспериментальным данным с использованием метода наименьших квадратов.

#### **Теоретические положения**

Часто возникает необходимость выразить в виде функциональной зависимости связь между результатами измерений некоторых величинами  $x_i$ ,  $y_i$ , заданными в виде таблицы. Поскольку измерения не могут производиться без ошибок, зависимости устанавливаются с помощью регрессионного анализа и называются эмпирическими.

Функциональная зависимость

$$y = f(x), \quad (4.1)$$

называемая уравнением регрессии, должна соответствовать табличной модели с достаточной точностью.

Наибольшее распространение при определении параметров функциональной зависимости получил метод, называемый методом наименьших квадратов (МНК). Метод заключается в том, что сумма квадратов отклонений значений  $y$  от искомой линии регрессии должна быть наименьшей. Иными словами, если  $y_1, y_2, \dots, y_n$  - эмпирические значения функций, а  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$  - соответствующие им расчетные значения, то принцип наименьших квадратов заключается в том, чтобы добиться наименьшей величины:

$$F = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - y_i)^2. \quad (4.2)$$

Это условие позволяет определить параметры искомого уравнения регрессии в том случае, если вид этого уравнения заранее известен.

Вид уравнения регрессии для установления функциональной зависимости между опытными данными может быть найден предварительным графическим построением (рис. 12).

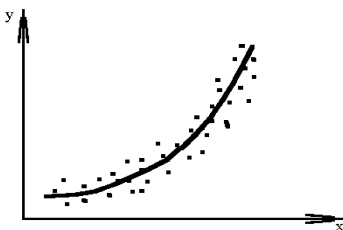


Рис. 12. Экспериментальные данные и линия регрессии

Простейшим уравнением регрессии для описания взаимосвязи результатов эксперимента является линейная зависимость

$$f(x) = a_0 + a_1 x . \quad (4.3)$$

Тогда, выражение (4.2) принимает вид

$$F = \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i - y_i)^2 , \quad (4.4)$$

где  $n$  - количество результатов измерений, т.е. число пар значений  $y$  и  $x$ .

Для нахождения параметров уравнения регрессии необходимо частные производные величины  $F$  по параметрам  $a_0$  и  $a_1$  приравнять нулю:

$$\frac{\partial F}{\partial a_0} = 2 \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i - y_i) = 0 ; \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = 2 \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1 x_i - y_i) x_i = 0 .$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} na_0 + a_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ a_0 \sum_{i=1}^n x_i + a_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases} . \quad (4.6)$$

Параметры уравнения регрессии (4.3) находятся по выражениям:

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} , \quad a_1 = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (4.7) - (4.8)$$

Помимо линейных зависимостей для описания результатов эксперимента используют также показательные, степенные, логарифмические функции (таблица 4.1). Эти функции легко могут быть приведены к линейному виду.

Таблица 4.1 - Уравнения аппроксимирующих кривых и формулы для вычисления их параметров

№	Уравнение регрессии $y = f(x)$	Формулы преобразования входных величин		Формулы преобразования коэффициентов уравнения регрессии	
		$x'$	$y'$	$a$	$b$
1	$y = a + bx$	$x$	$y$	формулы (4.7) - (4.8)	
2	$y = 1 / (a + bx)$	$x$	$1/y$	$a_0$	$a_1$
3	$y = a + b/x$	$1/x$	$y$	$a_0$	$a_1$
4	$y = x / (a + bx)$	$x$	$x/y$	$a_0$	$a_1$
5	$y = ab^x$	$x$	$\ln(y)$	$\exp(a_0)$	$\exp(a_1)$
6	$y = a \cdot \exp(bx)$	$x$	$\ln(y)$	$\exp(a_0)$	$a_1$
7	$y = a \cdot 10^{bx}$	$x$	$\lg(y)$	$10^{a_0}$	$a_1$
8	$y = a + b \cdot \lg(x)$	$\lg(x)$	$y$	$a_0$	$a_1$
9	$y = a + b \cdot \ln(x)$	$\ln(x)$	$y$	$a_0$	$a_1$
10	$y = a / (b + x)$	$x$	$1/y$	$a_1 / a_0$	$1 / a_0$
11	$y = ax / (b + x)$	$1/x$	$1/y$	$1 / a_0$	$a_1 / a_0$
12	$y = a \cdot \exp(b/x)$	$1/x$	$\ln(y)$	$\ln(a_0)$	$a_1$
13	$y = a \cdot 10^{b/x}$	$1/x$	$\lg(y)$	$\lg(a_0)$	$a_1$
14	$y = a + bx^3$	$x^3$	$y$	$a_0$	$a_1$
15	$y = ax^b$	$x$	$\ln(y)$	$\ln(a_0)$	$\ln(a_1)$
16	$y = 1/(a + b \cdot \exp(-x))$	$\exp(x)$	$1/y$	$a_0$	$a_1$

Например. Уравнение регрессии имеет вид (показательная регрессия):

$$y = a \cdot b^x . \quad (4.9)$$

Для приведения зависимости к линейному виду необходимо прологарифмировать обе части уравнения:

$$\ln y = \ln a + x \ln b . \quad (4.10)$$

Введя обозначения

$$y = \ln y , \quad (4.11)$$

$$a_0 = \ln a , \quad a_1 = \ln b , \quad (4.12)$$

получаем уравнение линейной регрессии (4.3)

$$y = a_0 + a_1 x ,$$

параметры которого рассчитываются по выражениям (4.7) и (4.8). Параметры уравнения (4.9) определяются с использованием обратного преобразования:

$$a = \exp(a_0) , \quad b = \exp(a_1) . \quad (4.13)$$

Для других функциональных зависимостей используемые преобразования приведены в таблице 4.1.

Таким образом, применение полученной функциональной зависимости (уравнения регрессии) позволяет:

- воспользоваться полученной зависимостью для выполнения аналитических расчетов;
- сгладить возможные погрешности табличной модели (ошибки эксперимента и др.);
- определить значения  $y$  при промежуточных значениях  $x$  (интерполяция);
- экстраполировать функциональную зависимость, т.е. найти значения  $y$ , соответствующие значениям  $x$ , лежащим за пределами области эксперимента (прогнозирование и др.).

Для оценки степени связи двух величин используется коэффициент корреляции

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}, \quad (4.14)$$

где  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  - средние значения величины  $x$  и  $y$ , определяемые по выражению

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i / n. \quad (4.15)$$

В случае линейной функциональной зависимости коэффициент корреляции равен  $+1$  или  $-1$  в зависимости от знака  $a_1$ .

### **Ход работы**

Варианты индивидуальных заданий приведены в приложении А. Пример текста программы для пакета MathCad приведен в приложении Б.

### **Порядок выполнения работы**

1. В соответствии с присвоенным вариантом ознакомиться с заданием на лабораторную работу (приложение А).
2. Используя пример решения из приложения Б составить программу в пакете MathCad.
3. Оформить отчет по лабораторной работе. Образец отчета приведен в приложении В.

## Структура программы

в пакете MathCad

для определения коэффициентов регрессии уравнения  
методом наименьших квадратов (МНК)

1. Задание начала отсчета в массивах с единицы (**ORIGIN:=1**).
2. Создание вручную (горячие клавиши Ctrl+M) массива **x** (экспериментальные значения входной величины).
3. Создание вручную массива **y** (экспериментальные значения выходной величины).
4. Автоматическое определение количества значений в массиве **x** (с помощью команды **n:=length(x)**).
5. Получение массивов преобразованных данных: массив **x1** и массив **y1**.
6. Вывод значений массивов **x1** и **y1**.
7. Расчет коэффициентов линейной регрессии **a0** и **a1**.
8. Вывод значений коэффициентов линейной регрессии **a0** и **a1**.
9. Расчет коэффициентов регрессии заданного уравнения **a** и **b**.
10. Вывод значений коэффициентов регрессии заданного уравнения **a** и **b**.
11. Запись заданного уравнения регрессии в виде функции **Y(X)**.
12. Определение расчетных значений выходной величины с помощью функции **Y(X)**, т.е. формирование массива **yr**.
13. Расчет среднего значения выходной величины по экспериментальным данным – **y\_sr** (среднее значение массива **y**).
14. Расчет среднего расчетного значения выходной величины – **yr\_sr** (среднее значение массива **yr**).
15. Расчет коэффициента корреляции **r** между экспериментальными и расчетными значениями выходной величины.
16. Запись заданного уравнения регрессии как функции с использованием обозначений физических величин (согласно заданию).
17. Расчет значения выходной величины для указанного в задании значения входной величины, используя записанную в п.16 функцию.
18. Задание диапазона изменения входной величины.
19. Построение графика функции заданного уравнения регрессии (п.16) в заданном диапазоне и точечного графика экспериментальных данных (массивы **x** и **y**).
20. Отображение на графике функции уравнения регрессии полученных в п.17 значений входной и выходной величин.
21. Проверка полученных значений коэффициентов линейной регрессии с помощью функций пакета MathCad.
22. Проверка значения коэффициента корреляции с помощью функции пакета MathCad.

## Содержание отчета по лабораторной работе

1. Название и цель работы.
2. Задание к лабораторной работе.
3. Указание наименования и обозначения величин, выступающих входной ( $x$ ) и выходной ( $y$ ).
4. Зависимости для преобразования исходных экспериментальных данных, т.е. соотношения, которые позволяют перейти от заданного уравнения к уравнению линейной регрессии.
5. Выражения для расчета коэффициентов регрессии заданного уравнения **a** и **b** в зависимости от коэффициентов линейной регрессии **a0** и **a1**.
6. Результаты вычислений по программе в пакете MathCad:
  - значения коэффициентов линейной регрессии **a0** и **a1**;
  - значения коэффициентов регрессии заданного уравнения **a** и **b**.
7. Запись подобранного уравнения регрессии с использованием обозначений физических величин.
8. Вычисленное значение коэффициента корреляции **r** и вывод об адекватности подобранного уравнения результатам эксперимента.
9. Вычисленное значение выходной величины для заданного значения входной величины.
10. График кривой регрессии с нанесенными точками экспериментальных данных и установленными значениями входной и выходной величин.
11. Вывод по лабораторной работе.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5

### ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ПЛАНИРОВАННОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

**Цель работы.** Овладение практическими навыками постановки полного факторного эксперимента, обработки его результатов и построения математической модели.

#### **Теоретические положения**

Задачей экспериментальных исследований является построение математической модели исследуемого объекта (или процесса), для которого при варьировании независимых переменных (**факторов**)  $X_1, X_2, \dots, X_k$  некоторым образом изменяется зависимая переменная (**отклик** или **параметр**)  $y$  :

$$y = f(X_1, X_2, \dots, X_k) .$$

Одним из методов построения математических моделей является **метод планирования эксперимента**, суть которого заключается в варьировании всех факторов, влияющих на объект исследования, по определенному плану. При планировании по схеме **полного факторного эксперимента (ПФЭ)** реализуются все возможные комбинации факторов на всех выбранных для исследования уровнях. Необходимое количество опытов при ПФЭ определяется по формуле  $N = q^k$ , где  $q$  - количество уровней,  $k$  - число факторов.

Наибольшее распространение в экспериментальных исследованиях получили планы типа  $2^k$ , в которых факторы варьируются на двух уровнях.

При этом переменная отклика описывается математической моделью:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i,j=1}^c b_{ij} x_i x_j ,$$

где  $y$  - переменная отклика (параметр);

$b_0$  - свободный член;

$k$  - число факторов;

$b_i, b_j, b_{ij}$  - коэффициент регрессии при соответствующем факторе или взаимодействии факторов;

$x_i, x_j$  - фактор в кодированном обозначении;

$c$  - число сочетаний из  $k$  факторов по два;

$i, j$  - номер фактора.

Планирование, проведение и обработка результатов планированного эксперимента состоит из следующих обязательных этапов: 1) кодирование факторов; 2) составление план-матрицы эксперимента; 3) реализация плана



эксперимента; 4) проверка воспроизводимости опытов; 5) оценка значимости коэффициентов регрессии; 6) проверка адекватности модели.

Изменения независимых переменных происходят в некотором пространстве с осями, которое называется **факторным пространством**. Геометрический образ, соответствующий функции отклика, называется **поверхностью отклика** (рис. 13).

**Уровнем фактора** называют определенное значение фактора, которое будет фиксироваться при проведении эксперимента. В планах первого порядка используются нижний и верхний уровни. В расчетах необходим также основной (нулевой).

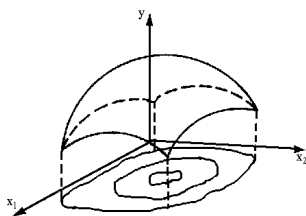


Рис. 13. Поверхность отклика

Обычно до проведения эксперимента по тем или иным соображениям можно выделить диапазон, в котором исследователя интересует зависимость переменной отклика от данного фактора. В этом случае наибольшее значение фактора в диапазоне принимается за верхний уровень, а наименьшее - за нижний.

**Интервалом варьирования** называется значение фактора в натуральных единицах, прибавление которого к нулевому уровню дает верхний, а вычитание - нижний уровень.

Приняты такие обозначения уровней фактора  $X_i$ : нижний -  $X_{ин}$ , верхний -  $X_{ив}$ , нулевой -  $X_{i0}$ .

Интервал варьирования:

$$\Delta X_i = X_{i0} - X_{ин} = X_{ив} - X_{i0} .$$

Для перехода от натурального выражения факторов к безразмерному используют **кодирование факторов**.

Связь между кодированным и натуральным выражением фактора задается формулой:

$$x_i = \frac{X_i - X_{i0}}{\Delta X_i} ,$$

где  $x_i$  - кодированное значение фактора;

$X_i$  - натуральное значение фактора;

$X_{i0}$  - натуральное значение фактора на нулевом уровне;

$\Delta X_i$  - интервал варьирования фактора.

В соответствии с изложенным кодированное значение любого фактора на нижнем уровне равно

$$x_{iH} = \frac{X_{iH} - X_{i0}}{\Delta X_i} = -1 ,$$

на верхнем уровне

$$x_{iB} = \frac{X_{iB} - X_{i0}}{\Delta X_i} = +1 .$$

План, содержащий запись всех комбинаций факторов, называется **матрицей планирования** (таблица 5.1). Для построения матрицы планирования используют следующий принцип: 1) уровни варьирования первого фактора чередуются от опыта к опыту; 2) частота смены уровней варьирования каждого последующего фактора вдвое меньше, чем у предыдущего. Это означает, что элементарное сочетание первого фактора (-1; +1) повторяется для каждого следующего на нижнем и верхнем уровнях. Столбец  $x_0$  - это столбец фиктивной переменной. Доказано, что его участие в матрице планирования делает расчеты коэффициентов математической модели более общими. Таким образом, в первом столбце, соответствующем  $x_0$ , знаки не изменяются, во втором - изменяются через один, в третьем - через два,, в четвертом - через четыре и т.д. В таблице 1 приведены матрицы планирования, построенные по описанному принципу, для двух, трех и четырех факторов.

Таблица 5.1 - Организация матриц планирования ПФЭ от  $2^2$  до  $2^4$

Номер опыта	Тип эксперимента			Факторы				
				$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
1	ПФЭ $2^4$	ПФЭ $2^3$	ПФЭ $2^2$	+1	-1	-1	-1	-1
2				+1	+1	-1	-1	-1
3				+1	-1	+1	-1	-1
4				+1	+1	+1	-1	-1
5				+1	-1	-1	+1	-1
6				+1	+1	-1	+1	-1
7				+1	-1	+1	+1	-1
8				+1	+1	+1	+1	-1
9				+1	-1	-1	-1	+1
10				+1	+1	-1	-1	+1
11				+1	-1	+1	-1	+1
12				+1	+1	+1	-1	+1
13				+1	-1	-1	+1	+1
14				+1	+1	-1	+1	+1
15				+1	-1	+1	+1	+1
16				+1	+1	+1	+1	+1

**Порядок обработки результатов эксперимента включает следующие шаги.**

Коэффициенты уравнения регрессии рассчитываются по формулам:

$$b_i = \frac{1}{n} \sum_{u=1}^n x_{iu} y_u, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

$$b_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{u=1}^n x_{iu} x_{ju} y_u, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad i \neq j,$$

где  $n$  - число опытов полного факторного эксперимента,  $n = 2^k$ ;

$x_{iu}$  - значение фактора  $x_i$  для опыта  $u$ ;

$y_u$  - значение переменной отклика для опыта  $u$ ;

$u$  - номер опыта

Для проверки воспроизводимости опытов часто поступают следующим образом: проводят несколько параллельных опытов в одной из точек факторного пространства. Обычно такой точкой принимается центр плана, где реализуется 3-4 опыта и по ним рассчитывается дисперсия воспроизводимости  $S_B^2$  по формуле:

$$S_B^2 = \frac{1}{n_0 - 1} \sum_{k=1}^{n_0} (y_{0k} - \bar{y}_0)^2,$$

где  $n_0$  - число опытов в центре плана;

$y_{0k}$  - значения переменной отклика в центре плана;

$\bar{y}_0$  - среднее значение переменной отклика в центре плана.

Очевидно, что один фактор больше влияет на переменную отклика, другой - меньше. Для оценки этого влияния используют проверку значимости каждого коэффициента. Вначале определяется дисперсия коэффициентов регрессии по формуле:

$$S_b^2 = \frac{S_B^2}{n},$$

т.е. дисперсии всех коэффициентов равны, поскольку зависят только от ошибки опыта  $S_B^2$  и количества опытов матрицы планирования  $n$ .

Оценку значимости коэффициентов осуществляют по формуле:

$$t_{p_i} = \frac{|b_i|}{S_b},$$

и условию

$$t_{p_i} \geq t_T ,$$

где  $t_{p_i}$  - расчетное значение критерия Стьюдента для  $i$ -го коэффициента;

$|b_i|$  - абсолютное значение  $i$ -го коэффициента регрессии;

$S_b$  - среднеквадратичное отклонение;

$t_T$  - табличное значение критерия Стьюдента, которое находят по уровню значимости  $\alpha$  и числу степеней свободы дисперсии воспроизводимости  $f = n_0 - 1$  (таблица 1, приложение Д).

Если условие выполняется, то  $i$ -й коэффициент признается значимым. Если для какого-то коэффициента условие не выполняется, то соответствующий фактор (или их взаимодействие) можно признать незначимым и исключить его из уравнения регрессии. После чего переходят к оценке адекватности полученной математической модели, т.е. способность достаточно хорошо описывать поверхность отклика и прогнозировать результаты опытов.

Для проверки адекватности вычисляют оценку дисперсии адекватности  $S_{ад}^2$  по формуле

$$S_{ад}^2 = \frac{1}{n - z} \sum_{u=1}^n (y_u - \tilde{y}_u)^2 ,$$

где  $z$  - число значимых коэффициентов регрессии;

$\tilde{y}_u$  - расчетное значение переменной отклика в  $u$ -том опыте, определенное по уравнению регрессии.

С оценкой дисперсии адекватности связано число степеней свободы  $f_{ад} = n - z$ .

Затем определяется расчетное значение критерия Фишера:

$$F_p = \frac{S_{ад}^2}{S_B^2} .$$

Уравнение регрессии считается адекватным, если выполняется условие

$$F_p \leq F_T ,$$

где  $F_T$  - табличное значение критерия Фишера при уровне значимости  $\alpha$  и числе степеней свободы  $f_{ад}$  и  $f_B$  (таблица 2, приложение Д).

При неадекватности математической модели экспериментальным дан-

ным наиболее часто принимают решение об уменьшении интервалов варьирования факторов и повторении эксперимента или проведении эксперимента по плану более высокого порядка.

Необходимо отметить, что в полученном уравнении регрессии все коэффициенты  $b_i$ ,  $b_{ij}$  имеют размерность переменной отклика  $y$ , т.к.  $x_i$  ( $i=0 \dots k$ ) - безразмерные величины. Поэтому коэффициенты  $b_i$ ,  $b_{ij}$  отражают силу влияния соответствующего фактора или их взаимодействия на параметр  $y$ . Такая форма записи математической модели называется уравнением регрессии в **кодированных переменных**.

Уравнение можно привести к виду, в котором факторы будут иметь свое первоначальное физическое значение. Для этого необходимо воспользоваться подстановкой

$$x_i = \frac{X_i - X_{i0}}{\Delta X_i}.$$

Такая форма записи модели называется уравнением регрессии в **физических (натуральных) переменных**.

Используя полученное уравнение можно вычислить значение переменной отклика в любой точке факторного пространства и построить поверхность отклика.

### **Ход работы**

Варианты индивидуальных заданий приведены в приложении Е.

### **Порядок выполнения работы**

1. В соответствии с присвоенным вариантом ознакомиться с заданием на лабораторную работу.
2. В соответствии с теоретическими положениями выполнить необходимые расчеты в пакете MathCad.
3. Оформить отчет по лабораторной работе. Пример отчета приведен в приложении Ж.

## Структура программы в пакете MathCad

для обработки результатов полного факторного эксперимента

1. Задание начала отсчета в массивах с единицы (**ORIGIN:=1**).
2. Присвоение количества факторов (переменная **k**).
3. Создание вручную (горячие клавиши Ctrl+M) массива **x**, соответствующего плану матрицы эксперимента. Размерность массива **x** –  $11 \times 3$ , где 11 – общее количество опытов, 3 – количество факторов.
4. Создание вручную массива **y** (экспериментальные значения параметра). Размерность массива **y** равна  $11 \times 1$ , где 11 – общее количество опытов, 1 – количество столбцов.
5. Расчет количества основных опытов  $n=2^k$ , где **k** – количество факторов.
6. Создание вручную массивов значений факторов на верхнем (**Xv**) и нижнем уровнях (**Xn**). Размерность массивов равна  $3 \times 1$ , где 3 – общее количество факторов, 1 – количество столбцов.
7. Вычисление для каждого фактора значений на нулевом уровне и интервала варьирования – массивы **X0** и **ΔX**.
8. Расчет среднего значения параметра в центре плана (переменная **y0**) на основании значений 9-11 строк массива **y**.
9. Расчет дисперсии воспроизводимости (переменная **Sv2**).
10. Расчет дисперсии коэффициентов регрессии (переменная **Sb2**).
11. Расчет коэффициента регрессии **b0**.
12. Расчет коэффициентов регрессии **b<sub>i</sub>**, **b<sub>ij</sub>**, где  $i=1..3$ ,  $j=1..3$  (коэффициенты можно представить в виде массивов или отдельных переменных).
13. Вычисление расчетных значений критерия Стьюдента для всех коэффициентов регрессии (переменные **tr0**, **tr<sub>i</sub>**, **tr<sub>ij</sub>** или в виде массивов).
14. Оценка значимости коэффициентов регрессии.
15. Запись уравнения регрессии в виде функции **Y(x1, x2, x3)**.
16. Вычисление с помощью записанной функции расчетных значений параметра для основных опытов – формирование массива **yr**.
17. Расчет дисперсии адекватности (переменная **Sad2**).
18. Вычисление расчетного критерия Фишера (переменная **Fr**).
19. Запись уравнения регрессии в натуральных переменных.
20. Задание диапазона изменения факторов.
21. Построение графика поверхности отклика.

### Содержание отчета по лабораторной работе

1. Название и цель работы.
2. Задание к лабораторной работе.
3. Общий вид уравнения регрессии (математической модели).
4. Вычисленные значения нулевого уровня и интервала варьирования для

каждого фактора.

5. Среднее значение параметра в центре плана.
6. Рассчитанное значение дисперсии воспроизводимости.
7. Рассчитанное значение дисперсии коэффициентов регрессии.
8. Значения коэффициентов регрессии.
9. Расчетные значения критерия Стьюдента для каждого коэффициента.
10. Табличное значение критерия Стьюдента.
11. Проверка значимости коэффициентов регрессии.
12. Запись полученного уравнения регрессии в кодированном виде.
13. Значения параметра, рассчитанные по уравнению регрессии, для основных опытов.
14. Рассчитанное значение дисперсии адекватности.
15. Расчетное значение критерия Фишера.
16. Табличное значение критерия Фишера.
17. Вывод об адекватности полученного уравнения регрессии экспериментальным данным.
18. Запись уравнения регрессии в натуральном виде.
19. Поверхность отклика.
20. Вывод по работе.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6

### РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ

**Цель работы:** Приобретение навыков решения нелинейных уравнений численными методами, сравнение точности и трудоемкости методов.

#### **Теоретические положения**

Нахождение корней уравнений - одна из наиболее часто встречающихся задач. Вместе с тем не всегда есть возможность найти аналитическое решение уравнения (нелинейные и трансцендентные уравнения). В этих случаях используются численные методы.

В общем случае решение нелинейного уравнения вида

$$f(x) = 0 \quad (6.1)$$

заключается в отыскании одного или всех корней на отрезке  $[a, b]$  изменения  $x$ . Обычно стараются локализовать каждый корень в своем отрезке  $[a, b]$ . Тогда нахождение всех корней сводится к локализации каждого корня с последующим сужением отрезков локализации корня  $[a, b]$  одним из описанных далее методов.

**Метод половинного деления** (метод дихотомии). Считается, что отделение корней уравнения проведено и на отрезке  $[a, b]$  расположен один корень, который необходимо уточнить с погрешностью  $\varepsilon$  (рис. 6.1). Метод дихотомии заключается в следующем. Определяется середина отрезка

$$d = (a + b) / 2 \quad (6.2)$$

и вычисляется значение функции  $f(d)$ . Далее делается выбор, какую из двух частей отрезка взять для дальнейшего уточнения корня. Для чего проверяется условие  $f(a) \cdot f(d) < 0$  и в зависимости от результата переобозначают начало  $a$  или конец  $b$  интервала.

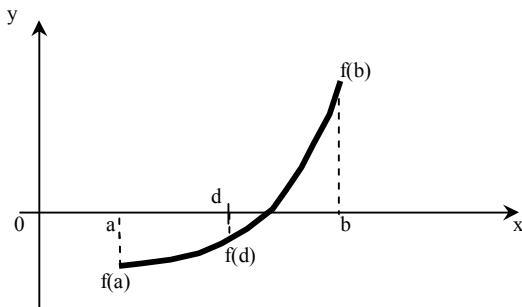


Рис. 6.1. Метод половинного деления



Процесс повторяется до тех пор, пока интервал  $[a, b]$  не станет меньше заданной погрешности  $\varepsilon$ , т.е.

$$(b-a) < \varepsilon. \quad (6.3)$$

Блок-схема метода половинного деления представлена на рис. 6.2.

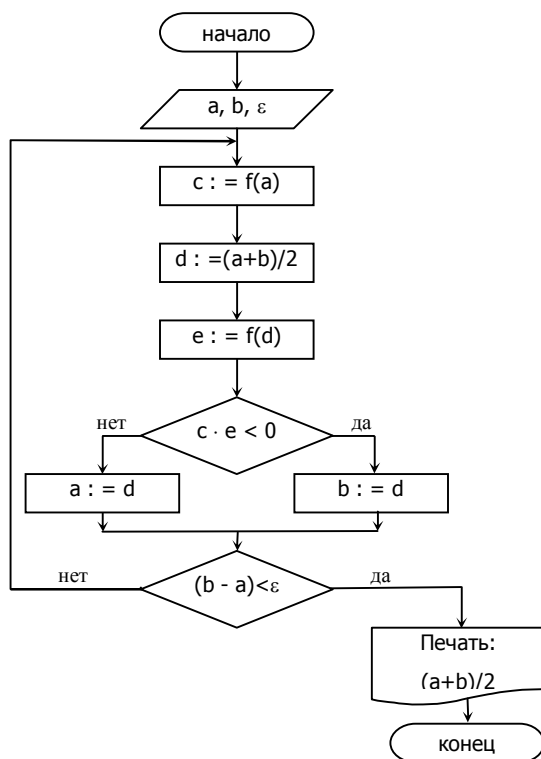


Рис. 6.2. Блок-схема алгоритма решения уравнения методом половинного деления

**Метод хорд** (рис. 6.3). При этом методе каждое значение корня  $x_n$  находится как точка пересечения оси абсцисс с хордой, проведенной через точки  $f(a)$  и  $f(b)$ . Корень уравнения определяется из выражения

$$x_n = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}. \quad (6.4)$$

Полученное значение  $x_n$  можно снова использовать для дальнейшего уточнения корня, рассматривая интервал  $[a, x_n]$  или  $[x_n, b]$  в зависимости от знака функции в точке  $x_n$  -  $f(x_n)$ . Вычисления повторяются до тех пор, пока выполняется условие

$$|x_{n+1} - x_n| \geq \varepsilon. \quad (6.5)$$

При использовании метода хорд полагается, что корень находится на отрезке  $[a, b]$ . Блок-схема, реализующая метод хорд, приведена на рис.6.4.

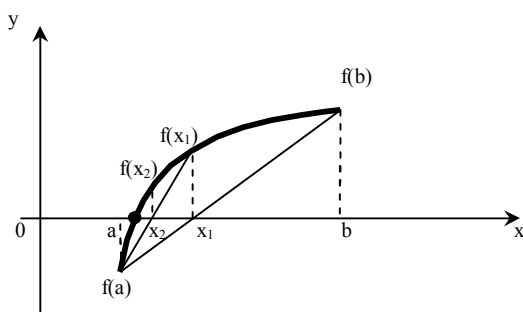


Рис. 6.3. Метод хорд

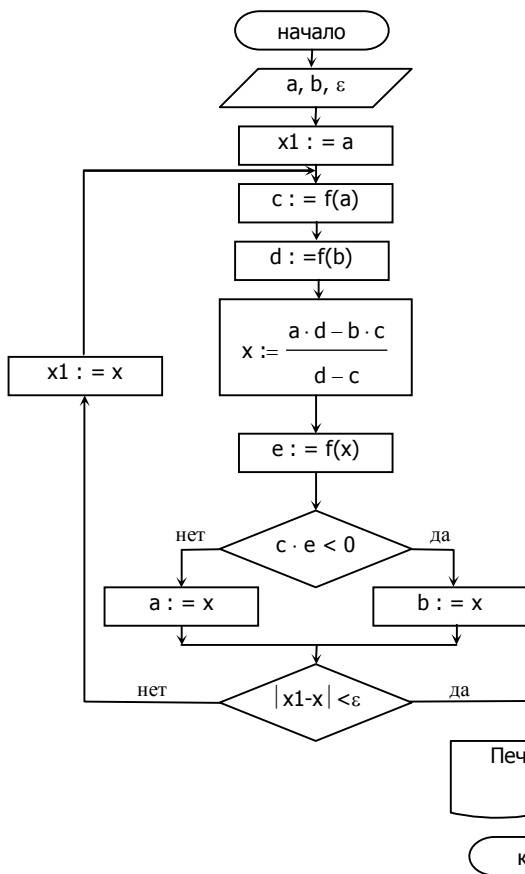


Рис. 6.4. Блок-схема алгоритма решения уравнения методом хорд

**Метод Ньютона (касательных)** основан на замене  $f(x)$  в точке начального приближения  $x=x_0$  касательной, пересечение которой с осью  $x$

дает первое приближение  $x_1$  и т.д. (рис. 6.5). Итерационный процесс схождения к корню реализуется формулой

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) / f'(x_n), \quad (6.6)$$

до тех пор, пока соблюдается условие  $|x_{n+1} - x_n| \geq \varepsilon$ . (6.7)

Метод обеспечивает быструю сходимость, если

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0. \quad (6.8)$$

В качестве  $x_0$  выбирают тот конец отрезка  $[a, b]$ , для которого условие (6.8) выполняется. Метод Ньютона обладает высокой скоростью сходимости. Обычно абсолютная точность решения  $10^{-5} - 10^{-6}$  достигается через 5-6 итераций. Блок-схема, реализующая метод Ньютона, приведена на рис. 6.6.

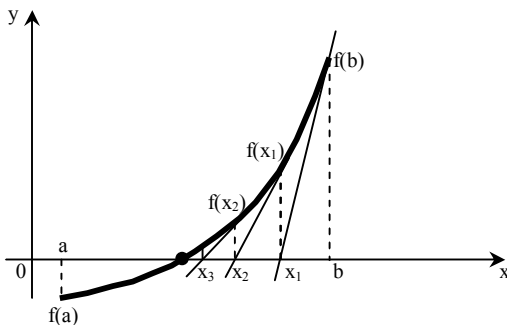


Рис. 6.5. Метод Ньютона

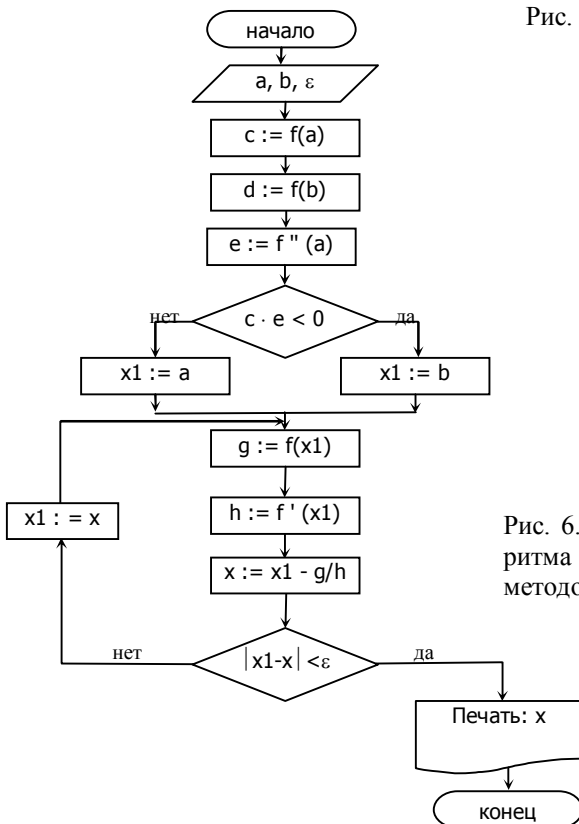


Рис. 6.6. Блок-схема алгоритма решения уравнения методом Ньютона

## **Ход работы**

Варианты индивидуальных заданий приведены в приложении 3. Пример текста программы для пакета MathCad приведен в приложении И.

### **Порядок выполнения работы**

1. В соответствии с присвоенным вариантом ознакомиться с заданием на лабораторную работу (приложение 3).
2. Используя пример из приложения И составить программу в пакете MathCad для поиска корня уравнения.
3. Оформить отчет по лабораторной работе. Образец отчета приведен в приложении К.

**Примечание.** Перед использованием метода Ньютона необходимо вывести выражения для нахождения значений первой и второй производной функции.

### **Содержание отчета по лабораторной работе**

1. Название и цель работы.
2. Задание к лабораторной работе.
3. График функции и приближенное значение корня уравнения.
4. Интервал локализации корня.
5. Результаты поиска корня уравнения тремя методами.
6. Аналитическое выражение для определения корня уравнения и результат расчета.
7. Сравнение точности поиска корня численными методами.
8. Вывод по лабораторной работе.

# ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №7

## ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ

**Цель работы:** Освоение методов численного интегрирования, сравнение их эффективности.

### **Теоретические положения**

Определенный интеграл

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

с пределами интегрирования  $a$  и  $b$  можно трактовать как площадь фигуры (рис.8.1), ограниченной ординатами  $a$  и  $b$ , осью абсцисс  $x$  и графиком подынтегральной функции  $f(x)$ .

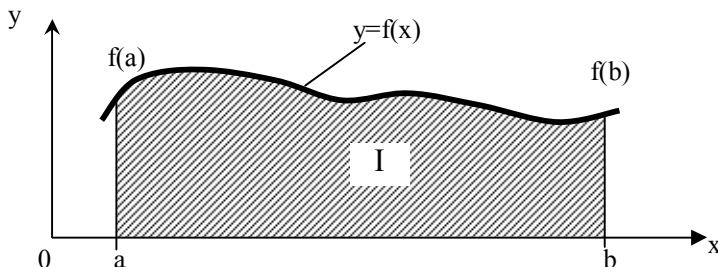


Рис.8.1. Графическая интерпретация вычисления определенного интеграла

Определенный интеграл, у которого известна его первообразная  $F(x)$ , вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница:

$$I = F(b) - F(a) .$$

Поэтому достаточно вычислить значения первообразной функции  $F(x)$  при  $x=a$  и  $x=b$ .

Численное интегрирование применяется, если невозможно аналитически записать первообразную  $F(x)$  или эта запись имеет очень сложный вид. Оно заключается в замене подынтегральной функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$  аппроксимирующей функцией.

Наиболее распространенными численными методами интегрирования являются: метод прямоугольника, метод трапеций и метод Симпсона. Все эти методы являются приближенными.

## Метод прямоугольников

Идея метода: кривая подынтегральной функции  $f(x)$  заменяется ломаной линией, отрезки которой параллельны оси абсцисс.

Отрезок  $[a; b]$  разобьем на  $n$  равных частей. Расстояние между двумя соседними точками  $x_i$  и  $x_{i+1}$  обозначим через  $h$  - шаг интегрирования. В полученных точках проведем ординаты, которые будут выступать в качестве сторон прямоугольников (рис.8.2а). Есть три варианта этого метода.

Рассмотрим случай, когда стороной прямоугольника выступает левая ордината. Площадь любого прямоугольника равна

$$\Delta S_i = (x_{i+1} - x_i) f(x_i) = h f(x_i). \quad (8.1)$$

Тогда, значение определенного интеграла будет соответствовать сумме прямоугольников:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \Delta S_i = h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = h[f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1})], \quad (8.2)$$

где  $h=(b-a)/n$  - шаг интегрирования,  $n$  - число интервалов разбиения.

Рассмотрим случай, когда стороной прямоугольника выступает правая ордината (рис.8.2б). Тогда, формула для нахождения определенного интеграла примет вид:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{i=1}^n f(x_i) = h[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)]. \quad (8.3)$$

Выражения (8.2) и (8.3) обеспечивают низкую точность значения интеграла. Для того, чтобы интегральная сумма мало отличалась от значения интеграла, число интервалов  $n$  должно быть достаточно велико. Для повышения точности также применяют следующее, в качестве стороны прямоугольника принимается ордината, соответствующая середине интервала разбиения (рис.8.2в). Тогда, определенный интеграл равен:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i), \quad (8.4)$$

где  $\bar{x}_i = x_{i-1} + 0.5h$ .

Погрешность вычисления по методу прямоугольников  $\varepsilon \approx h$  при  $h \ll 1$ .

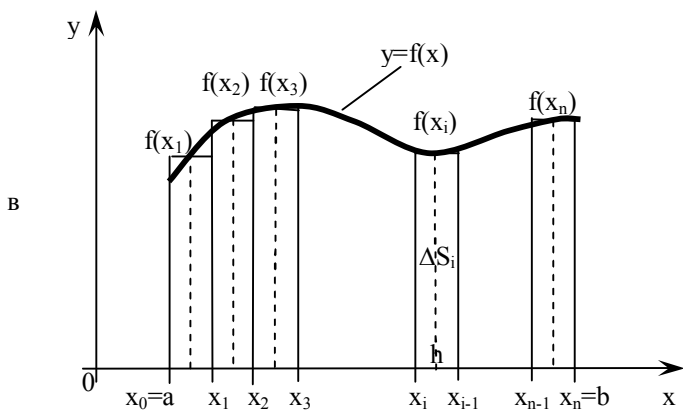
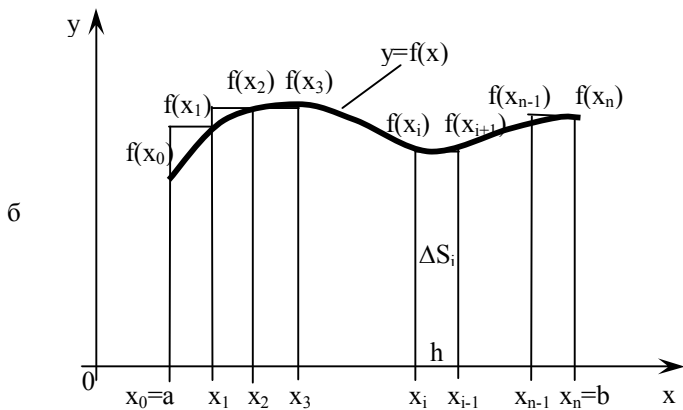
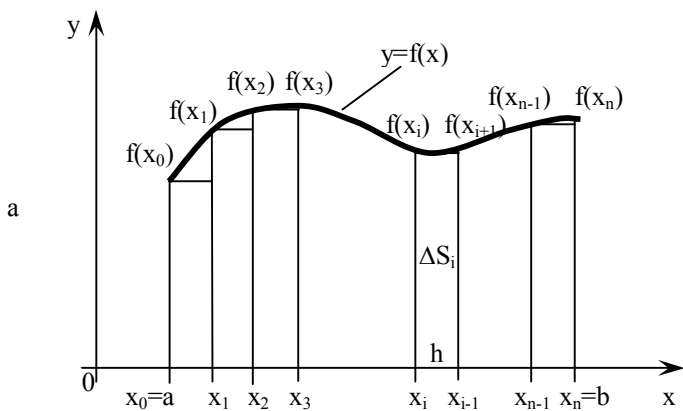


Рис.8.2. Метод прямоугольников: а) левых; б) правых; в) средних

### Блок-схема алгоритма

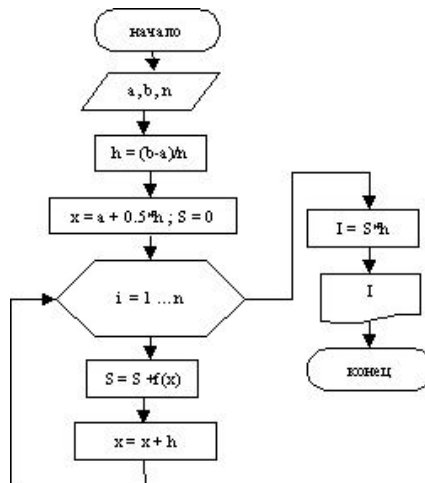


Рис.8.3. Блок-схема метода средних прямоугольников

### Метод трапеций

Участок интегрирования  $[a; b]$  разбивается на  $n$  равных частей. Если во всех точках деления провести ординаты, и каждую из полученных криволинейных трапеций заменить прямолинейной трапецией, то приближенное значение интеграла будет равно сумме площадей прямоугольных трапеций (рис.8.4).

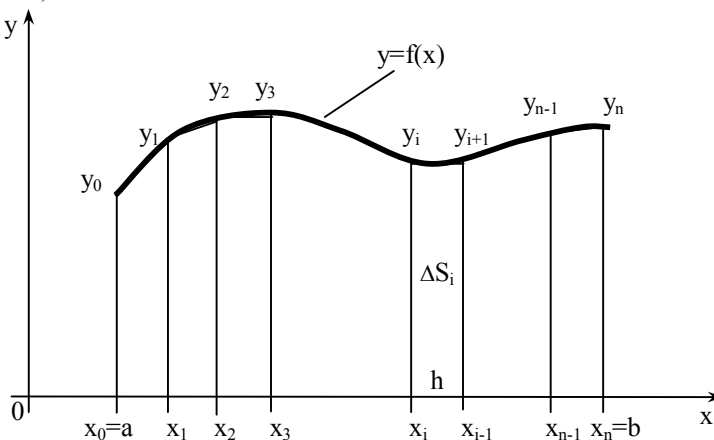


Рис.8.4. Метод трапеций



При равных значениях шага интегрирования  $h$  метод трапеций обеспечивает большую точность, чем метод прямоугольников, поскольку подынтегральная функция  $f(x)$  аппроксимируется более точно.

Сторонами трапеции будут две соседние ординаты  $y_{i-1}$  и  $y_i$ , участок оси ОХ длиной  $h$  и хорда кривой, тогда площадь трапеции равна

$$\Delta S_i = \frac{y_{i-1} + y_i}{2} h. \quad (8.5)$$

Суммирование выражений (8.5) на участке интегрирования  $[a; b]$  приводит к значению определенного интеграла:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \Delta S_i = h \left( \frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + \frac{y_n}{2} \right) = h \left( \frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right). \quad (8.6)$$

Погрешность интегрирования по методу трапеций при  $h \ll 1$  составляет  $\varepsilon \approx h^2$ .

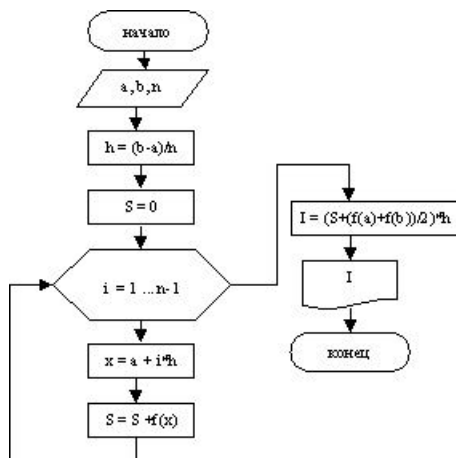


Рис.8.5. Блок-схема метода трапеций

### Метод Симпсона (метод парабол)

В этом методе подынтегральная кривая  $f(x)$  аппроксимируется параболой, что дает более точное приближение интегральной суммы к интегралу. При равных значениях шага интегрирования  $h$  метод Симпсона обеспечивает большую точность, чем методы прямоугольников и трапеций.

Интервал интегрирования  $[a; b]$  разбивается на  $n=2m$  равных отрезков (их число должно быть четным) (рис.8.6).

На паре соседних отрезков, например, в точке  $x_0=a$ , кривая  $y=f(x)$  заменяется параболой  $y=ax^2+bx+c$ , коэффициенты которой подбираются так,

что она проходит через точки с ординатами  $y_0, y_1, y_2$ .

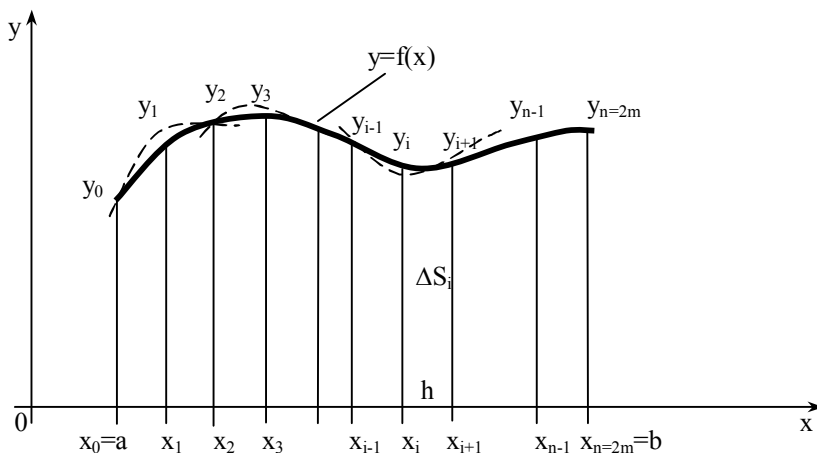


Рис.8.6. Метод Симпсона

Тогда, площадь фигуры, ограниченной параболой можно определить по формуле:

$$\Delta S_i = \frac{h}{3} (y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}) .$$

Суммируя  $\Delta S_i$  получим формулу Симпсона для вычисления определенного интеграла:

$$I = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \Delta S_i = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m})$$

Погрешность метода при  $h \ll 1$  составляет  $\varepsilon \approx h^3 \dots h^4$ .

### Ход работы

Варианты индивидуальных заданий приведены в приложении К. Пример текста программы для пакета MathCad приведен в приложении Л.

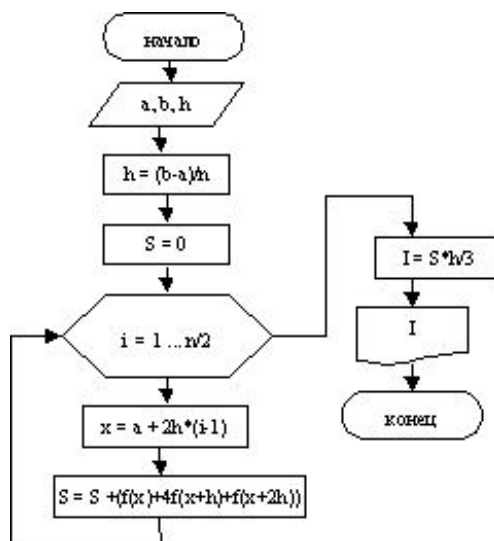


Рис.8.7. Блок-схема метода Симпсона

### Порядок выполнения работы

1. В соответствии с присвоенным вариантом ознакомиться с заданием на лабораторную работу (приложение К).
2. Используя пример из приложения Л составить программу в пакете MathCad для поиска корня уравнения.
3. Оформить отчет по лабораторной работе. Образец отчета приведен в приложении М.

### Содержание отчета по лабораторной работе

1. Значения пределов интегрирования и числа интервалов разбиения.
2. Выражение для подынтегральной функции  $f(x)$ .
3. Аналитическое нахождение значения интеграла  $\text{Int} = \int_a^b f(x) dx$ .
4. Таблицу с результатами вычислений численными методами.
5. Вывод по работе.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### Варианты индивидуальных заданий к лабораторной работе №4

#### Вариант 1

**Задание 1.** При непрерывном литье стали на вертикальной МНЛЗ перед окончанием процесса в слитке было сделано отверстие ниже кристаллизатора и слита жидкая сталь. В слитке ("чулке") была измерена толщина оболочки  $\xi$  (мм) на разных расстояниях от вертикального края. С учетом скорости разливки получены экспериментальные данные о времени перемещения сечения слитка  $\tau$  (с) и толщине оболочки  $\xi$  (см. таблицу):

$\tau$ , с	1	3	10	33	73
$\xi$ , мм	3.4	5.4	8.5	18.2	25.4

Используя МНК, построить математическую модель для определения толщины оболочки в зависимости от времени перемещения сечения слитка  $\xi = f(\tau)$ , если математическую зависимость можно представить в виде уравнения регрессии

$$\xi = a \cdot \tau^b.$$

С помощью математической модели определить значение толщины оболочки через 40 с.

#### Вариант 1

**Задание 2.** При непрерывном литье стали на вертикальной МНЛЗ перед окончанием процесса в слитке было сделано отверстие ниже кристаллизатора и слита жидкая сталь. В слитке ("чулке") была измерена толщина оболочки  $\xi$  (мм) на разных расстояниях от вертикального края. С учетом скорости разливки получены экспериментальные данные о времени перемещения сечения слитка  $\tau$  (с) и толщине оболочки  $\xi$  (см. таблицу):

$\tau$ , с	$\tau$	1.2	3	9	21	55
$\xi$ , мм	$\xi$	3.4	5.5	10.1	14.0	23.4

Используя МНК, построить математическую модель для определения толщины оболочки в зависимости от времени перемещения сечения слитка  $\xi = f(\tau)$ , если математическую зависимость можно представить в виде уравнения регрессии

$$\xi = a \cdot \tau^b.$$

С помощью математической модели определить значение толщины оболочки через 30 с.

### **Вариант 1**

**Задание 3.** При непрерывном литье стали на вертикальной МНЛЗ перед окончанием процесса в слитке было сделано отверстие ниже кристаллизатора и слита жидкая сталь. В слитке ("чулке") была измерена толщина оболочки  $\xi$  (мм) на разных расстояниях от вертикального края. С учетом скорости разливки получены экспериментальные данные о времени перемещения сечения слитка  $\tau$  (с) и толщине оболочки  $\xi$  (см. таблицу):

$\tau$ , с	1	2.7	11	27	44
$\xi$ , мм	3.3	5.6	10.2	17.0	21.9

Используя МНК, построить математическую модель для определения толщины оболочки в зависимости от времени перемещения сечения слитка  $\xi = f(\tau)$ , если математическую зависимость можно представить в виде уравнения регрессии

$$\xi = a \cdot \tau^b.$$

С помощью математической модели определить значение толщины оболочки через 20 с.

### **Вариант 1**

**Задание 4.** При непрерывном литье стали на вертикальной МНЛЗ перед окончанием процесса в слитке было сделано отверстие ниже кристаллизатора и слита жидкая сталь. В слитке ("чулке") была измерена толщина оболочки  $\xi$  (мм) на разных расстояниях от вертикального края. С учетом скорости разливки получены экспериментальные данные о времени перемещения сечения слитка  $\tau$  (с) и толщине оболочки  $\xi$  (см. таблицу):

$\tau$ , с	2.5	10	20	30	50
$\xi$ , мм	5.3	10.6	15.0	18.4	23.7

Используя МНК, построить математическую модель для определения толщины оболочки в зависимости от времени перемещения сечения слитка  $\xi = f(\tau)$ , если математическую зависимость можно представить в виде уравнения регрессии

$$\xi = a \cdot \tau^b.$$

С помощью математической модели определить значение толщины оболочки через 35 с.

### Вариант 1

**Задание 5.** При непрерывном литье стали на вертикальной МНЛЗ перед окончанием процесса в слитке было сделано отверстие ниже кристаллизатора и слита жидкая сталь. В слитке ("чулке") была измерена толщина оболочки  $\xi$  (мм) на разных расстояниях от вертикального края. С учетом скорости разлики получены экспериментальные данные о времени перемещения сечения слитка  $\tau$  (с) и толщине оболочки  $\xi$  (см. таблицу):

$\tau$ , с	1	5	10	35	70
$\xi$ , мм	3.2	5.8	8.0	18.5	25.6

Используя МНК, построить математическую модель для определения толщины оболочки в зависимости от времени перемещения сечения слитка  $\xi = f(\tau)$ , если математическую зависимость можно представить в виде уравнения регрессии

$$\xi = a \cdot \tau^b.$$

С помощью математической модели определить значение толщины оболочки через 20 с.

### Вариант 2

**Задание 1.** В результате экспериментальных исследований получена таблица значений удельного сопротивления резания на дисковой пиле  $q$  (Н/мм<sup>2</sup>) в зависимости от толщины среза  $m$  (мм)

$m$ , мм	0.058	0.104	1.000	2.730	0.460
$q$ , Н/мм <sup>2</sup>	1655	1298	682	650	883

Используя МНК, построить математическую модель для определения удельного сопротивления резания в зависимости от толщины среза  $q = f(m)$ , если математическую зависимость можно представить в виде уравнения регрессии:

$$q = a + \frac{b}{m}.$$

С помощью математической модели определить сопротивление резания при толщине среза 0.165 мм.

## **Вариант 2**

**Задание 2.** В результате экспериментов на мартеновской печи вместимостью 600 тонн получена таблица значений стойкости футеровки свода печи  $T$  (сут.) в зависимости от длительности плавки  $\tau$  (ч):

$\tau$ , ч	4	5.5	7.6	8.6	9
$T$ , сут.	38	82	103	110	124

Используя МНК, построить математическую модель для определения стойкости футеровки свода печи в зависимости от длительности плавки  $T=f(\tau)$ , если математическую зависимость можно представить в виде уравнения регрессии:

$$T = a + \frac{b}{\tau}.$$

С помощью математической модели определить стойкость футеровки свода мартеновской печи при длительности плавки 6.3 ч.

## **Вариант 2**

**Задание 3.** В результате исследований получена таблица значений затрат труда на производство 1 т чугуна  $Z$  (чел.-ч) в зависимости от полезного объема доменных печей  $V$  ( $\text{м}^3$ ):

$V$ , $\text{м}^3$	950	1200	1320	1720	1910
$Z$ , чел.-ч	0.85	0.65	0.58	0.48	0.46

Используя МНК, построить математическую модель для определения затрат труда на производство 1 т чугуна в зависимости от полезного объема доменной печи  $Z = f(V)$ , если математическую зависимость можно представить в виде уравнения регрессии:

$$Z = a + \frac{b}{V}.$$

С помощью математической модели определить значение затрат на производство 1 т чугуна для печи объемом 1230  $\text{м}^3$ .

## **Вариант 2**

**Задание 4.** Коэффициент формы зуба  $Y_F$  при расчетах зубчатых зацеплений на изгиб определяется в зависимости от приведенного числа зубьев  $z_v$  по таблице:

$z_v$	20	35	50	150	300
$Y_F$	1.98	1.64	1.45	1.27	1.24

Используя МНК, построить математическую модель для определения коэффициента формы зуба по заданному приведенному числу зубьев  $Y_F = f(z_v)$ , если математическую зависимость можно представить в виде уравнения регрессии:

$$Y_F = a + \frac{b}{z_v}.$$

С помощью математической модели определить значение коэффициента формы зуба, если приведенное число зубьев равно 120.

## **Вариант 3**

**Задание 1.** В результате исследований на мартеновской печи вместимостью 600 тонн получена таблица значений стойкости футеровки свода печи  $T$  (сут.) в зависимости от удельной массы, приходящейся на под печи,  $q$  (т/м<sup>2</sup>):

$q, \text{ т/м}^2$	4.83	5.00	5.20	5.4	5.75
$T, \text{ сут.}$	136	133	126	124	105

Используя МНК, построить математическую модель для определения стойкости футеровки свода в зависимости от удельной массы, приходящейся на под печи,  $T = f(q)$ , если математическую зависимость можно представить в виде уравнения регрессии:

$$T = a + b \cdot e^q.$$

С помощью математической модели определить стойкость футеровки свода мартеновской печи, если удельная масса, приходящаяся на под печи, составит 4.9 т/м<sup>2</sup>.



### **Вариант 3**

**Задание 2.** В результате исследований получена таблица значений интенсивности износа валков калибровочного стана  $I$  (мм/т) в зависимости от содержания кремния  $C_{Si}$  (%) в чугуна, из которого изготовлены валки:

$C_{Si}, \%$	2.14	2.25	2.39	2.55	2.70
$I, \text{мм/т}$	$0.130 \cdot 10^{-3}$	$0.142 \cdot 10^{-3}$	$0.163 \cdot 10^{-3}$	$0.210 \cdot 10^{-3}$	$0.265 \cdot 10^{-3}$

Используя МНК, построить математическую модель для определения интенсивности износа валков в зависимости от содержания кремния  $I = f(C_{Si})$ , если математическую зависимость можно представить в виде уравнения регрессии:

$$I = a + b \cdot e^{C_{Si}}.$$

С помощью математической модели определить значение интенсивности износа валков при содержании кремния в чугуна 2.4 %.

### **Вариант 3**

**Задание 3.** В результате исследований прутков из стали марки 70, подвергнутых холодной деформации, получена таблица значений временного сопротивления разрыву  $\sigma_B$  (МПа) и степени деформации прутков  $\delta$  (%):

$\delta, \%$	0.0	0.2	0.4	0.5	0.6
$\sigma_B, \text{МПа}$	1145	1250	1400	1520	1680

Используя МНК, построить математическую модель для определения временного сопротивления разрыву при известной степени деформации прутка  $\sigma_B = f(\delta)$ , если математическую зависимость можно представить в виде уравнения регрессии:

$$\sigma_B = a + b \cdot e^{\delta}.$$

С помощью математической модели определить временное сопротивление разрыву, если степень деформации прутка равна 0.28%.

### **Вариант 3**

**Задание 4.** В результате исследований на мартеновской печи вместимостью 400 тонн получена таблица значений стойкости футеровки свода печи  $T$  (сут.) в зависимости от удельной массы, приходящейся на под печи,  $q$  ( $\text{т}/\text{м}^2$ ):

$q, \text{т}/\text{м}^2$	4.8	5.3	5.4	5.8	6.2
$T, \text{сут.}$	154	138	120	100	50

Используя МНК, построить математическую модель для определения стойкости футеровки свода при заданном значении удельной массы, приходящейся на под печи,  $T = f(q)$ , если математическую зависимость можно представить в виде уравнения регрессии:

$$T = a + b \cdot e^q.$$

С помощью математической модели определить стойкость футеровки свода печи, если удельная масса, приходящейся на под печи, равна  $5.6 \text{ т}/\text{м}^2$ .

### **Вариант 4**

**Задание 1.** В результате экспериментальных исследований получена таблица значений срока службы вкладышей универсального шпинделя  $T$  (мес.) в зависимости от частоты вращения шпинделя  $n$  (об/мин.):

$n, \text{об/мин.}$	50	150	200	450	750
$T, \text{мес.}$	15	9.5	5	3	1

Используя МНК, построить математическую модель для определения срока службы вкладышей в зависимости от частоты вращения шпинделя  $T = f(n)$ , если математическую зависимость можно представить в виде уравнения регрессии:

$$T = a + b \cdot \ln(n).$$

С помощью математической модели определить срок службы вкладыша при частоте вращения шпинделя  $540 \text{ об/мин.}$

#### **Вариант 4**

**Задание 2.** В результате экспериментальных исследований получена таблица значений амплитуды колебаний корпусов вкладышей шпиндельного устройства  $H$  (мкм) при различной толщине вкладыша  $s$  (мм):

$s$ , мм	0.1	0.5	1.5	2.5	4.0
$H$ , мкм	8.7	6.5	5.5	4.9	4.5

Используя МНК, построить математическую модель для определения амплитуды колебаний корпуса в зависимости от толщины вкладыша  $H = f(s)$ , если математическую зависимость можно представить в виде уравнения регрессии:

$$H = a + b \cdot \ln(s).$$

С помощью математической модели определить амплитуду колебаний корпуса вкладыша шпиндельного устройства, если толщина вкладыша составил 1.2 мм.

#### **Вариант 4**

**Задание 3.** В результате исследования процесса резания образцов квадратного поперечного сечения со стороной 35 мм из стали 3 на дисковой пиле получены данные об усилии резания  $F$  (кН) и скорости подачи диска пилы  $u$  (м/с):

$u$ , м/с	0.5	1	1.5	2	3
$F$ , кН	3.3	4.85	5.8	7	8

Используя МНК, построить математическую модель для определения усилия резания по скорости подачи диска пилы  $F = f(u)$ , если математическую зависимость можно представить в виде уравнения регрессии:

$$F = a + b \cdot \ln(u).$$

С помощью математической модели определить усилие резания при скорости подачи диска пилы 1,2 м/с.

#### **Вариант 4**

**Задание 4.** В результате исследований получены данные о температуре футеровочных плит коксосушильного вагона  $T$  ( $^{\circ}\text{C}$ ) через разные промежутки времени  $\tau$  (мин.):

$\tau$ , мин.	3	6	10	12	14
$T$ , $^{\circ}\text{C}$	300	420	560	590	600

Используя МНК, построить математическую модель для определения температуры футеровочных плит по времени выдержки кокса  $T = f(\tau)$ , если математическую зависимость можно представить в виде уравнения регрессии:

$$T = a + b \cdot \ln(\tau).$$

С помощью математической модели определить температуру плит вагона через 5 мин.

#### **Вариант 5**

**Задание 1.** В результате экспериментов на стане ХПТР20-60 установлена табличная зависимость между значениями крутящего момента на валу мальтийского креста  $M$  ( $\text{H}\cdot\text{м}$ ) и частотой вращения ведущего кривошипа  $n$  (об/мин.):

$n$ , об/мин.	20	60	80	140	180
$M$ , $\text{H}\cdot\text{м}$	300	580	700	1690	2400

Используя МНК, построить математическую модель для определения значений крутящего момента на валу мальтийского креста по частоте вращения ведущего кривошипа, если математическую зависимость можно представить в виде уравнения регрессии:

$$M = a + b \cdot n^2.$$

С помощью математической модели определить значение крутящего момента на валу мальтийского креста, если частота вращения ведущего кривошипа составит 150 об/мин.

### **Вариант 5**

**Задание 2.** В результате анализа показателей работы слябинга завода "Запорожсталь" получена таблица, связывающая значения затрат на ремонты механического оборудования  $Z_{\text{рем}}$  (тыс. руб.) и продолжительности текущих ремонтов  $T_{\text{рем}}$  (ч):

$T_{\text{рем}}, \text{ ч}$	10	25	37	45	49
$Z_{\text{рем}}, \text{ тыс. руб.}$	32.8	37.7	46.6	58.0	69.2

Используя МНК, построить математическую модель для определения затрат на ремонты в зависимости от их продолжительности  $Z_{\text{рем}} = f(T_{\text{рем}})$ , если математическую зависимость можно представить в виде уравнения регрессии:

$$Z_{\text{рем}} = a + b \cdot T_{\text{рем}}^2.$$

С помощью математической модели определить значение затрат на ремонт оборудования, если продолжительность ремонта составит 24 ч.

### **Вариант 5**

**Задание 3.** В результате экспериментов на непрерывной широкополосном стане получена таблица значений усилия прокатки полосы в чистовой клети  $P$  (МН) в зависимости от переднего натяжения полосы в черновой клети  $\sigma$  (МПа):

$\sigma, \text{ МПа}$	20	60	100	150	180
$P, \text{ МН}$	11	10.2	10	9.2	8.5

Используя МНК, построить математическую модель для определения усилия прокатки по заданному переднему натяжению полосы  $P = f(\sigma)$ , если математическую зависимость можно представить в виде уравнения регрессии:

$$P = a + b \cdot \sigma^2.$$

С помощью математической модели определить усилие прокатки полосы, если переднее натяжение равно 80 МПа.

### **Вариант 5**

**Задание 4.** В результате исследований стойкости футеровки свода мартеновской печи, которая оценивалась количеством плавок  $N$  (шт.), в зависимости от расхода кислорода  $q$  ( $\text{м}^3/\text{т}$ ), используемого для продувки ванны, получены следующие данные:

$q, \text{м}^3/\text{т}$	2	8	16	20	30
$N, \text{шт.}$	400	380	350	320	230

Используя МНК, построить математическую модель для определения стойкости футеровки свода по расходу кислорода  $N = f(q)$ , если математическую зависимость можно представить в виде уравнения регрессии:

$$N = a + b \cdot q^2.$$

С помощью математической модели определить количеством плавок, которые выдержит футеровка свода мартеновской печи, если расход кислорода составит  $25 \text{ м}^3/\text{т}$ .

### **Вариант 6**

**Задание 1.** Для перевода значений твердости HRC (по Роквеллу) в значения твердости HB (по Бринеллю) обычно используется таблица, полученная в результате экспериментов

HB	440	460	495	522	627
HRC	47	48	51	53	61

Используя МНК, построить математическую модель для определения значений твердости по Роквеллу в зависимости от значений твердости по Бринеллю  $HRC = f(HB)$ , если математическую зависимость можно представить в виде уравнения регрессии:

$$HRC = \frac{1}{a + b \cdot HB}.$$

С помощью математической модели определить твердость по Роквеллу, если твердость по Бринеллю равна 500.

### **Вариант 6**

**Задание 2.** На стане кварто Канакерского завода был проведен ряд экспериментов для исследования влияния скорости прокатки  $V$  (м/мин.) на толщину прокатываемой фольги  $H$  (мкм). Получены следующие результаты:

$V$ , м/мин.	62	67.5	80	98	122
$H$ , мкм	55	45	48	40	32

Используя МНК, построить математическую модель для определения толщины фольги при заданной скорости прокатки  $H = f(V)$ , если математическую зависимость можно представить в виде уравнения регрессии:

$$H = \frac{1}{a + b \cdot V}.$$

С помощью математической модели определить толщину фольги, если прокатка будет проводиться со скоростью 75 м/мин.

### **Вариант 6**

**Задание 3.** В результате экспериментов получена таблица значений производительности доменной печи  $P$  (т/сут.) в зависимости от расхода кокса  $z$  (т/сут.):

$z$ , т/сут.	1230	1375	1425	1485	1540
$P$ , т/сут.	2550	2690	2860	3315	3986

Используя МНК, построить математическую модель для определения производительности доменной печи по расходу кокса  $P = f(z)$ , если математическую зависимость можно представить в виде уравнения регрессии:

$$P = \frac{1}{a + b \cdot z}.$$

С помощью математической модели определить производительность доменной печи, если расход кокса равен 1300 т/сут.

### **Вариант 6**

**Задание 4.** В результате экспериментов получена таблица значений производительности насоса  $Q$  (л/ч) при различной высоте его цилиндроконической части  $h$  (мм):

$h$ , мм	12	15	20	30	40
$Q$ , л/ч	380	250	200	140	120

Используя МНК, построить математическую модель для определения производительности насоса на основании высоты его цилиндроконической части  $Q = f(h)$ , если математическую зависимость можно представить в виде уравнения регрессии:

$$Q = \frac{1}{a + b \cdot h}.$$

С помощью математической модели определить значение производительности насоса при высоте его цилиндроконической части 25 мм.

### **Вариант 7**

**Задание 1.** В результате изучения влияния объема перевозок  $V$  (млн.т) на себестоимость перевозок  $C$  (коп./т) ж/д транспортом на металлургических заводах получены следующие данные:

$V$ , млн.т	0.6	1.4	2.2	3	4
$C$ , коп./т	13.5	10.4	8.6	7.5	6.8

Используя МНК, построить математическую модель для определения себестоимость перевозок по их объему  $C = f(V)$ , если математическую зависимость можно представить в виде уравнения регрессии:

$$C = a \cdot e^{b \cdot V}.$$

С помощью математической модели определить значение себестоимости перевозок ж/д транспортом, если их объем составит 3,5 млн.т.



### **Вариант 7**

**Задание 2.** В результате испытаний ковшей экскаваторов с упрочненным поверхностным слоем зубьев получены данные об износе зубьев  $I$  (мм) в зависимости от объема вынутой породы  $V$  ( $\text{м}^3$ ):

$V, \text{м}^3$	10	25	40	50	80
$I, \text{мм}$	22	38	52	65	134

Используя МНК, построить математическую модель для определения износа роликов по объему прокатанного металла  $I = f(V)$ , если математическую зависимость можно представить в виде уравнения регрессии:

$$I = a \cdot e^{b \cdot V}.$$

С помощью математической модели определить значение износа зубьев ковша после выемки  $70 \text{ м}^3$  породы.

### **Вариант 7**

**Задание 3.** В результате изучения технологии упрочнения поверхности валов путем обкатки роликами для образцов из стали 18ХГТ получены данные о давлении роликов  $p$  (МПа) и последующем износе валов  $I$  (мг):

$p, \text{МПа}$	1	2	2.5	3	5
$I, \text{мг}$	120	127	135	160	280

Используя МНК, построить математическую модель для определения износа валов на основании давления роликов, созданного при упрочнении,  $I = f(p)$ , если математическую зависимость можно представить в виде уравнения регрессии:

$$I = a \cdot e^{b \cdot p}.$$

С помощью математической модели определить значение износа вала, если при упрочнении его поверхности обкаткой роликами было создано давление 4 МПа.

### **Вариант 7**

**Задание 4.** В результате исследований получены данные о термических напряжениях в кожухе доменной печи  $\sigma$  (МПа) при разной толщине кожуха  $h$  (мм):

$h$ , мм	6	10	20	30	40
$\sigma$ , МПа	1000	800	560	470	400

Используя МНК, построить математическую модель для определения термических напряжений по заданной толщине кожуха  $\sigma = f(h)$ . если математическую зависимость можно представить в виде уравнения регрессии:

$$\sigma = a \cdot e^{b \cdot h}.$$

С помощью математической модели определить значение термических напряжений при толщине кожуха 25 мм.

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

### Пример программы для определения коэффициентов регрессии уравнения методом наименьших квадратов (МНК)

#### Задание.

В результате обработки статистической информации об отказах насоса получено распределение числа отказов насоса во времени, представленное в виде таблицы:

t, ч	100	300	500	700	900	1100	1300
N <sub>отк</sub>	62	48	31	23	15	14	8

Полученные данные можно описать математической зависимостью вида:  $N_{отк} = a \cdot b^t$ .

С помощью метода наименьших квадратов построить математическую модель

$$N_{отк} = f(t).$$

Рассчитать число отказов на момент времени  $t_3 = 850$  ч.

#### Исходные данные

Начало отсчета в массивах

Массив переменной t (время, ч)

(число отказов, шт.)

t :=  $\begin{pmatrix} 100 \\ 300 \\ 500 \\ 700 \\ 900 \\ 1100 \\ 1300 \end{pmatrix}$

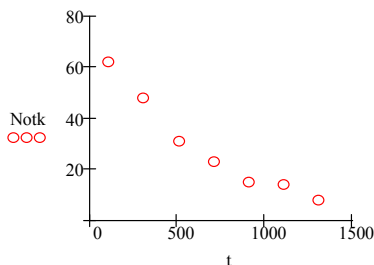
ORIGIN := 1

Массив переменной

N<sub>отк</sub>

Notk :=  $\begin{pmatrix} 62 \\ 48 \\ 31 \\ 23 \\ 15 \\ 14 \\ 8 \end{pmatrix}$

График исходных данных



Количество значений в массиве (число наблюдений)

n := length(t)

n = 7

## Решение

### Способ 1 (метод наименьших квадратов)

Для использования метода наименьших квадратов для определения коэффициентов регрессии заданного уравнения по экспериментальным данным выполним преобразование заданного уравнения регрессии к уравнению линейной зависимости.

Заданное уравнение регрессии имеет вид  $N_{\text{отк}} = a \cdot b^t$ .

Уравнение линейной регрессии  $y = a_0 + a_1 \cdot x$ .

Для преобразования заданного уравнения прологарифмируем обе его части:

$$\ln(N_{\text{отк}}) = \ln(a) + t \cdot \ln(b).$$

Введя обозначения

$$y = \ln(N_{\text{отк}}), \quad a_0 = \ln(a), \quad a_1 = \ln(b), \quad x = t,$$

получаем уравнение линейной зависимости  $y = a_0 + a_1 \cdot x$ .

Коэффициенты  $a_0$  и  $a_1$  определяем по известным формулам, коэффициенты заданного уравнения регрессии определяются с учетом выполненного преобразования по выражениям:

$$a = \exp(a_0), \quad b = \exp(a_1).$$

Выполняем преобразование исходных данных:

$$\begin{array}{l} y := \ln(\text{Notk}) \\ \left( \begin{array}{c} 4.127 \\ 3.871 \\ 3.434 \\ 3.135 \\ 2.708 \\ 2.639 \\ 2.079 \end{array} \right) \end{array} \quad \begin{array}{l} x := t \\ \left( \begin{array}{c} 100 \\ 300 \\ 500 \\ 700 \\ 900 \\ 1100 \\ 1300 \end{array} \right) \end{array}$$

Рассчитываем коэффициенты уравнения линейной регрессии:

$$a_0 := \frac{\sum_{i=1}^n (x_i)^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n (x_i)^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad a_0 = 4.309$$

$$a1 := \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n (x_i)^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

$$a1 = -1.667 \times 10^{-3}$$

Рассчитываем коэффициенты заданного уравнения регрессии:

$$a := \exp(a0) \quad a = 74.345$$

$$b := \exp(a1) \quad b = 0.998$$

Таким образом, математическая модель принимает вид следующего уравнения регрессии:

$$\mathbf{N_{отк} = 74.345 * 0.998^t .}$$

Заданное уравнение регрессии как функция:

$$N\_otk(tt) := a \cdot b^{tt}$$

Оцениваем адекватность полученного уравнения регрессии экспериментальным данным по коэффициенту корреляции. Для этого по записанной функции определяем расчетные значения выходной величины - числа отказов насоса, соответствующие значениям величины  $t$ :

$$Notk\_r := N\_otk(t)$$

$$Notk\_r =$$

$$\begin{pmatrix} 62.932 \\ 45.093 \\ 32.31 \\ 23.151 \\ 16.589 \\ 11.886 \\ 8.517 \end{pmatrix}$$

Находим среднее расчетное и среднее экспериментальное значение выходной величины:

$$Notk\_r\_sr := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n Notk\_r_i$$

$$Notk\_r\_sr = 28.64$$

$$Notk\_sr := \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n Notk_i$$

$$Notk\_sr = 28.714$$

Коэффициент корреляции между экспериментальными и расчетными значениями величины  $y$ :

$$r := \frac{\sum_{i=1}^n (\text{Notk\_r}_i - \text{Notk\_r\_sr}) \cdot (\text{Notk}_i - \text{Notk\_sr})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (\text{Notk\_r}_i - \text{Notk\_r\_sr})^2 \cdot \sum_{i=1}^n (\text{Notk}_i - \text{Notk\_sr})^2}} \quad r = 0.996$$

Полученное значение коэффициента корреляции достаточно близко к 1, поэтому полученное уравнение регрессии  $N_{\text{отк}} = 74.345 * 0.998^t$  адекватно экспериментальным данным и может применяться в качестве математической модели для прогнозирования числа отказов насоса.

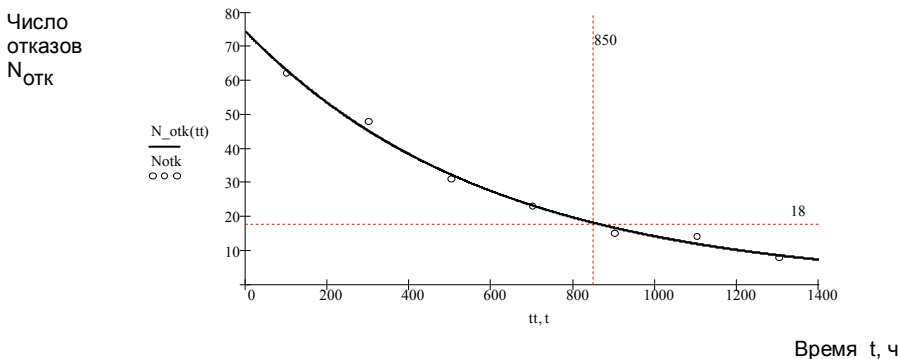
Находим число отказов насоса на момент времени  $t_3 = 850$  ч :

$$tz := 850 \quad \text{Notk\_z} := N_{\text{отк}}(tz) \quad \text{Notk\_z} = 18$$

Задаем диапазон изменения времени:  $tt := 0, 1 \dots 1400$

Строим график полученной зависимости  $N_{\text{отк}} = f(t)$  и график экспериментальных данных.

**График распределения числа отказов насоса во времени**



### Способ 2 (использование функций MathCAD для расчета коэффициентов линейной регрессии и коэффициента корреляции)

Теперь определяем коэффициенты уравнения линейной регрессии с помощью функций **intercept(v,w)** и **slope(v,w)**:

$$a_0 := \text{intercept}(x, y) \quad a_0 = 4.309$$

$$a_1 := \text{slope}(x, y) \quad a_1 = -1.667 \times 10^{-3}$$

Сравниваем полученные значения с рассчитанными в способе 1 значениями.

$$a_0 = 4.309$$

$$a_1 = -1.667 \times 10^{-3}$$

Значения совпадают.

Рассчитаем коэффициент корреляции с помощью функции **corr(v,w)**:

$$R := \text{corr}(\text{Notk\_r}, \text{Notk})$$

$$R = 0.996$$

Сравниваем полученное значение с рассчитанным ранее:  $r = 0.996$

Значения совпадают.

**ПРИЛОЖЕНИЕ В**  
**Пример оформления отчета по лабораторной работе №4**

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4**

Построение математической модели  
с использованием метода наименьших квадратов (МНК)

Цель работы: освоение навыков построения математических моделей по экспериментальным данным с использованием метода наименьших квадратов.

**Задание.**

В результате обработки статистической информации об отказах насоса получено распределение числа отказов насоса во времени, представленное в виде таблицы:

t, ч	100	300	500	700	900	1100	1300
N <sub>отк</sub>	62	48	31	23	15	14	8

Полученные данные можно описать математической зависимостью вида:

$$N_{\text{отк}} = a \cdot b^t.$$

С помощью метода наименьших квадратов построить математическую модель  $N_{\text{отк}} = f(t)$ .

Рассчитать число отказов на момент времени  $t_3 = 850$  ч.

**Решение.**

Входная величина – время t.

Выходная величина – число отказов насоса  $N_{\text{отк}}$ .

Заданное уравнение регрессии

$$N_{\text{отк}} = a \cdot b^t.$$

Уравнение линейной регрессии

$$y = a_0 + a_1 \cdot x.$$

Для преобразования заданного уравнения прологарифмируем обе его части:

$$\ln(N_{\text{отк}}) = \ln(a) + t \cdot \ln(b).$$

Введя обозначения

$$y = \ln(N_{\text{отк}}), \quad a_0 = \ln(a), \quad a_1 = \ln(b), \quad x = t,$$

получаем уравнение линейной зависимости  $y = a_0 + a_1 \cdot x$ .



Выражения для определения коэффициентов  $a$  и  $b$  по значениям коэффициентов  $a_0$  и  $a_1$ :

$$a = \exp(a_0) , \quad b = \exp(a_1).$$

В результате расчета в пакете MathCad получено:

- коэффициенты линейной регрессии  
 $a_0 = 4,309 ; \quad a_1 = -1,667 \cdot 10^{-3} ;$
- коэффициенты регрессии заданного уравнения  
 $a = 74,345 ; \quad b = 0,998.$

Таким образом, математическая модель для описания распределения числа отказов насоса во времени имеет вид уравнения регрессии:

$$N_{\text{отк}} = 74,345 \cdot 0,998^t .$$

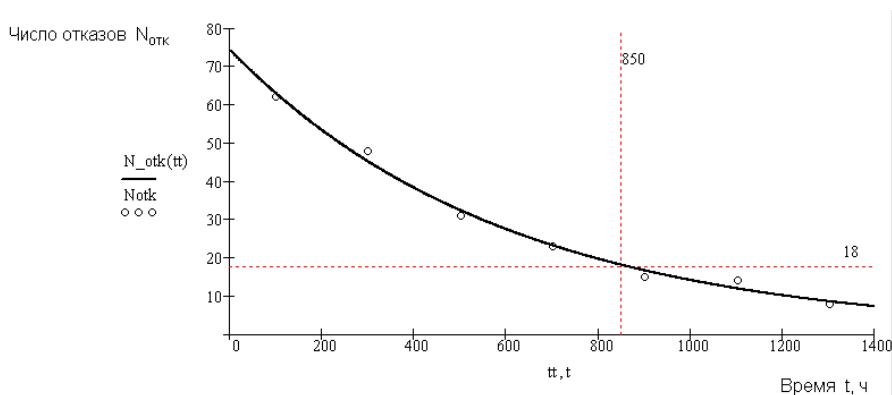
Значение коэффициента корреляции  $r=0,996$  .

Найденное значение коэффициента корреляции достаточно близко к 1, поэтому полученное уравнение регрессии адекватно описывает экспериментальные данные.

Используя полученное уравнение, находим, что на момент времени  $t_3=850$  ч число отказов насоса составит

$$N_{\text{отк}} = 74,345 \cdot 0,998^{850} = 18 .$$

### График распределения числа отказов насоса во времени



Вывод. .....

## ПРИЛОЖЕНИЕ Д

### Критерий Стьюдента и критерий Фишера

Таблица 1 – Табличные значения критерия Стьюдента при уровне значимости  
 $\alpha = \dots 0,05$

Число степеней свободы f																		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	20	30	60	∞
12.7	4.30	3.18	2.78	2.57	2.45	2.37	2.31	2.26	2.23	2.20	2.18	2.16	2.15	2.13	2.09	2.04	2.00	1.96

Таблица 2 - Критерий Фишера  $F(f_{\text{ад}}; f_{\text{в}})$  при уровне значимости  $\alpha = 0,05$

$f_{\text{в}}$	$f_{\text{ад}}$														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	60	120	$\infty$
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	233.9	236.8	238.9	240.5	241.8	248.0	250.1	252.2	253.3	254.3
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.3	19.4	19.5	19.5	19.4	19.5
3	10.1	9.6	9.3	9.1	9.0	8.9	8.9	8.8	8.8	8.7	8.7	8.6	8.6	8.5	8.5
4	7.7	6.9	6.6	6.4	6.3	6.2	6.1	6.0	5.9	5.9	5.8	5.7	5.7	5.6	5.6
5	6.6	5.8	5.4	5.2	5.1	4.95	4.9	4.8	4.8	4.7	4.6	4.5	4.4	4.4	4.3
6	5.9	5.1	4.8	4.5	4.4	4.3	4.2	4.1	4.1	4.0	3.9	3.8	3.7	3.7	3.6
7	5.6	4.7	4.3	4.1	4.0	3.9	3.8	3.7	3.7	3.6	3.4	3.4	3.3	3.2	3.2
8	5.3	4.5	4.1	3.8	3.7	3.6	3.5	3.4	3.4	3.3	3.2	3.1	3.0	2.9	2.9
9	5.1	4.3	3.9	3.6	3.5	3.4	3.3	3.2	3.2	3.1	2.9	2.8	2.8	2.7	2.7
10	4.9	4.1	3.7	3.5	3.3	3.2	3.1	3.1	2.0	2.9	2.8	2.7	2.6	2.6	2.5
20	4.4	3.5	3.1	2.9	2.7	2.6	2.5	2.4	2.4	2.3	2.1	2.0	1.9	1.9	1.8
120	3.9	3.1	2.7	2.45	2.3	2.2	2.1	2.0	1.9	1.9	1.7	1.6	1.4	1.3	1.25
$\infty$	3.8	3.0	2.6	2.4	2.2	2.1	2.0	1.9	1.8	1.8	1.6	1.5	1.3	1.2	1.0

## ПРИЛОЖЕНИЕ Е

### Варианты индивидуальных заданий к лабораторной работе №5

#### Вариант 1

#### Задание 1

На лабораторной молотковой дробилке был проведен планированный эксперимент. Выполнить обработку результатов эксперимента и установить зависимость между содержанием  $z$  в измельченном угле фракции менее 3 мм ( $z=y$ , %) и определяющими факторами:  $x_1$  - ширина щели решетки ( $b$ ), мм;  $x_2$  - влажность измельчаемого угля ( $v$ ), %;  $x_3$  - частота вращения ротора ( $n$ ), мин<sup>-1</sup>. Представить уравнение математической модели в кодированных и натуральных переменных. В заданной плоскости графика построить поверхность отклика.

Матрица планирования и  
результаты эксперимента

Номер опыта	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y$
1	-1	-1	-1	75.90
2	+1	-1	-1	75.10
3	-1	+1	-1	75.65
4	+1	+1	-1	75.15
5	-1	-1	+1	87.20
6	+1	-1	+1	84.15
7	-1	+1	+1	80.55
8	+1	+1	+1	78.45
9	0	0	0	79.55
10	0	0	0	79.40
11	0	0	0	79.10

Уровни факторов	$x_1$	$x_2$	$x_3$
Верхний уровень	16	7	1000
Нижний уровень	10	5	600
Плоскость графика	- $x_2 x_3$		

## **Вариант 2**

### **Задание 1**

На лабораторной молотковой дробилке был проведен планированный эксперимент. Выполнить обработку результатов эксперимента и установить зависимость между содержанием в измельченном угле фракции менее 3 мм ( $z=y$ , %) и определяющими факторами:  $x_1$  - ширина щели решетки (b), мм;  $x_2$  - влажность измельчаемого угля ( $v$ ), %;  $x_3$  - частота вращения ротора ( $n$ ), мин<sup>-1</sup>. Представить уравнение математической модели в кодированных и натуральных переменных. В заданной плоскости графика построить поверхность отклика.

Матрица планирования и  
результаты эксперимента

Номер опыта	$x_1$	$x_2$	$x_3$	y
1	-1	-1	-1	52.85
2	+1	-1	-1	47.80
3	-1	+1	-1	46.65
4	+1	+1	-1	36.25
5	-1	-1	+1	63.25
6	+1	-1	+1	54.90
7	-1	+1	+1	61.70
8	+1	+1	+1	56.00
9	0	0	0	55.90
10	0	0	0	54.70
11	0	0	0	53.40

Уровни факторов	$x_1$	$x_2$	$x_3$
Верхний уровень	20	10	900
Нижний уровень	10	5	600
Плоскость графика - $x_2x_3$			

## **Вариант 3**

### **Задание 1**

На лабораторной молотковой дробилке был проведен планированный эксперимент. Выполнить обработку результатов эксперимента и установить зависимость между содержанием в измельченном угле фракции менее 3 мм ( $z=y$ , %) и определяющими факторами:  $x_1$  - ширина щели решетки (b), мм;  $x_2$  - влажность измельчаемого угля ( $v$ ), %;  $x_3$  - частота вращения ротора ( $n$ ), мин<sup>-1</sup>. Представить уравнение математической модели в кодированных и натуральных переменных. В заданной плоскости графика построить поверхность отклика.

Матрица планирования и  
результаты эксперимента

Номер опыта	$x_1$	$x_2$	$x_3$	y
1	-1	-1	-1	68.85
2	+1	-1	-1	65.20
3	-1	+1	-1	67.30
4	+1	+1	-1	62.15
5	-1	-1	+1	75.55
6	+1	-1	+1	70.20
7	-1	+1	+1	67.30
8	+1	+1	+1	63.20
9	0	0	0	66.80
10	0	0	0	65.75
11	0	0	0	66.00

Уровни факторов	$x_1$	$x_2$	$x_3$
Верхний уровень	16	10	800
Нижний уровень	8	6	600
Плоскость графика - $x_1x_3$			

**Вариант 4**  
**Задание 1**

На лабораторной молотковой дробилке был проведен планированный эксперимент. Выполнить обработку результатов эксперимента и установить зависимость между содержанием в измельченном угле фракции менее 3 мм ( $z=y$ , %) и определяющими факторами:  $x_1$  - ширина щели решетки (b), мм;  $x_2$  - влажность измельчаемого угля ( $v$ ), %;  $x_3$  - частота вращения ротора ( $n$ ), мин<sup>-1</sup>. Представить уравнение математической модели в кодированных и натуральных переменных. В заданной плоскости графика построить поверхность отклика.

Матрица планирования и  
результаты эксперимента

Номер опыта	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y$
1	-1	-1	-1	70.45
2	+1	-1	-1	62.50
3	-1	+1	-1	61.45
4	+1	+1	-1	56.60
5	-1	-1	+1	84.35
6	+1	-1	+1	78.30
7	-1	+1	+1	82.35
8	+1	+1	+1	77.55
9	0	0	0	76.25
10	0	0	0	75.85
11	0	0	0	76.80

Уровни факторов	$x_1$	$x_2$	$x_3$
Верхний уровень	20	8	1200
Нижний уровень	12	4	800
Плоскость графика	- $x_1x_3$		

**Вариант 5**  
**Задание 1**

На лабораторной молотковой дробилке был проведен планированный эксперимент. Выполнить обработку результатов эксперимента и установить зависимость между содержанием в измельченном угле фракции менее 3 мм ( $z=y$ , %) и определяющими факторами:  $x_1$  - ширина щели решетки (b), мм;  $x_2$  - влажность измельчаемого угля ( $v$ ), %;  $x_3$  - частота вращения ротора ( $n$ ), мин<sup>-1</sup>. Представить уравнение математической модели в кодированных и натуральных переменных. В заданной плоскости графика построить поверхность отклика.

Матрица планирования и  
результаты эксперимента

Номер опыта	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y$
1	-1	-1	-1	58.65
2	+1	-1	-1	56.15
3	-1	+1	-1	57.20
4	+1	+1	-1	50.15
5	-1	-1	+1	62.20
6	+1	-1	+1	57.00
7	-1	+1	+1	54.20
8	+1	+1	+1	50.45
9	0	0	0	52.30
10	0	0	0	52.15
11	0	0	0	51.65

Уровни факторов	$x_1$	$x_2$	$x_3$
Верхний уровень	16	10	800
Нижний уровень	12	5	400
Плоскость графика	- $x_1x_2$		

## **Вариант 6**

### **Задание 1**

На лабораторной молотковой дробилке был проведен планированный эксперимент. Выполнить обработку результатов эксперимента и установить зависимость между содержанием в измельченном угле фракции менее 3 мм ( $z=y$ , %) и определяющими факторами:  $x_1$  - ширина щели решетки (b), мм;  $x_2$  - влажность измельчаемого угля ( $v$ ), %;  $x_3$  - частота вращения ротора ( $n$ ), мин<sup>-1</sup>. Представить уравнение математической модели в кодированных и натуральных переменных. В заданной плоскости графика построить поверхность отклика.

Матрица планирования и  
результаты эксперимента

Номер опыта	$x_1$	$x_2$	$x_3$	y
1	-1	-1	-1	62.40
2	+1	-1	-1	60.85
3	-1	+1	-1	61.45
4	+1	+1	-1	57.30
5	-1	-1	+1	65.75
6	+1	-1	+1	60.15
7	-1	+1	+1	58.20
8	+1	+1	+1	56.00
9	0	0	0	54.25
10	0	0	0	53.10
11	0	0	0	53.45

Уровни факторов	$x_1$	$x_2$	$x_3$
Верхний уровень	16	7	1000
Нижний уровень	8	5	700
Плоскость графика - $x_1x_2$			

## **Вариант 1**

### **Задание 2**

На прокатной клети был проведен планированный эксперимент. Установить зависимость между интенсивностью износа прокатных валков ( $I_o=y$ , мкм/об) и определяющими факторами:  $x_1$  - температура прокатываемого металла (T), °C;  $x_2$  - абсолютное боковое обжатие ( $\Delta h$ ), мм;  $x_3$  - скорость скольжения ( $\Delta v$ ), м/с. Представить уравнение математической модели в кодированных и натуральных переменных. В заданной плоскости графика построить поверхность отклика.

Матрица планирования и  
результаты эксперимента

Номер опыта	$x_1$	$x_2$	$x_3$	y
1	-1	-1	-1	0.024
2	+1	-1	-1	0.001
3	-1	+1	-1	0.140
4	+1	+1	-1	0.047
5	-1	-1	+1	0.030
6	+1	-1	+1	0.002
7	-1	+1	+1	0.137
8	+1	+1	+1	0.051
9	0	0	0	0.037
10	0	0	0	0.042
11	0	0	0	0.039

Уровни факторов	$x_1$	$x_2$	$x_3$
Верхний уровень	1000	6	1.0
Нижний уровень	800	2	0.1
Плоскость графика - $x_1x_2$			

## **Вариант 2**

### **Задание 2**

На прокатной клети был проведен планированный эксперимент. Установить зависимость между интенсивностью износа прокатных валков ( $I_o=y$ , мкм/об) и определяющими факторами:  $x_1$  - температура прокатываемого металла (Т), °С;  $x_2$  - абсолютное боковое обжатие ( $\Delta h$ ), мм;  $x_3$  - скорость скольжения ( $\Delta v$ ), м/с. Представить уравнение математической модели в кодированных и натуральных переменных. В заданной плоскости графика построить поверхность отклика.

Матрица планирования и  
результаты эксперимента

Номер опыта	$x_1$	$x_2$	$x_3$	y
1	-1	-1	-1	0.096
2	+1	-1	-1	0.003
3	-1	+1	-1	0.240
4	+1	+1	-1	0.115
5	-1	-1	+1	0.097
6	+1	-1	+1	0.001
7	-1	+1	+1	0.253
8	+1	+1	+1	0.121
9	0	0	0	0.104
10	0	0	0	0.110
11	0	0	0	0.108

Уровни факторов	$x_1$	$x_2$	$x_3$
Верхний уровень	1000	6	0.9
Нижний уровень	730	1	0.1
Плоскость графика	- $x_1x_2$		

## **Вариант 3**

### **Задание 2**

На прокатной клети был проведен планированный эксперимент. Установить зависимость между интенсивностью износа прокатных валков ( $I_o=y$ , мкм/об) и определяющими факторами:  $x_1$  - температура прокатываемого металла (Т), °С;  $x_2$  - абсолютное боковое обжатие ( $\Delta h$ ), мм;  $x_3$  - скорость скольжения ( $\Delta v$ ), м/с. Представить уравнение математической модели в кодированных и натуральных переменных. В заданной плоскости графика построить поверхность отклика.

Матрица планирования и  
результаты эксперимента

Номер опыта	$x_1$	$x_2$	$x_3$	y
1	-1	-1	-1	0.186
2	+1	-1	-1	0.148
3	-1	+1	-1	0.386
4	+1	+1	-1	0.304
5	-1	-1	+1	0.198
6	+1	-1	+1	0.142
7	-1	+1	+1	0.411
8	+1	+1	+1	0.362
9	0	0	0	0.283
10	0	0	0	0.274
11	0	0	0	0.278

Уровни факторов	$x_1$	$x_2$	$x_3$
Верхний уровень	900	8	0.8
Нижний уровень	800	1	0.2
Плоскость графика	- $x_2x_3$		

**Вариант 4**  
**Задание 2**

На прокатной клети был проведен планированный эксперимент. Установить зависимость между интенсивностью износа прокатных валков ( $I_o=y$ , мкм/об) и определяющими факторами:  $x_1$  - температура прокатываемого металла (Т), °С;  $x_2$  - абсолютное боковое обжатие ( $\Delta h$ ), мм;  $x_3$  - скорость скольжения ( $\Delta v$ ), м/с. Представить уравнение математической модели в кодированных и натуральных переменных. В заданной плоскости графика построить поверхность отклика.

Матрица планирования и  
результаты эксперимента

Номер опыта	$x_1$	$x_2$	$x_3$	y
1	-1	-1	-1	0.115
2	+1	-1	-1	0.065
3	-1	+1	-1	0.262
4	+1	+1	-1	0.216
5	-1	-1	+1	0.120
6	+1	-1	+1	0.075
7	-1	+1	+1	0.267
8	+1	+1	+1	0.224
9	0	0	0	0.172
10	0	0	0	0.165
11	0	0	0	0.170

Уровни факторов	$x_1$	$x_2$	$x_3$
Верхний уровень	1000	7	0.6
Нижний уровень	900	2	0.3
Плоскость графика	- $x_1x_2$		

**Вариант 5**  
**Задание 2**

На прокатной клети был проведен планированный эксперимент. Установить зависимость между интенсивностью износа прокатных валков ( $I_o=y$ , мкм/об) и определяющими факторами:  $x_1$  - температура прокатываемого металла (Т), °С;  $x_2$  - абсолютное боковое обжатие ( $\Delta h$ ), мм;  $x_3$  - скорость скольжения ( $\Delta v$ ), м/с. Представить уравнение математической модели в кодированных и натуральных переменных. В заданной плоскости графика построить поверхность отклика.

Матрица планирования и  
результаты эксперимента

Номер опыта	$x_1$	$x_2$	$x_3$	y
1	-1	-1	-1	0.001
2	+1	-1	-1	0.002
3	-1	+1	-1	0.158
4	+1	+1	-1	0.083
5	-1	-1	+1	0.013
6	+1	-1	+1	0.002
7	-1	+1	+1	0.167
8	+1	+1	+1	0.088
9	0	0	0	0.050
10	0	0	0	0.042
11	0	0	0	0.048

Уровни факторов	$x_1$	$x_2$	$x_3$
Верхний уровень	900	6	0.9
Нижний уровень	750	1	0.2
Плоскость графика	- $x_1x_2$		



## **Вариант 6**

### **Задание 2**

На прокатной клети был проведен планированный эксперимент. Установить зависимость между интенсивностью износа прокатных валков ( $I_o=y$ , мкм/об) и определяющими факторами:  $x_1$  - температура прокатываемого металла ( $T$ ), °C;  $x_2$  - абсолютное боковое обжатие ( $\Delta h$ ), мм;  $x_3$  - скорость скольжения ( $\Delta v$ ), м/с. Представить уравнение математической модели в кодированных и натуральных переменных. В заданной плоскости графика построить поверхность отклика.

Матрица планирования и  
результаты эксперимента

Номер опыта	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y$
1	-1	-1	-1	0.038
2	+1	-1	-1	0.005
3	-1	+1	-1	0.096
4	+1	+1	-1	0.004
5	-1	-1	+1	0.045
6	+1	-1	+1	0.010
7	-1	+1	+1	0.104
8	+1	+1	+1	0.006
9	0	0	0	0.001
10	0	0	0	0.003
11	0	0	0	0.001

Уровни факторов	$x_1$	$x_2$	$x_3$
Верхний уровень	1000	4	0.8
Нижний уровень	750	2	0.1
Плоскость графика	- $x_1x_2$		

## **Вариант 1**

### **Задание 3**

В мартеновском цехе был проведен планированный эксперимент. Установить зависимость между стойкостью свода мартеновской печи ( $\tau=y$ , сут.) и определяющими факторами:  $x_1$  - высота свода ( $H$ ), м;  $x_2$  - площадь пламенного окна ( $S$ ), м<sup>2</sup>;  $x_3$  - длительность плавки ( $t$ ), ч. Представить уравнение математической модели в кодированных и натуральных переменных. В заданной плоскости графика построить поверхность отклика.

Матрица планирования и  
результаты эксперимента

Номер опыта	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y$
1	-1	-1	-1	65
2	+1	-1	-1	78
3	-1	+1	-1	86
4	+1	+1	-1	108
5	-1	-1	+1	123
6	+1	-1	+1	101
7	-1	+1	+1	89
8	+1	+1	+1	133
9	0	0	0	91
10	0	0	0	88
11	0	0	0	84

Уровни факторов	$x_1$	$x_2$	$x_3$
Верхний уровень	3.2	7	9
Нижний уровень	3.0	5	3.5
Плоскость графика	- $x_1x_2$		

**Вариант 2**  
**Задание 3**

В мартеновском цехе был проведен планированный эксперимент. Установить зависимость между стойкостью свода мартеновской печи ( $\tau=y$ , сут.) и определяющими факторами:  $x_1$  - высота свода (H), м;  $x_2$  - площадь пламенного окна (S),  $m^2$ ;  $x_3$  - длительность плавки (t), ч. Представить уравнение математической модели в кодированных и натуральных переменных. В заданной плоскости графика построить поверхность отклика.

Матрица планирования и  
результаты эксперимента

Номер опыта	$x_1$	$x_2$	$x_3$	y
1	-1	-1	-1	92
2	+1	-1	-1	125
3	-1	+1	-1	113
4	+1	+1	-1	147
5	-1	-1	+1	119
6	+1	-1	+1	154
7	-1	+1	+1	136
8	+1	+1	+1	162
9	0	0	0	140
10	0	0	0	138
11	0	0	0	142

Уровни факторов	$x_1$	$x_2$	$x_3$
Верхний уровень	3.3	8.6	12
Нижний уровень	3.0	7	9.5
Плоскость графика	- $x_2x_3$		

**Вариант 3**  
**Задание 3**

В мартеновском цехе был проведен планированный эксперимент. Установить зависимость между стойкостью свода мартеновской печи ( $\tau=y$ , сут.) и определяющими факторами:  $x_1$  - высота свода (H), м;  $x_2$  - площадь пламенного окна (S),  $m^2$ ;  $x_3$  - длительность плавки (t), ч. Представить уравнение математической модели в кодированных и натуральных переменных. В заданной плоскости графика построить поверхность отклика.

Матрица планирования и  
результаты эксперимента

Номер опыта	$x_1$	$x_2$	$x_3$	y
1	-1	-1	-1	104
2	+1	-1	-1	132
3	-1	+1	-1	146
4	+1	+1	-1	168
5	-1	-1	+1	164
6	+1	-1	+1	175
7	-1	+1	+1	187
8	+1	+1	+1	203
9	0	0	0	126
10	0	0	0	130
11	0	0	0	128

Уровни факторов	$x_1$	$x_2$	$x_3$
Верхний уровень	3.5	11	12
Нижний уровень	3.2	7.8	8
Плоскость графика	- $x_2x_3$		

**Вариант 4**  
**Задание 3**

В мартеновском цехе был проведен планированный эксперимент. Установить зависимость между стойкостью свода мартеновской печи ( $\tau=y$ , сут.) и определяющими факторами:  $x_1$  - высота свода (H), м;  $x_2$  - площадь пламенного окна (S),  $m^2$ ;  $x_3$  - длительность плавки (t), ч. Представить уравнение математической модели в кодированных и натуральных переменных. В заданной плоскости графика построить поверхность отклика.

Матрица планирования и  
результаты эксперимента

Номер опыта	$x_1$	$x_2$	$x_3$	y
1	-1	-1	-1	70
2	+1	-1	-1	84
3	-1	+1	-1	92
4	+1	+1	-1	113
5	-1	-1	+1	126
6	+1	-1	+1	107
7	-1	+1	+1	94
8	+1	+1	+1	122
9	0	0	0	95
10	0	0	0	98
11	0	0	0	92

Уровни факторов	$x_1$	$x_2$	$x_3$
Верхний уровень	3.2	7	9
Нижний уровень	3.0	5	3.5
Плоскость графика	- $x_1x_2$		

**Вариант 5**  
**Задание 3**

В мартеновском цехе был проведен планированный эксперимент. Установить зависимость между стойкостью свода мартеновской печи ( $\tau=y$ , сут.) и определяющими факторами:  $x_1$  - высота свода (H), м;  $x_2$  - площадь пламенного окна (S),  $m^2$ ;  $x_3$  - длительность плавки (t), ч. Представить уравнение математической модели в кодированных и натуральных переменных. В заданной плоскости графика построить поверхность отклика.

Матрица планирования и  
результаты эксперимента

Номер опыта	$x_1$	$x_2$	$x_3$	y
1	-1	-1	-1	88
2	+1	-1	-1	121
3	-1	+1	-1	115
4	+1	+1	-1	142
5	-1	-1	+1	116
6	+1	-1	+1	148
7	-1	+1	+1	132
8	+1	+1	+1	157
9	0	0	0	137
10	0	0	0	135
11	0	0	0	133

Уровни факторов	$x_1$	$x_2$	$x_3$
Верхний уровень	3.3	8.6	12
Нижний уровень	3.0	7	9.5
Плоскость графика	- $x_2x_3$		

**Вариант 6**  
**Задание 3**

В мартеновском цехе был проведен планированный эксперимент. Установить зависимость между стойкостью свода мартеновской печи ( $\tau=y$ , сут.) и определяющими факторами:  $x_1$  - высота свода (H), м;  $x_2$  - площадь пламенного окна (S),  $m^2$ ;  $x_3$  - длительность плавки (t), ч. Представить уравнение математической модели в кодированных и натуральных переменных. В заданной плоскости графика построить поверхность отклика.

Матрица планирования и  
результаты эксперимента

Номер опыта	$x_1$	$x_2$	$x_3$	y
1	-1	-1	-1	100
2	+1	-1	-1	127
3	-1	+1	-1	141
4	+1	+1	-1	157
5	-1	-1	+1	154
6	+1	-1	+1	168
7	-1	+1	+1	183
8	+1	+1	+1	189
9	0	0	0	131
10	0	0	0	136
11	0	0	0	138

Уровни факторов	$x_1$	$x_2$	$x_3$
Верхний уровень	3.5	11	12
Нижний уровень	3.2	7.8	8
Плоскость графика	- $x_1x_3$		

**Вариант 1**  
**Задание 4**

В мартеновском цехе был проведен планированный эксперимент. Установить зависимость между стойкостью свода мартеновской печи ( $\tau=y$ , сут.) и определяющими факторами:  $x_1$  - удельная масса, приходящаяся на под (p),  $t/m^2$ ;  $x_2$  - радиус свода (r), м;  $x_3$  - центральный угол свода ( $\varphi$ ), град. Представить уравнение математической модели в кодированных и натуральных переменных. В заданной плоскости графика построить поверхность отклика.

Матрица планирования и  
результаты эксперимента

Номер опыта	$x_1$	$x_2$	$x_3$	y
1	-1	-1	-1	148
2	+1	-1	-1	97
3	-1	+1	-1	128
4	+1	+1	-1	80
5	-1	-1	+1	157
6	+1	-1	+1	118
7	-1	+1	+1	136
8	+1	+1	+1	92
9	0	0	0	127
10	0	0	0	124
11	0	0	0	121

Уровни факторов	$x_1$	$x_2$	$x_3$
Верхний уровень	4.2	6.1	89
Нижний уровень	2.6	5.1	80
Плоскость графика	- $x_1x_2$		

## **Вариант 2**

### **Задание 4**

В мартеновском цехе был проведен планированный эксперимент. Установить зависимость между стойкостью свода мартеновской печи ( $\tau=y$ , сут.) и определяющими факторами:  $x_1$  - удельная масса, приходящаяся на под ( $p$ ),  $t/m^2$ ;  $x_2$  - радиус свода ( $r$ ), м;  $x_3$  - центральный угол свода ( $\varphi$ ), град. Представить уравнение математической модели в кодированных и натуральных переменных. В заданной плоскости графика построить поверхность отклика.

Матрица планирования и  
результаты эксперимента

Номер опыта	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y$
1	-1	-1	-1	142
2	+1	-1	-1	123
3	-1	+1	-1	136
4	+1	+1	-1	104
5	-1	-1	+1	168
6	+1	-1	+1	141
7	-1	+1	+1	150
8	+1	+1	+1	128
9	0	0	0	140
10	0	0	0	136
11	0	0	0	142

Уровни факторов	$x_1$	$x_2$	$x_3$
Верхний уровень	5.8	6.1	92
Нижний уровень	4.8	5.1	80
Плоскость графика	- $x_2x_3$		

## **Вариант 3**

### **Задание 4**

В мартеновском цехе был проведен планированный эксперимент. Установить зависимость между стойкостью свода мартеновской печи ( $\tau=y$ , сут.) и определяющими факторами:  $x_1$  - удельная масса, приходящаяся на под ( $p$ ),  $t/m^2$ ;  $x_2$  - радиус свода ( $r$ ), м;  $x_3$  - центральный угол свода ( $\varphi$ ), град. Представить уравнение математической модели в кодированных и натуральных переменных. В заданной плоскости графика построить поверхность отклика.

Матрица планирования и  
результаты эксперимента

Номер опыта	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y$
1	-1	-1	-1	138
2	+1	-1	-1	92
3	-1	+1	-1	124
4	+1	+1	-1	83
5	-1	-1	+1	151
6	+1	-1	+1	113
7	-1	+1	+1	146
8	+1	+1	+1	102
9	0	0	0	132
10	0	0	0	127
11	0	0	0	134

Уровни факторов	$x_1$	$x_2$	$x_3$
Верхний уровень	5.8	7.0	82
Нижний уровень	4.8	6.6	80
Плоскость графика	- $x_1x_3$		

#### **Вариант 4**

##### **Задание 4**

В мартеновском цехе был проведен планированный эксперимент. Установить зависимость между стойкостью свода мартеновской печи ( $\tau=y$ , сут.) и определяющими факторами:  $x_1$  - удельная масса, приходящаяся на под ( $p$ ), т/м<sup>2</sup>;  $x_2$  - радиус свода ( $r$ ), м;  $x_3$  - центральный угол свода ( $\varphi$ ), град. Представить уравнение математической модели в кодированных и натуральных переменных. В заданной плоскости графика построить поверхность отклика.

Матрица планирования и  
результаты эксперимента

Номер опыта	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y$
1	-1	-1	-1	130
2	+1	-1	-1	110
3	-1	+1	-1	122
4	+1	+1	-1	93
5	-1	-1	+1	148
6	+1	-1	+1	119
7	-1	+1	+1	137
8	+1	+1	+1	102
9	0	0	0	113
10	0	0	0	117
11	0	0	0	120

Уровни факторов	$x_1$	$x_2$	$x_3$
Верхний уровень	4.2	6.1	89
Нижний уровень	2.6	5.1	80
Плоскость графика - $x_1x_3$			

#### **Вариант 5**

##### **Задание 4**

В мартеновском цехе был проведен планированный эксперимент. Установить зависимость между стойкостью свода мартеновской печи ( $\tau=y$ , сут.) и определяющими факторами:  $x_1$  - удельная масса, приходящаяся на под ( $p$ ), т/м<sup>2</sup>;  $x_2$  - радиус свода ( $r$ ), м;  $x_3$  - центральный угол свода ( $\varphi$ ), град. Представить уравнение математической модели в кодированных и натуральных переменных. В заданной плоскости графика построить поверхность отклика.

Матрица планирования и  
результаты эксперимента

Номер опыта	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y$
1	-1	-1	-1	146
2	+1	-1	-1	128
3	-1	+1	-1	132
4	+1	+1	-1	101
5	-1	-1	+1	153
6	+1	-1	+1	137
7	-1	+1	+1	158
8	+1	+1	+1	131
9	0	0	0	130
10	0	0	0	134
11	0	0	0	135

Уровни факторов	$x_1$	$x_2$	$x_3$
Верхний уровень	5.8	6.1	92
Нижний уровень	4.8	5.1	80
Плоскость графика - $x_2x_3$			

### **Вариант 6**

#### **Задание 4**

В мартеновском цехе был проведен планированный эксперимент. Установить зависимость между стойкостью свода мартеновской печи ( $\tau=y$ , сут.) и определяющими факторами:  $x_1$  - удельная масса, приходящаяся на под ( $p$ ), т/м<sup>2</sup>;  $x_2$  - радиус свода ( $r$ ), м;  $x_3$  - центральный угол свода ( $\varphi$ ), град. Представить уравнение математической модели в кодированных и натуральных переменных. В заданной плоскости графика построить поверхность отклика.

Матрица планирования и  
результаты эксперимента

Номер опыта	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y$
1	-1	-1	-1	133
2	+1	-1	-1	104
3	-1	+1	-1	126
4	+1	+1	-1	97
5	-1	-1	+1	142
6	+1	-1	+1	114
7	-1	+1	+1	131
8	+1	+1	+1	106
9	0	0	0	118
10	0	0	0	115
11	0	0	0	121

Уровни факторов	$x_1$	$x_2$	$x_3$
Верхний уровень	5.8	7.0	82
Нижний уровень	4.8	6.6	80
Плоскость графика	- $x_1x_2$		

### **Вариант 7**

#### **Задание 1**

Для прутков диаметром 20 мм из стали X18H10T, прокатываемых на стане 360, был проведен планированный эксперимент. Установить зависимость между пределом текучести стали после прокатки и закалки ( $\sigma_T$ , МПа) и определяющими факторами:  $x_1$  - температура металла перед началом прокатки ( $T$ ), °C;  $x_2$  - число проходов ( $n$ );  $x_3$  - промежуток времени (пауза) между моментом окончания прокатки и закалкой ( $\tau$ ), с. Представить уравнение математической модели в кодированных и натуральных переменных. В заданной плоскости графика построить поверхность отклика.

Матрица планирования и  
результаты эксперимента

Номер опыта	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y$
1	-1	-1	-1	282
2	+1	-1	-1	270
3	-1	+1	-1	530
4	+1	+1	-1	475
5	-1	-1	+1	375
6	+1	-1	+1	255
7	-1	+1	+1	515
8	+1	+1	+1	460
9	0	0	0	408
10	0	0	0	400
11	0	0	0	415

Уровни факторов	$x_1$	$x_2$	$x_3$
Верхний уровень	1150	8	5
Нижний уровень	1050	4	1
Плоскость графика	- $x_1x_3$		

## **Вариант 7**

### **Задание 2**

Для прутков диаметром 20 мм из стали X18H10T, прокатываемых на стане 360, был проведен планированный эксперимент. Установить зависимость между пределом текучести стали после прокатки и закалки ( $\sigma_T$ , МПа) и определяющими факторами:  $x_1$  - температура металла перед началом прокатки (Т), °С;  $x_2$  - число проходов (n);  $x_3$  - промежуток времени (пауза) между моментом окончания прокатки и закалкой ( $\tau$ ), с. Представить уравнение математической модели в кодированных и натуральных переменных. В заданной плоскости графика построить поверхность отклика.

Матрица планирования и  
результаты эксперимента

Номер опыта	$x_1$	$x_2$	$x_3$	y
1	-1	-1	-1	300
2	+1	-1	-1	285
3	-1	+1	-1	534
4	+1	+1	-1	490
5	-1	-1	+1	360
6	+1	-1	+1	278
7	-1	+1	+1	547
8	+1	+1	+1	411
9	0	0	0	498
10	0	0	0	490
11	0	0	0	491

Уровни факторов	$x_1$	$x_2$	$x_3$
Верхний уровень	1100	7	6
Нижний уровень	1000	5	1
Плоскость графика - $x_1x_2$			

## **Вариант 7**

### **Задание 3**

Для прутков диаметром 20 мм из стали X18H10T, прокатываемых на стане 360, был проведен планированный эксперимент. Установить зависимость между пределом текучести стали после прокатки и закалки ( $\sigma_T$ , МПа) и определяющими факторами:  $x_1$  - температура металла перед началом прокатки (Т), °С;  $x_2$  - число проходов (n);  $x_3$  - промежуток времени (пауза) между моментом окончания прокатки и закалкой ( $\tau$ ), с. Представить уравнение математической модели в кодированных и натуральных переменных. В заданной плоскости графика построить поверхность отклика.

Матрица планирования и  
результаты эксперимента

Номер опыта	$x_1$	$x_2$	$x_3$	y
1	-1	-1	-1	284
2	+1	-1	-1	280
3	-1	+1	-1	590
4	+1	+1	-1	404
5	-1	-1	+1	312
6	+1	-1	+1	285
7	-1	+1	+1	511
8	+1	+1	+1	364
9	0	0	0	422
10	0	0	0	430
11	0	0	0	435

Уровни факторов	$x_1$	$x_2$	$x_3$
Верхний уровень	1150	8	6
Нижний уровень	1000	4	2
Плоскость графика - $x_1x_2$			



## **Вариант 7**

### **Задание 4**

Для прутков диаметром 20 мм из стали X18H10T, прокатываемых на стане 360, был проведен планированный эксперимент. Установить зависимость между пределом текучести стали после прокатки и закалки ( $\sigma_T$ , МПа) и определяющими факторами:  $x_1$  - температура металла перед началом прокатки (Т), °С;  $x_2$  - число проходов (n);  $x_3$  - промежуток времени (пауза) между моментом окончания прокатки и закалкой ( $\tau$ ), с. Представить уравнение математической модели в кодированных и натуральных переменных. В заданной плоскости графика построить поверхность отклика.

Матрица планирования и  
результаты эксперимента

Номер опыта	$x_1$	$x_2$	$x_3$	y
1	-1	-1	-1	340
2	+1	-1	-1	342
3	-1	+1	-1	475
4	+1	+1	-1	480
5	-1	-1	+1	334
6	+1	-1	+1	242
7	-1	+1	+1	484
8	+1	+1	+1	373
9	0	0	0	354
10	0	0	0	350
11	0	0	0	357

Уровни факторов	$x_1$	$x_2$	$x_3$
Верхний уровень	1050	7	5
Нижний уровень	1000	5	2
Плоскость графика - $x_1x_3$			

## ПРИЛОЖЕНИЕ Ж

### Пример оформления отчета по лабораторной работе №5

#### ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5

Построение математической модели  
по результатам планированного эксперимента

Цель работы. Овладение практическими навыками постановки полного факторного эксперимента, обработки его результатов и построения математической модели..

#### Задание.

На трубчатом конвейере был проведен планированный эксперимент. Установить зависимость между временем транспортирования сыпного груза в трубчатом конвейере ( $\tau$ =у, мин.) и определяющими факторами :  $x_1$  – угол наклона оси конвейера к горизонту ( $\alpha$ ), град.;  $x_2$  – угловая скорость вращения конвейера ( $\omega$ ), рад/с. Представить уравнение математической модели в кодированных и натуральных переменных. В заданной плоскости графика построить поверхность отклика.

Матрица планирования и результаты эксперимента

Номер опыта	$x_1$	$x_2$	у
1	-1	-1	3,70
2	+1	-1	1,95
3	-1	+1	2,55
4	+1	+1	1,20
5	0	0	2,52
6	0	0	2,40
7	0	0	2,38

Уровни факторов	$x_1$	$x_2$
Верхний уровень	1	2,92
Нижний уровень	-1	1,46
Плоскость графика - $x_1x_2$		

#### Решение.

Математическая модель имеет вид уравнения регрессии:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2.$$

Вычисляем значения факторов на нулевом уровне (среднее значение между верхним и нижним уровнями):

Фактор	$x_1$	$x_2$
Нулевой уровень $X_0$	0	2,19

и интервала варьирования для каждого фактора:

Фактор	$x_1$	$x_2$
Интервал варьирования $\Delta X$	1	0,73

Количество факторов  $k=2$ , тогда количество основных опытов  $n = 2^2 = 4$ .

На основании результатов опытов в центре плана ( $n_0=3$ ) находим дисперсию

воспроизводимости, предварительно определив среднее значение по опытам 5-7:

$$\bar{y}_0 = (2.52 + 2.40 + 2.38)/3 = 2.433,$$

дисперсия воспроизводимости:

$$S_e^2 = \frac{1}{3-1} \left[ (2.52 - 2.433)^2 + (2.4 - 2.433)^2 + (2.38 - 2.433)^2 \right] = 0.0057.$$

Дисперсия коэффициентов регрессии:

$$S_b^2 = \frac{0.0057}{4} = 0.00143.$$

Коэффициенты регрессии определяем следующим образом:

$$b_0 = (3.7 + 1.95 + 2.55 + 1.2) / 4 = 2.35;$$

$$b_1 = (-3.7 + 1.95 - 2.55 + 1.2) / 4 = -0.775;$$

$$b_2 = (-3.7 - 1.95 + 2.55 + 1.2) / 4 = -0.475;$$

$$b_{12} = (3.7 - 1.95 - 2.55 + 1.2) / 4 = 0.1.$$

Расчетные значения критериев Стьюдента для коэффициентов регрессии:

$$t_{p_0} = \frac{|b_0|}{S_b} = \frac{2.35}{\sqrt{0.00143}} = 62.01; \quad t_{p_1} = \frac{|b_1|}{S_b} = \frac{0.775}{\sqrt{0.00143}} = 20.45;$$

$$t_{p_2} = \frac{|b_2|}{S_b} = \frac{0.475}{\sqrt{0.00143}} = 12.53; \quad t_{p_{12}} = \frac{|b_{12}|}{S_b} = \frac{0.1}{\sqrt{0.00143}} = 2.64$$

Проверяем значимость коэффициентов регрессии. Табличное значение критерия Стьюдента находим по таблицам при уровне значимости  $\alpha=0.05$  и числе степеней свободы дисперсии воспроизводимости  $f_e = n_0 - 1 = 3 - 1 = 2$  —  $t_m = 4.303$ .

Проверяем условие  $t_p \geq t_m$ . Коэффициент  $b_{12}$  является незначимым и исключается из уравнения, тогда **уравнение математической модели в кодированных переменных** запишется так:

$$y = 2.35 - 0.775 x_1 - 0.475 x_2.$$

С помощью полученного уравнения определим расчетные значения параметра для основных опытов:

$$\bar{y}_1 = 3.6; \quad \bar{y}_2 = 2.05; \quad \bar{y}_3 = 2.65; \quad \bar{y}_4 = 1.1.$$

Дисперсия адекватности:

$$S_{ad}^2 = \frac{1}{4-3} \left[ (3.7 - 3.6)^2 + (1.95 - 2.05)^2 + (2.55 - 2.65)^2 + (1.2 - 1.1)^2 \right] = 0.04.$$

Расчетное значение критерия Фишера:  $F_p = 0.04/0.0057 = 6.97$ .

Табличное значение критерия Фишера при уровне значимости  $\alpha=0.05$ , числе степеней свободы дисперсии воспроизводимости  $f_e = n_0 - 1 = 3 - 1 = 2$  и числе степеней свободы дисперсии адекватности  $f_{ad} = n - z = 4 - 3 = 1$  составляет  $F_m = 18.51$ .

Проверка по критерию Фишера:  $F_p \leq F_m$ , выполняется, т.е. полученное уравнение регрессии адекватно описывает экспериментальные данные и может использоваться для расчета времени транспортирования.

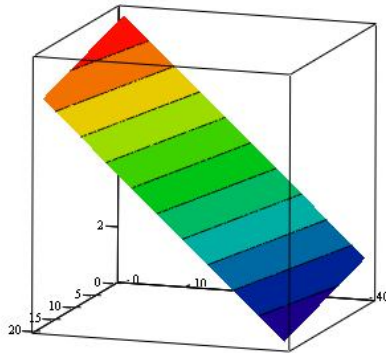
Выполнив замену кодированных переменных в полученном уравнении регрессии на натуральные, получаем **уравнение математической модели в натуральных переменных**:

$$\tau = 2.35 - 0.775 \left( \frac{\alpha - 0}{1} \right) - 0.475 \left( \frac{\varpi - 2.19}{0.73} \right),$$

$$\tau = 2.35 - 0.775\alpha - 0.651\varpi + 1.425.$$

В результате уравнение математической модели имеет вид:

$$\tau = 3.775 - 0.075\alpha - 0.651\varpi.$$



Поверхность отклика  $\tau=f(\alpha,\omega)$

Вывод: ....

### ПРИЛОЖЕНИЕ 3

#### Варианты индивидуальных заданий к лабораторной работе №6

##### Вариант 1

Задание	1	2	3	4
$Y_3$	8	8,5	10	9
$\varepsilon$	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$

##### Вариант 2

Задание	1	2	3	4
$Y_3$	1400	75	0,5	1,7
$\varepsilon$	$10^{-4}$	$10^{-6}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$

##### Вариант 3

Задание	1	2	3	4
$Y_3$	110	0,165	1450	140
$\varepsilon$	$10^{-4}$	$10^{-6}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$

##### Вариант 4

Задание	1	2	3	4
$Y_3$	7	5,25	6	500
$\varepsilon$	$10^{-4}$	$10^{-6}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$

##### Вариант 5

Задание	1	2	3	4
$Y_3$	750	48	8,8	250
$\varepsilon$	$10^{-4}$	$10^{-6}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$

##### Вариант 6

Задание	1	2	3	4
$Y_3$	55	50	3000	170
$\varepsilon$	$10^{-4}$	$10^{-6}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$

##### Вариант 7

Задание	1	2	3	4
$Y_3$	9	10	200	700
$\varepsilon$	$10^{-4}$	$10^{-6}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$

## ПРИЛОЖЕНИЕ И

### Пример программы для решения уравнения численными методами

**Задание.** Найти корень уравнения  $f(x) - Y_3 = 0$  тремя численными методами: 1) методом дихотомии; 2) методом хорд; 3) методом Ньютона. Сравнить найденные корни с точным решением и сопоставить их трудоемкость вычисления.

**Исходные данные:**

1. Заданное значение параметра  $Y_3$   $Y_z := 40$
2. Степень точности  $\varepsilon := 10^{-3}$
3. В лабораторной работе №4 получено уравнение регрессии:  $y = 74.345 * 0.998^x$ .

### ХОД РЕШЕНИЯ

Требуется решить уравнение

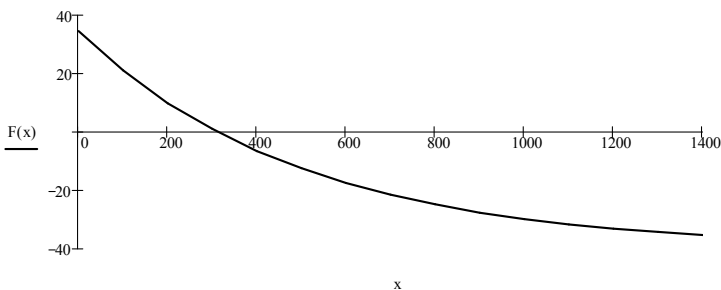
$$74.345 * 0.998^x - Y_z = 0.$$

Запишем данное уравнение в виде функции и построим ее график:

$$F(x) := 74.345 \cdot 0.998^x - Y_z$$

Диапазон изменения переменной  $x$  (задан, как в лабораторной работе №4):

$$x := 0, 100 \dots 1400$$



Искомый корень уравнения - это точка пересечения графика с осью  $OX$ .

Из графика задаем приближенное значение абсциссы точки пересечения графика с осью  $OX$ :

$$x_p := 300$$

Произвольно задаем границы интервала локализации корня (т.е. интервала, в который попадает  $x_p$ ):

левая

правая

$$a := 250$$

$$b := 350$$

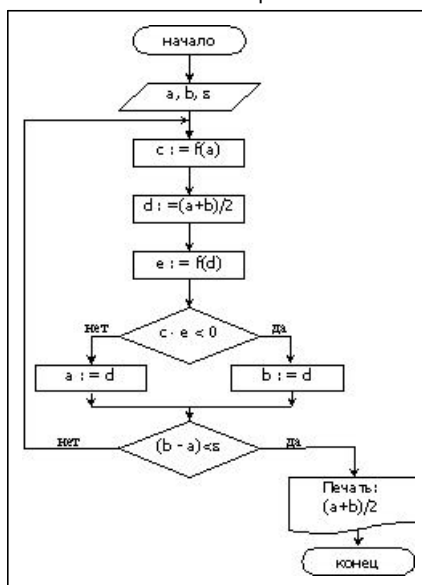
# 1. ПОИСК КОРНЯ МЕТОДОМ ДИХОТОМИИ

$\text{Dihotom}(a, b, \varepsilon) :=$

```

Iter ← 0
while (b - a) > ε
    c ← F(a)
    d ← (a + b) / 2
    e ← F(d)
    b ← d if c · e < 0
    a ← d otherwise
    Iter ← Iter + 1
xkor ← (a + b) / 2
A0 ← xkor
A1 ← Iter
A
    
```

Блок-схема алгоритма



Вызов программного блока по методу дихотомии  $\text{Metod\_1} := \text{Dihotom}(a, b, \varepsilon)$

Выводим результат решения  $\text{Metod\_1} = \begin{pmatrix} 309.60884 \\ 17 \end{pmatrix}$

Найденное значение корня  
по методу дихотомии  $x_{p\_1} := \text{Metod\_1}_0$   $x_{p\_1} = 309.60884$

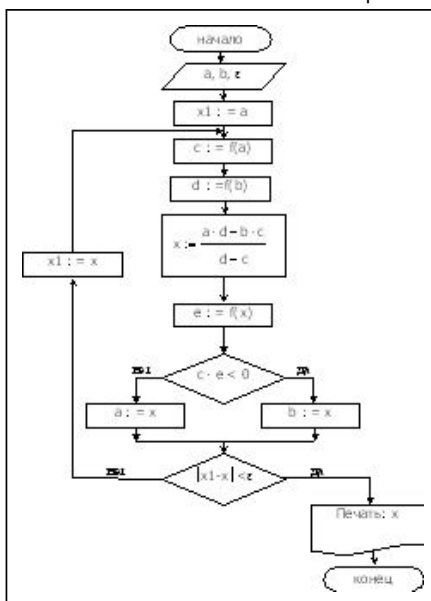
Число затраченных шагов  $N\_shag\_1 := \text{Metod\_1}_1$   $N\_shag\_1 = 17$

## 2. ПОИСК КОРНЯ МЕТОДОМ ХОРД

Самостоятельно написать программный блок для этого метода .....

$Horda(a, b, \varepsilon) :=$

Блок-схема алгоритма



Вызов программного блока по методу хорд

$Metod\_2 := Horda(a, b, \varepsilon)$

Выводим результат решения

$Metod\_2 = \begin{pmatrix} 309.60849 \\ 5 \end{pmatrix}$

Найденное значение корня по методу хорд

$xp\_2 := Metod\_2_0$

$xp\_2 = 309.60849$

Число затраченных шагов

$N\_shag\_2 := Metod\_2_1$

$N\_shag\_2 = 5$



### 3. ПОИСК КОРНЯ МЕТОДОМ НЬЮТОНА

Найти первую и вторую производные от заданной функции  $F(x) := 74.345 \cdot 0.998^x - Y_2$

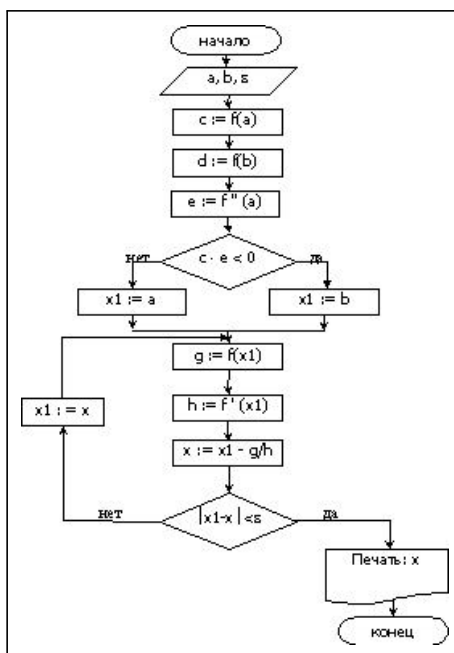
Первая производная  $F1(x) := -0.1488 \cdot 0.998^x$

Вторая производная  $F2(x) := 2.979 \cdot 10^{-4} \cdot 0.998^x$

Самостоятельно написать программный блок для этого метода .....

Nuton(a, b, ε) :=

Блок-схема алгоритма



Вызов программного блока по методу Ньютона  $Metod\_3 := Nuton(a, b, \varepsilon)$

Выводим результат решения  $Metod\_3 = \begin{pmatrix} 309.60846 \\ 4 \end{pmatrix}$

Найденное значение корня по методу Ньютона  $x_{p\_3} := Metod\_3_0$   $x_{p\_3} = 309.60846$

Число затраченных шагов  $N\_shag\_3 := Metod\_3_1$   $N\_shag\_3 = 4$

#### 4. НАХОЖДЕНИЕ ТОЧНОГО ЗНАЧЕНИЯ КОРНЯ

Для заданного уравнения  $74.345 \cdot 0.998^x - Y_z = 0$  выводим выражение для нахождения  $x$  и записываем его в виде формулы

$$x_t := \frac{\ln\left(\frac{Y_z}{74.345}\right)}{\ln(0.998)}$$

Точное значение корня

$$x_t = 309.60846$$

#### 5. ПОИСК КОРНЯ ВСТРОЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ MathCad

Начальное приближение к корню

$$x := x_p$$

$$x = 300$$

Задание уравнения в MathCad

Given

$$74.345 \cdot 0.998^x - Y_z = 0$$

$$x_k := \text{Find}(x)$$

Найденный корень уравнения

$$x_k = 309.60846$$

#### 6. СРАВНЕНИЕ НАЙДЕННЫХ КОРНЕЙ

Точное значение корня

$$x_t = 309.60846$$

Значение корня по методу дихотомии

$$x_{p\_1} = 309.60884$$

Значение корня по методу хорд

$$x_{p\_2} = 309.60849$$

Значение корня по методу Ньютона

$$x_{p\_3} = 309.60846$$

Значение корня, полученное функциями MathCad  $x_k = 309.60846$

Вычисление погрешностей между корнями, %:

$$1) \text{ по методу дихотомии} \quad \Delta 1 := \left| \frac{x_t - x_{p\_1}}{x_t} \right| \cdot 100 \quad \Delta 1 = 1.22515 \times 10^{-4}$$

$$2) \text{ по методу хорд} \quad \Delta 2 := \left| \frac{x_t - x_{p\_2}}{x_t} \right| \cdot 100 \quad \Delta 2 = 9.04713 \times 10^{-6}$$

$$3) \text{ по методу Ньютона} \quad \Delta 3 := \left| \frac{x_t - x_{p\_3}}{x_t} \right| \cdot 100 \quad \Delta 3 = 4.70542 \times 10^{-8}$$

$$4) \text{ функции MathCad} \quad \Delta k := \left| \frac{x_t - x_k}{x_t} \right| \cdot 100 \quad \Delta k = 1.16004 \times 10^{-7}$$

Число шагов, затраченных на поиск корня:

1) по методу дихотомии  $N\_shag\_1 = 17$

2) по методу хорд  $N\_shag\_2 = 5$

3) по методу Ньютона  $N\_shag\_3 = 4$

**Вывод.** (о точности и трудоемкости методов) .....

.....

## ПРИЛОЖЕНИЕ К

### Пример оформления отчета по лабораторной работе №6

#### ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6 РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ

Цель работы: приобретение навыков решения нелинейных уравнений численными методами, сравнение точности и трудоемкости методов.

Задание. Найти корень уравнения  $f(x) - Y_3 = 0$  тремя численными методами: 1) методом дихотомии; 2) методом хорд; 3) методом Ньютона. Сравнить найденные корни с точным решением и сопоставить их трудоемкость вычисления.

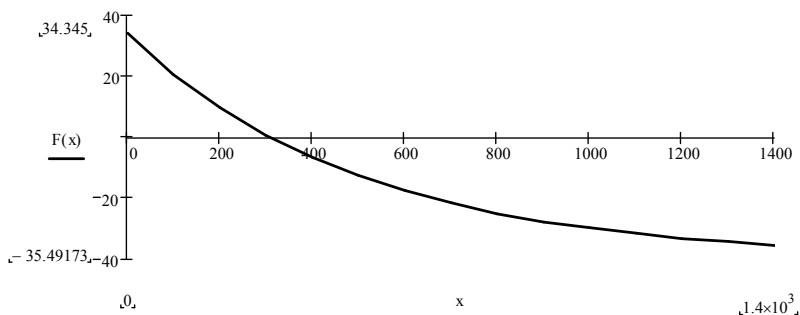
#### Исходные данные

1. Заданное значение параметра  $Y_3 = 40$ .
2. Степень точности  $\varepsilon = 10^{-3}$ .
3. В лабораторной работе №1 получено уравнение регрессии:  $y = 74.345 * 0.998^x$ .

Требуется решить уравнение

$$74.345 * 0.998^x - Y_3 = 0.$$

График функции, записанной в левой части уравнения.



Приближенное значение корня:  $x_p = 300$ .

Границы интервала локализации корня: левая  $a = 250$ ; правая  $b = 350$ .

#### Результаты определения корня численными методами

Метод	Значение корня	Кол-во шагов
Дихотомии	309,60884	17
Хорд	309,60849	5
Ньютона	309,60846	4
Функции MathCad	309,60846	—

Расчет точного значения корня

$$x_T = \frac{\ln(Y_3/74.345)}{\ln 0.998} = \frac{\ln(40/74.345)}{\ln 0.998} = 309.60846 \cdot$$

Сравнение точности определения корня

Метод	Значение корня
Дихотомии	$1,23 \cdot 10^{-4}$
Хорд	$9,05 \cdot 10^{-6}$
Ньютона	$4,71 \cdot 10^{-8}$
Функции MathCad	$1,16 \cdot 10^{-7}$

Вывод. ....

## ПРИЛОЖЕНИЕ Л

### Варианты индивидуальных заданий к лабораторной работе №7

#### Вариант 1

Задание	1	2	3	4
a	20	10	5	10
b	70	40	15	50
n	50	30	10	40

#### Вариант 2

Задание	1	2	3	4
a	0,1	5	1000	100
b	0,5	10	1500	200
n	20	10	50	50

#### Вариант 3

Задание	1	2	3	4
a	5	2	0	5
b	5,5	4	0,5	6
n	20	20	20	20

#### Вариант 4

Задание	1	2	3	4
a	100	1	1	5
b	200	4	6	10
n	50	30	50	50

#### Вариант 5

Задание	1	2	3	4
a	10	10	30	5
b	60	50	130	25
n	50	40	50	20

#### Вариант 6

Задание	1	2	3	4
a	500	70	1300	10
b	600	120	1500	40
n	50	50	40	30

#### Вариант 7

Задание	1	2	3	4
a	1	0,6	1	10
b	4	2,6	5	40
n	30	20	40	30

## ПРИЛОЖЕНИЕ М

### Пример программы для вычисления определенного интеграла численными методами

**Задание.** Вычислить значение определенного интеграла тремя численными методами: 1) методом средних прямоугольников; 2) методом трапеций; 3) методом Симпсона.

Сравнить найденные значения с аналитическим решением и оценить влияние количества интервалов разбиения на точность вычисления.

**Исходные данные:**

1. Пределы интегрирования
2. Исходное количество интервалов деления
3. В лабораторной работе №4 получено уравнение регрессии:

$$y = f(x) = 74.345 \cdot 0.998^x,$$

которые выступает в качестве подынтегральной функции.

**Требуется** вычислить значение определенного интеграла

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{100}^{200} (74.345 \cdot 0.998^x) dx$$

$$a := 100$$

$$b := 200$$

$$n := 20$$

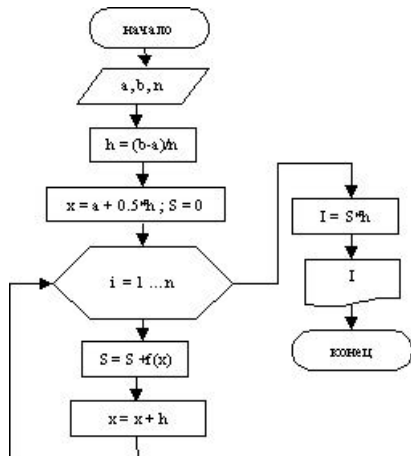
### ХОД РЕШЕНИЯ

Подынтегральная функция  $f(x) := 74.345 \cdot 0.998^x$

#### 1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА МЕТОДОМ СРЕДНИХ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

Блок-схема алгоритма

```
Pryam(a, b, n) :=  
  h ← (b - a) / n  
  x ← a + 0.5 · h  
  S ← 0  
  for i ∈ 1 .. n  
    S ← S + f(x)  
    x ← x + h  
  I ← S · h  
  I
```



Вызов программного блока по методу прямоугольников  
для заданного  $n=20$

$M1\_1 := \text{Pryam}(a, b, n)$

Выводим результат решения

$M1\_1 = 5515.135$

Вызов программного блока по методу прямоугольников  
для удвоенного  $n=40$

$M1\_2 := \text{Pryam}(a, b, 2 \cdot n)$

Выводим результат решения

$M1\_2 = 5515.153$

Вызов программного блока по методу прямоугольников  
для утроенного  $n=60$

$M1\_3 := \text{Pryam}(a, b, 3 \cdot n)$

Выводим результат решения

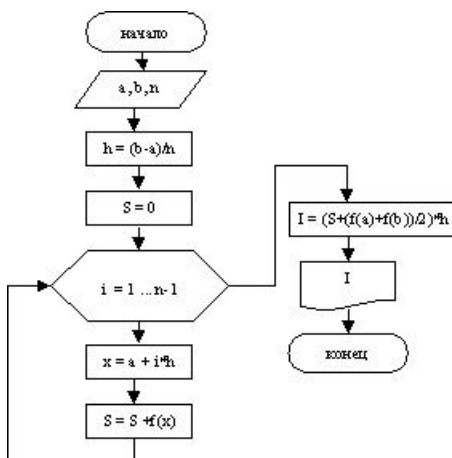
$M1\_3 = 5515.156$

## 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА МЕТОДОМ ТРАПЕЦИЙ

Самостоятельно написать программный блок для этого метода .....

Блок-схема алгоритма

$\text{Trap}(a, b, n) :=$



Вызов программного блока по методу трапеций  
для заданного  $n=20$

$M2\_1 := \text{Trap}(a, b, n)$

Выводим результат решения

$M2\_1 = 5515.204$

Вызов программного блока по методу трапеций  
для удвоенного  $n=40$

$M2\_2 := \text{Trap}(a, b, 2 \cdot n)$

Выводим результат решения

$M2\_2 = 5515.17$

Вызов программного блока по методу трапеций



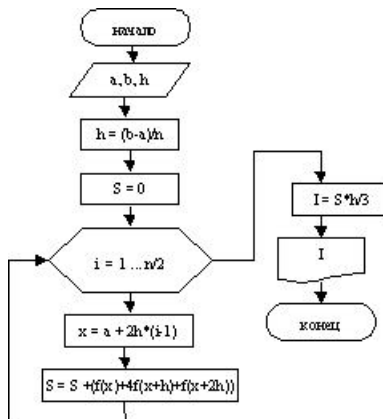
для утроенного  $n=60$   $M2_3 := \text{Trap}(a, b, 3 \cdot n)$

Выводим результат решения  $M2_3 = 5515.164$

### 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА МЕТОДОМ СИМПСОНА

Самостоятельно написать программный блок для этого метода .....

### Блок-схема алгоритма

$$\text{Sim}(a, b, n) :=$$


Вызов программного блока по методу Симпсона  
для заданного  $n=20$

$$\text{M3 } 1 := \text{Sim}(a, b, n)$$

Выводим результат решения

M3 1 = 5515.158

Вызов программного блока по методу Симпсона  
для удвоенного  $n=40$

$$M3 \ 2 := \text{Sim}(a, b, 2 \cdot n)$$

Выводим результат решения

M3 2 = 5515.158

Вызов программного блока по методу Симпсона  
для утроенного  $n=60$

$$\text{M3 } 3 := \text{Sim}(a, b, 3 \cdot n)$$

Выводим результат решения

M3 3 = 5515.158

#### 4. АНАЛИТИЧЕСКОЕ НАХОЖДЕНИЕ ЗНАЧЕНИЯ ИНТЕГРАЛА

$$\text{It} := \int_a^b 74.345 \cdot 0.998^x dx \qquad \text{It} = 5515.158$$

С помощью символьного преобразования

$$\text{IA}(x) := \int 74.345 \cdot 0.998^x dx \rightarrow -37135.315096760115940 \cdot 99800000000000000000^x$$

$$IA(b) - IA(a) = 5515.158$$

## **5. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ**

Функция для расчета погрешности методов относительно точного значения интеграла

$$\text{del}(I_z) := \left| \frac{I_t - I_z}{I_t} \right| \cdot 100$$

Значения интегралов по методу прямоугольников

$$M1\_1 = 5515.135$$

$$M1\_2 = 5515.153$$

$$M1\_3 = 5515.156$$

Значения интеграла по методу трапеций

$$M2\_1 = 5515.204$$

$$M2\_2 = 5515.17$$

$$M2\_3 = 5515.164$$

Значения интеграла по методу Симпсона

$$M3\_1 = 5515.158$$

$$M3\_2 = 5515.158$$

$$M3\_3 = 5515.158$$

Значение интеграла, полученное аналитически

$$I_t = 5515.158$$

### **Вычисление погрешностей, %:**

Метод прямоугольников

$$\text{del}(M1\_1) = 4.2 \times 10^{-4}$$

$$\text{del}(M1\_2) = 1 \times 10^{-4}$$

$$\text{del}(M1\_3) = 4.6 \times 10^{-5}$$

Метод трапеций

$$\text{del}(M2\_1) = 8.4 \times 10^{-4}$$

$$\text{del}(M2\_2) = 2.1 \times 10^{-4}$$

$$\text{del}(M2\_3) = 9.3 \times 10^{-5}$$

Метод Симпсона

$$\text{del}(M3\_1) = 5.6 \times 10^{-9}$$

$$\text{del}(M3\_2) = 3.5 \times 10^{-10}$$

$$\text{del}(M3\_3) = 6.9 \times 10^{-11}$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ Н

### Пример оформления отчета по лабораторной работе №7

#### ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №7 ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ

Цель работы: освоение методов численного интегрирования, сравнение их эффективности.

**Задание.** Вычислить определенный интеграл  $\text{Int} = \int_a^b f(x)dx$  тремя численными методами: 1) методом средних прямоугольников; 2) методом трапеций; 3) методом Симпсона.

Для каждого метода вычисления повторить **3 раза**: при заданном значении числа интервалов разбиения  $n$ , при удвоенном значении  $n$  и при утроенном значении  $n$ .

Сравнить полученные результаты с аналитическим решением, проанализировать влияние количества интервалов деления на точность вычисления.

#### Исходные данные

1. Пределы интегрирования  $a=100$  и  $b=200$ .
2. Исходное количество интервалов деления  $n=20$ .
3. В лабораторной работе №1 получено уравнение регрессии:  $y=f(x) = 74.345 \cdot 0.998^x$ , которое выступает в качестве подынтегральной функции.

Требуется вычислить значение определенного интеграла

$$\text{Int} = \int_a^b f(x)dx = \int_{100}^{200} (74.345 \cdot 0.998^x) dx$$

Результаты вычисления значения определенного интеграла численными методами

Число интервалов разбиения $n$	Численный метод		
	Прямоугольников	Трапеций	Симпсона
20	5515,135	5515,204	5515,158
40	5515,153	5515,170	5515,158
60	5515,156	5515,164	5515,158

Аналитическое вычисление интеграла:

$$\text{Int} = \int_{100}^{200} (74,345 \cdot 0,998^x) dx = -37135,315 \cdot 0,998^x \Big|_{100}^{200} = 5515,158$$

Сравнение точности вычисления интеграла, %

Число интервалов разбиения n	Численный метод		
	Прямоугольников	Трапеций	Симпсона
20	$4,2 \cdot 10^{-4}$	$8,4 \cdot 10^{-4}$	$5,6 \cdot 10^{-9}$
40	$1 \cdot 10^{-4}$	$2,1 \cdot 10^{-4}$	$3,5 \cdot 10^{-10}$
60	$4,6 \cdot 10^{-5}$	$9,3 \cdot 10^{-5}$	$6,9 \cdot 10^{-11}$

**Вывод. ....** о точности методов и влиянии на точность числа интервалов разбиения n.